arXiv:2602.04175v1 [math.AP] 4 Feb 2026

多孔介质中热力学一致双相流模型弱解的存在性、唯一性与正则性

HUANGXIN CHEN、JISHENG KOU、HAITAO LENG、SHUYU SUN 和 HAI ZHAO

Abstract. 近年来，多孔介质中的热力学一致双相流模型受到了广泛关注。本文证明了 [25, 35] 中提出的一类最新模型的弱解的存在性、唯一性和正则性。为此，我们首先针对该热力学一致模型的适当弱形式，引入全隐式时间半离散近似和全离散近似。随后，利用向量场零点定理，证明全离散近似的弱解的存在性。然后，通过弱收敛技巧和能量稳定性估计，推导出全隐式时间半离散近似以及该模型弱形式的弱解的存在性。接着，在化学势光滑性假设下，利用 Gr¨onwall 不等式证明唯一性结果。最后，结合椭圆型偏微分方程（PDE）的正则性理论，建立了具有完全诺伊曼边界条件的该模型弱解的正则性。

1. Introduction

多孔介质中的两相流模型对于地质能源采收和地下水管理至关重要 [15, 20]。例如，在石油开采的二次采油过程中，人们向储层注水以驱替原油。鉴于其重要性，多孔介质中两相流的建模和数值模拟已得到广泛研究 [7, 20, 34, 17, 31, 32]。

热力学第二定律被公认为一项普遍且基本的原理，可靠的数学模型应遵循这一定律。此类模型可称为热力学一致的数学模型。对于特定的等温流体流动问题，热力学第二定律会导出一条能量耗散律；正如本文所示，该定律实际上为分析模型提供了强有力的数学工具（见引理4.4的证明）。热力学一致模型已在两相弥散界面流领域得到广泛研究 [1, 29, 49, 24, 44, 21, 16, 50]。文献中也探讨了采用热力学一致的方法来解释多孔介质中的经典双相流模型，例如 [14, 43] 及其中的参考文献。近年来，Kou等人[25, 35]通过引入对数自由能来刻画毛细效应，提出了一种适用于多孔介质中不可压缩不可混溶两相流的新型热力学一致模型。因此，新模型自然遵循热力学第二定律。此外，该新模型的数学结构具有优雅的对称性。同时，多孔介质经典双相流模型中的相对渗透率和毛细效应也内在地包含于新模型之中。文献 [35, 36], 提出了该新模型的能量稳定数值方法，并进一步研究了其在考虑岩石可压缩性的两相流、孔隙黏弹性介质中的两相流以及多孔介质非饱和流中的扩展 [37, 38, 39] 。然而，目前对于该新模型弱解的存在性、唯一性和正则性仍知之甚少。因此，本文致力于研究这一问题。

由于两相流具有高度非线性的特性，弱解的数学分析面临重大挑战。多孔介质中的经典双相流模型已得到充分研究，并且在对物理数据作出假设的条件下，弱解的存在性已得到证明。在一维情形下，已有一些数学分析 [8, 10, 11, 12, 46] 确保了该问题的适定性。在高维空间中，已有研究证明了无裂缝、单孔隙和双孔隙多孔介质中不可压缩不可混溶两相流弱解的存在性

Key words and phrases. 存在唯一性；正则性；热力学一致模型；两相流；多孔介质。Huangxin Chen得到国家重点研发计划（批准号：2023YFA1011702）和国家自然科学基金委员会（批准号：12471345、12122115）的资助。Haitao Leng得到广东省基础与应用基础研究基金（批准号：2024A1515011163、2025A1515010428）的资助。

见 [3, 4, 6, 40]。Chen [18, 19]分析了多孔介质中退化双相不可压流模型弱解的存在性和正则性，并在人工全局压力关于空间变量利普希茨连续的假设下，证明了弱解的唯一性。然而，该假设成立的前提是饱和度关于空间变量具有 H¨older 连续性。对于由两种不同岩石类型构成的非均质多孔介质，文献 [13]已证明具有不连续毛细压力场的双相流模型弱解的存在性。关于多孔介质中经典双相流模型弱解存在性的更多研究，见 [9, 5, 22, 41]。

大多数研究通过引入人工压力和互补压力，并假设高阶导数项有界，证明了多孔介质中经典双相流模型弱解的存在性。然而，互补压力没有物理意义，也难以据此反推出饱和度。因此，本文以化学势和真实相压力为主要变量，证明了新模型弱解的存在性。与 [6, 18], 相比，本文无需对高阶导数项的有界性作任何假设。

基于 Galerkin 逼近法 [23], ，我们首次建立了新模型弱解的存在性、唯一性和正则性。本文没有采用正则化问题，而主要利用向量场零点定理 [23], （该定理曾在 [6]中用于处理非线性微分方程），证明全离散格式弱解的存在性。随后，我们证明了全隐式时间半离散格式弱解的存在性，并得到了饱和度的有界性和能量稳定性估计。接着，我们证明了新模型弱解的存在性。为证明唯一性，只需假设化学势关于空间变量是利普希茨连续的，且相应的利普希茨常数关于时间属于L^2 。基于 [19], 中的定理 2.5，我们引入人工压力和互补压力，从而得到关于人工压力的椭圆方程和关于互补压力的抛物方程。然后，利用椭圆型偏微分方程的正则性理论，可推出满足完全诺伊曼边界条件的模型弱解的正则性。

本文结构如下。在第 2 节中，我们描述多孔介质中不可压缩不可混溶两相流的热力学一致模型，并给出新模型的弱形式。随后，我们给出新模型弱解的存在性结果。在第 3 节中，我们引入新模型的全隐式时间半离散近似，进而建立全离散近似。在第 4 节中，我们首先建立全离散格式弱解的存在性，然后证明全隐式时间半离散格式弱解的存在性，最后证明新模型弱解的存在性。弱解的唯一性与正则性分别在第 5 节和第 6 节中加以分析。最后一节给出若干结论性评述。

2. Mathematical model and preliminary

设 Ω 为 $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$,3) 中的开有界区域，其 Lipschitz边界为 $\partial\Omega$，且 T 为表示终止时间的正常数。我们考虑多孔介质 Ω 中如下两相流模型 [35] ：

$$\phi\frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha = q_\alpha,\ \ \alpha = w,\ n, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -\lambda_\alpha\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla(\widetilde{p} + \widetilde{\mu}_\alpha),\ \ \alpha = w,\ n, \tag{2}$$

$$\widetilde{\mu}_\alpha = \frac{\partial F(S_w, S_n)}{\partial S_\alpha},\ \ \alpha = w,\ n, \tag{3}$$

$$S_w + S_n = 1, \tag{4}$$

其中， $\alpha = w, n$ 分别表示润湿相和非润湿相， $\phi = \phi(x)$ 表示多孔介质的孔隙度。 S_α、$\mathbf{u}_\alpha$、 q_α 和 $\widetilde{\mu}_\alpha$ 分别表示 α相的饱和度、达西速度、外部体积流率和化学势， $\widetilde{p}$ 和 F 分别表示压力和自由能函数。张量 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$有界、对称且一致正定，表示绝对渗透率，即

$$K_{\min}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \le K_{\max}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x},\quad \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

其中， $K_{\min}$ 和 $K_{\max}$ 是两个正数常数。此外， $\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\eta_\alpha}$ 表示相迁移率，$k_{r\alpha}$和 η_α 分别表示 α相的相对渗透率和黏度。实际上，通常

存在一定量的残余流体，因此本文假设 $S_\epsilon \le S_w \le 1 - S_\epsilon$，其中 S_ϵ（一个足够小的正常数）表示残余饱和度。

在本文中，对于任意 $1 \le p \le \infty$、非负整数 s 以及开子集 $\mathcal{D} \subset \Omega$，我们将 $W^{s,p}(\mathcal{D})$记为标准 Sobole夫空间（参见 [2]），其范数为$\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathcal{D})}$。特别地，若 $p = 2, W^{s,2}(\mathcal{D})$，则记为 $H^s(\mathcal{D})$。若 $s = 0$, $W^{0,p}(\mathcal{D})$，则记为 $L^p(\mathcal{D})$。此外，我们还将使用 $H^1(\Omega)$ 的对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$，其范数为$\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$。对于任意 $\beta \in (0, 1],$，令 $C^{s,\beta}(\Omega)$ 为标准 H¨older 空间（参见 [2]），其范数为$\|\cdot\|_{C^{s,\beta}(\Omega)}$。对于任意巴拿赫空间 X, $L^p(0,T;\, X)$ 和 $W^{1,p}(0,T;\, X)$，分别表示博赫纳空间（参见 [33]），其范数为

$$\|v\|^p_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T \|v(t)\|^p_X \mathrm{d}t,\ 1 \le p < \infty, \qquad \|v\|_{L^\infty(0,T;X)} = \max_{0\le t\le T} \|v(t)\|_X,$$
$$\|v\|^2_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|v\|^2_{L^p(0,T;X)} + \|\partial_t v\|^2_{L^p(0,T;X)}.$$

假设 1。令 $\phi \in L^\infty(\Omega)$ 满足 $\phi(x) \ge \phi_m > 0$，其中 ϕ_m 是正常数。我们假设q_α、$k_{r\alpha} \in L^\infty(0,\ T;\ L^\infty(\Omega))$ 仅依赖于 S_w，并且关于 S_w 连续。此外，我们假设 $k_{rw}(0) = 0$、$k_{rw}(S_w) > 0$ 对于 $S_w > 0$ 成立，并且 $k_{rn}(1) = 0$、$k_{rn}(S_w) > 0$ 对于 $S_w < 1$ 成立。

由假设 1 可得

$$\lambda_{\min} \le \lambda_\alpha \le \lambda_{\max}, \quad \alpha = w,\ n,$$

对于 $S_\epsilon \le S_w \le 1 - S_\epsilon$，其中 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 是两个正数常数。

接下来，我们定义一般相势 p_α 和毛细压力 p_c 如下：

$$p_\alpha = \widetilde{p} + \widetilde{\mu}_\alpha \quad \alpha = w,\ n, \qquad p_c = p_n - p_w = \widetilde{\mu}_n - \widetilde{\mu}_w. \tag{5}$$

将自由能函数 F 定义为 [35] 中所示，其表达式为

$$F(S_w, S_n) = \sum_{\alpha=w,n} \gamma_\alpha S_\alpha(\ln\,(S_\alpha) - 1) + \gamma_{wn} S_w S_n, \tag{6}$$

其仅依赖于 S_w 的等价表述可改写为:

$$F(S_w) = \gamma_w S_w(\ln\,(S_w) - 1) + \gamma_n(1 - S_w)(\ln(1 - S_w) - 1) + \gamma_{wn} S_w(1 - S_w), \tag{7}$$

其中，$\gamma_\alpha > 0$ 对于 $\alpha = w,\ n,\ wn$ 为能量参数。于是，由 $F(S_w)$对 S_w 求导得到的化学势 $\mu_w(S_w)$可表示为

$$\mu_w(S_w) = F'(S_w) = \gamma_w \ln\,(S_w) - \gamma_n \ln\,(1 - S_w) + \gamma_{wn}(1 - 2S_w). \tag{8}$$

假设 2. 能量参数 γ_w、γ_n和 γ_{wn} 属于 $L^\infty(\Omega)$，并满足

$$\frac{\gamma_w}{x} + \frac{\gamma_n}{1 - x} - 2\gamma_{wn} \ge c_{\min} > 0,\ \forall\ x \in (0, 1), \tag{9}$$

其中，$c_{\min}$ 为正常数。通过简单计算可知，(9) 左端的最小点为$x = \sqrt{\gamma_w}/(\sqrt{\gamma_w} + \sqrt{\gamma_n})$。因此，条件(9)等价于

$$(\sqrt{\gamma_w} + \sqrt{\gamma_n})^2 - 2\gamma_{wn} \ge c_{\min} > 0. \tag{10}$$

