arXiv:2602.04156v1 [math.CV] 4 Feb 2026

克利福德代数上切片 Dirac 正则映射的增长定理

Ting Yang 与 Xinyuan Dou

Abstract. 本文基于 $O(3)$-茎映射的概念，定义了克利福德代数上一类多变量切片 Dirac 正则映射。我们证明，切片映射在切片狄拉克算子作用下为零，这等价于其 $O(3)$-茎映射满足柯西-黎曼方程的推广形式。此外，我们还建立了克利福德代数切片锥中切片 Dirac 正则星形映射以及切片 Dirac 正则 k 重对称映射的增长定理。

1. Introduction

切片正则函数理论最初由 Gentili 与 Struppa 针对四元数提出 [6, 7], ，它将单复变量全纯函数推广到高维且非交换的情形。该理论随后被推广到克利福德代数 [1, 3] 与八元数 [8], 的框架，并进而应用于非交换算子的函数演算 [2]。此后，切片分析被推广到更一般的情形，包括实交错代数 [10], 、左交错代数以及偶数维数的实向量空间 [5]。在这一过程中，切片技术发挥了重要作用。至于八元数的情形，我们可以把八元数视为复平面的并，从而使八元数具有书本结构:

$$\mathbb{O} = \bigcup_{I \in \mathbb{S}} \mathbb{C}_I,$$

其中 I 是 $\mathbb{O}$中的 $\mathbb{S}$ 八元数的所有虚单位 I 以及复平面 $\mathbb{C}_I = Span_{\mathbb{R}}\{1, I\}$。切片分析领域已有大量研究成果。与上述复结构不同，M. Jin 和 G. Ren [12] 开创了八元数代数上的切片Dirac正则函数研究 $\mathbb{O}$，该研究将八元数分解为四元数平面的并:

$$\mathbb{O} = \bigcup_{I,J \in \mathbb{S},\ I \perp J} \mathbb{H}_{I,J},$$

其中 $\mathbb{H}_{I,\ J} := Span_{\mathbb{R}}\{1, I, J, IJ\}$ 与 $I,\ J \in \mathbb{S}$ 以及 $I \perp J$。文献 [12] 建立了该表示公式、柯西–庞培欧积分公式，以及泰勒级数和洛朗级数展开公式。后来，Ghiloni [9] 使用“切片 Fueter 正则函数”一词来表示切片Dirac正则函数，并证明切片 Fueter 正则函数是标准的（复）切片函数。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：30G35；次要分类：32A30,32D05。
Key words and phrases. 切片狄拉克算子；克利福德代数；表示公式；切片拓扑；增长定理。这项工作得到中国国家自然科学基金（12401104）和中央高校基本科研业务费专项资金（WK0010000091）的资助。1

他们为单变量的切片 Fueter 正则函数获得了具有整体性质的柯西型积分公式，以及其最大模原理的一个版本。

本文旨在引入克利福德代数 $(\mathbb{R}_m)^n$上的切片 Diac 正则映射，并推广其归一化单叶映射子类的增长定理。此外，我们还得到了克利福德代数切片锥中切片 Dirac 正则 k 重对称映射的增长定理。

2. Priliminaries

我们先简要讨论本文相关的一些内容。实克利福德代数 $\mathbb{R}_m$ 是由 m 个基元素 e_1、…、 e_m 在 $\mathbb{R}$上生成的泛结合代数，满足以下关系

$$e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

作为实向量空间， $\mathbb{R}_m$ 的维数为 2^m. 。每个元素 $x \in \mathbb{R}_m$ 都可表示为

$$x = \sum_{A\in\mathcal{P}(m)} x_A e_A,$$

其中

$$\mathcal{P}(m) = \{(h_1, \ldots, h_r) \in \mathbb{N}^r |\ r = 1, \ldots, m, 1 \le h_1 \le \cdots \le h_r \le m\}.$$

对于每个 $A = \{(h_1$、…、 $h_r) \in \mathcal{P}(m)\}$ ，系数 $x_A \in \mathbb{R}$ 以及乘积$e_A := e_{h_1}e_{h_2}\ldots e_{h_r}$ 是克利福德代数 $\mathbb{R}_m$. 的基元素。克利福德代数的单位元对应于 $A = \emptyset$，并令 $e_\emptyset = 1$. 。照例，我们将实数域 $\mathbb{R}$ 与由单位元生成的 $\mathbb{R}_m$ 的子代数等同起来。

Let

$$\mathbb{S}_m = \{J \in \mathbb{R}_m |\ J^2 = -1\}.$$

$\mathbb{S}_m$ 的元素称为克利福德代数 $\mathbb{R}_m$. 中 -1 的平方根

由于克利福德代数具有非交换性，我们通常考虑 $(\mathbb{R}_m)^n$ 的子集：克利福德数的 n 维切片锥

$$(\mathbb{R}_m)^n_s := \bigcup_{I\in\mathbb{S}_m} \mathbb{C}^n_I,$$

其中 $\mathbb{C}^n_I = \mathbb{R}^n + I\ \mathbb{R}^n$ 满足 $I \in \mathbb{S}_m$。它为研究切片 $\mathbb{C}_{I_1} \times \mathbb{C}_{I_2} \cdots \times \mathbb{C}_{I_n}$. 上的全纯性提供了一种合适的方法

