arXiv:2602.04147v1 [nlin.SI] 4 Feb 2026

麻烦在 于对高阶映射进行去自治化 aps

R. Willox 东京大学数学科学研究生院，东京市目黑区驹场*3-8-1*，邮编*153-8914*，日本

B. Grammaticos和 A. Ramani 巴黎-萨克雷大学 ´和巴黎大学 ´，法国国家科学研究中心/核物理与粒子物理研究所、*IJCLab*实验室，法国奥赛*91405*

摘要

对具有奇点约束性质的双有理映射进行去自治化，即构造保留原映射奇异性性质的非自治版本，已被证明对于理解二阶映射可积性背后的数学性质至关重要。例如，去自治化过程直接促成了离散Painlev´é方程一般理论的发展，而且它很可能也将在未来任何高维Painlev´é方程理论中发挥关键作用。然而，一般而言，高阶可积映射可能具有非约束奇点，因此，了解去自治化是否以及如何适用于这类映射十分重要。本文针对一系列经过精心构造、具有非约束奇点的高阶映射（包括可积映射和非可积映射），探讨了不同的去自治化情形，并对奇异轨迹余维可能在去自治化过程中发挥作用这一常见假设提出质疑。此外，我们还提出了一种新方法，基于映射的超离散版本，计算所谓反受限奇点模式中出现的奇点重数增长。

数学主题分类：37J70, 14E05

关键词： 可积性、可积映射、去自治化、奇异性、离散 Painlev´e 方程

1. Introduction

基于奇点约束的去自治化过程，在奇点约束作为可积性判据提出后立即被引入（尽管当时尚未以此名称称呼） [1]。该过程旨在获得可积非自治 映射的扩展，这些扩展由可积自治 映射构成，并保留原映射的奇异性性质。去自治化过程的主要应用是推导离散 Painlev´e 方程的离散类比，其中绝大多数是通过对属于 Quispel-Roberts-Thompson（QRT）族的映射进行去自治化而得到的 [2]。最近还证明，基于奇点约束的去自治化为求得具有受限奇异性的任意三点映射的动力学次数（或代数熵）提供了一种可靠且严谨的方法 [3,4]。

从本质上说，有理映射 f（在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{P}^2$ 上）的去自治化过程，依赖于这样一个事实：映射具有奇点约束性质，等价于它能够通过有限次爆破 [5]，在合适的有理曲面上正则化为自同构。这样的有理曲面通常称为原映射的初始条件空间。对具有初始条件空间（即具有奇点约束性质）的映射进行去自治化，其做法是要求非自治映射也具有初始条件空间，而该空间

如今呈现为一族同构有理曲面，每次映射迭代对应一个曲面 [6]。正如 [7]，中所示，如果去自治化保留了原自治映射的所有奇点模式，那么某些动力学性质（例如其动力学次数 λ_*），

$$\lambda_* = \lim_{n\to\infty} (\deg f^{(n)})^{1/n}, \tag{1}$$

它刻画了映射连续迭代 $f^{(n)}$ 的增长率（或者等价地，其代数熵$\varepsilon = \log \lambda_*$），该增长率将与最初出发的自治映射相同。不过请注意，在许多情况下，虽然仍能保持整个映射的奇点约束性质，但可以推迟非自治映射中某个特定奇点受限的确切时刻（即迭代次数）。这一过程称为“延迟去自治化”——最早由 [8], 提出，其代数几何基础则首次在 [7]中得到阐释——在这种情况下，所得非自治映射的动力学性质确实不同于原自治映射。

文献 [5]对 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上具有初始条件空间的自治双有理映射 f 的动力学性质进行了分类。此类映射有以下几种情况：
(i) 其迭代的次数增长有界（因此 $\lambda_* = 1$），此时该映射是周期性的，或者（如 [9]所示）与 $\mathbb{P}^2$上的某个射影映射双有理等价。
(ii) 其迭代呈二次次数增长（因此 $\lambda_* = 1$），此时它必然保持一个椭圆纤维化

(iii) 指数次数增长（其迭代的次数渐近地按 λ_*^n 增长，其中 $\lambda_* > 1$），此时它不保持任何纤维化（如 [10] 所示），任何与之可交换的双有理映射 g，即 $g \circ f = f \circ g$，都必然与它存在平凡关系： $\exists n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$： $g^{(m)} = f^{(n)}$。
在 [6] 中，针对具有初始条件空间的非自治映射在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上证明了关于次数增长的类似结论（但未证明其余结论）。同一篇论文还表明，由延迟去自治化得到的任何具有初始条件空间的非自治映射，其迭代必然呈现渐近指数增长。

如果 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的自治双有理映射不具有初始条件空间，那么根据 [5]，可以证明它必然具有上述性质 **(iii)**，或者其迭代呈现线性次数增长。在后一种情况下，它必然保持一个有理纤维化，并且通常可通过某种直接线性化过程实现可积。

这就引出了双有理映射（在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{P}^2$ 上）的可积性这一一般概念。从上述分类结果可以清楚看出，除平凡情形**(i)**外，另外两种值得称为“可积”的情形，都具有某种非平凡的不变性，因而可以对其进行积分；并且它们的迭代都呈现非指数次数增长：若映射具有初始条件空间，则呈现二次次数增长；若不具有，则呈现线性次数增长。因此，至少对于自治映射而言，自然的做法是将可积的自治二阶双有理映射刻画为（或者，如果愿意，也可以“定义”为）具有非指数增长的映射，因而其动力学次数等于 1（代数熵也就为零）。这种以“缓慢增长”定义可积性的观点，源自阿诺德 [11] 和维谢洛夫 [12], 关于代数复杂性的论证，如今已成为广泛采用的可积性定义，甚至适用于非自治映射或高阶映射，尽管对于这些映射，目前尚无关于不变量存在性等问题的一般性结果。下文也将采用这一定义，把任何代数熵为零的双有理映射称为可积映射。请注意，这也包括周期映射（或任何其他增长有界的映射）。不过，下文只讨论无限阶映射，不涉及周期映射。

还应指出，可线性化映射（即上述分类中次数呈线性增长的映射）本身就可能包含取决于映射精确迭代次数的任意函数

——这可以被视为某种去自治化——但上述基于奇点分析的去自治化过程，只对拥有初始条件空间的映射有过定义，也就是说，其奇点具有奇点约束性质。线性可化映射在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ （或 $\mathbb{P}^2$）上的情况并非如此。

将亚指数增长普遍采用为任意维数下（双）有理映射可积性的实用定义，自然促使人们进一步寻找简单而严谨的方法，以计算任意给定映射的动力学次数（或代数熵）。对于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ （或 $\mathbb{P}^2$）上的映射，Takenawa 在 [13] 中针对具有初始条件空间的映射提出了一种通过逐次爆破计算动力学次数的严谨方法；而 Diller 和 Favre 则在 [5] 中给出了更一般的方法。在 [14], 中，Bedford 和 Kim 描述了类似的方法，用于处理 $\mathbb{P}^N$ 上满足 $N > 2$ 的双有理映射；前提是所讨论的映射可以正则化为所谓的曲面伪同构（即余维1处的同构）。据我们所知，对于一般的 $\mathbb{P}^N$ 上的双有理映射，也就是一般的 N，尚无一种普遍适用、基于爆破的计算方法。事实上，近期发现的一个 $\mathbb{P}^3$ 上具有超越动力度的双有理映射 [15] ，似乎表明，对于任意给定的（双）有理映射，不太可能存在一种能够保证精确求出其动力学次数的通用方法。尽管如此，对于 $\mathbb{P}^N$ 上的双有理映射，只要其奇点结构允许，已有若干不基于爆破的计算方法能够给出动力学次数的显式最小多项式。例如，参见 [16,17] 或 [18, 19]。

对于作用于 $\mathbb{P}^2$ （或 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$）上的双有理映射，情况要简单得多。这类映射的动力学次数必为代数整数 [5], ，并且已有不依赖吹起的步骤被证明能够求得动力学次数的精确值（通过显式计算其最小多项式）。Halburd提出了一种此类方法 [20], ，将映射的连续迭代视为单变量函数。在这种情况下，一个基本事实是：对于该函数在 $\mathbb{P}^1$ 上能够取到的任意值，映射某次迭代的次数实际上等于该次迭代所得有理函数（关于所选变量）的原像个数。再结合这样一种思路：映射奇点模式中出现的各个值所对应的原像个数之间很容易建立联系，从而得到关于次数的线性递推关系，就能高效地求出动力学次数的最小多项式。遗憾的是，一般而言，奇点模式未必能提供足够的信息来构造这样的递推关系（反例参见 [21] ）；不过，在奇点模式确实构成封闭方程组的情况下，已有证明表明该方法能够得到动力学次数的精确值 [22]。然而，该方法也可用于具有非约束奇点的映射（例如参见 [23]），并且已证明对某些类型的高阶映射同样有效 [24], ，尽管这些令人惊讶的事实目前仍缺乏严谨的数学论证。在接下来的几节中，我们将看到若干高阶映射的例子，对于这些映射，Halburd方法似乎确实有效。