此外，我们注意到，[35, 37] 中使用的几乎所有数据都满足条件(10)。

通过计算 对 μ_w 关于 S_w求导，根据假设 2，容易观察到 at

$$\frac{d\mu_w(S_w)}{dS_w} = \frac{\gamma_w}{S_w} + \frac{\gamma_n}{1 - S_w} - 2\gamma_{wn} > 0,$$

这意味着 μ_w 是关于 S_w 的严格单调递增函数。因此，根据式 (8)，给定 μ_w 后，我们可以唯一求得 S_w，这意味着我们可以定义一个解算子 $\mathcal{S}$，使得 $S_w = \mathcal{S}(\mu_w)$。令 $p = p_n$，则根据 $S_n = 1 - S_w$，我们可以推导出该模型的一个等价表述，如下所示

$$\begin{cases} S_w = \mathcal{S}(\mu_w), \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \\ -\nabla \cdot (\lambda_t \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p) = \nabla \cdot (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w) + q_t, \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \phi \dfrac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w) = \nabla \cdot (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p) + q_w, \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \end{cases} \tag{11}$$

其中， $q_t = q_w + q_n$ 和 $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_n$ 表示总流动性。接下来，我们通过给出边界条件和初始条件来闭合该模型：

$$\begin{cases} \mu_w = \varphi_1(\boldsymbol{x}, t), & \text{on } \Gamma_1 \times (0,T], \\ \lambda_n \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p_n \cdot \mathbf{n} = \varphi_2, & \text{on } \Gamma_2 \times (0,T], \\ p = \varphi_3(\boldsymbol{x}, t), & \text{on } \Gamma_1 \times (0,T], \\ \lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p_w \cdot \mathbf{n} = \varphi_4, & \text{on } \Gamma_2 \times (0,T], \end{cases} \tag{12}$$

and

$$\mu_w(x,0) = \mu_w^0(x), \quad \text{in } \Omega, \tag{13}$$

其中， $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$、 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ 和 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ 的外法向单位向量， $\mu_w^0 \in L^2(\Omega)$ 是一个给定函数。下文中，令 $S_w^0 = \mathcal{S}(\mu_w^0)$。

假设3。 我们假设 φ_α 对于 $\alpha = 1, 3$ 可以延拓到整个区域 Ω （参见 [47] 中的定义*13.2*），使得

$$\varphi_1 \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)),$$
$$\varphi_3 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

另一方面，我们假设 $\varphi_\alpha \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_2))$ 对于 $\alpha = 2, 4$ 仅依赖于 S_w，并且关于 S_w 连续。

现在，我们定义以下空间

$$W = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}, \quad V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0; \text{ if meas } (\Gamma_1) = 0 \text{ then } \int_\Omega v \mathrm{d}x = 0\}.$$

注1。 从物理观点来看，在流体出口处为饱和度 S_w 设置狄利克雷边界条件是不合理的。因此，根据饱和度 S_w 与化学势 μ_w 之间的本构关系，不应在流体出口处为化学势 μ_w 设置狄利克雷边界条件。因此，如果 $\text{meas } (\Gamma_1) \neq 0$，则应将边界 Γ_1 指定为流体入口边界。

接下来，我们给出问题 (11)-(13) 的如下弱形式。

定义1. 三元组 (S_w, μ_w, p) 是模型 (11) 在边界条件(12) 和初始条件(13) 下的弱解，若饱和度 S_w 满足条件 $S_\epsilon \leq S_w \leq 1 - S_\epsilon$ 且

$$\mu_w \in \varphi_1(x,t) + L^2(0,T;W), \quad p \in \varphi_3(x,t) + L^2(0,T;V), \quad \partial_t S_w \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

使得

$$\begin{cases} S_w = \mathcal{S}(\mu_w) \ a.e. \ in \ [0,T] \times \Omega, \\ \displaystyle\int_0^T (\lambda_t \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p, \nabla v) \mathrm{d}t \\ \displaystyle = -\int_0^T (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w, \nabla v) \mathrm{d}t + \int_0^T (q_t, v) \mathrm{d}t + \int_0^T \langle \varphi_{2,4}, v \rangle_{\Gamma_2} \mathrm{d}t, \ \forall v \in L^2(0,T;V), \\ \displaystyle\int_0^T (\phi \partial_t S_w, \xi) \, \mathrm{d}t + \int_0^T (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w, \nabla \xi) \mathrm{d}t \\ \displaystyle = -\int_0^T (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p, \nabla \xi) \mathrm{d}t + \int_0^T (q_w, \xi) \mathrm{d}t + \int_0^T \langle \varphi_4, \xi \rangle_{\Gamma_2} \mathrm{d}t, \ \forall \xi \in L^2(0,T;W), \\ \mu_w(x,0) = \mu_w^0(x) \ a.e. \ in \ \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\varphi_{2,4} = \varphi_4 + \varphi_2$, $\partial_t S_w = \frac{\partial S_w}{\partial t}$, $(f,g) = \int_\Omega f g \mathrm{d}x$ 且 $\langle f, g \rangle_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} f g \mathrm{d}s$。

为使饱和度 S_w 满足 $S_\epsilon \leq S_w \leq 1 - S_\epsilon$，我们假设以下条件成立。

假设4。 我们假设 $S_\epsilon \leq S_w^0 \leq 1 - S_\epsilon$ 和

$$\lambda_n(S_\epsilon) q_w(S_\epsilon) - \lambda_w(S_\epsilon) q_n(S_\epsilon) \geq 0, \tag{15}$$

$$\lambda_n(S_\epsilon) \varphi_4(S_\epsilon) - \lambda_w(S_\epsilon) \varphi_2(S_\epsilon) \geq 0, \tag{16}$$

$$\lambda_n(1 - S_\epsilon) q_w(1 - S_\epsilon) - \lambda_w(1 - S_\epsilon) q_n(1 - S_\epsilon) \leq 0, \tag{17}$$

$$\lambda_n(1-S_\epsilon)\varphi_4(1-S_\epsilon)-\lambda_w(1-S_\epsilon)\varphi_2(1-S_\epsilon)\le 0. \tag{18}$$

此外，我们假设 $\mu_w(S_\epsilon)\le\varphi_1\le\mu_w(1-S_\epsilon)$. $f(S_w)=f(S_\epsilon)$若 $S_w\le S_\epsilon$且 $f(S_w)=f(1-S_\epsilon)$若$S_w\ge 1-S_\epsilon$, 其中 $f=\lambda_w,\lambda_n,q_w,q_n,\varphi_2,\varphi_4$。

备注2. 假设 *1-4* 与参考文献 [18] 中的 *(A3)-(A6)* 一致。

定理2.1. 在假设*4*下，设三元组 (S_w,μ_w,p) 是(14)的一个弱解，则饱和度S_w 满足 $S_\epsilon\le S_w\le 1-S_\epsilon$。

证明. 显然，我们只需证明 (14) 中的 $M_{\min}=\mu_w(S_\epsilon)\le\mu_w\le\mu_w(1-S_\epsilon)=M_{\max}$。注意$\lambda_\alpha(S_w)=\lambda_\alpha(S_\epsilon)$ $q_\alpha(S_w)=q_\alpha(S_\epsilon)$ $\alpha=w,n$，以及 $\varphi_\alpha(S_w)=\varphi_\alpha(S_\epsilon)$ $\alpha=2,4$，当 $\mu_w\le M_{\min}$时。我们在 (14) 中令 $\xi=v=(\mu_w-M_{\min})^-=\min\{\mu_w-M_{\min},0\}\le 0$，得到

$$\begin{aligned}
&\lambda_t(S_\epsilon)\int_0^T(\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-)\mathrm{d}t+\lambda_w(S_\epsilon)\int_0^T(\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-)\mathrm{d}t\\
=&\int_0^T(q_t(S_\epsilon),(\mu_w-M_{\min})^-)\mathrm{d}t+\int_0^T\langle\varphi_{2,4}(S_\epsilon),(\mu_w-M_{\min})^-\rangle_{\Gamma_2}\mathrm{d}t,\\
&\int_0^T\left(\phi\partial_t S_w,(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t+\lambda_w(S_\epsilon)\int_0^T(\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-)\mathrm{d}t\\
=&-\lambda_w(S_\epsilon)\int_0^T(\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-)\mathrm{d}t+\int_0^T(q_w(S_\epsilon),(\mu_w-M_{\min})^-)\mathrm{d}t\\
&+\int_0^T\langle\varphi_4(S_\epsilon),(\mu_w-M_{\min})^-\rangle_{\Gamma_2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

然后比较上述两个方程，得出

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\left(\phi\partial_t\mathcal{S}(\mu_w),(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t+\frac{\lambda_n(S_\epsilon)}{\lambda_t(S_\epsilon)}\int_0^T\left(\lambda_w(S_\epsilon)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t\\
=&\int_0^T\left(q_w(S_\epsilon)-\frac{\lambda_w(S_\epsilon)}{\lambda_t(S_\epsilon)}q_t(S_\epsilon),(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left\langle\varphi_4(S_\epsilon)-\frac{\lambda_w(S_\epsilon)}{\lambda_t(S_\epsilon)}\varphi_{2,4}(S_\epsilon),(\mu_w-M_{\min})^-\right\rangle_{\Gamma_2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

结合假设4中的条件 (15) 和 (16)，可知上述方程右端非正。此外，对于左端，我们有（不等式 (19) 的详细推导见附录A）

$$\int_0^T\left(\phi\partial_t\mathcal{S}(\mu_w),(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t\ge 0, \tag{19}$$

and

$$\int_0^T\left(\lambda_w(S_\epsilon)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t=\int_0^T\left(\lambda_w(S_\epsilon)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla(\mu_w-M_{\min})^-,\nabla(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t\ge 0.$$

因此 $\mu_w\ge M_{\min}$。按照类似的推理，也可以证明 $\mu_w\le M_{\max}$。由此得证。□

现在给出主要结果如下。

定理2.2。 在假设 *1-4* 下，存在一个弱解 (S_w,μ_w,p) ，满足定义*1*中给出的弱形式。此外， $S_w,\mu_w\in C(0,T;L^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$。

定理2.2中弱解的存在性将在第 4 节中证明。为此，我们采用 Galerkin 逼近法（参见 [23] 中第 7 章），并证明下一节所述全离散格式和全隐式时间半离散格式的弱解存在性。

3. Approximation of the continuous model

在本文中， c 和 C 表示正常数，它们在不同位置出现时不一定相同。

3.1. **全隐式时间半离散近似**。首先，我们将时间域 $(0,\ T)$ 划分为N个相等的子区间，时间步长为 $\tau = T/N$。令 $I_k = (t_k,\ t_{k+1}](k = 0,\ \cdots,\ N-1)$，其中 $t_k = k\tau$，对 $k = 0,\ \cdots,\ N-1$ 成立。由于 μ_w 是关于 S_w 的严格单调递增函数，存在两个正常数 $L_{\min}$ 和 $L_{\max}$，使得对于任意 $S,\ \ S \in [S_\epsilon, 1-S_\epsilon]$,

$$L_{\min}(S-\widetilde{S}) \le \mu_w(S) - \mu_w(\widetilde{S}) \le L_{\max}(S-\widetilde{S}). \tag{20}$$

定义 2. 对于每个整数 $0 \le k \le N-1$，令 $S_\epsilon \le S_w^k \le 1-S_\epsilon$。若三元组 $(S_w^{k+1}, \mu_w^{k+1}, p^{k+1})$满足全隐式时间半离散格式，则称其为弱解:

$$\mu_w^{k+1} \in \varphi_1^{k+1} + W, \quad p^{k+1} \in \varphi_3^{k+1} + V$$

满足

$$\begin{cases} \left(\lambda_t^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1}, \nabla v\right) \\ = -\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1}, \nabla v\right) + \left(q_t^{k+1}, v\right) + \left\langle\varphi_{2,4}^{k+1}, v\right\rangle_{\Gamma_2},\ \forall v \in V, \\ \left(\phi\dfrac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau}, \xi\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1}, \nabla\xi\right) \\ = -\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_w^{k+1}, \nabla\xi\right) + \left(q_w^{k+1}, \xi\right) + \left\langle\varphi_4^{k+1}, \xi\right\rangle_{\Gamma_2},\ \forall \xi \in W, \end{cases} \tag{21}$$