3. Main results

设 $A = (a_{i,\ j})$ 为一个 $\ell_1 \times \ell_2$ 实矩阵。记

$$A_{\langle n,m\rangle} := (a_{i,j}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_m}) \in [\mathrm{End}(\mathbb{R}^n_m)]^{\ell_1\times\ell_2},$$

其中

$$\mathbb{R}^n_m := (\mathbb{R}_m)^n.$$

并且 $\mathrm{End}(\mathbb{R}_m)$ 表示从 $\mathbb{R}^n_m$ 到 $\mathbb{R}^n_m$ 的实线性映射类。

用 $O(3)$ 表示 3×3 正交实矩阵群。记

$$O^*(3) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_m} & \\ & Q_{\langle n,m\rangle} \end{pmatrix} : Q \in O(3) \right\} \subset [\mathrm{End}(\mathbb{R}^n_m)]^{4\times 4}.$$

O(3)-茎映射理论在构造切片 Dirac 正则映射中起着重要作用，我们首先引入 O(3)-茎映射的定义域。记

$$\mathrm{R}^{4n} := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_\ell \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n_m,\ \ell = 0,1,2,3. \right\} \subset (\mathbb{R}^n_m)^{4\times 1}.$$

约定： 我们将 R^{4n} 中的元素视为 4×1 $\mathbb{R}^n_m$-矩阵。此外，本文中矩阵的元素被视为 $\mathbb{R}^n_m$ 中的元素或 End($\mathbb{R}^n_m$)中的元素。

定义 3.1. 设 $D \subset \mathrm{R}^{4n}$ 是一个开集。若 D 满足以下条件，则称其为 $O(3)$-不变的：

$$gx \in D, \qquad \forall\ x \in D \quad and \quad g \in O^*(3).$$

定义 3.2. 设 $D \subset \mathrm{R}^{4n}$ 是一个 $O(3)$-不变开集。若映射 $\mathcal{F}\colon D \to (\mathbb{R}^n_m)^{4\times 1}$ 满足以下条件，则称其为 $O(3)$-茎映射：

$$\mathcal{F}(gx) = g\mathcal{F}(x), \qquad \forall\ x \in D \quad and \quad g \in O^*(3). \tag{3.1}$$

在下文中，假设开集 $D \subset \mathrm{R}^{4n}$ 是 O(3)-不变的。以下相关结果有助于研究 O(3)-茎映射的性质。

命题 3.3. 设

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix} : D \to (\mathbb{R}^n_m)^{4\times 1}$$

是 $O(3)$-茎映射，其中 $F_\ell\colon D \to \mathbb{R}^n_m, \ell = 0, 1, 2, 3$。则

$$\mathcal{F}_2(x) = 0 \quad and \quad \mathcal{F}_3(x) = 0, \qquad \forall\ x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D, \tag{3.2}$$

其中 x_0、$x_1 \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n_m$。

证明：设 $\mathcal{F}$ 是 D 上的一个 O(3)-茎映射，则根据定义， D 是 O(3)-不变的。由于 $x = (x_0,\ x_1,\ 0,\ 0) \in D$，我们取

$$g = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & \mathbb{I}_{n\times n} & & \\ & & -\mathbb{I}_{n\times n} & \\ & & & \mathbb{I}_{n\times n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & \mathbb{I}_{n\times n} & & \\ & & \mathbb{I}_{n\times n} & \\ & & & -\mathbb{I}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

分别代入方程 (3.1)。容易推出 (3.2) 成立。 □

记

$$\varphi^{I,J} := (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_m}, I\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_m}, J\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_m}, IJ\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_m}).$$

在不引起歧义的情况下，我们将 $\varphi^{I,\ J}$ 缩写为 (1，I，J，IJ)。

记

$$[D] := \{\varphi^{I,J}(x) \in (\mathbb{R}_m)^n_s :\ x \in D \text{ and } I, J \in \mathbb{S}_m \text{ with } I \perp J\}.$$

特别地，我们定义

$$B_{\mathbb{R}^{4n}} := \{x \in R^{4n} : |x| < 1\},$$

and

$$\mathbb{B} := \{\varphi^{I,J}(x) \ \in (\mathbb{R}_m)_s^n : \ x \in D \cap B_{\mathbb{R}^{4n}} \text{ and } I, J \in \mathbb{S}_m \text{ with } I \perp J\}.$$

令 $I \in \mathbb{S}_m$。记

$$[D]_I := [D] \bigcap \mathbb{C}_I^n.$$

容易推得，上述 $\mathbb{B}$ 实际上是实 Clifford 代数切片锥 $\mathbb{R}_m^n$中的多变量单位球，即

$$\mathbb{B} = \{q \in (\mathbb{R}_m)_s^n : |q| < 1\}.$$

接下来我们引入 $O(3)$-茎映射，它将单变量的 $O(3)$-茎函数推广到了高维。

定义 3.4。映射 $f : [D] \to \mathbb{R}_m^n$ 称为 $O(3)$-切片映射，如果存在 $O(3)$-茎映射$\mathcal{F} : D \to (\mathbb{R}_m)^{4n}$ 使得

$$f \circ \varphi^{I,J} := \varphi^{I,J} \circ \mathcal{F}, \qquad \forall\ I, J \in \mathbb{S}_m \quad with \quad I \perp J. \tag{3.3}$$