另一种极其简单的方法最早在 [3], 中被描述；事实证明，至少对于具有初始条件空间的三点映射而言，该方法能够给出动力学次数的精确值。它依赖于对给定的（自治）映射进行去自治化（可能是其扩展版本）。在 [4] 中已经证明，在映射满足某些条件的情况下，其迭代的次数增长会反映在对该映射进行足够丰富的去自治化后系数函数的渐近行为中。然而，尽管 [4] 中给出的证明严重依赖于该映射具有奇点约束性质，并且仅适用于二阶映射，但该方法本身似乎仍适用于某些除受限奇异性之外还具有非约束奇异性的二阶映射，尤其也适用于高阶映射（例如参见 [24]）。完全去自治化方法似乎同样适用于高阶映射，这一事实正是促使我们更一般地研究高阶映射去自治化问题的主要动机之一。

然而，正如我们在 [25], 中所展示的，在更高阶的情形下，即使是可积映射也可能具有非约束奇异性，例如当它们表现出快于二次的多项式次数增长时。因此，如果人们相信类似完全去自治化方法的方法即使对于这类高阶映射也可能提供有用的工具，那么就必须着手解决这样一个问题：如何对仅具有少数受限奇异性、同时还存在大量非约束奇异性，甚至完全没有受限奇异性的映射进行去自治化。这正是本文工作的主要动机。如 [25], 中所解释的，可以通过将具有受限奇异性的低阶可积映射与可线性化映射耦合起来，构造出具有非约束奇异性的可积映射。在本文中，我们将利用这类耦合映射的一些精心设计的例子，展示若干不同情形，在这些情形下，从奇点模式（无论是否受限）中获得的信息都可以用于成功地对映射进行去自治化。此外，正如我们将看到的，成功的去自治化不仅需要保留原自治映射的奇点结构或模式，还应产生一个与原映射具有相同次数增长的映射；在高阶情形下，仅仅保留奇点模式已不再能够保证这一点。

因此，我们必须确定所研究的（高阶）映射及其去自治化的精确次数增长。为此，我们主要采用两种方法：上文所述的 Halburd 方法（或其简化版本 [21], ，该版本只能给出映射的动力学次数，而无法给出精确的度数序列）；对于次数呈指数增长的情形——即非可积情形——则采用所谓的丢番图方法 [26] ，它提供了一种简单且通常计算效率较高的方式来近似动力学次数的数值。我们将丢番图方法用作检验，以确认它所得的数值是否与 Halburd 方法（或其简化形式）所得的数值相符；若相符，则表明该数值可能就是映射的动力学次数。

然而，需要指出的是，丢番图方法实际上并不直接近似动力学次数，而是近似映射动力学的另一种特征量，即所谓的算术次数 （参见例如 [27]）：

$$\lambda_\alpha = \lim_{n\to\infty} h_{\mathbb{Q}}(f^{(n)})^{1/n}, \tag{2}$$

其中 $h_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \to [1, \infty[$ 是有理数上的某个定义良好的高度函数，例如，对于有理数初始条件， f的迭代 $f^{(n)}$ 以既约分数表示时，分子和分母中数字位数的最大值（实际计算时，映射中可能出现的任何参数都取适当一般的有理数值）。请注意，与动力学次数定义中的极限 (1) 相反，定义 (2) 中极限的存在性尚未得到确立（迄今尚无反例，但也没有其存在性的一般证明）。文献 [28] 证明了，如果 (2) 中的极限存在，那么必然有

$$\lambda_\alpha \leq \lambda_*,$$

并且（同一篇论文中）有人猜想，在这种情况下，算术次数与动力学次数实际上相等，但迄今为止，这一点仅在特殊情况下得到证明（例如参见 [29] 或 [30]）。尽管如此，接下来对于非可积映射，我们将计算其算术次数，以检验它是否与我们对动力学次数的预测（通过 Halburd方法得出）相符，并天真地假设，两种不同猜想的吻合在某种意义上能够佐证二者。

在接下来的各节中，我们将通过把已知的可积或非可积二阶映射与线性映射相耦合，构造若干高阶映射的例子，从而得到展现特定类型奇点模式的映射；这些奇点模式有时需要略有不同、有时则需要截然不同的去自治化策略。最后，在结论中我们将指出这一尝试的明显

局限，即对非约束高阶映射进行去自治化的尝试；我们认为，这是探索在数学和物理上具有意义的高阶映射之非自治版本性质时必不可少的第一步。

2. Deautonomising higher order integrable mappings

我们从可积映射入手，开始探讨高阶映射的各种可能去自治化方法。如上一节结尾所述，我们希望描述尝试对给定高阶映射进行去自治化时可能出现的不同情形，并针对每种情形专门构造示例。本节中的示例均通过将（可积）QRT映射与

$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 - \frac{a}{x_n}, \tag{3}$$

不同类型的线性映射或可线性化映射耦合而成，从而得到具有所需性质的高阶映射。请注意，根据构造方式，所得映射应被视为可积映射。下文中，我们将默认把（3）视为作用在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的映射 $(x_{n-1},\ x_n) \to (x_n,\ (x_n - a)/(x_x x_{n-1}))$，但仍将继续使用方程表示法，因为这样更便于展示奇点约束计算的结果。

这里， a 是一个任意的非零（常）复数，该映射有两个奇点，即逆映射未定义时的迭代点：对于 x_{n-1} 的一般值，分别位于 $x_n = a$ 和 $x_n = 0$。我们不详细介绍检验奇点约束性质所涉及的计算（该方法的详细说明可参见例如 [31]），而只总结结果。对于第一个奇点，若从 $x_{n-1} = u,\ x_n = a$开始，在某个 n 处取 $u \in \mathbb{C}$的某个一般值，我们发现 $x_{n+1} = 0,\ x_{n+2} = \infty,\ x_{n+3} = \infty,\ x_{n+4} = 0$，此时映射变得不定。然而，若对 $x_n = a + \epsilon$进行相同的计算，取某个非零的 ϵ，然后对每次迭代取极限 $\epsilon \to 0$，则会发现 $x_{n+5} = a$ 和 $x_{n+6} = u$；此后，后续迭代将不再遇到任何奇点（假设 u 确实是一般值）。我们称这个奇点是受限的，其行为可概括为以下奇点模式

$$\{a, 0, \infty, \infty, 0, a\}. \tag{4}$$

第二个奇点属于另一种类型。从 $x_{n-1} = u, x_n = 0$ 开始，同样对于一般的 $u \in \mathbb{C}$，可得 $x_{n+1} = \infty$, $x_{n+2} = \infty, x_{n+3} = 0$，并再次遇到与之前相同的不定性。然而，进行与上面类似的计算后，可得 $x_{n+4} = a^2/u, x_{n+5} = \infty, x_{n+6} = u/a^2$ 和 $x_{n+7} = 0$，而这一整串迭代又会在 $x_{n+11}, x_{n+13},$ 等处依样反复出现...。鉴于方程 (3) 的形式，很明显，对于我们的初始条件，逆映射必然给出 $x_{n-1} = \infty$，因此我们发现的模式也会朝着 n 递减的方向无限重复（但顺序相反）。这种类型的奇点称为循环型（此处周期为 7），众所周知，它对可积性问题完全无关紧要。今后，我们将忽略所构造的映射中可能出现的任何循环型模式。

为了基于受限奇点模式 (4) 对 (3) 进行非自治化，我们假设方程 (3) 中的参数a 不再是常数，而是自变量的函数： a_n。用 $x_n = a_n$ 代替 a 开始奇点约束计算后，我们发现，为了使 $x_{n+5} = a_{n+5}$ 成立，并通过避免在下一次迭代时出现无穷大来保持奇点模式 (4)， a_n 必须满足关系式

$$a_{n+5}a_n = a_{n+4}a_{n+1}. \tag{5}$$

这个简单可线性化递推关系的解为 $a_n = \lambda^n \psi_4(n)$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，且 ψ_m 表示周期为 m 的一般周期函数。因此，通过对 x_n 进行规范变换以去除一些多余的自由度，我们得到著名的 q-Painlev´e 方程 [32],

$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 - \frac{\lambda^n \psi_2(n)}{x_n}, \tag{6}$$