其中 $\varphi_\alpha^{k+1} = \frac{1}{\tau}\int_{I_k}\varphi_\alpha \mathrm{d}t$ 对于 $\alpha \in \{1,3\}$, $\varphi_{2,4}^{k+1} = \varphi_2^{k+1} + \varphi_4^{k+1}$,

$$f^{k+1} = f\left(S_w^{k+1}\right),$$

对于 $f \in \{\lambda_\alpha, q_\alpha\}$ 满足 $\alpha \in \{w,n\}$ 且 $f = \varphi_\alpha$ 满足 $\alpha \in \{2,4\}$，并且 $S_w^{k+1} = \mathcal{S}(\mu_w^{k+1})$。

定理 3.1. 对于每个整数 $0 \le k \le N-1$，在假设 *1-4* 下，存在一个满足定义 *2* 的弱解$(S_w^{k+1}, \mu_w^{k+1}, p^{k+1})$，且 $S_\epsilon \le S_w^{k+1} \le 1-S_\epsilon$。

定理 3.1 的证明将在第 4 节给出。

3.2. **全离散近似**。由于 $L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密，我们可以分别构造有限维空间 $W_m \subset W \cap L^\infty(\Omega)$ 和 $V_m \subset V \cap L^\infty(\Omega)$，其基函数为 $\{\xi_i\}_{i=1}^m$和$\{v_i\}_{i=1}^m$。然后，在 (21) 中用 V_m 和 W_m 替换 V 和 W，得到以下全离散格式。

定义 3。对于每个整数 $0 \le k \le N-1$，令 $S_\epsilon \le S_w^k \le 1-S_\epsilon$。那么，三元组 $(S_{w,m}^{k+1}, \mu_{w,m}^{k+1}, p_m^{k+1})$是全离散近似的一个弱解，如果

$$\mu_{w,m}^{k+1} \in \varphi_1^{k+1} + W_m, \quad p_m^{k+1} \in \varphi_3^{k+1} + V_m$$

满足

$$\begin{cases} \left(\lambda_{t,m}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_m^{k+1}, \nabla v\right) \\ = -\left(\lambda_{w,m}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_{w,m}^{k+1}, \nabla v\right) + \left(q_{t,m}^{k+1}, v\right) + \left\langle\varphi_{2,4,m}^{k+1}, v\right\rangle_{\Gamma_2},\ \forall\ v \in V_m, \\ \left(\phi\dfrac{S_{w,m}^{k+1}-S_w^k}{\tau}, \xi\right) + \left(\lambda_{w,m}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_{w,m}^{k+1}, \nabla\xi\right) \\ = -\left(\lambda_{w,m}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_m^{k+1}, \nabla\xi\right) + \left(q_{w,m}^{k+1}, \xi\right) + \left\langle\varphi_{4,m}^{k+1}, \xi\right\rangle_{\Gamma_2},\ \forall\ \xi \in W_m, \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\varphi_{2,4,m}^{k+1} = \varphi_2^{k+1,m} + \varphi_{4,m}^{k+1}$,

$$f_m^{k+1} = f(S_{w,m}^{k+1}),$$

对于 $f \in \{\lambda_\alpha, q_\alpha\}$，其中 $\alpha \in \{w,n\}$ 和 $f = \varphi_\alpha$，其中 $\alpha \in \{2,4\}$，$S_{w,m}^{k+1} = \mathcal{S}(\mu_{w,m}^{k+1})$，以及

$$\mu_{w,m}^{k+1} = \varphi_1^{k+1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i^{k+1}\xi_i,\ p_m^{k+1} = \varphi_3^{k+1} + \sum_{i=1}^m \beta_i^{k+1}v_i. \tag{23}$$

For 为简便起见，以下记 $\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = (\alpha_1^{k+1},\ \cdots,\ \alpha_m^{k+1})$、$\boldsymbol{\beta}^{k+1} = (\beta_1^{k+1},\ \cdots,\ \beta_m^{k+1})$。

定理 3.2. 对于每个整数 $0 \le k \le N-1$，在假设 *1-4* 下，存在一个弱解$(S_{w,m}^{k+1}, \mu_{w,m}^{k+1}, p_m^{k+1})$ 满足定义 *3*。

定理 3.2 的证明也将在第 4 节给出。

4. The existence of weak solutions

本节将分别证明定义 3、定义 2 和定义1中所定义的全离散格式、全隐式时间半离散格式和弱形式的弱解存在性。

4.1. **定理 3.2 的证明。** 在本小节开头，我们引入以下引理 .

引理 4.1. (向量场的零点，第9章第1节中的引理 [23]) 设连续函数 $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 满足 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{z} \geq 0$, ($\forall\ \|\boldsymbol{z}\| = R$ 对某个 $R > 0$)。则存在一点$\boldsymbol{z}_0 \in \{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{y}\| \leq R\}$ 使得 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_0) = 0$。

然后我们定义一个满足条件的映射 $\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}$: $\mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$

$$\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) = (\boldsymbol{r}_\mu^{k+1}, \boldsymbol{r}_p^{k+1}), \quad \boldsymbol{r}_\mu^{k+1} = (r_{\mu,1}^{k+1}, \cdots, r_{\mu,m}^{k+1}), \quad \boldsymbol{r}_p^{k+1} = (r_{p,1}^{k+1}, \cdots, r_{p,m}^{k+1}),$$

其中，对 $i = 1, \cdots, m$,

$$\begin{aligned} r_{\mu,i}^{k+1} &= \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\mu_{w,m}^{k+1}) - S_w^k}{\tau}, \xi_i\right) + (\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla \xi_i) \\ &\quad + (\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p_m^{k+1}, \nabla \xi_i) - \left\langle \varphi_{4,m}^{k+1}, \xi_i \right\rangle_{\Gamma_2} - (q_{w,m}^{k+1}, \xi_i), \\ r_{p,i}^{k+1} &= (\lambda_{t,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p_m^{k+1}, \nabla v_i) \\ &\quad + (\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla v_i) - \left\langle \varphi_{2,4,m}^{k+1}, v_i \right\rangle_{\Gamma_2} - (q_{t,m}^{k+1}, v_i). \end{aligned} \tag{24}$$

引理 4.2. 假设假设 *1-4* 成立，则映射 $\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}$是连续的。

证明。 该引理直接源于以下事实： $\mathcal{S}$、 $\lambda_\alpha (\alpha = w, n, t)$、 $q_\alpha (\alpha = w, t)$ 和 $\varphi_\alpha (\alpha = 2, 4)$ 均为连续的。□

定理 *3.2* 的证明。 给定 m，由引理 4.2 和引理 4.1 可知，我们只需证明

$$\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \geq 0, \quad \forall\ \|(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1})\| = R,$$

因此 些 $R > 0$。在假设 1-4 成立，且事实 $a^2 + b^2 \leq 3a^2 + 3(a+b)^2$, (24) 蕴含

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) = (\boldsymbol{r}_\mu^{k+1}, \boldsymbol{r}_p^{k+1}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \\ &= \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\mu_{w,m}^{k+1}) - S_w^k}{\tau}, \xi\right) + \left(\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla \xi\right) + \left(\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p_m^{k+1}, \nabla \xi\right) \\ &\quad - \left\langle \varphi_{4,m}^{k+1}, \xi \right\rangle_{\Gamma_2} - (q_{w,m}^{k+1}, \xi) + \left(\lambda_{t,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla p_m^{k+1}, \nabla v\right) \\ &\quad + \left(\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla v\right) - \left\langle \varphi_{2,4,m}^{k+1}, v \right\rangle_{\Gamma_2} - (q_{t,m}^{k+1}, v) \\ &\geq \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\xi)}{\tau}, \xi\right) - C \left(\frac{1}{\tau} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \lambda_{\max} \|\varphi_1^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}\right) \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - C \left(\lambda_{\max} \|\varphi_3^{k+1}\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{4,m}^{k+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)} + \|q_{w,m}^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}\right) \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - C \left(2\lambda_{\max} \|\varphi_3^{k+1}\|_{H^1(\Omega)} + \lambda_{\max} \|\varphi_1^{k+1}\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{2,4,m}^{k+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)} + \|q_{t,m}^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \left(\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla(\xi + v), \nabla(\xi + v)\right) + \left(\lambda_{n,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla v, \nabla v\right) \\ &\geq \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\xi)}{\tau}, \xi\right) + \frac{\lambda_{\min} K_{\min}}{3} (\|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2) - \varepsilon (\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\xi\|_{H^1(\Omega)}^2) - C, \end{aligned}$$

其中， $\xi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \xi_i$、 $v = \sum_{i=1}^m \beta_i v_i$ 和 ε 是可以任意小的正常数。另一方面，通过简单计算可得

$$\begin{aligned} \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\xi)}{\tau}, \xi\right) &= \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\xi) - \mathcal{S}(0)}{\tau}, \xi\right) + \left(\phi \frac{\mathcal{S}(0)}{\tau}, \xi\right) \\ &\geq \frac{\phi_m}{\tau L_{\max}} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{C}{\tau} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{\tau} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

其中使用了不等式（20）。因此，有

$$\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \geq c(\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\xi\|_{H^1(\Omega)}^2) - C \geq 0, \tag{25}$$

对于充分大的数 R。证明至此完成。 □

注 3. 注意，此处使用了 $\lambda_\alpha \geq \lambda_{\min} > 0$ 在 $\alpha = w, n$ 下的相迁移率。假设边界条件是齐次的，即 $\varphi_1 = \varphi_3 \equiv 0$ 和 $\varphi_2 = \varphi_4 \equiv 0$。那么，如果 $\lambda_w \geq 0$ 和$\lambda_n \geq \lambda_{\min} > 0$，我们可以得到

$$\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \geq c(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\xi\|^2_{L^2(\Omega)}) - C.$$

同时，若 $\lambda_n \geq 0$ 和 $\lambda_w \geq \lambda_{\min} > 0$，我们还可以得到

$$\boldsymbol{\Phi}_m^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \boldsymbol{\beta}^{k+1}) \geq c(\|v+\xi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\xi\|^2_{L^2(\Omega)}) - C.$$

因此，对于上述两种情形，当数值 R 足够大时，如定理 *3.2* 的证明所示，存在全离散格式 (22) 的一个弱解。

4.2. **定理 3.1 的证明**。为了证明定义 2 中给出的全隐式时间半离散格式存在弱解，我们根据上文给出的定理 3.2 的证明，提出以下一致有界性结果。

引理 4.3。对每个整数 $0 \leq k \leq N-1$，设 $(S_{w\,m}^{k+1}, \mu_{w\,m}^{k+1}, p_m^{k+1})$ 为定义 *3* 中给出的全离散格式的弱解。那么，在假设 *1-4* 下，有

$$\|\mu_{w,m}^{k+1} - \varphi_1^{k+1}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|p_m^{k+1} - \varphi_3^{k+1}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C, \tag{26}$$

其中 C 不依赖于 m，但与 $\frac{1}{\tau}$ 有关。

由引理 4.3，很容易推得存在一个子序列（仍记为 m）$(\mu_{w\,,\,m}^{k+1} - \varphi_1^{k+1},\ p_m^{k+1} - \varphi_3^{k+1})$，使得存在一个 $(\mu_{w\,*\,,}^{k+1},\ p_*^{k+1}) \in W \times V$，满足

$$\mu_{w,m}^{k+1} \rightharpoonup \mu_{w,*}^{k+1} + \varphi_1^{k+1} = \mu_w^{k+1}, \quad p_m^{k+1} \rightharpoonup p_*^{k+1} + \varphi_3^{k+1} = p^{k+1}, \quad \text{weakly in } H^1(\Omega). \tag{27}$$