用 $\mathcal{S}_{O(3)}([D], \mathbb{R}_m^n)$ 表示从 $[D]$ 到 $\mathbb{R}_m^n$的 $O(3)$-切片映射类。

命题 3.5。设 $\mathcal{F} : D \to (\mathbb{R}_m)^{4n}$ 是 $O(3)$-茎映射。存在唯一映射$f : [D] \to \mathbb{R}_m^n$ 满足 (3.3)。记

$$\mathcal{I}_{O(3)}(\mathcal{F}) := f.$$

证明。我们只需证明，对于每个 $x, y \in D, I, J, I', J' \in \mathbb{S}_m$，满足 $I \perp J$,$I' \perp J'$ 且

$$\varphi^{I,J}(x) = \varphi^{I',J'}(y), \tag{3.4}$$

then

$$\varphi^{I,J} \circ \mathcal{F}(x) = \varphi^{I',J'} \circ \mathcal{F}(y). \tag{3.5}$$

记

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

其中某个 $\mathcal{F}_\ell$ 为: $D \to \mathbb{R}_m^n$,且 $x_\ell, y_\ell \in \mathbb{R}^n,\ \ell = 0,1,2,3$。方程 (3.4) 表明

$$x_0 = y_0 \qquad \text{and} \qquad x_1 I + x_2 J + x_3 IJ = y_1 I' + y_2 J' + y_3 I'J' = rH, \tag{3.6}$$

对于某些 $r \in \mathbb{R}^n$ 和 $H \in \mathbb{S}_m$。容易验证，存在 $J_1 \in \mathbb{S}_m$ 使得 $J_1 \perp H$且 $g \in O^*(3)$，从而

$$(1, I, J, IJ)g = (1, H, J_1, HJ_1).$$

Then

$$\begin{aligned}(1, H, J_1, HJ_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =& x_0 + rH = (1, I, J, IJ)x \\ =& (1, I, J, IJ)gg^T x = (1, H, J_1, HJ_1)g^T x.\end{aligned}$$

根据 1， H， J_1， HJ_1 两两正交，

$$g^T x = \begin{pmatrix} x_0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v. \tag{3.7}$$

根据命题 3.3， $\mathcal{F}_2(v) = \mathcal{F}_3(v) = 0$。于是

$$\begin{aligned} \varphi^{I,J} \circ \mathcal{F}(x) =& (1, I, J, IJ)\mathcal{F}(gg^T x) = (1, I, J, IJ)g\mathcal{F}(g^T x) \\ =& (1, H, J_1, HJ_1)\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}_0(v) + H\mathcal{F}_1(v). \end{aligned}$$

同理，

$$\varphi^{I',J'} \circ \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}_0(v) + H\mathcal{F}_1(v).$$

因此，(3.5) 成立。 □

注记 3.6. 在 $n = 1$的情况下，上述映射 f 可化为单个 *Clifford* 变量中的一个 $O(3)$-切片函数，这与单个八元数变量中的 [12] 情形类似。

记

$$\mathcal{S}^1_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m) := \left\{ f = \mathcal{I}_{O(3)}(\mathcal{F}) : [D] \to \mathbb{R}^n_m \text{ with } \mathcal{F} \in C^1(D) \right\}.$$

对于一个 $O(3)$-切片映射 f，我们有如下表示公式：

命题 3.7. 设 $f \in \mathcal{S}_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m)$，设 I， J， I'， $J' \in \mathbb{S}_m$ 其中 $I \perp J$， $I' \perp J'$，则

$$f \circ \varphi^{I',J'} = \varphi^{I',J'} \circ \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -I & -I & I & I \\ -J & J & -J & J \\ -IJ & IJ & IJ & -IJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \circ \varphi^{I,J} \\ f \circ \varphi^{I,-J} \\ f \circ \varphi^{-I,J} \\ f \circ \varphi^{-I,-J} \end{pmatrix} \right). \tag{3.8}$$

证明。设 I， J， I'， $J' \in \mathbb{S}_m$ 其中 $I \perp J$ 且 $I' \perp J'$，对每个 $x \in D$，我们有

$$\varphi^{I,J}(x),\ \varphi^{I',J'}(x) \in [D].$$

因为 D 是 $O(3)$-不变的，则

$$\varphi^{I,-J}(x), \varphi^{-I,J}(x), \varphi^{-I,-J}(x) \in [D].$$

由于 $f \in \mathcal{S}_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m)$，由式 (3.3)，

$$\begin{pmatrix} f \circ \varphi^{I,J} \\ f \circ \varphi^{I,-J} \\ f \circ \varphi^{-I,J} \\ f \circ \varphi^{-I,-J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & I & J & IJ \\ 1 & I & -J & -IJ \\ 1 & -I & J & -IJ \\ 1 & -I & -J & IJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}.$$

我们可以得到 $O(3)$-茎映射 $\mathcal{F}$ 的解：

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & I & J & IJ \\ 1 & I & -J & -IJ \\ 1 & -I & J & -IJ \\ 1 & -I & -J & IJ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f \circ \varphi^{I,J} \\ f \circ \varphi^{I,-J} \\ f \circ \varphi^{-I,J} \\ f \circ \varphi^{-I,-J} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -I & -I & I & I \\ -J & J & -J & J \\ -IJ & IJ & IJ & -IJ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f\circ\varphi^{I,J} \\ f\circ\varphi^{I,-J} \\ f\circ\varphi^{-I,J} \\ f\circ\varphi^{-I,-J} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

另一方面，根据方程 (3.3)，我们得到

$$f\circ\varphi^{I',J'} = \varphi^{I',J'}\circ\mathcal{F} = \varphi^{I',J'}\circ\begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

利用(3.9)和(3.10)，我们即得所求的(3.8)。 □

类比一元函数的情形，我们给出如下定义:

定义3.8. 设 $f \in \mathcal{S}^1_{O(3)}([D],\ \mathbb{R}^n_m)$ 及其 $O(3)$-茎映射 $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}$.