作为 QRT 映射 (3) 的一种自然的非自治版本。按照构造，这两个方程都具有奇点约束性质，其奇点模式基本相同（包括循环型模式）。这意味着它们都具有初始条件空间，且其迭代呈现相同的二次增长。两者的根本区别在于，原始 QRT 映射具有不变量，并且可以用椭圆函数进行积分；而 q-Painlev´e 方程 (6) 的一般解没有有理不变量，并被认为是超越的。

现在，我们将通过耦合以下非自治方程，开始构造高阶映射

$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 - \frac{a_n}{x_n}, \tag{7}$$

与三种本质上不同类型的线性或可线性化映射，起初不对 (7) 中的系数函数 a_n 作任何假设；我们将尝试探究能否以及如何通过对所得高阶映射的奇点模式施加约束，来实现其去自治化。由此应能导出对函数 a_n的约束，而这些约束当然应与关系式 (5) 相容。我们将遇到的一些映射只有非约束奇点，因此我们将面临一个问题：如何根据非约束奇点模式来定义去自治化。这完全是一个未经探索的领域。

最后还有一点重要内容需要强调：高阶映射中的“奇点”概念。遵循 [14] 的思路，并延续我们先前关于高阶映射次数增长的研究 [25,24,33], ，我们将仅考虑起源于余维1奇异点集的奇点模式；在研究我们将构造的映射的奇异性性质时，将完全忽略由余维更高的点集所导致的所有奇异行为。这一限制可能产生的副作用将在结论中讨论。

2.1. 情形 *I*——基于约束奇点模式及其变体的标准去自治化

首先，将方程 (7) 与线性映射耦合

$$y_{n+1} = x_n y_n, \tag{8}$$

由此得到三阶非自治方程

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \left(y_n - a_{n-1} y_{n-1} \right). \tag{9}$$

在自治情形下，即当 a_n 为常数时，我们从（一般的）初始条件 y_0，y_1 和 $y_2 = a y_1$ 出发，得到奇点模式

$$\{a y_1, 0, *, \infty, *, *\}, \tag{10}$$

其中，$*$表示某些自由度缺失时的有限非零值。在当前情形下，我们发现 y_6 和 y_7 仅仅是 y_1 的函数，但 y_0 会在 y_8中重新出现。因此，该奇点是受限的，其含义是：在 y_3 处丧失的自由度已经恢复，但仅恢复到 y_8的层面。当

当a_n 不是常数时，我们通过 $y_2 = a_1 y_1$ 进入奇点，经过简单计算发现，除非 a_n 满足条件（5），否则 y_8 会发散。因此，在这种情况下，去自治化过程完全按照标准二阶情形展开：正确的去自治化约束仅由受限奇点模式（10）得到，该模式只包含值 0、 ∞ 以及一些取决于初始条件 y_0 和 y_1的正则值。然而，这里需要注意的重要一点是，作为去自治化基础的原自治情形的奇点模式应当仔细计算，同时牢记“受限”只有在迭代序列再次返回余维1簇的那一刻才真正发生。

非自治映射 (9)（其中 a_n 满足条件 (5)）及其原始自治版本都表现出相同的二次次数增长。例如，从一般的 y_0 和 y_1 出发，并计算关于 y_2 的迭代次数，我们得到 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 43, 46, $\cdots$，这显然呈二次增长。

方程 (9) 是与一个线性方程耦合的结果，这一点体现为出现了所谓的反禁闭奇点模式 [34]:

$$\{\cdots, 0, 0^2, 0^2, 0, 0, 0^2, 0, \bullet, 0, 0, \bullet, \bullet, 0, \bullet, \infty, \bullet, \bullet, \infty, \infty, \bullet, \infty, \infty^2, \infty, \infty, \infty^2, \infty^2, \infty, \infty^2, \infty^3, \cdots\}. \tag{11}$$

在上述模式中（以及下文中），$\bullet$ 表示一个自由正则值，既不为 0，也不为 ∞。此外，上述模式中的指数具有如下含义：如果我们在计算上述模式时引入 ϵ 来代替 0，就会得到与 ϵ^k 和 ϵ^{-k} 成比例的迭代，分别记作 0^k 和 ∞^k；下文中，我们将把此记法中的指数 k 称为该模式中相应项的 重数。

请注意，上述模式在两个不同位置包含连续的 $\bullet$，这意味着可以通过两种不同的方式选择初始条件，从而进入这一特定的奇点模式。一种方式是通过初始条件 $(y_0, y_1, 0)$ 进入该模式；此时，沿着 n 增大的方向迭代，可得到序列 $(y_0, y_1, 0, -a_1 y_0, \infty, y_1, a_1 a_4 y_0, \infty, \cdots)$。另一种方式是通过 (y_0, y_1, ∞) 进入，此时前面的迭代为 $(\cdots, y_1/(a_{-1}a_{-4})\ y_0, 0, -y_1/a_{-1}, \infty, y_0, y_1, \infty)$。不言而喻，由于反约束奇异性模式中的重数仅呈线性增长，这一模式的存在并不影响式 (9) 的次数增长为二次这一事实，因此与其可积性无关。

事实证明，我们可以通过以下方式引入进一步的线性耦合

$$z_{n+1} = y_n z_n, \tag{12}$$

而不致过多改变原有情形。由此得到的方程形式如下

$$z_{n+1} = \frac{z_n z_{n-2}}{z_{n-1}^2 z_{n-3}} \left(z_n z_{n-2} - a_{n-2} z_{n-1}^2 \right), \tag{13}$$

我们将在不预先假设条件 (5) 的情况下研究该方程。首先考虑自治情形，即 a_n 为常数；此时存在一个受限奇点，其奇异点集为余维1，对应于初始条件 z_0， z_1， z_2 和 $z_3 = a z_2^2 / z_1$。由此得到的奇点模式为

$$\{\frac{a z_2^2}{z_1}, 0, 0, *, *, *\}, \tag{14}$$

其中， $*$ 再次表示一个有限值，此时缺少某些（初始）自由度。只有在下一步，即 z_9，才会恢复全部自由度。因此，这种模式与三阶映射 (9) 的约束模式 (10) 十分相似。

当 a_n 不是常数时，(13) 的奇异点集位于 $z_3 = a_1 z_2^2/z_1$ ，计算后续迭代可知，直到 z_8为止，得到的奇点模式 (14) 基本相同。然而，对于一般的a_n ，下一次迭代 z_9 现在会发散。使这次迭代的值有限的条件，即条件 (5)，实际上也允许恢复全部自由度。从这个意义上说，这种去自治化实际上比上述三阶方程的去自治化更直接。事实上，这是一个典型范例：基于自治映射得到的约束模式进行去自治化；在非自治映射的系数函数上不施加任何约束，奇点模式中便会出现不期望值，而防止这些值出现的约束则能导出映射的正确去自治化。从这个意义上说，(9) 的去自治化虽然仍相当标准，但实际上稍微隐晦一些。

与三阶映射 (9) 的情况一样，这里也存在一种反受限奇点模式：

$$\{\cdots, \infty^9, \infty^7, \infty^6, \infty^5, \infty^3, \infty^2, \infty^2, \infty, \bullet, \bullet, \bullet, 0, 0, \bullet, \bullet, \bullet, \infty, \infty^2, \infty^2, \infty^3, \infty^5, \infty^6, \infty^7, \infty^9, \cdots\}. \quad (15)$$

注意，由于在两个不同位置都出现了三个连续的有限值，因此再次有两种不同的方式进入这一反受限模式：要么通过初始条件 z_0， z_1， z_2，0，要么通过 z_0， z_1， z_2， ∞。

通过研究迭代的次数增长，可以确认 (13) 在满足条件 (5) 时具有可积性。从一般的 z_0、 z_1 和 z_2 出发，我们计算迭代关于 z_3 的次数，得到：0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 17, 20, 24, 28, 32, 36, 41, 46, 51, 57, 63, 69, $\cdots$，这同样呈现二次次数增长。

2.2 利用极大加代数计算反约束模式及次数增长

我们暂且在此停下讨论，指出实际上，利用该映射的极大加类比映射，可以比单纯蛮力计算简单得多地得到这些反约束模式。例如，方程 (9) 的极大加法版本

$$Y_{n+1} = Y_{n-2} + \max(Y_n, Y_{n-1}) - Y_{n-1}, \quad (16)$$

在 (9) 中令 $y_n = e^{\delta Y_n}$，然后应用运算 $\lim_{\delta \to +\infty} \frac{1}{\delta} \log(\cdot)$ 得到，其中将所有 a_n 视为相对于该运算为负且为常数。（熟悉超离散极限的读者会认出，我们这里所说的实际上就是映射的超离散化 [35] 。）