根据索伯列夫嵌入定理（参见 [27] 中的引理 8.3），可知

$$\mu_{w,m}^{k+1} \to \mu_w^{k+1}, \quad p_m^{k+1} \to p^{k+1}, \quad \text{strongly in } L^p(\Omega) \text{ for } 1 \leq p < 6, \tag{28}$$

结合 $\mathcal{S}$ 的定义以及 S_w^k 的有界性，可得

$$S_{w,m}^{k+1} = \mathcal{S}(\mu_{w,m}^{k+1}) \to \mathcal{S}(\mu^{k+1}) = S_w^{k+1}, \quad \text{strongly in } L^p(\Omega) \text{ for } 1 \leq p < 6. \tag{29}$$

现在开始证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。首先，我们将验证序列 $(S_{w\,m,}^{k+1}, \mu_{w\,m,}^{k+1}, p_m^{k+1})$ 的极限 $(S_w^{k+1},\ \mu_w^{k+1},\ p^{k+1})$ 是定义 2 中所定义的全隐式时间半离散格式的一个弱解。令 (22) 中的 $m \to \infty$，由 $q_\alpha(\alpha = w,\ t)$ 和 $\varphi_\alpha(\alpha = 2,\ 4)$ 的连续性以及 (29)，得到

$$\left(\phi \frac{\mathcal{S}(\mu_{w,m}^{k+1}) - S_w^k}{\tau}, \xi_i\right) \to \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\mu_w^{k+1}) - S_w^k}{\tau}, \xi_i\right),$$

and

$$\begin{aligned} &(q_{w,m}^{k+1}, \xi_i) \to (q_w^{k+1}, \xi_i), \quad \left\langle \varphi_{4,m}^{k+1}, \xi_i \right\rangle_{\Gamma_2} \to \left\langle \varphi_4^{k+1}, \xi_i \right\rangle_{\Gamma_2}, \\ &(q_{t,m}^{k+1}, v_i) \to (q_t^{k+1}, v_i), \quad \left\langle \varphi_{2,4,m}^{k+1}, v_i \right\rangle_{\Gamma_2} \to \left\langle \varphi_{2,4}^{k+1}, v_i \right\rangle_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

另一方面，经过简单计算可得

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla \xi_i\right) - \left(\lambda_w^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w^{k+1}, \nabla \xi_i\right) \\ &= \left(\left(\lambda_{w,m}^{k+1} - \lambda_w^{k+1}\right) \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla \xi_i\right) \\ &\quad + \left(\lambda_w^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla (\mu_{w,m}^{k+1} - \mu_w^{k+1}), \nabla \xi_i\right) = R_1^{k+1} + R_2^{k+1}. \end{aligned} \tag{30}$$

由.....的连续 性、(29) 以及勒贝格控制收敛定理（参见 [48] 中的 DCT），我们得到

$$R_1^{k+1} \to 0, \quad \text{as } m \to \infty.$$

对于 R_2^{k+1}，根据 (27)，可得

$$R_2^{k+1} \to 0, \quad \text{as } m \to \infty.$$

Thus

$$\left(\lambda_{w,m}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_{w,m}^{k+1}, \nabla \xi_i\right) \to \left(\lambda_w^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w^{k+1}, \nabla \xi_i\right), \quad \text{as } m \to \infty.$$

类似地，我们有

$$\left(\lambda_{w,m}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_m^{k+1},\nabla\xi_i\right)\to\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1},\nabla\xi_i\right),\quad \text{as } m\to\infty,$$
$$\left(\lambda_{t,m}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_m^{k+1},\nabla\xi_i\right)\to\left(\lambda_t^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1},\nabla\xi_i\right),\quad \text{as } m\to\infty.$$

根据上述得到的所有结果，很容易发现，(μ_w^{k+1},p^{k+1}) 是方程 (21) 的一个弱解。因此，结合 $S_w^{k+1}=\mathcal{S}(\mu_w^{k+1})$，可得 $(S_w^{k+1},\mu_w^{k+1},p^{k+1})$ 是定义 2 中全隐式时间半离散格式的一个弱解。

接下来，我们将证明 $S_\epsilon\le S_w^{k+1}\le 1-S_\epsilon$。同样，我们只需证明在 (21) 中 $M_{\min}=\mu_w(S_\epsilon)\le\mu_w^{k+1}\le\mu_w(1-S_\epsilon)=M_{\max}$。设 $\xi=v=(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-=\min\{\mu_w^{k+1}-M_{\min},0\}\le 0$，并比较 (21) 中的两个方程，可得

$$\begin{aligned}&\left(\phi\frac{\mathcal{S}(\mu_w^{k+1})-S_w^k}{\tau},(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)+\frac{\lambda_n(S_\epsilon)}{\lambda_t(S_\epsilon)}\left(\lambda_w(S_\epsilon)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1},\nabla(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)\\&=\left(q_w(S_\epsilon)-\frac{\lambda_w(S_\epsilon)}{\lambda_t(S_\epsilon)}q_t(S_\epsilon),(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)+\left\langle\varphi_4(S_\epsilon)-\frac{\lambda_w(S_\epsilon)}{\lambda_t(S_\epsilon)}\varphi_{2,4}(S_\epsilon),(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right\rangle_{\Gamma_2}.\end{aligned}$$

结合假设4中的条件(15)和(16)，可知上述方程右端非正。此外，对于左端，容易看出

$$\left(\phi\frac{\mathcal{S}(\mu_w^{k+1})-S_w^k}{\tau},(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)=\left(\phi\frac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau},(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)\ge 0,$$

and

$$\left(\lambda_w(S_\epsilon)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1},\nabla(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)=\left(\lambda_w(S_\epsilon)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-,\nabla(\mu_w^{k+1}-M_{\min})^-\right)\ge 0.$$

因此 $\mu_w^{k+1}\ge M_{\min}$。按照类似的推理，也可以证明 $\mu_w^{k+1}\le M_{\max}$。由此得证。□

注4. 如果相迁移率满足 $\lambda_w\ge 0$ 和 $\lambda_n\ge\lambda_{\min}>0$ （或 $\lambda_n\ge 0$ 和 $\lambda_w\ge\lambda_{\min}>0$），那么利用注*3*，我们只能在较不光滑的空间 $L^2(\Omega)$ 中，为具有齐次边界条件的(21)建立一个弱解$(S_w^{k+1},\mu_w^{k+1},p^{k+1})$。这是符合实际情况的，因为在 $\lambda_w=0$ 或 $\lambda_n=0$的情形下，化学势可能不具备连续性。

4.3. 定理2.2的存在性证明。 本小节将证明定理2.2中弱解的存在性。利用对每个 $k=0,\cdots,N$成立的事实 $S_w^k\in[S_\epsilon,1-S_\epsilon]$，可得如下能量稳定性估计。该性质保证全隐式时间半离散格式的弱解一致有界，这对收敛性分析至关重要。

引理4.4。 对于每个整数 $0\le k\le N-1$，令$(S_w^{k+1},\mu_w^{k+1},p^{k+1})$ 为定义 *2* 中定义的全隐式时间半离散格式的弱解。那么，在假设 *1-4* 下，我们有以下能量稳定性估计：

$$\begin{aligned}&\left(\phi,F(S_w^N)-F(S_w^0)\right)+\frac{\phi_m c_{\min}}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left\|S_w^{k+1}-S_w^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_n^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1},\nabla p^{k+1}\right)\\&+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(p^{k+1}+\mu_w^{k+1}\right),\nabla\left(p^{k+1}+\mu_w^{k+1}\right)\right)\\&\le\sum_{k=0}^{N-1}\left(S_w^{k+1}-S_w^k,\phi\varphi_1^{k+1}\right)+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(p^{k+1}+\mu_w^{k+1}\right),\nabla\varphi_{1,3}^{k+1}\right)\\&+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_n^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1},\nabla\varphi_3^{k+1}\right)+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\Big(\left(q_n^{k+1},p^{k+1}-\varphi_3^{k+1}\right)+\left(q_w^{k+1},\mu_w^{k+1}+p^{k+1}-\varphi_{1,3}^{k+1}\right)\Big)\\&+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\left\langle\varphi_2^{k+1},p^{k+1}-\varphi_3^{k+1}\right\rangle_{\Gamma_2}+\left\langle\varphi_4^{k+1},\mu_w^{k+1}+p^{k+1}-\varphi_{1,3}^{k+1}\right\rangle_{\Gamma_2}\right),\end{aligned}\tag{31}$$

其中 $\varphi_{1,3}^{k+1}=\varphi_1^{k+1}+\varphi_3^{k+1}$。

证明。 在 (21) 中取 $v = p^{k+1} - \varphi_3^{k+1}$，可得

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_t^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1}, \nabla p^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla \mu_w^{k+1}, \nabla p^{k+1}\right)\\ =\ &\left(\lambda_t^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1} + \lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla \mu_w^{k+1}, \nabla \varphi_3^{k+1}\right) + \left(q_t^{k+1}, p^{k+1} - \varphi_3^{k+1}\right) + \left\langle \varphi_{2,4}^{k+1}, p^{k+1} - \varphi_3^{k+1}\right\rangle_{\Gamma_2}.\end{aligned}$$

在 (21) 中选取 $\xi = \mu_w^{k+1} - \varphi_1^{k+1}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\left(\phi\frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\tau}, \mu_w^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla \mu_w^{k+1}, \nabla \mu_w^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1}, \nabla \mu_w^{k+1}\right)\\ =\ &\left(\phi\frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\tau}, \varphi_1^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla (p^{k+1} + \mu_w^{k+1}), \nabla \varphi_1^{k+1}\right)\\ &+ \left(q_w^{k+1}, \mu_w^{k+1} - \varphi_1^{k+1}\right) + \left\langle \varphi_4^{k+1}, \mu_w^{k+1} - \varphi_1^{k+1}\right\rangle_{\Gamma_2}.\end{aligned}$$

因此，由上述两个等式容易看出

$$\begin{aligned}&\left(\phi\frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\tau}, \mu_w^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla \left(\mu_w^{k+1} + p^{k+1}\right), \nabla \left(\mu_w^{k+1} + p^{k+1}\right)\right) + \left(\lambda_n^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1}, \nabla p^{k+1}\right)\\ =\ &\left(\phi\frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\tau}, \varphi_1^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla \left(\mu_w^{k+1} + p^{k+1}\right), \nabla \varphi_{1,3}^{k+1}\right) + \left(\lambda_n^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1}, \nabla \varphi_3^{k+1}\right)\\ &+ \left(q_n^{k+1}, p^{k+1} - \varphi_3^{k+1}\right) + \left(q_w^{k+1}, \mu_w^{k+1} + p^{k+1} - \varphi_{1,3}^{k+1}\right)\\ &+ \left\langle \varphi_2^{k+1}, p^{k+1} - \varphi_3^{k+1}\right\rangle_{\Gamma_2} + \left\langle \varphi_4^{k+1}, \mu_w^{k+1} + p^{k+1} - \varphi_{1,3}^{k+1}\right\rangle_{\Gamma_2}.\end{aligned} \tag{32}$$

另一方面，根据附录 B，我们有

$$F(S_w^{k+1}) - F(S_w^k) + \frac{c_{\min}}{2}\left(S_w^{k+1} - S_w^k\right)^2 \le \left(S_w^{k+1} - S_w^k\right)\mu_w^{k+1}. \tag{33}$$

因此，结合 (32)-(33) 并对 k 求和，即可得到所需结果。 □

注释 5. 如果多孔介质中的两相流系统是封闭的，即 $q_w = q_n \equiv 0$, $\varphi_1(x,t) = \varphi_3(x,t) \equiv 0$ 和 $\varphi_2 = \varphi_4 \equiv 0$, 则 (31) 可以改写为（参见 [37] 中的定理 *1*）：

$$\left(\phi, F(S_w^N) - F(S_w^0)\right) + \sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\left(\lambda_n^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1}, \nabla p^{k+1}\right) + \left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(p^{k+1} + \mu_w^{k+1}\right), \nabla\left(p^{k+1} + \mu_w^{k+1}\right)\right)\right) \le 0.$$