If for each $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in D$,

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial x_0} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial x_0} - \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial x_0} - \frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial x_3} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial x_0} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

则称 f 为 $[D]$上的切片*Dirac*正则映射，并记为 $f \in \mathcal{SR}_{O(3)}([D])$。

当 $n = 1$时，我们知道 f 是一个切片Dirac正则函数，类似于 [12]中的八元数情形。此外，利用 $O(3)$-茎映射的性质，我们得到切片 Dirac 正则映射的等价条件。

命题 3.9. 设映射 $f \in \mathcal{S}^1_{O(3)}([D],\mathbb{R}^n_m)$。则 $f \in \mathcal{SR}_{O(3)}([D])$ 当且仅当存在 I、$J \in \mathbb{S}_m$，且 $I \perp J$，使得对每个 $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in D$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + I\frac{\partial}{\partial x_1} + J\frac{\partial}{\partial x_2} + IJ\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(f\circ\varphi^{I,J}(x)\right) = 0.$$

证明。设 $f \in \mathcal{S}^1_{O(3)}([D],\mathbb{R}^n_m)$，存在一个 $O(3)$-茎映射 $\mathcal{F} = \begin{pmatrix}\mathcal{F}_0\\ \mathcal{F}_1\\ \mathcal{F}_2\\ \mathcal{F}_3\end{pmatrix}$，使得 $f = \mathcal{I}_{O(3)}(\mathcal{F})$。对任意 $x = \begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \in D$ 与 $I,\ J \in \mathbb{S}_m$ 且 $I \perp J$，我们有

$$f \circ \varphi^{I,J}(x) = \varphi^{I,J} \circ \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_0(x) + I\mathcal{F}_1(x) + J\mathcal{F}_2(x) + IJ\mathcal{F}_3(x).$$

令 $\mathbb{I} := (1, I, J, IJ)$ 和切片狄拉克算子

$$D_{\mathbb{I}} := \partial x_0 + I\partial x_1 + J\partial x_2 + IJ\partial x_3,$$

here

$$\partial x_\ell := \frac{\partial}{\partial x_\ell} \quad \text{for } \ell = 0,1,2,3.$$

Then

$$\begin{aligned}
&D_{\mathbb{I}}(f \circ \varphi^{I,J}(x))\\
=&\left(\partial x_0 + I\partial x_1 + J\partial x_2 + IJ\partial x_3\right)\left(\mathcal{F}_0(x) + I\mathcal{F}_1(x) + J\mathcal{F}_2(x) + IJ\mathcal{F}_3(x)\right)\\
=&\{(\partial x_0, -\partial x_1, -\partial x_2, -\partial x_3) + I\left(\partial x_1, \partial x_0, -\partial x_3, \partial x_2\right)\\
&+ J\left(\partial x_2, \partial x_3, \partial x_0, -\partial x_1\right) + IJ\left(\partial x_3, -\partial x_2, \partial x_1, \partial x_0\right)\}\begin{pmatrix}\mathcal{F}_0(x)\\ \mathcal{F}_1(x)\\ \mathcal{F}_2(x)\\ \mathcal{F}_3(x)\end{pmatrix}\\
=&(\nabla g_1^T + I\nabla g_2^T + J\nabla g_3^T + IJ\nabla g_4^T)\mathcal{F}(x)\\
=&\nabla g_1^T\mathcal{F}(x) + I\nabla g_2^T\mathcal{F}(x) + J\nabla g_3^T\mathcal{F}(x) + IJ\nabla g_4^T\mathcal{F}(x).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

若 $f \in \mathcal{SR}_{O(3)}([D])$，则方程 (3.11) 成立，即

$$\nabla g_\ell^T\mathcal{F}(x) = 0, \quad \forall x \in D \text{ and } \ell = 1,2,3,4.$$

因此，由方程 (3.12)，$D_{\mathbb{I}}(f \circ \varphi^{I,\ J}(x)) = 0$ 于 D 上。

反之，若 $D_{\mathbb{I}}(f \circ \varphi^{I,\ J}(x)) = 0$ 于 D上，下面证明，对于 $\ell = 1,\ 2,\ 3,\ 4$，$\nabla g_\ell^T\mathcal{F}(x) = 0$。事实上，令 $x \in D$，存在 $r \in \mathbb{R}^n$ 和 $H \in \mathbb{S}_m$，使得 $\varphi^{I,\ J}(x) = x_0 + Hr$。容易验证，存在

$$g = \begin{pmatrix}\mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & \lambda_1\mathbb{I}_{n\times n} & * & * \\ & \lambda_2\mathbb{I}_{n\times n} & * & * \\ & \lambda_3\mathbb{I}_{n\times n} & * & *\end{pmatrix} \in O^*(3)$$