取初始条件 $Y_0 = 0, Y_1 = 0, Y_2 = -1$，极大加方程 (16) 得到以下序列：0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 4, 3, $3\ \cdots$。这与从初始值 (y_0, y_1,0) 得到的反约束奇异性模式 (11) 中的重数序列完全一致，只需将序列中的正项对应于 ∞ 的重数，将负项对应于 0 的重数。从该初始条件向后迭代，只需考虑映射$Y_{n-1} = Y_{n+2} - \max(Y_n, Y_{n+1}) + Y_n$ 即可。由此得到序列 $\cdots$, -3, -2, -2, -3, -2, -1, -2, -2, -1,-1, -2, -1, 0, -1, -1, 0, 0, -1，与通过直接计算反约束奇异性模式得到的零点指数完全吻合。

请注意，这种对应关系根植于这样一个事实：映射 (9) 的反约束奇异性模式 (11) 对参数 a_n 的任意（非零）取值都保持不变，因此可以假设$-a_n > 0$ ，而这正是推导极大加法版本 (16) 所需的条件。这一事实也意味着，反约束奇异性模式无法提供任何有助于对原映射进行去自治化的信息。

映射 (13) 也有同样的观察结果。对于 a_n 的任意非零取值，其反约束奇异性模式 (15) 都相同，因此可以假设它们取适当的值，从而得到

方程 (13) 的以下极大加法版本：

$$Z_{n+1} = Z_{n-2} + Z_n + \max(Z_n + Z_{n-2}, 2Z_{n-1}) - 2Z_{n-1} - Z_{n-3}. \tag{17}$$

从初始条件 $Z_0 = 0$、$Z_1 = 0$、$Z_2 = 0$、$Z_3 = -1$ 出发，它们对应于方程 (13) 的初始条件z_0、z_1、z_2、0。其极大加法版本给出序列 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 21, 24, 27, $\cdots$，这恰好就是反约束奇异性模式 (15) 中向右传播的重数序列。（向左传播的重数与向右的相同，这是由于方程 (13) 的前向/后向对称性；这一对称性当然也由其极大加法版本继承。）

此外，按照我们在 [24] 基于 Halburd方法[20], 介绍的奇异性平衡程序，映射 (13) 的次数增长显然可直接由反约束奇异性模式中无穷大处的重数给出，因为受限奇点 (14) 完全不会产生无穷大。（注意，映射 (9) 并非如此。）更确切地说，由于需要考虑反约束奇异性模式 (15) 的两个独立实例，实际上，次数（在 z_3 取 z_0、z_1 和 z_2的一般值时计算）为 $d_n = Z_{n+5}$+max(Z_n，0)，其中 Z_n 是由极大加法方程 (17) 在初始条件 (0, 0, 0, -1) 下得到的重数。我们得到 $7d_n = n^2 - 2n - 1 + \phi_7(n)$，其中 $\phi_7(n)$ 是通过重复字符串 $[1, 2, 1, -2, 0, 0, -2]$ 得到的周期7函数，它重现了对 $n \geq 5$ 进行直接计算所得的次数。

2.3 情形*II*——基于非约束模式的去自治化：不期望值的出现

如上所述，迄今为止，我们遇到的都只是保留受限奇点模式的经典去自治化情形。本节将给出两个高阶映射的例子，它们在余维1下没有受限奇异性，但仍可基于从非约束模式中获得的信息进行去自治化。

第一个例子是将方程 (7) 与一个可线性化方程耦合得到的。为此，我们为一个射影映射选取一种简单形式，并引入如下耦合

$$u_{n+1} = \frac{x_n}{u_n u_{n-1}}, \tag{18}$$

由此得到四阶映射

$$u_{n+1} = \frac{u_n u_{n-1} u_{n-2} - a_{n-1}}{u_n^2 u_{n-1}^3 u_{n-2}^2 u_{n-3}}. \tag{19}$$

该映射没有任何受限或反受限奇异性，只有非约束奇异性。从一般的 u_0、u_1、u_2 和 $u_3 = a/(u_1 u_2)$ 出发，我们得到（对于常数 $a \neq 0$）如下奇点模式

$$\{\frac{a}{u_1 u_2}, 0, \infty^2, \bullet, 0^3, \infty^3, \bullet, 0^3, \infty^3, \bullet, 0^3, \infty^3, \cdots\}, \tag{20}$$

其中字符串 $[\bullet, 0^3, \infty^3]$ 无限重复，导致一个非约束 奇点。

考虑非自治情形，通过 $u_3 = a_2/(u_1 u_2)$ 进入奇点时，我们得到的奇点模式与自治情形下的不同：

$$\{\frac{a_2}{u_1 u_2}, 0, \infty^2, \bullet, 0^3, \infty^3, \infty^1, 0^4, \infty^2, \infty^3, 0^4, \bullet, \cdots\}, \tag{21}$$

其中，不期望值并未出现在模式（20）中，而是作为 u_9 出现。要求这两个模式完全相同，会导出一个关于 u_9 的约束，这恰好就是（5）。

施加约束（5）实际上使映射（19）变得可积。以 u_3 表示其次数增长（对于 u_0、u_1 和 u_2 的一般值），可得到序列 0, 0, 0, 1, 2, 2, 5, 7, 10, 15, 18, 27, 34, 41, 56, 66, 81, 100, 116,$\cdots$，这似乎呈三次增长。若要生成更长的次数序列，我们可以采用 [33] 中介绍的方法，但这需要知道该映射在余维1中的所有奇点模式。如前所述，在余维1中，映射（19）没有任何受限或反受限奇异性；不过，除了上文讨论的非约束模式外，它还有两个奇点属于循环奇点模式。第一个模式由值 0 引出，

$$\{\bullet, \bullet, \bullet, 0^1, \infty^2\bullet, 0^3, \infty^3, \infty^1, 0^4, \infty^2, \infty^3, 0^4, \bullet, \infty^4, 0^3, 0^1\infty^3, 0^1, 0^1\infty^1\}, \tag{22}$$

而第二个来自 an ∞:

$$\{\bullet, \bullet, \bullet, \infty^1, 0^1, 0^1, \infty^3, 0^1, 0^3, \infty^4, \bullet, 0^4, \infty^3, \infty^2, 0^4, \infty^1, \infty^3, 0^3\bullet, \infty^2, 0^1\}. \tag{23}$$

根据非约束模式 (20) 和两个循环型模式 (22) 与 (23)，我们可以应用在 [33] 中提出的算法，求出前 100 个次数:

0, 0, 0, 1, 2, 2, 5, 7, 10, 15, 18, 27, 34, 41, 56, 66, 81, 100, 116, 139, 163, 189, 219, 252, 289, 329, 371, 419, 469, 523, 582, 642, 711, 781, 854, 938, 1020, 1110, 1207, 1304, 1411, 1522, 1638, 1761, 1890, 2026, 2168, 2315, 2471, 2632, 2800, 2976, 3156, 3348, 3544, 3746, 3962, 4179, 4407, 4645, 4886, 5140, 5401, 5670, 5949, 6237, 6535, 6842, 7157, 7484, 7819, 8164, 8520, 8883, 9261, 9646, 10040, 10451, 10866, 11295, 11737, 12185,12649, 13123, 13608, 14106,14616, 15139, 15674, 16220,16781, 17353,17938, 18537, 19146, 19773, 20410, 21059, 21728, 22404, 23097.

一旦获得足够长的度数序列，就可以轻松求得一个能够准确表示该序列的显式表达式。因此，我们得到

$$d_n = \frac{1}{42}n^3 - \frac{1}{14}n^2 + \frac{38}{21} + \phi_{21}(n), \tag{24}$$

其中，$\phi_{21}(n)$ 是通过重复字符串 $[-37, -36, -17, -4, -21, 13, 11$,12，34，$-10$，45，28，$-22$，60，$-2$，$-1$，39，$-32$，$-7$，$-15$，$-38]$ 得到的周期函数，其中每一项都要除以 21。

尽管上述去自治化是在未约束奇点模式上进行的，但它与标准去自治化（基于约束模式）并没有太大差异：在非自治映射的模式中出现不期望值的迭代处，可以得到参数条件；而一旦这些值被移除，自治情形和非自治情形的模式便会一致。

然而，也可能出现更微妙的情形。例如，考虑将耦合方程 (13) 与另一个线性方程耦合后得到的五阶映射:

$$w_{n+1} = z_n w_n. \tag{25}$$

我们发现，对于 w，方程

$$w_{n+1} = \frac{w_n^2 w_{n-2} w_{n-4}}{w_{n-1}^4 w_{n-3}^3}\left(w_n w_{n-2}^3 - a_{n-3} w_{n-1}^3 w_{n-3}\right). \tag{26}$$

