arXiv:2602.04191v1 [math.CO] 4 Feb 2026

具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近 II：下界与渐近

YANQIAO DING、KUILI、HUAN LIU 和 DONGFENG YAN

Abstract. 本文是关于具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近的两篇论文中的第二篇。利用本系列第一篇论文中建立的修正热带对应定理，我们引入了一个组合不变量，作为具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的下界。我们推导出了这些组合不变量在大次数和大亏格下的对数渐近的一致下界。该一致下界带来了以下结果：

(1) 我们建立了具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数及其复数对应物在大次数和大亏格下的对数渐近的一致下界。特别地，我们部分回答了 Dubrovin、Yang 和 Zagier 针对简单 Hurwitz 数的一致界所提出的一个公开问题。(2) 我们证明，当次数趋于无穷且仅添加简单分歧点时，具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数与其复数对应物之间存在对数等价关系。(3) 当亏格趋于无穷且仅添加简单分歧点时，我们证明具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数及其复数对应物的对数具有相同的阶。

1. 引言

Hurwitz 数用于计数从其他黎曼曲面到某一黎曼曲面的分歧覆盖，并要求在给定的分歧点集合上具有指定的分歧型。这些数与组合学、代数曲线模空间、数理物理等领域有着深刻联系 [30, 18, 19, 31, 22, 2, 6]。通过深入理解这些相互关系，人们揭示了双 Hurwitz 数的许多代数结构。例如，已建立以下结果：双 Hurwitz 数的腔室结构和壁穿越公式 [33, 7]；双 Hurwitz 数与模空间上的交数之间的关系 [16]；以及双 Hurwitz 数的多项式性结构 [3]。

一系列卓越的研究成果 [1, 9, 10, 11, 21] 在理解曲线模空间上交数的大亏格渐近方面取得了重大进展。相比之下，双 Hurwitz 数的渐近仍远未得到全面理解。尤其是，当次数和亏格同时趋于无穷时双 Hurwitz 数的渐近，也就是一致渐近，鲜少有人研究。

Date:2026年2月5日.2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号14N10；次要分类号14P05、14T15、14H30。*Key words and phrases.* 实枚举几何、实 Hurwitz 数、热带几何、一致渐近。

关于亏格或次数分别趋于无穷时简单 Hurwitz 数的渐近，已有研究确立了相关结果，见 [22, 17, 38, 5], ; 而双 Hurwitz 数的大次数渐近已在 [28]中推导得出。在论文 [17], 第 616 页，Dubrovin、Yang 和 Zagier 提出了一个与我们的结果相关的开放问题。

问题 1.1 （Dubrovin、Yang 和 Zagier）。 如何用初等函数找到简单 *Hurwitz* 数的一致界?

Budzinski 和 Louf [4]获得了三角剖分数目在大小和亏格均趋于无穷时、精确到次指数因子的渐近结果。Hurwitz 数的热带计算 [2, 6, 20, 29] 为研究 Hurwitz 数的渐近提供了一个框架。

本文旨在研究具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数及其复对应物的一致渐近。具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数统计从 $\mathbb{CP}^1$ 到实黎曼曲面的实分歧覆盖数目，其中覆盖在 0 和 ∞ 上具有任意分歧类型，并在所有其他分歧点上具有三重或简单分歧。这些数取决于实分歧点的分布。在计数实有理曲线 [35, 36, 25, 26, 34]的枚举问题中也会出现这一现象。因此，找到实解数的不变下界至关重要。本研究针对实 Hurwitz 数所探讨的基本问题如下。

问题 1.2. 是否存在一种不变量，能够对具有三重分歧的实双重 *Hurwitz* 数给出精确估计?

令 $l(\lambda)$ 表示分拆 λ 的长度，即分拆 λ 中条目的数量。分拆 λ 中所有条目的和记为 $|\lambda|$。给定满足 $|\lambda| = |\mu|$ 的两个分拆 λ 和 μ，我们选取两个非负整数 s、t，使得 $2s + t = l(\lambda)+l(\mu)+2g-2$。我们用记号 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_s^-,_t,\Lambda_s^+,_t)$ 表示定义 2.2 中定义的三重分歧实双重赫尔维茨数。这里，$\Lambda_s^-,_t$ 和 $\Lambda_s^+,_t$ 分别表示负分歧点和正分歧点上分歧型的序列。特别地，s 是 $\mathbb{RP}^1 \setminus \{0,\infty\}$ 中三重分歧点的数量，而 t 是简单分歧点的数量。当 $s = 0$ 时，数 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_0^-,_t,\Lambda_0^+,_t)$ 是普通实双重 Hurwitz 数。当 $t = 0$ 时，数 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_s^-,0,\Lambda_s^+,0)$ 称为仅具有三重分歧的实双重赫尔维茨数。

我们用$|\Lambda_s^-,_t|$ 表示序列$\Lambda_s^-,_t$中的分拆数。注意，普通实双重 Hurwitz 数 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_0^-,_t,\Lambda_0^+,_t)$仅取决于数目$|\Lambda_s^-,_t|$ [29]。然而，数目$H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_s^-,_t,\Lambda_s^+,_t)$不仅取决于数目$|\Lambda_s^-,_t|,|\Lambda_s^+,_t|$，还取决于分歧型在序列$\Lambda_s^-,_t,\Lambda_s^+,_t$中的排列方式。这正是普通实双重 Hurwitz 数与带三重分歧的对应数之间的关键区别。