其中 $\lambda_\ell \in \mathbb{R}, \ell = 1,2,3$ 满足 (3.7)，即

$$\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}x_0\\ r\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & \lambda_1\mathbb{I}_{n\times n} & * & * \\ & \lambda_2\mathbb{I}_{n\times n} & * & * \\ & \lambda_3\mathbb{I}_{n\times n} & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ r\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Then

$$x_\ell = \lambda_\ell r, \qquad \ell = 1,2,3.$$

记

$$[x_\ell; r] := \lambda_\ell$$

and $v := \begin{pmatrix} x_0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Let

$$g_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & -\mathbb{I}_{n\times n} & & \\ & & -\mathbb{I}_{n\times n} & \\ & & & -\mathbb{I}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

and

$$g_2 = \begin{pmatrix} & \mathbb{I}_{n\times n} & & \\ \mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & & & -\mathbb{I}_{n\times n} \\ & & \mathbb{I}_{n\times n} & \end{pmatrix},$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} & & \mathbb{I}_{n\times n} & \\ & & & \mathbb{I}_{n\times n} \\ \mathbb{I}_{n\times n} & & & \\ & -\mathbb{I}_{n\times n} & & \end{pmatrix}$$

and

$$g_4 = \begin{pmatrix} & & & \mathbb{I}_{n\times n} \\ & & -\mathbb{I}_{n\times n} & \\ & \mathbb{I}_{n\times n} & & \\ \mathbb{I}_{n\times n} & & & \end{pmatrix}.$$

那么 g_1，g_2，g_3，g_4 是 $[\mathsf{End}(\mathbb{R}^n_m)]^{4\times 4}$ 中的正交矩阵。

Let

$$\nabla = (\partial x_0, \partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) \quad \text{and} \quad \nabla_1 = (\partial x_0, \partial r,\ 0\ , 0\ ).$$

根据 g 的选取，我们得到 $\nabla = \nabla_1 g^T$。利用 $\mathcal{F}$ 是 D 上的 $O(3)$-茎映射这一事实，我们有

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(gv) = g\mathcal{F}(v). \tag{3.13}$$

根据 g 的特征，

$$g\mathcal{F}(v) = g\begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(v) \\ \mathcal{F}_1(v) \\ \mathcal{F}_2(v) \\ \mathcal{F}_3(v) \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(v) \\ \mathcal{F}_1(v) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(v) \\ [x_1; r]\mathcal{F}_1(v) \\ [x_2; r]\mathcal{F}_1(v) \\ [x_3; r]\mathcal{F}_1(v) \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

这里，$\mathcal{F}_2(v)$ 和 $\mathcal{F}_3(v)$ 根据命题 3.3 等于零。结合方程（3.13）和方程（3.14），可得

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(v) \\ [x_1; r]\mathcal{F}_1(v) \\ [x_2; r]\mathcal{F}_1(v) \\ [x_3; r]\mathcal{F}_1(v) \end{pmatrix}.$$

根据式 (3.12)，我们得到

$$D_{\mathbb{I}}(f\circ\varphi^{I,J}(x))=(\nabla g_1^T+I\nabla g_2^T+J\nabla g_3^T+IJ\nabla g_4^T)\begin{pmatrix}\mathcal{F}_0(v)\\ [x_1;r]\mathcal{F}_1(v)\\ [x_2;r]\mathcal{F}_1(v)\\ [x_3;r]\mathcal{F}_1(v)\end{pmatrix}.$$

注意，对于 $\ell=1$，2，3，4。，$\nabla g_\ell^T=\nabla_1 g^T g_\ell^T=\nabla_1(g_\ell g)^T$。于是

$$\begin{aligned}&D_{\mathbb{I}}(f\circ\varphi^{I,J}(x))\\ &=\left(\nabla_1(g_1g)^T+I\nabla_1(g_2g)^T+J\nabla_1(g_3g)^T+IJ\nabla_1(g_4g)^T\right)\begin{pmatrix}\mathcal{F}_0(v)\\ [x_1;r]\mathcal{F}_1(v)\\ [x_2;r]\mathcal{F}_1(v)\\ [x_3;r]\mathcal{F}_1(v)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

由于 $D_{\mathbb{I}}(f\circ\varphi^{I,J}(x))=0$ 在 D上，我们考虑

$$x=\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_0\\ -x_1\\ -x_2\\ x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_0\\ -x_1\\ x_2\\ -x_3\end{pmatrix}\text{ and }\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ -x_2\\ -x_3\end{pmatrix}$$

分别记为

$$A:=\begin{pmatrix}\mathcal{F}_0(v)\\ [x_1;r]\mathcal{F}_1(v)\\ [x_2;r]\mathcal{F}_1(v)\\ [x_3;r]\mathcal{F}_1(v)\end{pmatrix}.$$

由式 (3.15)，显然

$$\begin{cases}\left(\nabla_1(g_1g)^T+I\nabla_1(g_2g)^T+J\nabla_1(g_3g)^T+IJ\nabla_1(g_4g)^T\right)A=0\\ \left(\nabla_1(g_1g)^T-I\nabla_1(g_2g)^T-J\nabla_1(g_3g)^T+IJ\nabla_1(g_4g)^T\right)A=0\\ \left(\nabla_1(g_1g)^T-I\nabla_1(g_2g)^T+J\nabla_1(g_3g)^T-IJ\nabla_1(g_4g)^T\right)A=0\\ \left(\nabla_1(g_1g)^T+I\nabla_1(g_2g)^T-J\nabla_1(g_3g)^T-IJ\nabla_1(g_4g)^T\right)A=0\end{cases}$$