根据能量稳定性估计 (31)，我们得到以下一致有界性结果。

引理4.5。 对每个整数 $0 \le k \le N-1$，令 $(S_w^{k+1}, \mu_w^{k+1}, p^{k+1})$ 为定义 *2* 中给出的全隐式时间半离散格式的弱解。则在假设 *1-4* 下，我们有

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left\|S_w^{k+1} - S_w^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^{N-1}\tau\|\mu_w^{k+1} - \varphi_1^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^{N-1}\tau\|p^{k+1} - \varphi_3^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \le C, \tag{34}$$

其中 C 与时间步长 τ无关。此外，还存在一个常数 C，该常数与时间步长 τ 无关，使得

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left\|\frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\tau}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \le C, \quad \sum_{k=0}^{N-1}\tau\left\|\frac{\mu_w^{k+1} - \mu_w^k}{\tau}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \le C, \tag{35}$$

and

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left\|\mu_w^{k+1} - \mu_w^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C\tau. \tag{36}$$

证明。 首先，根据 F 的定义，我们有

$$F_{\min} \le F(S_w) \le F_{\max}, \quad \forall S_w \in [S_\epsilon, 1 - S_\epsilon],$$

其中， $F_{\min}$ 和 $F_{\max}$ 是两个常数。由（31）以及事实 $a^2 + b^2 \le 3a^2 + 3(a+b)^2,$，可得

$$\frac{\phi_m c_{\min}}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left\|S_w^{k+1} - S_w^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_{\min}K_{\min}}{3}\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\|\nabla\mu_w^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)$$

$$\leq (F_{\max}-F_{\min})\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}+\sum_{k=0}^{N-1}\left(S_w^{k+1}-S_w^k,\phi\varphi_1^{k+1}\right)+\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\|\mu_w^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2+\|p^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2\right)$$
$$+C\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\sum_{\alpha=1,3}\|\varphi_\alpha^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2+\sum_{\alpha=w,n}\|q_\alpha^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\alpha=2,4}\|\varphi_\alpha^{k+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}^2\right),$$

其中， ε 是一个可任意小的正常数。接下来利用以下事实

$$\|p^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2\leq C\|\nabla p^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2\quad\text{and}\quad\|\mu_w^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|\mu_w^{k+1}\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C,$$

我们有

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left\|S_w^{k+1}-S_w^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\|\mu_w^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2+\|p^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2\right)\leq C\sum_{k=0}^{N-1}\left(S_w^{k+1}-S_w^k,\phi\varphi_1^{k+1}\right)+C.$$

对于上述不等式右侧的第一项，由假设3可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}\left(S_w^{k+1}-S_w^k,\phi\varphi_1^{k+1}\right)=&\left(\phi,S_w^N\varphi_1^N-S_w^0\varphi_1^0\right)-\sum_{k=0}^{N-1}\left(\phi S_w^k,\varphi_1^{k+1}-\varphi_1^k\right)\\&\leq C+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(|\phi S_w^k|,|\partial_t\varphi_1|)dt\\&\leq C+\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t\varphi_1\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega))}\leq C,\end{aligned}$$

由此直接得到（34）。显然，利用（20）和（34）可推导出（36）。

对于（35）的证明，由于 $\varphi_1\in H^1(0,T;\,H^{-1}(\Omega))$，我们有

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left\|\frac{\varphi_1^{k+1}-\varphi_1^k}{\tau}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\leq C\|\partial_t\phi\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

然后由（21）容易看出，对于任意测试函数 $\xi\in W$，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\phi\frac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau},\xi\right)\\=&-\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(\mu_w^{k+1}+p^{k+1}\right),\nabla\xi\right)+\left(q_w^{k+1},\xi\right)+\left\langle\varphi_4^{k+1},\xi\right\rangle_{\Gamma_2}\\\leq&\lambda_{\max}K_{\max}\left\|\mu_w^{k+1}+p^{k+1}\right\|_{H^1(\Omega)}\|\xi\|_{H^1(\Omega)}+C\|q_w^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\xi\|_{H^1(\Omega)}+\|\varphi_4^{k+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\xi\|_{L^2(\Gamma_2)}\\\leq&C\left(\left\|\mu_w^{k+1}+p^{k+1}\right\|_{H^1(\Omega)}+\|q_w^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}+\|\varphi_4^{k+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|\xi\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

因此，结合边界条件，我们可以推导出

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\\&\leq C\left(\left\|\mu_w^{k+1}+p^{k+1}\right\|_{H^1(\Omega)}+\|q_w^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}+\|\varphi_4^{k+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}+\left\|\frac{\varphi_1^{k+1}-\varphi_1^k}{\tau}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right).\end{aligned}\tag{37}$$

然后，将上述不等式从 k 0 求和到 $N-1$ ，并结合 (20)，得到 (35)。证明完成。□

在每个子区间 I_k 上，我们定义分段常数函数

$$S_{w,N}\Big|_{I_k}=S_w^{k+1},\quad\mu_{w,N}\Big|_{I_k}=\mu_w^{k+1},\quad p_N\Big|_{I_k}=p^{k+1},\quad DS_{w,N}\Big|_{I_k}=\frac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau},\quad\varphi_{\alpha,N}\Big|_{I_k}=\varphi_\alpha^{k+1}$$

对于 $\alpha=1$，3，以及分段线性函数

$$\mu_{w,N,L}\Big|_{I_k}=\frac{t_{k+1}-t}{\tau}\mu_w^k+\frac{t-t_k}{\tau}\mu_w^{k+1}.$$

由引理4.5可知

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\|\mu_{w,N,L}\|_{H^1(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\left\|\frac{t_{k+1}-t}{\tau}\mu_w^k+\frac{t-t_k}{\tau}\mu_w^{k+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \tau \left(\left\| \mu_w^k \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \mu_w^{k+1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \leq C,$$

和$\varphi_{\alpha,N} \to \varphi \quad \alpha$在 $L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))$ 中强收敛，且 $\alpha = 1,\ 3$，因为$\varphi_{\alpha,\ N}$是.....的分段常数插值 φ_α 相对于 时间变量。

由引理 4.5以及上述分析，我们知道存在一个子序列（仍记为 N）

$$\{(\mu_{w,N,L},\ \mu_{w,N} - \varphi_{1,N},\ \partial_t \mu_{w,N,L},\ S_{w,N},\ p_N - \varphi_{3,N},\ DS_{w,N})\}$$

使得存在 $(\hat{}\mu_w,\ \mu_{w,*},\hat{}\mu_w',\ S_w,\ p_*,\ S_w') \in L^2(0,T;\ H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;\ W) \times L^2(0,T;\ L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;\ V) \times L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$ 满足

$$\begin{aligned}
&\mu_{w,N,L} \rightharpoonup \hat{\mu}_w, \quad \mu_{w,N} \rightharpoonup \mu_{w,*} + \varphi_1 = \mu_w \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\
&\partial_t \mu_{w,N,L} \rightharpoonup \hat{\mu}_w' \text{ weakly in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\
&S_{w,N} \rightharpoonup S_w \text{ weakly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\
&p_N \rightharpoonup p_* + \varphi_3 = p \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\
&DS_{w,N} \rightharpoonup S_w' \text{ weakly in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),
\end{aligned} \tag{38}$$

如 $N \to \infty$。这里，我们有如下事实（见附录C）：

$$\hat{\mu}_w' = \partial_t \hat{\mu}_w \quad \text{and} \quad S_w' = \partial_t S_w. \tag{39}$$

由于 $H^1(\Omega)$ 紧嵌入于 $L^2(\Omega)$，且 $L^2(\Omega)$ 连续嵌入于 $H^{-1}(\Omega)$，结合 Aubin-Lions-Simon引理（见[45]中的推论4），我们可以得出 $\mu_{w,N,L} \to \hat{}\mu_w$ 在$L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛，且 $\hat{}\mu_w \in C(0,T;\ L^2(\Omega))$。

引理4.6。 在假设 *1-4* 下，我们有子序列 $\mu_{w,N} \to \mu_w$ 和 $S_{w,N} \to S_w$ 在$L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛，当 $N \to \infty$ 时，其中 $S_w = \mathcal{S}(\mu_w)$。

证明。 由引理4.5，根据 $\mu_{w,N,L}$ 和 $\mu_{w,N}$的定义，我们得到

$$\int_0^T \|\mu_{w,N,L} - \mu_{w,N}\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{I_k} \left\| \frac{t_{k+1} - t}{\tau} \left(\mu_w^{k+1} - \mu_w^k \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t \leq C\tau,$$

利用 $\mu_{w,N,L} \to \hat{}\mu_w$在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛，可得 $\mu_{w,N} \to \hat{}\mu_w$在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛。再结合 $\mu_{w,N} \rightharpoonup \mu_w$在 $L^2(0,T;\ H^1(\Omega))$ 中弱收敛，可得 $\hat{}\mu_w = \mu_w \in C(0,T;\ L^2(\Omega))$，以及 $\mu_{w,N} \to \mu_w$在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛。另一方面，由不等式 (20) 可得 $S_{w,N} = \mathcal{S}(\mu_{w,N}) \to \mathcal{S}(\mu_w)$ 在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛。因此，根据 $S_{w,N} \rightharpoonup S_w$在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中弱收敛，我们有 $S_w = \mathcal{S}(\mu_w)$。□

现在，基于上述收敛结果，我们证明定理2.2中弱解的存在性。

定理*2.2*中弱解存在性的证明。这里，我们将证明子序列 $(S_{w,N}, \mu_{w,N}, p_N)$ 的极限 (S_w, μ_w, p) 是定义1中弱形式的弱解。在式（14）中选取 $\xi, v \in C_0^\infty(0,T,H^1(\Omega))$，其中 $\xi^k = \frac{1}{\tau}\int_{I_k} \xi(t)\mathrm{d}t$, $v^k = \frac{1}{\tau}\int_{I_k} v(t)\mathrm{d}t$，并令 $N \to \infty$，由 $DS_{w,N} \rightharpoonup \partial_t S_w$ 在 $L^2(0,T;\ \bar{}H^{-1}(\Omega))$ 中弱收敛可得

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tau \left(\phi \frac{\mathcal{S}(\mu_w^{k+1}) - S_w^k}{\tau}, \xi^k \right) \to \int_0^T (\phi \partial_t S_w, \xi) \,\mathrm{d}t.$$

然后，由于 $S_{w,N} \to S_w$ 在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛，利用 $q_\alpha(\alpha = w,n)$ 和$\varphi_\alpha(\alpha = 2{,}4)$ 的连续性可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1} \tau(q_w^{k+1}, \xi^k) \to \int_0^T (q_w, \xi)\mathrm{d}t, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \tau \left\langle \varphi_4^{k+1}, \xi^k \right\rangle_{\Gamma_2} \to \int_0^T \langle \varphi_4, \xi \rangle_{\Gamma_2} \,\mathrm{d}t, \\
&\sum_{k=0}^{N-1} \tau \left(q_t^{k+1}, v^k \right) \to \int_0^T (q_t, v)\mathrm{d}t, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \tau \left\langle \varphi_{2,4}^{k+1}, v^k \right\rangle_{\Gamma_2} \to \int_0^T \langle \varphi_{2,4}, v \rangle_{\Gamma_2} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

另一方面，经过简单计算可得

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tau \left(\lambda_w^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w^{k+1}, \nabla \xi^k \right) - \int_0^T (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla \mu_w, \nabla \xi) \,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1},\nabla(\xi^k-\xi)\right)\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\left(\left(\lambda_w^{k+1}-\lambda_w\right)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1},\nabla\xi\right)\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\left(\lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(\mu_w^{k+1}-\mu_w\right),\nabla\xi\right)\mathrm{d}t=R_1+R_2+R_3.$$