在自治情形下，即当 $a_n = a$ 为常数时，可以通过$w_4 = a w_1 w_3^3/w_2^3$进入一个奇点（余维1）。从一般的 w_0、w_1、w_2 和 w_3 出发，我们发现该奇点会导致一个未约束奇点模式:

$$\{\frac{a w_1 w_3^3}{w_2^3}, 0^1, 0^2, 0^2, 0^2, 0^2, 0^2, \cdots\}. \tag{27}$$

在非自治情形下，从 $w_4 = a_1 w_1 w_3^3 / w_2^3$ 出发，我们得到一个不同的未约束奇点模式

$$\{\frac{a_1 w_1 w_3^3}{w_2^3}, 0^1, 0^2, 0^2, 0^2, 0^2, 0^1, \infty^1, \infty^3, \infty^6, \cdots\} \tag{28}$$

其中，特别是， w_{10} 是单零点，而不是在 a_n 为常数时本应出现的二重零点。0 的重数发生这一变化，导致出现一系列不期望的项（相较于人们希望保留的模式而言）：无穷大以不断增加的重数出现。要求 w_{10} 反而具有二重零点，就得到条件 (5)；实施这一条件后，整个奇点模式便恢复为自治情形中的模式。因此，与前一种情形一样，对于（可积）映射 (26)，去自治化条件就是保留其非约束奇点模式；在这里，通过比较模式中的重数，而不是考察模式中更远处出现的不期望值，实际上可以最容易地实现这一点。

这一非约束模式的存在反映在映射 (26) 的次数增长中。在 w_0中， w_1中， w_2 和 w_3 为一般的条件下，计算其关于 w_4的迭代次数，得到以下序列：0, 0, 0, 1, 3, 5, 8, 13, 19, 27, 38, 52, 69, 89, 113, 141, 173, 209, 250, 296, 347,$\cdots$。这种增长是三次的，并且对于 $n > 6$，次数序列可以表示为以下表达式

$$d_n = \frac{1}{24}n^3 + \frac{3}{16}n^2 - \frac{47}{12}n + \frac{539}{32} + \phi_4(n), \tag{29}$$

其中 $\phi_4(n)$ 由字符串 $[\frac{-5}{32}, \frac{-3}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}]$ 的重复得到。 — — — —

此外，该映射还存在两个反受限奇异性：

$$\{\cdots, 0^{33}, 0^{24}, 0^{17}, 0^{11}, 0^6, 0^3, 0, \infty^1, \infty^2, \infty^2, \infty^2, \infty^2, \infty, w_0, w_1, w_2, w_3, \infty, \infty^3, \infty^5, \infty^8, \infty^{13}, \infty^{19}, \infty^{26}, \infty^{35}, \cdots\}$$

and

$$\{\cdots, 0^{129}, 0^{108}, 0^{89}, 0^{72}, 0^{58}, 0^{46}, 0^{35}, 0^{26}, 0^{19}, 0^{13}, 0^8, 0^5, 0^3, 0, w_0, w_1, w_2, w_3, 0, 0^2, 0^2, 0^2, 0^2, 0, \infty, \infty^3, \infty^6, \infty^{11}, \cdots\},$$

它们通过交换零点与无穷大以及演化方向而彼此相关。注意，与非约束模式 (28) 不同，这些模式并不依赖于 a_n 所取的具体值（只要这些值非零），并且这两个模式中无穷大的重数随 n 呈三次方增长。鉴于映射 (26) 的未约束奇点模式 (27) 不含任何无穷大，其迭代的次数 d_n （以 w_4 表示，其中 w_0, w_1, w_2 与 w_3 为一般的）实际上由这两个反约束模式中无穷大的重数之和给出，

$$d_n = W_n + \max(\widetilde{W}_n, 0), \tag{30}$$

其中， W_n 和 $\widetilde{W}_n$ 由（26）的极大加法版本及初始条件 $W_0 = 0, W_1 = \widetilde{0}, W_2 = 0, W_3 = 0$ 得到，并且 W_4 ($\widetilde{W}_4$) 等于 1（ -1也分别如此）。这证实，满足条件（5）的非自治映射（26）与自治映射具有相同的（三次）次数增长，因此，这种去自治化不仅保留了映射的未约束奇点模式（27），也保留了其可积性。

尽管奇点模式 (27) 和 (28) 中奇异项的重数显然为该映射的动力学提供了关键信息，但在对其进行去自治化时，即使不考虑 w_{10} 迭代中的重数变化，也可以完成去自治化：从 w_{11} 开始出现不期望值这一现象本身，就足以为成功地对该映射进行去自治化提供充分信息。然而，当此类不期望值并未出现时，去自治化过程就会变得更加微妙。

2.4 场景 情形 *III*——基于非约束模式的去自治化：重数的变化

为了得到一个更具挑战性的去自治化过程的例子，让我们将可积映射(3)与一个仿射映射耦合，

$$y_{n+1} = x_n y_n + b_{n+1}, \tag{31}$$

其中我们假定 b_n 不为零。由此得到的三阶方程现在为

$$y_{n+1} = y_{n-2} y_n \frac{y_n - b_n - a_{n-1} y_{n-1}}{(y_n - b_n)(y_{n-1} - b_{n-1})} + b_{n+1}. \tag{32}$$

存在若干余维一奇点。从一般的 y_0, y_1 与 $y_2 = 0$ 出发，我们得到一个受限奇点模式

$$\{0, b_3, *\}, \tag{33}$$

其中，在 y_4 的（有限）取值处，尚未重新获得初始条件 y_0, y_1的全部自由度，因此应将其视为奇点模式的一部分。然而，两个初始条件 y_0与 y_1 都会在 y_5这一层次自动恢复，从而对 b_n的任意值得到长度为三的约束模式(33)。因此，就映射的非自治化而言，这一约束模式并不能提供任何有用信息。

接下来，我们考虑由取 $y_2 = b_2 + a_1 y_1$ 所诱导的奇点，并首先考察自治情形 $b_n = b \neq 0, a_n = a \neq 0$，对所有 n，由此得到如下非约束模式：

$$\{b + a y_1, b, \infty^1, \infty^2, \infty^1, \infty^1, \infty^1, \infty^1, \infty^1, \cdots\}. \tag{34}$$

If另一方面，在非自治情形下，我们得到的奇点模式 n

$$\{b_2 + a_1 y_1, b_3, \infty^1, \infty^2, \infty^1, \infty^1, \infty^2, \infty^2, \infty^1, \infty^3, \infty^3 \cdots\}, \tag{35}$$

其中奇点仍未被约束。我们注意到， y_8 会随着 ∞^2发散，而不是像自治情形中那样随着 ∞^1 发散；后续重数也有显著差异，但与自治情形下的模式相比，模式（35）不包含任何不期望值。然而，若要求非自治情形和自治情形在 y_8 处具有相同的重数，则会对 a_n施加一个约束，而这恰好就是（5）。事实上，若施加此条件，非自治情形下的奇点模式就与（34）相同，且对于所有满足 $n > 5$的 y_n ，都具有 ∞^1 发散。这就引出了一个问题：那么 b_n呢？事实证明， b_n 本质上是一个完全自由的函数，这种情况在线性化系统（或者像当前情形这样，部分可线性化的系统）中并不少见 [36]。

（32）也存在反约束模式。令 $y_2 = b_2$ 进入奇点，我们得到以下模式

$$\{\cdots, \infty^1, \infty^1, 0, \bullet, \infty^1, \bullet, 0, \bullet, \bullet, b_2, \infty^1, \infty^2, \infty^1, \infty^1, \infty^2, \infty^2, \infty^1, \infty^2 \cdots\}, \tag{36}$$

而从无穷大处进入则得到

$$\{\cdots, \bullet, \infty^1, \infty^1, 0, \bullet, \infty^1, \bullet, \bullet, \infty^1, \infty^1, \bullet, \infty^1, \infty^2, \infty^1, \infty^1, \infty^2, \infty^2, \infty^3 \cdots\}, \tag{37}$$

对于任意函数 a_n 或 b_n。

在条件 (5) 下，对于自由函数 b_n，以 y_2 计算映射 (32) 的次数增长，在一般的 y_0和 y_1 下为 0, 0, 1, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 31, 40, 51, 64, 79, 96, 115, 137, 161, $\cdots$，这又是一次三次增长。对于 $n > 1$，它可以表示为以下表达式

$$d_n = \frac{1}{42} n^3 + \frac{1}{14} n^2 - \frac{2}{21} n + \frac{6}{7} + \phi_7(n), \tag{38}$$

whe其中， $\phi_7(n)$ 是通过重复字符串 $[\frac{1}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{7}]$ 得到的周期7函数— – – – – .