因此

$$\nabla_1(g_\ell g)^T A=0\text{ for }\ell=1,2,3,4.$$

即,

$$\nabla g_\ell^T\mathcal{F}(x)=0\text{ for }\ell=1,2,3,4.$$

因此，等式 (3.11) 成立，进而 f 是 $[D]$上的切片狄拉克映射。 □

根据 $O(3)$-茎映射的特征，我们推导出：如果一个$O(3)$-切片映射 f 保持一个切片不变，那么 $|f|$的最大值和最小值可以在这个保持不变的切片上取得。

定理 3.10。令 $f \in \mathcal{S}_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m)$ 和 $f([D] \cap \mathbb{C}^n_I)$ 其中某个 $I' \in \mathbb{S}_m$.

Let $I, J \in \mathbb{S}_m$ with $I \perp J$. For all $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in D$, we have

$$\max_{x \in D} |f \circ \varphi^{I,J}(x)| = \max\{|f(x_0 + rI')|, |f(x_0 - rI')|\},$$

$$\min_{x \in D} |f \circ \varphi^{I,J}(x)| = \min\{|f(x_0 + rI')|, |f(x_0 - rI')|\},$$

其中 $r \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\varphi^{I,J}(x) = x_0 + rH$，其中某个 $H \in \mathbb{S}_m$.

Proof. Suppose $f \in \mathcal{S}_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m)$, there exists an $O(3)$-stem mapping $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}$ such that $f = \mathcal{I}(\mathcal{F})$. Let $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in D$ with $\varphi^{I,J}(x) = x_0 + rH$. Let $v = \begin{pmatrix} x_0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, let $J_1 \in \mathbb{S}_m$ with $J_1 \perp H$, then $\varphi^{I,J}(x) = x_0 + rH = \varphi^{H,J_1}(v)$. Since $f \in \mathcal{S}_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m)$, according to equation (3.3),

$$f \circ \varphi^{I,J}(x) = f \circ \varphi^{H,J_1}(v) = \varphi^{H,J_1} \circ \mathcal{F}(v).$$

根据命题 3.3，我们得到 $\mathcal{F}(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(v) \\ \mathcal{F}_1(v) \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 因此

$$f \circ \varphi^{I,J}(x) = f(x_0 + rH) = \mathcal{F}_0(v) + H\mathcal{F}_1(v). \tag{3.16}$$

注意到 $x_0 + rI', x_0 - rI' \in [D]$, 由方程 (3.16),

$$f(x_0 + rI') = \mathcal{F}_0(v) + I'\mathcal{F}_1(v),$$

$$f(x_0 - rI') = \mathcal{F}_0(v) - I'\mathcal{F}_1(v).$$

由此可得

$$\mathcal{F}_0(v) = \frac{1}{2}\left[f(x_0 + rI') + f(x_0 - rI')\right].$$

$$\mathcal{F}_1(v) = \frac{I'}{2}\left[f(x_0 - rI') - f(x_0 + rI')\right].$$

根据假设，f 在 $\mathbb{C}^n_{I'}$, 上保持切片，因此

$$\mathcal{F}_0(v),\ \mathcal{F}_1(v) \in \mathbb{C}^n_{I'}.$$

结合公式 (3.16)，$|f \circ \varphi^{I,J}(x)|$ 在 $\mathbb{C}^n_{I'}$ 中取到极值，（详情见 [14]。）□

4. Growth Theorem In The Starlike OR Convex Domains

正如参考文献 [4] 所指出的，正则幂级数的收敛域是一个σ-球，它通常在欧几里得拓扑下不是开集。为了适应切片分析的结构，我们需要使用以下切片拓扑。

定义 4.1. 我们在 $(\mathbb{R}_m)_s^n$ 上定义切片拓扑:

$$\tau_s((\mathbb{R}_m)_s^n) := \{U \subset (\mathbb{R}_m)_s^n : U_I \in \tau(\mathbb{C}_I^n) \text{ for any } I \in \mathbb{S}_m\},$$

其中 $U_I := U \cap \mathbb{C}_I^n$，而 $\tau(\mathbb{C}_I^n)$ 是 $\mathbb{C}_I^n$.上的欧几里得拓扑

现在，我们可以推广克利福德代数上切片 Dirac 正则映射子类的增长定理。

定义 4.2. 若集合 $[D] \in (\mathbb{R}_m)_s^n$ 包含零点，且连接零点与其中每个点 $q \in [D]$ 的闭线段都完全包含在 $[D]$.中，则称该集合为星形。

定义 4.3. 若集合 $[D] \in (\mathbb{R}_m)_s^n$ 在某个 $I \in \mathbb{S}_m$.中是星形的，则称该集合为切片星形。

注 4.4. 根据集合 $[D]$ 的构造可知， $[D]$ 是星形的，当且仅当 $[D]$ 是切片星形的。

定义 4.5. 若集合 $[D] \in (\mathbb{R}_m)^n$ 满足：对于某个 $I \in \mathbb{S}_m$， $[D]_I$ 在 $\mathbb{C}_I^n$ 中是凸的，即 $[D]_I$ 关于其每个点都是星形的，则称其为切片凸集。