利用 λ_w, $S_{w,\ N}\to S_w$ 在 $L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ 中的强连续性，以及 Lebesgue控制收敛定理（参见 [48] 中的 DCT），可得

$$R_2\to 0,\quad \text{as } N\to\infty.$$

对于 R_1 和 R_3，根据$\mu_{w,\ N}\rightharpoonup\mu_w$ 在 $L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))$和 $\xi^k=\frac{1}{\tau}\int_{I_k}\xi(t)\mathrm{d}t$中弱收敛，我们得到

$$R_1\to 0,\quad R_3\to 0,\quad \text{as } N\to\infty.$$

因此，

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w^{k+1},\nabla\xi^k\right)\to\int_0^T\left(\lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w,\nabla\xi\right)\mathrm{d}t.$$

类似地，我们可以推导出

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_w^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1},\nabla\xi^k\right)\to\int_0^T\left(\lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p,\nabla\xi\right)\mathrm{d}t,$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\lambda_t^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p^{k+1},\nabla v^k\right)\to\int_0^T\left(\lambda_t\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p,\nabla v\right)\mathrm{d}t.$$

综合以上得到的所有要素，很容易验证$(\mu_w,\ p)$是方程(14)的一个弱解。由 $S_w=\mathcal{S}(\mu_w)$和定理2.1可知，证明至此完成。□

5. Uniqueness of the weak solution

为了证明定义1中定义的弱形式的弱解唯一，我们进一步引入以下假设和引理，它们将在 [23] 中使用。

假设5. 假设 λ_w、 λ_n、 q_w、 q_n、 φ_2 和 φ_4 关于 S_w 均为利普希茨连续。此外，我们假设边界 $\varphi_1\in H^1(0,\ T;\ W^{-1,\infty}(\Omega)$ 以及化学势 μ_w 关于空间是利普希茨连续的，且相应的利普希茨常数关于时间属于 L^2，即存在常数 $C=C(t)$ 使得

$$|\mu_w(\boldsymbol{x}_1,t)-\mu_w(\boldsymbol{x}_2,t)|\le C(t)|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|,\ \forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\Omega, \tag{40}$$

和 $C(t)\in L^2([0,T])$。

引理5.1. （$W^{1,\infty}$的刻画，见 [23] 中第5章第8节的定理4）设 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是利普希茨连续的，则 $u\in W^{1,\infty}(\Omega)$。

于是我们得到以下关于弱解的唯一性的结果。

定理5.1。 在假设*1—5*下，定义*1*中定义的弱形式的弱解是唯一的。

证明。 设 (S_1,μ_1,p_1) 和 (S_2,μ_2,p_2) 是定义1中弱形式的两个弱解。记 $e_S=S_2-S_1$, $e_\mu=\mu_2-\mu_1$和 $e_p=p_2-p_1$，并令 $\xi=e_\mu$和 $v=e_p$，由式 (14) 和柯西-施瓦茨不等式可直接推出

$$\int_0^T\left(\phi\partial_t e_S,e_\mu\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left(\lambda_w(\mu_2)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(e_\mu+e_p\right),\nabla\left(e_\mu+e_p\right)\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left(\lambda_n(\mu_2)\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla e_p,\nabla e_p\right)\mathrm{d}t$$
$$=-\int_0^T\left((\lambda_n(\mu_2)-\lambda_n(\mu_1))\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_1,\nabla e_p\right)\mathrm{d}t-\int_0^T\left((\lambda_w(\mu_2)-\lambda_w(\mu_1))\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\left(\mu_1+p_1\right),\nabla\left(e_\mu+e_p\right)\right)\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\left(q_w(\mu_2)-q_w(\mu_1),e_\mu\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left\langle\varphi_4(\mu_2)-\varphi_4(\mu_1),e_\mu\right\rangle_{\Gamma_2}\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\left(q_t(\mu_2)-q_t(\mu_1),e_p\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left\langle\varphi_{2,4}(\mu_2)-\varphi_{2,4}(\mu_1),e_p\right\rangle_{\Gamma_2}\mathrm{d}t$$

$$\leq -\int_0^T ((\lambda_n(\mu_2)-\lambda_n(\mu_1))\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_1, \nabla e_p)\,\mathrm{d}t - \int_0^T ((\lambda_w(\mu_2)-\lambda_w(\mu_1))\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla(\mu_1+p_1), \nabla(e_\mu+e_p))\,\mathrm{d}t$$
$$+ C\int_0^T \|e_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t + \varepsilon\left(\|e_\mu\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|e_p\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right),$$

其中 ε 是可任意小的正常数。上述最后一个不等式用到了 q_α $(\alpha = w,n)$ φ_α $(\alpha = 2,4)$ 的利普希茨连续性以及迹定理（参见 [47] 中的引理 16.1）。接下来，利用 $a^2+b^2 \leq 3a^2+3(a+b)^2$ 这一事实以及估计（见附录 D）

$$\begin{cases} \|\mu_1\|_{L^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} + \|\partial_t \mathcal{S}'(\eta)\|_{L^2(0,T;W^{-1,\infty}(\Omega))} \leq C, \\ \displaystyle\int_0^T (\nabla p_1, f\nabla z)\,\mathrm{d}t \leq C\int_0^T \left(\|\mu_1\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|q_t\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_{2,4}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{41}$$

分别取 $f = e_\mu$ 和 $z = e_p,\ e_\mu$，由柯西-施瓦茨不等式以及 λ_α $(\alpha = w,\ n)$ 的利普希茨连续性可得

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\phi\partial_t e_S, e_\mu)\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda_{\min}K_{\min}}{3}\left(\|e_\mu\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|e_p\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right) \\ &\leq C\int_0^T \left(\|\mu_1\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|q_t\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_{2,4}\|^2_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|e_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t \\ &\quad + \varepsilon\left(\|e_\mu\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|e_p\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right), \end{aligned}$$

对于上述不等式左端的第一项，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^T (\phi\partial_t e_S, e_\mu)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T (\phi\partial_t(\mathcal{S}'(\eta)e_\mu), e_\mu)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \partial_t(\phi e_\mu, \mathcal{S}'(\eta)e_\mu)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T (\phi\partial_t\mathcal{S}'(\eta), e_\mu^2)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{\phi_m S_\epsilon}{2}\|e_\mu(\boldsymbol{x},T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}}{2}\int_0^T \|\partial_t\mathcal{S}'(\eta)\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}\|e_\mu^2\|_{W^{1,1}(\Omega)}\mathrm{d}t \\ &\geq c\|e_\mu(\boldsymbol{x},T)\|^2_{L^2(\Omega)} - C\int_0^T \|\partial_t\mathcal{S}'(\eta)\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}\left(\|\nabla e_\mu^2\|_{L^1(\Omega)} + \|e_\mu^2\|_{L^1(\Omega)}\right)\mathrm{d}t \\ &\geq c\|e_\mu(\boldsymbol{x},T)\|^2_{L^2(\Omega)} - C\int_0^T \|\partial_t\mathcal{S}'(\eta)\|^2_{W^{-1,\infty}(\Omega)}\|e_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t - \varepsilon\int_0^T \|\nabla e_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 η 介于 μ_1 和 μ_2 之间。基于上述分析，我们可以得到

$$\begin{aligned} &\|e_\mu(\boldsymbol{x},T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_\mu\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|e_p\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq C\int_0^T \left(\|\partial_t\mathcal{S}'(\eta)\|^2_{W^{-1,\infty}(\Omega)} + \|\mu_1\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|q_t\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_{2,4}\|^2_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|e_\mu\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{42}$$

由 [28] 中的 Gr¨onwall 不等式可知，$\|e_\mu(\boldsymbol{x},\ T)\|_{L^2(\Omega)} = 0$。因此，由于在不等式 (42) 中，$T$ 可以替换为任意时刻 t，我们得到 $\|e_\mu\|_{L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))} = 0$。于是，由不等式 (42) 可得 $\|e_\mu\|^2_{L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))} + \|e_p\|^2_{L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))} = 0$，证毕。□

6. Regularity of the weak solution

在本节中，由于 λ_w、λ_n、$p_c = -\mu_w$ 取决于 S_w，我们首先介绍人工压力（见 [6, 19]）

$$\psi = p + \int_{S_\epsilon}^{S_w}\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_t}\frac{\partial\mu_w}{\partial S_w}\right)(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{43}$$

以及互补压力（见 [6, 19]）

$$\theta = \int_{S_\epsilon}^{S_w}\left(\frac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_t}\frac{\partial\mu_w}{\partial S_w}\right)(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{44}$$

于是可推导出该模型的等价表述（11）：

$$\begin{cases}\phi\partial_t S_w - \nabla\cdot(\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\theta + \lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\psi) = q_w,\\ -\nabla\cdot(\lambda_t\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\psi) = q_t.\end{cases} \tag{45}$$

为方便起见，在本节中，我们考虑完全诺伊曼边界条件

$$\begin{cases}\lambda_n\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_n\cdot\mathbf{n} = \varphi_2, & \text{on } \partial\Omega\times(0,T],\\ \lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_w\cdot\mathbf{n} = \varphi_4, & \text{on } \partial\Omega\times(0,T].\end{cases}$$

另一方面，由（43）和（44）可得

$$\nabla\psi = \nabla p + \frac{\lambda_w}{\lambda_t}\nabla\mu_w, \quad \nabla\theta = \frac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_t}\nabla\mu_w, \tag{46}$$

由此可得

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\theta\cdot\mathbf{n} + \lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\psi\cdot\mathbf{n} = \lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_w\cdot\mathbf{n} = \varphi_4,$$
$$\lambda_t\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\psi\cdot\mathbf{n} = \lambda_n\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_n\cdot\mathbf{n} + \lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p_w\cdot\mathbf{n} = \varphi_2+\varphi_4 = \varphi_{2,4}.$$

因此，我们通过给出完全诺伊曼边界条件来闭合方程（45）

$$\begin{cases}\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\theta\cdot\mathbf{n} + \lambda_w\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\psi\cdot\mathbf{n} = \varphi_4, & \text{on } \partial\Omega\times(0,T],\\ \lambda_t\boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\psi\cdot\mathbf{n} = \varphi_{2,4}, & \text{on } \partial\Omega\times(0,T].\end{cases} \tag{47}$$

为了分析新模型弱解的正则性，我们提出以下假设。

假设 6. 我们假设 φ_2, φ_4 和 λ_w, λ_n 关于 S_w 利普希茨连续。

假设 7. 我们令区域 Ω 为凸的，具有 C^{1,β_1} 边界，其中 $\beta_1\in(0,1)$，并假设初始条件 $S_w^0\in H^1(\Omega)\cap C^{0,\beta_2}(\Omega)$，其中 $\beta_2\in(0,1)$。此外，我们假设

$$\gamma_w,\gamma_n,\gamma_{wn}\in H^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}^{1,\infty}(\Omega) = [W^{1,\infty}(\Omega)]^{d\times d},$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{K}}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}^{1,\infty}(\Omega)$ 表示张量 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ 的每个分量都属于 $W^{1,\infty}(\Omega)$。

于是，基于两个中间变量 θ 和 ψ，我们得到以下正则性结果。

定理 6.1. 设三元组 (S_w,μ_w,p) 是定义*1*中定义的连续模型的弱解。那么，在假设 *1-4*、*6* 和 *7* 下，我们有

$$\begin{cases}S_w\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),\\ \mu_w,\ p\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)).\end{cases} \tag{48}$$

证明. 我们首先证明 $\psi\in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$。根据 [19], 中的定理 2.5，我们可以类似地由以下结果推出

$$0\le\frac{\lambda_{\min}^2 L_{\min}}{2\lambda_{\max}}\le\frac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_t}\frac{\partial\mu_w}{\partial S_w}\le\frac{\lambda_{\max}^2 L_{\max}}{2\lambda_{\min}}, \quad S_w^0\in C^{0,\beta_2}(\overline{\Omega}), \quad S_\epsilon\le S_w\le 1-S_\epsilon,$$