传统上，在检验一个映射是否具有奇点约束性质时，人们或许不会觉得有必要考虑奇点模式中奇异值出现的重数。正如我们在第 2 节中解释的，如果要根据给定映射的奇点模式计算其次数增长，了解这些重数至关重要 [20, 21, 33]。然而，上述情形表明，在对高阶映射进行去自治化时，必须考虑奇异值的重数，因为缺少这些信息时，在某些情况下，奇点模式无法提供足够的信息来对映射进行去自治化。

3. Higher order non-integrable maps

到目前为止，我们研究了对高阶可积映射进行去自治化时出现的不同情形。与二阶情形的主要区别在于，这类映射往往会出现非约束奇点。幸运的是，正如我们所展示的，只要将奇异值重数的信息纳入奇点约束分析，就可以利用这类奇点获得可积的去自治化形式。

现在我们将考察某些非可积高阶映射的去自治化，但首先应当说明，对于这类映射，“去自治化”指的是什么。从 Diller 与 Favre 对双有理二阶映射的分类 [5], 可以清楚地看出，尽管相当罕见，非可积映射仍有可能具有初始条件空间。在这种情况下，可以严格地用代数几何术语定义去自治化过程（例如参见 [37, 4]），使得去自治化后的映射保证与原来的自治映射具有相同的动力学次数。此类去自治化的首个实例由 Takenawa [37] 针对 Hietarinta 与 Viallet [38]发现的一个受限非可积映射给出。下面我们将考察两个高阶非可积映射，它们是通过将 Hietarinta-Viallet 映射与不同的线性映射耦合而构造的。尽管这两个映射都具有非约束奇点（余维一），因而不能被“提升”为伪同构（这与 [39, 40]中所述的高阶映射相反），我们将证明：保持原自治映射的奇点模式——包括重数——的去自治化，会得到与原自治映射具有相同动力学次数的非自治映射。这一结果还表明，我们为求得自治二阶映射的动力学次数而引入的“完全去自治化”方法——即通过为其寻找恰当的去自治化——或许也适用于高阶映射。

最后，我们以简短讨论作为本节的结尾：介绍基于某个高阶可积映射的未约束奇点模式，通过“延迟约束”得到的非自治映射。这在某种意义上将我们的非自治化方法推向了极限。

3.1高阶非可积映射的去自治化

我们从 Hietarinta 和 Viallet 提出的映射这一标准例子入手，并考虑它的扩展。正如我们在 [3], 中所示，该扩展对应于对这一映射进行完全非自治化，其系数反映了它的动力次数：

$$x_{n+1} + x_{n-1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} + \frac{f_n}{x_n}. \tag{39}$$

在 f_n 为常数（且在“标准”版本中等于 0）的自治情形下，该映射具有如下受限奇点模式：

$$\{0, \infty^2, \infty^2, 0\}. \tag{40}$$

要求　　为了使这一模式在非自治情形下保持不变，我们得到关于 f_n 的约束　　nt

$$f_{n+3} - 2f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = 0. \tag{41}$$

该线性递推的特征多项式 $(\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$ 的最大根为 $(3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.6180$，这恰好是映射 [3,4] 的动力学次数。

如 [41], 中详细说明的，对于映射 (39)，可以将受限推迟到更晚的阶段：这种延迟约束的第一个可能时机出现在模式末尾

$$\{0, \infty^2, \infty^2, 0, \infty, \infty, 0, \infty^2, \infty^2, 0\}, \tag{42}$$

后续的受限模式通过将字符串

$$[\infty, \infty, 0, \infty^2, \infty^2, 0], \tag{43}$$

反复附加到 (42) 而得到。此外，受限可以无限期推迟 [41], ，从而得到映射 (39) 在任意函数 f_n 情况下会出现的未约束奇点模式。对于 (39) 这一“普遍”情形，其动力学次数由与 (43) 相关的多项式 $\lambda^5 - 2\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$ 的最大根给出： $\lambda_* \approx 2.67871$。

现在我们将 (39) 与线性映射 $y_{n+1} = x_n y_n$ 耦合，得到三阶映射

$$y_{n+1} = \frac{y_n^3 + y_{n-1}^3 + f_n y_n y_{n-1}^2}{y_n y_{n-1}} - \frac{y_n y_{n-1}}{y_{n-2}}. \tag{44}$$

在自治情形下，(44) 具有以下非禁闭奇点模式

$$\{0, \infty, \infty^3, \infty^2, \infty^2, \infty^2, \infty^2, \cdots\}. \tag{45}$$

然而，当我们考虑一般的非自治情形，且不对系数 f_n施加任何条件时，得到的模式为

$$\{0, \infty, \infty^3, \infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^3 \cdots\}. \tag{46}$$

要使这两种模式相同，只需确保后一种模式中的第二个 ∞^3 恰好为一个 ∞^2 （参见第 2.4 节中的情形 III）。事实证明，实现这一点的条件恰好是 (41)，而该条件也给出了非自治映射的动力学次数（我们使用丢番图方法验证了这一点）。

预期之中，耦合映射 (44) 也具有一个反受限奇点模式，

$$\{\cdots, 0^4, 0^3, 0^2, 0^2, 0^1, \bullet, \bullet, \infty^1, \infty^2, \infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^4, \infty^5, \cdots\}, \tag{47}$$

它与非约束模式 (45) 结合起来，可用于验证动力学次数（例如，使用 [33]中介绍的方法）。

接下来，我们考虑将式 (39) 与仿射映射 (31) 耦合， $y_{n+1} = x_n y_n + b_{n+1}$，从而得到

$$y_{n+1} = \frac{(y_n - b_n)^3 + y_{n-1}^3 - f_{n-1} y_{n-1}^2 (y_n - b_n)}{y_{n-1}(y_n - b_n)^2} - \frac{y_n(y_{n-1} - b_{n-1}) - b_{n+1} y_{n-2}}{y_n y_{n-2}}. \tag{48}$$

我们首先考虑 f_n 为常数但不约束 b_n 的情形，此时发现存在一种受限奇点模式。从一般的 y_0、 y_1 和 $y_2 = 0$ 出发，我们得到

$$\{0, b_3, *\}, \tag{49}$$

其中 y_4 是有限的，但我们只恢复了一个自由度。剩下的自由度会在下一步自动恢复，即在 y_5 时恢复，因此该奇点确实是受限的。然而，也存在一种非约束模式：如果我们从 $y_2 = b_2$ 开始，则得到

$$\{b_2, \infty^2, \infty^4, \infty^3, \infty^3, \infty^3, \cdots\}. \tag{50}$$

现在我们转向完全非自治情形，其中 f_n 也是 n的函数。虽然约束模式没有变化，但非约束模式变为

$$\{b_2, \infty^2, \infty^4, \infty^3, \infty^4, \infty^5, \cdots\}. \tag{51}$$

要求两个模式相同，可得函数 f_n满足条件 (41)。如我们所见，它渐近地按 $(3+\sqrt{5})/2$ 的幂增长；经检验，这与通过丢番图方法得到的动力学次数值相符。

再次指出，函数 b_n 的具体形式不会影响奇点模式，也不会对动力学次数的值产生任何影响。

请注意，我们发现 (39)、(44) 或 (48) 的动力学次数相同，其数值略小于对这些映射取任意函数 f_n 时所得的动力学次数（2.67871...）。这是因为在这些非可积情形下，我们所考虑的线性耦合无法改变动力学次数，因此三个映射的动力学次数仍然相同。

3.2 基于非约束模式的“延迟约束”情形

正如引言中所解释的，推迟施加约束条件会导致不可积映射。例如，考虑映射

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{a_n}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}. \tag{52}$$

在自治情形中，它具有受限奇点模式 $\{0, \infty^2, 0\}$ ，这意味着在非自治情形中，从一般的 x_0 和 $x_1 = 0$ 出发，要求 x_4 依赖于 x_0，会导出关于 a_n的约束条件。（后者为 $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$，即 a_n 关于 n是线性的，且该映射是一个著名的离散Painlev´e方程）。然而，可以忽略这种使奇点受限的可能性。结果表明，再经过四次迭代后会出现另一个机会（事实上，无穷多个这样的机会会周期性地出现，每四次迭代出现一次）。聚焦于第一个“延迟”约束机会，我们得到（受限的）奇点模式

$$\{0, \infty^2, 0, \infty, 0, \infty^2, 0\}, \tag{53}$$

及其相关约束

$$a_{n+5} - 2a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0. \tag{54}$$

（54）的特征多项式的最大根为 $\lambda = \frac{1+\sqrt{13}}{4} + \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{8}}$，数值为 1.7220838...；当 a_n 满足（54）时，这恰好是该映射的动力学次数。