定义 4.6. 若存在某个 $I \in \mathbb{S}_m$ 和 $z \in [D]_I$、$\theta \in \mathbb{R}$，使得 $e^{I\theta} z \in [D]_I$.，则称集合 $[D] \in (\mathbb{R}_m)_s^n$ 为切片圆形集。

定义 4.7. 设 $I \in \mathbb{S}_m$，映射 $f: \mathbb{B}_I \to \mathbb{C}_I^n$ 称为 k 重对称的，若

$$e^{-2\pi I/k} f(e^{2\pi I/k} q) = f(q) \quad \text{for all } q \in \mathbb{B}_I,$$

其中 k 是正整数。

定义 4.8. 若域 $[D] \in (\mathbb{R}_m)_s^n$ 满足
(i) $[D] \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$;$(ii)$ $[D]_I$ 对于任意 $I \in \mathbb{S}_m$.,
都是 $\mathbb{C}_I^n$ 的一个域

根据切片拓扑下的 [14, 引理 4.6], ，通过定义函数得到 $[D]$ 的解析特征。

命题 4.9. 切片域 $[D]$ 有界、星形且切片圆形，当且仅当存在唯一的连续函数

$$\rho : (\mathbb{R}_m)_s^n \to \mathbb{R}$$

称为 $[D]$的定义函数，使得
(1) $\rho(q) \geq 0$ 对每个 $q \in [D]$; $\rho(q) = 0$ 当且仅当 $q = 0$。*(2)* ρ $(tq) = |t|\rho(q)$ 对每个 $J \in \mathbb{S}_m$、 $q \in \mathbb{C}_J^n$ 和 $t \in \mathbb{C}_J$.*(3)* (3) $[D] = \{q \in (\mathbb{R}_m)_s^n : \rho(q) < 1\}$.

注 4.10. 设 I、J、I'、$J' \in \mathbb{S}_m$ 满足 $I \perp J$ 且 $I' \perp J'$。若切片域 $[D]$有界、星形且切片圆形，则对任意 $x \in D$，有

$$\rho \circ \varphi^{I,J}(x) = \rho \circ \varphi^{I',J'}(x).$$

证明。设 $x \in D$，则 $\varphi^{I,J}(x)$ $\varphi^{I',J'}(x) \in [D]$. 因此存在 $r \in \mathbb{R}^n$ 和H_1, $H_2 \in \mathbb{S}_m$ 使得

$$\varphi^{I,J}(x) = x_0 + rH_1 \quad \text{and} \quad \varphi^{I',J'}(x) = x_0 + rH_2.$$

根据 [14], 中引理4.6的证明，我们可以得到 $\rho \circ \varphi^{I,J}(x) = \rho \circ \varphi^{I',J'}(x)$。 □

最后，我们在一些条件下推导出切片Dirac正则映射 f 的增长定理。为方便起见，设 f_I 为 f 在 $[D]_I$ 上的限制，其中$I \in \mathbb{S}_m$。

定理*4.11.* 设 $[D]$是$(\mathbb{R}_m)^n_s$ 中的有界、星形且切片圆形的切片域，其定义函数 $\rho(x) \in C^1([D])$，但允许在一个低维集合上例外。设 $f \in \mathcal{SR}_{O(3)}([D], \mathbb{R}^n_m)$，其限制 $f_{I'}$ 是$\mathbb{C}^n_{I'}$ 中的星形映射，且对于某个 $I' \in \mathbb{S}_m$，$f([D]_{I'}) \subset \mathbb{C}^n_{I'}$。若 $f(0) = 0$，$(f_{I'})'(0) = id_{\mathbb{R}^n_m}$，则对于任意$x \in D$ 和 $I, J \in \mathbb{S}_m$ 满足 $I \perp J$，

$$\frac{\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}{(1+\rho \circ \varphi^{I,J}(x))^2} \leq |f \circ \varphi^{I,J}(x)| \leq \frac{\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}{(1-\rho \circ \varphi^{I,J}(x))^2}$$

或者等价地，

$$\frac{|\varphi^{I,J}(x)|}{(1+\rho \circ \varphi^{I,J}(x))^2} \leq |f \circ \varphi^{I,J}(x)| \leq \frac{|\varphi^{I,J}(x)|}{(1-\rho \circ \varphi^{I,J}(x))^2}.$$

这些估计是尖锐的。

证明。令 $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in D$, 存在 $r \in \mathbb{R}^n$ 和 $H \in \mathbb{S}_m$ ，使得 $\varphi^{I,J}(x) =$

$x_0 + rH$. 令 $z := x_0 + rI'$ 和 $\bar{z} = x_0 - rI'$. 根据给定条件，我们知道 $[D]_{I'}$ 是 $\mathbb{C}^n_{I'}$中的有界星形圆域， $\rho(q)$ 在$[D]_{I'}$ 上除一个低维集合外是一个 C^1 函数，而 $f_{I'}$ 是$\mathbb{C}^n_{I'}$中的归一化星形映射。根据多复变函数论中的经典结果 [13], ，我们有

$$\frac{\rho(z)}{(1+\rho(z))^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\rho(z)}{(1-\rho(z))^2}$$

或者等价地，

$$\frac{|z|}{(1+\rho(z))^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-\rho(z))^2}.$$