关于 S_w 的 φ_α, $\alpha=2,4$ 的利普希茨连续性，以及 $q_w\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ tha t

$$S_w\in L^\infty(0,T;C^{0,\beta_0}(\overline{\Omega}))$$

对于某个 $\beta_0\in(0,\beta_1]\cap(0,\beta_2]$。由于 $\lambda_t=\lambda_w+\lambda_n$ 关于 S_w 具有利普希茨连续性，我们得到 $\lambda_t\in L^\infty(0,T;C^{0,\beta_0}(\Omega))$。利用椭圆系统的正则性理论（例如定理 5.21）以及 [26] 中的事实

$$\lambda_t\in L^\infty(0,T;C^{0,\beta_0}(\overline{\Omega})), \quad q_t\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)), \quad \varphi_{2,4}\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)),$$

我们可以由（45）的第二个方程以及该事实推导出

$$\psi\in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)). \tag{49}$$

接下来，我们将证明

$$\partial_t S_w\in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad S_w,\ \mu_w,\ p\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)).$$

By 由这些事实 γ_w, γ_n, $\gamma_{wn}\in H^1(\Omega)$ 和 $\mu_w\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，根据 $S_w=\mathcal{S}(\mu_w)$ 可得

$$S_w\in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{50}$$

然后，由 λ_w，λ_t 关于 S_w 的利普希茨连续性以及拉德马赫定理（如 [42], 中的定理 R），可得其有界性

$$\frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w}, \ \frac{\partial \lambda_n}{\partial S_w}.$$

因此，关于 S_w 的 φ_α，$\alpha = 2,4$ 的利普希茨连续性以及 (49)-(50) 表明

$$\varphi_2,\ \varphi_4 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad \nabla\lambda_w \cdot \nabla\psi,\ \nabla\lambda_t \cdot \nabla\psi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{51}$$

然后利用 (51)、$\lambda_t \geq 2\lambda_{\min} > 0$ 和 $q_t \in L^\infty(0,T;\ L^\infty(\Omega))$，并结合椭圆系统的正则性理论（参见 [27] 中的定理 9.15），由 (45) 的第二个方程可知

$$\psi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{52}$$

利用 (49)-(52)、$q_w \in L^\infty(0,T;\ L^\infty(\Omega))$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{K}} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}^{1,\infty}(\Omega)$，我们得到

$$\nabla \cdot (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}} \nabla\psi) + q_w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{53}$$

因此，根据 $\varphi_4 \in L^2(0,T;\ H^1(\Omega))$ 和 Galerkin 逼近法（参见 [23] 第 7 章），(45) 的第一个方程给出

$$\partial_t S_w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \theta \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{54}$$

由于以下事实：γ_w，γ_n，$\gamma_{wn} \in H^1(\Omega)$、$\psi \in L^\infty(0,\ T;\ W^{1,\ \infty}(\Omega))$以及 $\theta \in L^\infty(0,\ T;\ H^1(\Omega))$，并且 (54) 由(46)可知

$$S_w, \mu_w, p \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{55}$$

最后，我们证明 $\mu_w,\ \ p \in L^2(0,\ T;\ H^2(\Omega))$。利用(53)–(54)和 $\varphi_2,\ \ \varphi_4 \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))$，并结合椭圆系统的正则性理论（见 [27]中的定理 9.15），由(45)的第一个方程可得

$$\theta \in L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{56}$$

通过简单计算，我们可以得到

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_t}\Delta\mu_w + \nabla\left(\frac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_t}\right)\cdot\nabla\mu_w,\\ &= \frac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_t}\Delta\mu_w + \frac{\partial\lambda_w\lambda_n/\lambda_t}{\partial S_w}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_w}\nabla\mu_w\cdot\nabla\mu_w.\end{aligned}$$

此外，利用以下事实（见第5章中的习题10：[23]）

$$\|\nabla\theta\|^2_{L^4(\Omega)} \leq \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)},$$

由于以下关系，我们有 $\nabla\theta \in L^4(0,\ T;\ L^4(\Omega))$

$$\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\lambda^2_{\max}L_{\max}}{2\lambda_{\min}},$$

以及 $\theta \in L^2(0,\ T;\ H^2(\Omega))$。然后由(46)可知，$\nabla\mu_w \in L^4(0,\ T;\ L^4(\Omega))$，这意味着 ans

$$\nabla\mu_w \cdot \nabla\mu_w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

因此，现在我们可以由椭圆系统的正则性理论（见 [27]中的定理 9.15）得到$\mu_w \in L^2(0,T;\ H^2(\Omega))$。类似地，我们有 $p \in L^2(0,T;\ H^2(\Omega))$，从而完成证明。□

7. Conclusion

本文利用能量稳定性估计和向量场零点定理，证明了多孔介质中不可压缩不可混溶两相流的热力学一致模型存在弱解。通过假设化学势满足利普希茨连续性，而非假设 [18] 中定义的人工压力满足该条件，我们得到了弱解的唯一性。此外，基于 [19], 中的定理 2.5，我们运用椭圆型偏微分方程的正则性理论，得到了具有完全诺伊曼边界条件的模型的弱解正则性。据我们所知，本文是首篇研究多孔介质两相流热力学一致模型适定性与正则性的工作[25, 35]。

Appendix A. *Proof of the inequality* (19)

为证明不等式 (19)，我们首先引入一个截断函数 H，它满足 $H(x)=0$ 当 $x>0$ 时，以及$H(x)=1$ 当 $x\le 0$时，由此可得

$$(\mu_w-M_{\min})^-=(\mu_w-M_{\min})H(\mu_w-M_{\min}),\quad \frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}=-\delta(x),$$

其中 $\delta(x)$是狄拉克δ函数（关于该函数的更多细节，请参阅 [30]）。然后由微分链式法则，我们可以得到等式

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t\Big(\big(F(S_w)-F(S_\epsilon)-M_{\min}(S_w-S_\epsilon)\big)H(\mu_w-M_{\min})\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
=&\int_\Omega \partial_t\mathcal{S}(\mu_w)(\mu_w-M_{\min})H(\mu_w-M_{\min})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&-\int_\Omega \big(F(S_w)-F(S_\epsilon)-M_{\min}(S_w-S_\epsilon)\big)\delta(S_w-S_\epsilon)\partial_t\mathcal{S}(\mu_w)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
=&\int_\Omega \partial_t\mathcal{S}(\mu_w)(\mu_w-M_{\min})H(\mu_w-M_{\min})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

因此，我们可以看到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\left(\phi\partial_t\mathcal{S}(\mu_w),(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t\\
=&\int_0^T\left(\phi\partial_t S_w,(\mu_w-M_{\min})^-\right)\mathrm{d}t\\
=&\int_\Omega \phi\Big(\big(F(S_w(\boldsymbol{x},T))-F(S_\epsilon)-M_{\min}(S_w(\boldsymbol{x},T)-S_\epsilon)\big)H(\mu_w(\boldsymbol{x},T)-M_{\min})\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

由此得到不等式(19)，这是因为当 $\mu_w\le M_{\min}$时 $\big(F(S_w)-F(S_\epsilon)-M_{\min}(S_w-S_\epsilon)\big)\ge 0$。

Appendix B. *Proof of the estimate* (33)

通过简单计算，我们可以看到

$$F(S_w^{k+1})-F(S_w^k)+\frac{c_{\min}}{2}\left(S_w^{k+1}-S_w^k\right)^2-\left(S_w^{k+1}-S_w^k\right)\mu_w^{k+1} \tag{57}$$

$$=\sum_{\alpha=w,n}\gamma_\alpha S_\alpha^k\left(\ln\left(\frac{S_\alpha^{k+1}}{S_\alpha^k}\right)-\frac{S_\alpha^{k+1}}{S_\alpha^k}+1\right)+\left(\gamma_{wn}+\frac{c_{\min}}{2}\right)\left(S_w^{k+1}-S_w^k\right)^2. \tag{58}$$

然后可以计算函数(58)关于 S_w^{k+1}的导数，并给出为

$$\left(\frac{\gamma_w}{S_w^{k+1}}+\frac{\gamma_n}{1-S_w^{k+1}}-2\gamma_{wn}-c_{\min}\right)\left(S_w^k-S_w^{k+1}\right),$$

由此可知，函数 (57) 在 $S_w^{k+1}=S_w^k$ 处达到最大值 0，这是由假设 2 得出的。因此，我们得到估计式 (33)。

Appendix C. *Proof of the fact* (39)

在附录中，我们首先介绍以下结果：对于 $v\in C_0^\infty(0,T;H^1(\Omega))$，有

$$\sum_{k=0}^{N-2}\int_{I_k}\left\|\partial_t v-\frac{v^{k+1}-v^k}{\tau}\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}t\to 0,\quad \sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\|v-v^k\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}t\to 0, \tag{59}$$

如 $N\to\infty$，其中 $v^k=\frac{1}{\tau}\int_{I_k}v(t)\mathrm{d}t$。(59) 的证明如下。类似于 $\varphi_{\alpha,\,N}$ 是关于时间的 L^2 空间中 φ_α 的分段常数插值，我们也有

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_k}\left\|v-v^k\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}t\to 0,$$

如 $N \to \infty$。类似地，利用 $v^k = \frac{1}{\tau}\int_{I_k} v(t)\mathrm{d}t$ 这一事实并经过简单计算，我们得到

$$\sum_{k=0}^{N-2}\int_{I_k}\left\|\partial_t v - \frac{v^{k+1}-v^k}{\tau}\right\|^2_{H^1(\Omega)}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-2}\int_{I_k}\left\|\partial_t v - \frac{\int_{I_k}\partial_t v(t+\nu\tau)\mathrm{d}t}{\tau}\right\|^2_{H^1(\Omega)}\mathrm{d}t \to 0,$$

如 $N \to \infty$，其中 $\nu \in [0,1]$。另一方面，我们还将用到这一事实

$$\left|(S_w^0, v^0)\right| \le \left\|v^0\right\|_{L^2(\Omega)} = \left\|\int_{I_0}\frac{t\partial_t v}{\tau}\mathrm{d}t\right\|_{L^2(\Omega)} \le \tau\left\|\partial_t v\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \to 0,$$

类似地

$$\left|(S_w^N, v^{N-1})\right| \to 0,$$

如 $N \to \infty$，根据 $v \in C^\infty{}_0\,(0,\ T;\ H^1(\Omega))$.

我们首先证明 $S_w' = \partial_t S_w$。设 $v \in C_0^\infty(0,\ T;\ H^1(\Omega))$，则可得

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau\left(\frac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau}, v^k\right) = -\sum_{k=0}^{N-2}\tau\left(\frac{v^{k+1}-v^k}{\tau}, S_w^{k+1}\right) + \left(S_w^N, v^{N-1}\right) - \left(S_w^0, v^0\right),$$

其中 $v^k = \frac{1}{\tau}\int_{I_k} v(t)\mathrm{d}t$。令 $N \to \infty$，并利用上述分析，我们有

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\tau\left(\frac{S_w^{k+1}-S_w^k}{\tau}, v^k\right) = -\int_0^T (\partial_t v, S_w)\,\mathrm{d}t,$$

由于 $S_{w,N} \to S_w$ 在 $L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 中强收敛。然后，由于 $DS_{w,N_j} \rightharpoonup S_w'$, 在 $L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$ 中弱收敛，we可以推出

$$\int_0^T (S_w', v)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T (\partial_t v, S_w)\,\mathrm{d}t,$$

由弱导数的定义可得 $S_w' = \partial_t S_w$。类似地，对于 $\hat{}\mu_w'$，我们也有 $\hat{}\mu_w' = \partial_t\hat{}\mu_w$，从而得出事实 (39)。

Appendix D. *Proof of the estimate* (41)

首先，由假设5和引理5.1我们可以推出 $\mu_1 \in L^2(0,T;\ W^{1,\infty}(\Omega))$。另一方面，由迹定理（见 [47]中的引理16.1），(14) 蕴含