现在我们来考虑 (52) 与线性映射 (8) 的三重耦合。为避免冗长的表达式，我们将其写成由 (52) 和

$$w_{n+1} = x_{n-2} \frac{w_{n-2} w_n^3}{w_{n-1}^3}. \tag{55}$$

与 (52) 一样，我们从 $x_0, x_1 = 0$ 开始，并令 w_0, w_1 和 w_2 取有限值，从而得到 $w_3 = x_0 w_0 w_1^{-3} w_2^3$ 和 $w_4 = w_5 = w_6 = 0^1$。在自治情形下，当 a_n 为常数时，我们发现对于所有 $n \geq 7$， $w_n = 0^1$ 也都是如此，因此奇点不受约束。然而，在非自治情形下，我们发现 w_7 取有限的非零值，并且从 $n \geq 8$ 起，奇点模式中的值发生了显著变化：$\infty^1, \infty^4, \infty^8, \infty^{14}, \infty^{21}, \ldots$。重数增长得越来越快，这意味着耦合映射是非可积的。

要求 w_7 为 0^1 会导出约束 $a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$，而（关于变量 w 的）奇点模式则恢复为自治情形下的模式：

$$\{\bullet, \bullet, 0^1, 0^1, 0^1, 0^1, \cdots\}. \tag{56}$$

不过，我们可以选择忽略这种可能性，并尝试抑制后续迭代中奇异值重数的增长。事实证明，这种可能性出现在 w_{11} 的层次上，并且恰好对应于晚期约束条件 (54)。例如，实施此条件后， w_{11} 和 w_{12} 中 ∞ 的重数分别为 13 和 19，而非 14 和 21，后续迭代中的情况也类似。此外，通过丢番图方法计算出的耦合映射的动力学次数确实约为 1.722，与晚期约束条件的预测一致。

进一步延迟应用某个能够（在一定程度上）抑制增长的条件始终是可行的。正如 [41], 中所述，这样的条件可以无限期地推迟应用。这里我们不再详述，只给出无限延迟应用此类条件时的特征多项式：

$$k^6 - 2k^5 + k^4 - k^3 + k - 2 = 0. \tag{57}$$

多项式(57)的最大根约为1.767，这是一种一般非自治版本的耦合映射(52)-(55)的动力学次数；基于丢番图方法的计算再次证实了这一数值。

4. Conclusions结论

本文基于奇点结构，探讨了高阶映射（包括可积和非可积映射）可能的去自治化情形。由于非约束奇点在高阶情形中十分普遍——即使对于可积映射也是如此——我们主要关注通过与线性（或可线性化）映射耦合而构造的映射的去自治化。这样做是为了获得足够多有趣的例子，以阐释我们目前能够设想的每一种去自治化情形。我们并不声称所列情形已尽数涵盖——在本结论的最后，我们还会回到这一点。

从本文所举示例中得到的主要启示是，奇点分析确实可用于构造给定高阶映射的非自治版本，使非自治映射与原自治映射具有相同的动力学次数。对于可积映射而言，这意味着去自治化保留了可积性，这是一个非常强的性质。对于不可积映射，我们的去自治化保留动力学次数这一结论或许看起来没那么有趣，但我们并不认同。在我们讨论的指数次数增长情形中，动力学次数有时远小于对同形式的一般映射的预期值。要使映射的连续迭代出现如此缓慢的增长，必须发生精确抵消；这些抵消极为复杂，不可能仅凭偶然实现。此外，至少在目前讨论的这些情形中，我们的方法所得到的非自治映射，其系数仍然反映出该映射的动力学次数值，正如完全去自治化

二阶映射的去自治化过程一样。若能理解我们的去自治化过程为何具有这一特殊性质，将会极具意义，尤其是在针对非约束模式进行去自治化的情形下。遗憾的是，目前看来，要对这类去自治化进行全面的代数几何理解所需的工具仍然欠缺，即便在可积情形下也是如此。

我们通过分析还能得出另一项重要结论：要成功地对给定映射进行非自治化，奇点分析中必须纳入奇异值出现时的重数信息。我们已经证明，在某些情况下，若缺少这类信息，仅凭模式本身不足以完成非自治化。此外，如第3.2节末尾所示，在某些情况下，奇异值的重数信息甚至可以用来构造相当于“非约束映射的延迟约束”的东西。正如前一句所充分表明的，我们作出这一表述时，很可能在语言和数学意义上都已逼近该方法所能达到的极限。

不过，我们想在本文结尾再举一个不同的例子，说明所介绍的方法可能存在局限性。正如一开始所解释的，我们的奇点分析仅限于余维1中出现的奇点。主要原因是，对于高阶映射，初始条件空间这一概念似乎最好的类比，是尝试通过逐次爆破将映射正则化为伪同构 [14, 39], ，即余维1上的同构。然而，要对高阶映射进行非自治化，这一概念可能并不充分，即便对于可积映射也是如此。例如，考虑由下列方程给出的三阶映射

$$y_{n+1} = 1 + \frac{a}{y_n + y_{n-1}} - 2y_n - 2y_{n-1} - y_{n-2}, \tag{58}$$

其中 a 是非零常数。如 [42], 所示，该映射具有三次度增长，实际上是通过将简单的 QRT 映射与

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = 1 + \frac{a}{x_n}, \tag{59}$$

线性方程 $x_n = y_n + y_{n+1}$ 耦合而得到的。在余维1的情况下，映射 (58) 具有特别简单的奇点结构。从 y_0， y_1 一般的情形出发，以及 $y_2 = \infty$ 或 y_0， y_2 一般的情形，简单地得到循环奇点模式（周期6）；而情形 $y_2 + y_1 = 0$ （对于一般的 y_0）则得到以下非约束奇点模式：

$$\{-y_1, \infty^1, \infty^1, \infty^1, \infty^1, \infty^1, \cdots\}. \tag{60}$$

由于循环型模式对于去自治化过程完全不提供任何信息，如果希望通过将常数 a 改为某个精心选取的函数 a_n，使映射保持可积，从而对 (58) 进行去自治化，那么只能利用非约束模式 (60)。有趣的是，无论如何选择 a_n，模式 (60)（包括其中的重数）都保持不变。尽管如此，当任意选取 a_n 时，(58) 的非自治版本会表现出指数增长。（请注意，这并不矛盾：由于该映射的奇点模式只包含单个值 ∞, Halburd方法 [20, 21] 无法根据奇点模式求得度增长，而且模式中的重数与次数增长之间不存在直接关系。）

不过，映射 (58) 的奇点分析确实为我们提供了重要线索，揭示了此处究竟发生了什么。对于一般的 y_0 和 y_1, 计算 $y_2 = -y_1 + \epsilon$ 的连续迭代，我们得到$y_3 = a\epsilon^{-1}$ ，接着得到 $y_n = (-1)^{n+1}2a\epsilon^{-1}$ ，对所有 $n \geq 4$都成立，这正是非约束模式 (60) 所表示的内容。然而，对于非恒定的 a_n ，我们发现 $y_3 = a_1\epsilon^{-1}$ 和 $y_4 = -2a_1\epsilon^{-1}$ 以及 $y_5 = 2a_1\epsilon^{-1}$，但 ϵ 中留数的交替符号随后出现的模式被打破了。具体而言，我们发现

$y_6 = a_1(a_1 - a_2 - a_3 - a_4)/(a_2 - a_1 + a_3)\epsilon^{-1}, y_7 = 2a_1a_4/(a_2 - a_1 + a_3)\epsilon^{-1}$，并且在接下来的几次迭代中 $y_8 = -y_7$。要求函数 a_n 满足对于一般的 n， $y_6 = -y_5$，这相当于条件

$$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0, \tag{61}$$

这也意味着 $y_8 = -y_7 = y_6 = -y_5 = y_4$，正如在自治情形中一样。当然，这一条件不过是将 QRT 映射 (59) 去自治化为标准离散 $\mathrm{P_I}$ 方程 [1]时出现的约束。因此，在此约束下，映射 (58) 的非自治版本变为一个可积映射（因为它等价于一个离散 Painlev´方程与一个线性方程的耦合）。特别地，我们发现，在 ϵ 中观察到的由 $y_2 = -y_1 + \epsilon$诱导的奇点分析里留数的交替符号，本身就足以将次数增长从指数增长（对于任意 $a_n \neq 0$）降为三次增长。这表明，映射 (58) 中导致将指数次数增长降为多项式次数增长所需的非凡抵消，其不定性不仅源于所有连续迭代均为无穷大，还源于求和 y_n 和 y_{n-1} （截至 $n \geq 5$）时，两个这样的连续无穷大相互抵消。因此，这些抵消似乎是在常规奇点分析无法捕捉的更深层次上产生的。