由于 $[D]_{I'}$的对称性，我们还得到

$$\frac{\rho(\bar{z})}{(1+\rho(\bar{z}))^2} \leq |f(\bar{z})| \leq \frac{\rho(\bar{z})}{(1-\rho(\bar{z}))^2}.$$

由定理 3.10 和注 4.10，我们有

$$|f \circ \varphi^{I,J}(x)| \leq \max\{|f(x_0+rI')|, |f(x_0-rI')|\} \leq \frac{\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}{(1-\rho \circ \varphi^{I,J}(x))^2}.$$

左边的不等式可以类似地证明。 □

采用上述相同的方法，根据多复变函数论中的结果 [11] 和 [15]，我们可以得出以下改进结论：

定理 4.12. 设 $f \in \mathcal{SR}_{O(3)}(\mathbb{B}, \mathbb{R}_m^n)$ 和 $f(\mathbb{B}_{I'}) \subset \mathbb{C}_{I'}^n$，其中 $I \in \mathbb{S}_m$。此外，$f(0) = 0$，$(f_{I'})'(0) =$ 恒等$^{\mathbb{R}_n^m}$，且限制 $f_{I'}$ 是一个在 $\mathbb{C}_{I'}^n$ 中 k 重对称的星形映射，那么

$$\frac{|\varphi^{I,J}(x)|}{(1+|\varphi^{I,J}(x)|^k)^{2/k}} \leq |f \circ \varphi^{I,J}(x)| \leq \frac{|\varphi^{I,J}(x)|}{(1-|\varphi^{I,J}(x)|^k)^{2/k}}, \quad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{4n}}.$$

这些估计是精确的。因此，$f(\mathbb{B})$ 包含一个以零为中心、半径为 $2^{-2/k}$.的球

定理 4.13。设 $[D]$是一个有界、切片凸且切片圆形的切片域，位于$(\mathbb{R}_m)_s^n$ 中，其定义函数 $\rho(x) \in C^1([D])$ 除一个低维集合外。设 $f \in \mathcal{SR}_{O(3)}([D], \mathbb{R}_m^n)$，其限制 $f_{I'}$ 是 $\mathbb{C}_{I'}^n$ 中的星形映射，并且$f([D]_{I'}) \subset \mathbb{C}_{I'}^n$，其中 $I' \in \mathbb{S}_m$。若

$$f(0) = 0, \qquad and \qquad (f_{I'})'(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_m^n},$$

则对任意 $x \in D$,

$$\frac{\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}{1+\rho \circ \varphi^{I,J}(x)} \leq |f \circ \varphi^{I,J}(x)| \leq \frac{\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}{1-\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}$$

或等价地,

$$\frac{|\varphi^{I,J}(x)|}{1+\rho \circ \varphi^{I,J}(x)} \leq |f \circ \varphi^{I,J}(x)| \leq \frac{|\varphi^{I,J}(x)|}{1-\rho \circ \varphi^{I,J}(x)}.$$

这些估计是精确的。

References

[1] F. Colombo、I. Sabadini与D. C. Struppa, *An extension theorem for slice monogenic functions and some of its consequences* **177** 2010 , 《以色列数学杂志》（） 第1期，369–389。[2] *Noncommutative functional calculus: theory and applications of slice hyperholomorphic functions* 289, 2011 , 卷 Springer Science & Business Media，。[3] , *Slice monogenic functions*, 非交换函数演算：切片超全纯函数的理论与应用，2011，第17–80页。[4] X Dou、G Ren与I. Sabadini, *Extension theorem and representation formula in non-axially-symmetric domains for slice regular functions* **25** 2023 , 《欧洲数学会杂志》（） 第9期，3665–3694。[5] *A representation formula for slice regular functions over slice-cones in several variables*——— 2023 , 《纯粹与应用数学年刊》（）。[6] G. Gentili与D. C. Struppa, *A new approach to cullen-regular functions of a quaternionic variable* **342** 2006 10, 741 744 , 《法国科学院院报·数学》（），第 – 期。[7] G. Gentili与D.C. Struppa, *A new theory of regular functions of a quaternionic variable*, 《数学进展》**216** （2007），第1期，279–301。[8] , *Regular functions on the space of cayley numbers*, 《落基山数学杂志》（2010），225–241。[9] R. Ghiloni, *Slice fueter-regular functions*, 《几何分析杂志》**31** （2021），第12期，11988–12033。[10] R. Ghiloni与A. Perotti, *Slice regular functions on real alternative algebras*, 《数学进展》**226** （2011），第2期，1662–1691。[11] I. Graham与G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*, CRC出版社，2003。[12] M. Jin、G. Ren与I. Sabadini, *Slice dirac operator over octonions*, 《以色列数学杂志》**240** （2020），第1期，315–344。[13] T Liu与G Ren, *The growth theorem for starlike mappings on bounded starlike circular domains* **19** 1998 4, 401 408 , 《中国数学年刊》（），第 – 期。

[14] G. Ren与T. Yang, *Growth theorems in slice analysis of several variables*，应用克利福德代数进展**29** （2019），第5期，101。[15] 刘太顺与G. Ren, *Growth theorem of convex mappings on bounded convex circular domains* **41** 1998 130 ，中国科学A辑：数学（），第2期，123–。

Email address, Ting Yang: tingy@ustc.mail.edu cn

School of Mathematics and Statistics, Anqing Normal University, Anqing, 246133,China

Email address, Xinyuan Dou: douxinyuan@ustc.edu.cn

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China