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\lambda_t \boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla p, \nabla v)\,\mathrm{d}t\\
=\ &-\int_0^T (\lambda_w \boldsymbol{\mathcal{K}}\nabla\mu_w, \nabla v)\,\mathrm{d}t + \int_0^T (q_t, v)\mathrm{d}t + \int_0^T \langle\varphi_{2,4}, v\rangle_{\Gamma_2}\,\mathrm{d}t\\
\le\ &\lambda_{\max}K_{\max}\int_0^T \|\mu_w\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,1}(\Omega)}\mathrm{d}t + C\int_0^T \left(\|q_t\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} + \|\varphi_{2,4}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|v\|_{W^{1,1}(\Omega)}\mathrm{d}t,\\
\le\ &C\int_0^T \left(\|\mu_w\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|q_t\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_{2,4}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|\nabla v\|_{L^1(\Omega)}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

对每个 $v \in L^2(0,T;\ V)$。利用事实 $0 < \lambda_{\min} \le \lambda_w$，我们设 $\nabla v = f\nabla z$ 其中 $f \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega))$ 和 $z \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))$，从而得到

$$\int_0^T (\nabla p_1, f\nabla z)\,\mathrm{d}t \le C\int_0^T \left(\|\mu_1\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|q_t\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_{2,4}\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\right)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t.$$

类似地，根据边界 $\varphi_1 \in H^1(0,T;\ W^{-1,\infty}(\Omega))$，由（14）可得 $\partial_t S_w \in L^2(0,T;\ W^{-1,\infty}(\Omega))$。然后由不等式（20），可得 $\partial_t\mu_1, \partial_t\mu_2 \in L^2(0,T;\ W^{-1,\infty}(\Omega))$。接下来，应用微分链式法则，我们推导出

$$\partial_t\mathcal{S}'(\eta) = \mathcal{S}''(\eta)\partial_t\eta.$$

由于 η介于 μ_1和 μ_2之间，结合事实 $M_{\min} \le \mu_w \le M_{\max}$和 $\partial_t\mu_1,\ \partial_t\mu_2 \in L^2(0,\ T;\ W^{-1,\ \infty}(\Omega))$，可知 $\mathcal{S}''(\eta)\partial_t\eta \in L^2(0,\ T;\ W^{-1,\ \infty}(\Omega))$，从而得到估计式 (41)。

References

[1] H. Abels、H. Garcke 和 G. Grun, 《热力学一致且框架无关的扩散界面模型：用于密度不同的不可压缩两相流》, Math. Mod. Meth. Appl. Sci., 22 (2012), 1150013. [2] R. A. Adams 和 J. J. Fournier, 《索 Sobole夫空间》, Elsevier, 140, 2003. [3] H.W. Alt 和 E. DiBenedetto, 《非均匀多孔介质中的水和油非定常流动》, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 12 (1985), pp. 335–392. [4] D. Amadori、P. Baiti、A. Corli 和 E. DalSanto, 《具有单一界面的两相流模型的整体弱解》, J. Evol. Equations, 15 (2015), pp. 699–726. [5] B. Amaziane、A. Bourgeat 和 H. Elamri, 《多孔介质中适用于各种岩石类型的两相流模型解的存在性》, Applicable Analysis, 60 (1996), pp. 121–132. [6] T. Arbogast, 《单孔隙度和简单双重孔隙度不可压缩两相流模型弱解的存在性》, Nonlinear Anal., 19 (1992), pp. 1009–1031. [7] T. Arbogast 和 M.F. Wheeler, 《多孔介质流动中一个退化抛物方程的非线性混合有限元方法》, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 1669–1687. [8] M. Bertsch、R.D. Passo 和 C.J. Van Duijn, 《多孔介质流动中的石油圈闭分析》, SIAM J. Math. Anal., 35 (2003), pp. 245–267. [9] A. Bourgeat 和 A. Hidani, 《由不同岩石类型构成的多孔介质两相流模型的存在性结果》, Applicable Analysis, 56 (1995), pp. 381–399. [10] F. Buzzi、M. Lenzinger 和 B. Schweizer, 《一维空间中退化两相流方程的界面条件》, Analysis (Munich), 29 (2009), pp. 299–316. [11] C. Canc`es, 《涉及不连续毛细压力的非均质多孔介质两相流有限体积格式》, ESAIM: Math. Model. Numer. Anal., 43 (2009), pp. 973–1001. [12] C. Canc`es、T. Gallou¨et 和 A. Porretta, 《非均质多孔介质中涉及毛细屏障的两相流》, Interfaces Free Bound., 11 (2009), pp. 239–258. [13] C. Canc`es 和 M. Pierre, 《具有不连续毛细压力场的多维不混溶两相流存在性结果》, SIAM J. Math. Anal., 44 (2012), pp. 966–992. [14] C. Canc`es, 《多孔介质流动类问题的能量稳定数值方法》, Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP Energies nouvelles, 73 (2018), 78. [15] G. Chavent 和 J. Jaffr´e, 《油藏模拟的数学模型与有限元：多孔介质中的单相、多相和多组分流动》, Elsevier, 1986. [16] C.Y. Chen 和 P.Y. Yan, 《非均质多孔介质中不同混溶性的注入驱动流动的扩散界面方法》, Phys. Fluids, 27 (2015), 083101. [17] H. Chen、J. Kou、S. Sun 和 T. Zhang, 《多孔介质不可压缩两相流的完全质量守恒 IMPES格式》, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 350 (2019), pp. 641–663. [18] Z. Chen, 《退化两相不可压缩流。I：弱解的存在性、唯一性与正则性》, J. Differ- ential Equations, 171 (2001), pp. 203–232. [19] Z. Chen, 《退化两相不可压缩流。II：正则性、稳定性与稳定化》, J. Differential Equations, 186 (2002), pp. 345–376. [20] Z. Chen、G. Huan 和 Y. Ma, 《多孔介质中多相流的计算方法》, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2006.[21] L. Cueto-Felgueroso 和 R. Juanes, 《两相 Hele-Shaw流的相场模型》, J. Fluid Mech., 758 (2014), pp. 522–552.[22] F.Z. Daim、R. Eymard 和 D. Hilhorst, 《多孔介质两相流解的存在性：孔隙度依赖于压力的情形》, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), pp. 332–351. [23] L.C. Evans, 《偏微分方程》, American Mathematical Soc., 2022. [24] X. Fe ng 和 S. Wise, 《用于 Hele-Shaw流的 Darcy-Cahn-Hilliard 扩散界面模型分析及其全离散有限元逼近》, SIAM J. Numer. Anal., 50 (2012), pp. 1320–1343. [25] H. Gao、J. Kou、S. Sun 和 X. Wang, 《非均质及裂缝介质中不可压缩两相流的热力学一致建模》, Oil & Gas Science and Technology–Rev. IFP Energies nouvelles, 75 (2020), 32. [26] M. Giaquinta 和 L. Martinazzi, 《椭圆系统、调和映射与极小图正则性理论导论》, Springer Science & Business Media, 2013. [27] D. Gilbarg 和 N.S. Trudinger, 《二阶椭圆型偏微分方程》, Berlin: springer, 1977. [28] T. H. Gronwall, 《关于微分方程组解对参数的导数的注记》, Ann. of Math, 20 (1919), pp. 292–296. [29] Z. Guo 和 P. Lin, 《具有热毛细效应的两相流热力学一致相场模型》, J. Fluid Mech., 766 (2015), pp. 226–271. [30] S. Hassani, 《数学方法：物理学及相关领域学生用书》, 第 2 版, Springer, New York, 2009, pp. 139–170.[31] H. Hoteit 和 A. Firoozabadi, 《具有不同毛细压力的非均质可渗透介质两相流数值模拟》, Adv. Water Resour., 31 (2008), pp. 56–73. [32] H. Hoteit 和 A. Firoozabadi, 《裂缝介质中不可压缩两相流的高效数值模型》, Adv. Water Resour., 31 (2008), pp. 891–905. [33] T. Hyt¨onen、J. van Neerven、M. Veraar 和 L. Weis, 《巴拿赫空间分析：第一卷：鞅与 Littlewood-Paley 理论》, 2016, pp. 1–66. [34] J. Kou 和 S. Sun, 《守恒两相质量的不可压缩两相流迎风间断Galerkin方法》, Numer. Methods Partial Differ. Equ., 30 (2014), pp. 1674–1699.

[35] J. Kou、X. Wang、S. Du 和 S. Sun，《多孔介质中热力学一致两相不可压缩流动建模的能量稳定线性数值方法》，J. Comput. Phys.，451（2022），第 110854 页。[36] J. Kou、H. Chen、S. Du 和 S. Sun，《多孔介质中两相流麦克斯韦–斯特藩–达西模型的高效且物理一致数值方法》，Int. J. Numer. Methods Eng.，124（2023），第 546–569 页。[37] J. Kou、X. Wang、H. Chen 和 S. Sun，《考虑岩石可压缩性的多孔介质中热力学一致不可压缩两相流建模的能量稳定、守恒且保界数值方法》，Int. J. Numer. Methods Eng.，124（2023），第 2589–2617 页。[38] J. Kou、A. Salama、H. Chen 和 S. Sun，《孔隙黏弹性介质中不混溶两相流的热力学一致数值建模》，Int. J. Numer. Methods Eng.，2024，e7479。[39] J. Kou 和 X. Wang，《使用热力学方法对多孔介质中非饱和流进行数值建模》，Capillarity，11（2024），第 63–69 页。[40] D. Kroener 和 S. Luckhaus，《多孔介质中的油水流动》，J. Differential Equations，55（1984），第 276–288 页。[41] A. Mikeli´c，《带动态毛细压力的多孔介质非饱和流方程的整体存在性结果》，J. Differential Equations，248（2010），第 1561–1577 页。[42] A. Nekvinda、A. 和 L. Zaj´ıˇcek，《拉德马赫定理的一个简单证明》，ˇCasopis Pˇest. Mat.，113（1988），第 337–341 页。[43] J. Niessner、S. Berg 和 S. Majid Hassanizadeh，《两相达西定律与热力学一致方法的比较》，Transp. Porous Med.，88（2011），第 133–148 页。[44] J. Shen 和 X. Yang，《两相复杂流体相场模型的解耦能量稳定格式》，SIAM J. Sci. Comput.，36（2014），第 B122–B145 页。[45] J. Simon，《空间中的紧集》$L^p(O、T；B)$，Ann. Mat. Pura Appl.，146（1986），第 65–96 页。[46] R. Steinle、T. Kleiner、P. Kumar 和 R. Hilfer，《多孔介质流动中非单调解的存在唯一性》，Axioms，11（2022），327。[47] L. Tartar，《索 Sobole夫空间与插值空间导论》，Springer Science & Business Media，2007。[48] H. R. Van der Vaart 和 E. H. Yen，《E，Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理的弱充分条件》，Math. Mag.，41（1968），第 109–117 页。[49] G. Zhu、J. Kou、B. Yao、Y.S. Wu、J. Yao 和 S. Sun，《具有移动接触线和可溶性表面活性剂的两相流热力学一致建模》，J. Fluid Mech.，879（2019），第 327–359 页。[50] G. Zhu 和 A. Li，《含可溶性表面活性剂的界面动力学：具有可变密度的相场两相流模型》，Adv. Geo–Energy Res.，4（2020），第 86–98 页。

School of Mathematical Sciences and Fujian Provincial Key Laboratory on Mathematical Modeling and High Performance Scientific Computing、 Xiamen University、 Fujian，361005， China*Email address*： chx@xmu.edu.cn
School of Civil Engineering、 Shaoxing University、 Shaoxing 312000、 Zhejiang、
China; School of Mathematicsand Statistics、 Hubei Engineering University、 Xiaogan 432000、 Hubei、 China
Email address： jishengkou@163.comCorresponding authour. School of Mathematic and Information Sciences、
Guangzhou University、 Guangzhou，510006， Guangdong、 China*Email address*： htleng@m.scnu.edu.cn
School of Mathematical Sciences、 Tongji University、 Shanghai 200092、 China*Email address*：
suns@tongji.edu.cn
School of Mathematical Sciences and Fujian Provincial Key Laboratory on Mathematical Modeling and High Performance Scientific Computing、 Xiamen University、 Fujian，361005， China*Email address*：
zhaohai@stu.xmu.edu.cn