实际上，从奇点模式（60）的形式可以清楚地看出，在 ϵ 奇点分析产生的“原始”版本中出现的留数，可以视为 $\mathbb{P}^3$中无穷远平面上各点的齐次坐标。例如，引入齐次坐标 y_{n-2} =Y_1/Y_0， $y_{n-1} = Y_2/Y_0$ 和 $y_n = Y_3/Y_0$，我们在 $\mathbb{P}^3$上得到如下映射，

$$[Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3] \mapsto [Y_0(Y_2+Y_3) : Y_2(Y_2+Y_3) : Y_3(Y_2+Y_3) : aY_0^2 + (Y_2+Y_3)(Y_0-Y_1) - 2(Y_2+Y_3)^2], \tag{62}$$

该映射在 [0 处奇异： Y_1 ： Y_2 ： $-Y_2$] （且仅在此奇异点集上奇异）。这里我们不再展开更多细节，但这一奇点在自治情形下会导致一个未约束奇点模式，而在去自治化过程中保持这一模式则得到条件（61）。然而，这里出现的问题是，映射（62）的这一奇异点集具有余维2，这与我们将奇点分析限制在余维1奇异点集上的基本假设相矛盾。因此，当对某些映射进行去自治化时，例如对于具有单个奇异值且重数齐次的未约束奇点模式的映射（如映射（58）），似乎需要进行更精细的分析，将余维高于1的奇异点集考虑在内。

Acknowledgements

RW 谨此感谢日本学术振兴会 (JSPS) 通过科研费项目 23K22401 提供的经费支持。

References

[1] B. Grammaticos、A. Ramani 和 V. Papageorgiou，可积映射是否具有 *Painlev´é* 性质？，《物理评论快报》**67**(1991) 1825-1828。

[2] G.R.W. Quispel、J.A.G. Roberts 和 C.J. Thompson，可积映射与孤子方程 *II*，《物理学 D》**34**(1989) 183-192。

[3] A. Ramani、B. Grammaticos、R. Willox、T. Mase 和 M. Kanki，奇点约束的救赎，《物理学杂志 A》**48**（2015年）11FT02。

[4] *A. Stokes*、*T. Mase*、*R. Willox* 和 *B. Grammaticos*，通过奇点约束实现非自治化与次数增长，《几何分析杂志》*35*（*2025*年）*65*。[5] *J. Diller* 和 *C. Favre*，曲面的双亚纯映射动力学，《美国数学杂志》*123*（*2001*年）*1135-1169*。[6] *T. Mase*，平面非自治映射的初始条件空间研究，《可积系统杂志》*3*（*2018*年）*xyy010*。[7] *T. Mase*、*R. Willox*、*B. Grammaticos* 和 *A. Ramani*，通过奇点约束实现非自治化：代数几何论证，《皇家学会会刊 *A*》*471*（*2015*年）*20140956*。[8] *J. Hietarinta* 和 *C-M. Viallet*，射影空间中的离散 *Painlev´é I* 与奇点约束，《混沌、孤子与分形》*11*（*2000*年）*29-32*。[9] *J. Blanc* 和 *J. D´eserti*，平面双有理映射的次数增长，《比萨高等师范学校科学年鉴》*XIV*（*2015*年）*507-533*。[10] *S. Cantat*，论曲面的双有理变换群，《数学年刊》*174*（*2011*年）*299-340*。[11] *V. I. Arnold*，交点复杂度的动力学，《巴西数学学会通报》*21*（*1990*年）*1-10*。[12] *A.P. Veselov*，映射动力学中的增长与可积性，《数学物理通讯》*145*（*1992*年）*181-193*。[13] *T. Takenawa*，离散动力系统中的代数熵与初值空间，《物理学杂志 *A*：数学与一般》*34*（*2001*年）*10533-10545*。[14] *E. Bedford* 和 *K. Kim*，论高维双有理映射的次数增长，《几何分析杂志》*14*（*2004*年）*567-596*。[15] *J.P. Bell*、*J. Diller*、*M. Jonsson* 和 *H. Kriger*，具有超越动力学次数的双有理映射，《伦敦数学学会会刊》*3*（*2024*年）*128:e12573*。[16] *J. Alonso*、*Yu.B. Suris* 和 魏康宁，利用多项式相对于爆破的指标研究双有理映射的动力学次数 *I*。一般理论与二维例子（*2023*年）*arXiv:2303.*15864 [*math.DS*].[17] *J. Alonso*、*Yu.B. Suris* 和 魏康宁，利用多项式相对于爆破的指标研究双有理映射的动力学次数 *II*。三维例子（*2023*年）*arXiv:2307.*09939 [*math.DS*].[18] *C-M. Viallet*，论迭代双有理映射的次数增长，*arXiv:1909.*13259 [*math.AG*].[19] *C-M. Viallet*，实验数学练习：计算一个映射的代数熵，《开放通讯非线性数学物理》]*ocnmp*[特刊*1*（*2024*年）第*1-11*页。[20] *R.G. Halburd*，离散方程次数增长与熵的初等计算，《皇家学会会刊 *A*》*473*（*2017*年）*20160831*。[21] *A. Ramani*、*B. Grammaticos*、*R. Willox* 和 *T. Mase*，计算代数熵：一种快速方法，《物理学杂志 *A*》*50*（*2017*年）*185203*。[22] *T. Mase*、*R.Willox*、*A. Ramani* 和 *B. Grammaticos*，奇点约束作为可积性判据，《物理学杂志 *A*》第*52*卷（*2019*年）*205201*。[23] *A. Ramani*、*B. Grammaticos*、*R. Willox*、*T. Mase* 和 *J. Satsuma*，计算具有非约束奇异性的映射的代数熵，《可积系统杂志》*3*（*2018*年）*xyy006*。[24] *A. Ramani*、*B. Grammaticos*、*A.S. Carstea* 和 *R. Willox*，通过奇点研究获得高阶映射的增长，《物理学杂志 *A*：数学与理论》*58*（*2025*年）*115201*。

[25] R. Willox、T. Mase、A. Ramani与B. Grammaticos，高阶离散方程的奇异性与增长，《运筹、通信与非线性数学物理》，特刊第2期（2024年）46-64。[26] R. G. Halburd，丢番图可积性，《物理学杂志 A：数学与一般》38（2005年）L1-L7。[27] J.H. Silverman，射影空间上支配有理自映射的动力学次数、算术熵与典范高度，《遍历理论与动力系统》34（2012年）647-678。[28] S. Kawaguchi与J.H. Silverman，论代数簇有理自映射的动力学次数与算术次数，《纯粹与应用数学杂志》713（2016年）第21-48页。[29] J.H. Silverman，阿贝尔簇上的算术次数与动力学次数，J. Th´eorie des Nombres de Bordeaux 29（2017年），151-167。[30] Y. Matsuzawa、K. Sano与T. Shibata，特征零函数域上动力系统的算术次数，《数学杂志》290（2018年）1063-1083。[31] B. Grammaticos、A. Ramani、R. Willox与T. Mase，检测离散可积性：奇点方法，载于《非线性系统及其卓越的数学结构：第一卷》，N. Euler（编）（CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2018年）（第44–73页）。[32] M.D. Kruskal、K.M. Tamizhmani、B. Grammaticos与A. Ramani，非对称离散Painlev´e方程，《正则与混沌动力学》5（2000年）273-280。[33] B. Grammaticos、A. Ramani、A.S. Carstea与R. Willox，一种计算双有理映射次数增长的快速算法方法，《数学》13（2025年）737。[34] T. Mase、R. Willox、B. Grammaticos与A. Ramani，可积映射与反约束概念，《物理学杂志 A：数学与理论》51（2018年）265201。[35] T. Tokihiro、D. Takahashi、J. Matsukidaira与J. Satsuma，经由极限过程从孤子方程到可积元胞自动机，《物理评论快报》76（1996年）3247-3250。[36] A. Ramani、B. Grammaticos与Y. Ohta，经由极限过程从连续Painlev´e方程得到的离散可积系统，《非线性》13（2000年）1073-1085。[37] T. Takenawa，与不定型根系相关联的离散动力系统，《数学物理通讯》224（2001年）657-681。[38] J. Hietarinta与C-M. Viallet，离散系统中的奇点约束与混沌，《物理评论快报》81（1998年）325-328。[39] A.S. Carstea与T. Takenawa，两个四维离散Painlev´e方程的初始条件空间与几何，《物理学杂志 A：数学与理论》52（2019年）275201。[40] A. Stokes、T. Takenawa与A.S. Carstea，论具有对称类型 $A_1^{(1)}$ 的a q-Painlev´e I方程之四维扩展的几何，《物理学杂志 A：数学与理论》58（2025年）405201。[41] B. Grammaticos、A. Ramani、R. Willox、T. Mase与J. Satsuma，奇点约束与完全去自治化：一种离散可积性判据，《物理学 D》313（2015年）11-25。[42] N. Joshi与C-M. Viallet，具有不变曲面的有理映射，《综合系统杂志》3（2018年）xyy017。