在 [29], Markwig 和 Rau 将实双重 Hurwitz 数表示为带颜色热带覆盖的加权计数，并通过偶边的两种不同着色规则区分正、负实分歧点（另见 [20]）。Rau [32] 引入了之字形覆盖，其中偶边可以按照任意规则着色。之字形数为 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_0^-,_t,\Lambda_0^+,_t)$ 提供了最优下界；Rau [32] 证明，当之字形数非零时，复双重 Hurwitz 数与其实数对应项在对数意义下等价。然而，这一框架不足以分析具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数，原因有二。首先，具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数取决于分歧点的排列方式

。其次，根据 Markwig 和 Rau 的热带计算 [29], ，具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数可以表示为实热带曲线（含有四价顶点或亏格一二价顶点）所对应的实热带覆盖的加权计数。这些顶点的存在使得实分歧点符号的判定变得复杂。更确切地说，我们必须同时利用两个因素——偶边的着色和边权——来区分正、负实分歧点。这使得对 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+)$ 的一致渐近分析极具挑战性。

在本系列的第一篇论文 [15] 中，我们采用简单消解建立了修正热带对应定理。具体而言，我们将具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数表示为带权的着色热带覆盖计数，其中正、负实分歧点由针对偶边的两条着色规则刻画[15]。在本文中，我们应用修正热带对应定理 [15, 定理 5.10] 研究具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的下界与渐近。我们首先引入 Rau 锯齿数 [32], 的一个广义版本 $Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})$，其中 $\Lambda_{s,t}=(\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+)$。注意， $Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})$取决于三重分歧点与简单分歧点的分布。随后，我们推导出该组合不变量的粘合公式（见引理 3.7），以分析其对数渐近。当一个三重分歧点沿实直线穿过一个简单分歧点时，我们分析与广义之字形数相关的壁穿越现象，并引入适当的之字形数 $Z_g(\lambda,\mu;s,t)$（见定义 5.2）。最后，我们证明 $Z_g(\lambda,\mu;s,t)$与三重分歧点和简单分歧点的分布无关，并且是广义之字形数 $Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})$的一个下界（见定理 5.3）。

令 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;s,t)$ 表示 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+)$ 的复对应物。在假设 $2s+t>0$ and $\{\lambda,\mu\}\not\subset\{(2k),(k,k)\}$ 成立的情况下，命题 3.10 推出

$$Z_g(\lambda,\mu;s,t)\le H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+)\le H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;s,t).$$

因此，真之字形数 $Z_g(\lambda,\mu;s,t)$ 是 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+)$ 的一个不变下界。以下我们始终假设 $2s+t>0$ and $\{\lambda,\mu\}\not\subset\{(2k),(k,k)\}$。我们定义

$$z_{\lambda,\mu}(g,h,m)=Z_g((\lambda,1^{2c+h+2m-1}),(\mu,1^{2c+h+2m-1});s(h),t(m)),$$
$$h_{\lambda,\mu}^{\mathbb{C}}(g,h,m)=H_g^{\mathbb{C}}((\lambda,1^{2c+h+2m-1}),(\mu,1^{2c+h+2m-1});s(h),t(m)),$$

其中 $s(h)=\frac{l(\lambda')+l(\mu')}{2}+c+h$, $t(m)=l(\lambda_e)+l(\mu_e)+2g-2+4m+2c$, 且 c 是一个依赖于 λ 和 μ 的正实数。注意， h， m 分别用于表示三重分歧点和简单分歧点的数量。记号 (1^m) 表示由 m 个 1 组成的分拆。我们的第一个主要结果如下述定理所示。

定理 1.3。设 λ 和 μ 是两个满足 $|\lambda|=|\mu|$的分拆。假设存在一个在 λ 中至少出现两次的奇整数 $o\neq 1$，且 μ中存在一个偶数 $e\ge 2o$。那么，真之字形数 $z_{\lambda,\mu}(g,h,m)$ 的一致对数渐近有下界 $\frac{h}{3}\ln h+2g\ln m+4m\ln m$，当 $m,h,g\to\infty$ 时成立；也就是说，

$$\liminf_{g,m,h\to\infty}\frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,h,m)}{\frac{h}{3}\ln h+2g\ln m+4m\ln m}\ge 1.$$

为考察实双重 Hurwitz 数的一致渐近，我们记

$$z_{\lambda,\mu}(g,m)=Z_g((\lambda,1^{2m}),(\mu,1^{2m});\Lambda_{0,t}),$$
$$z_{g,\lambda,\mu}(h)=Z_g((\lambda,(1^h)),(\mu,(1^h));\Lambda_{s,0}),$$
$$h_{\lambda,\mu}^{\mathbb{C}}(g,m)=H_g^{\mathbb{C}}((\lambda,1^{2m}),(\mu,1^{2m})),$$

其中 $t = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2 + 4m$，以及 $2s = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2 + 2h$。注意到$Z_g((\lambda, 1^{2m}), (\mu, 1^{2m}); \Lambda_{0,t})$ 是 Rau 的之字形数的一种变体（见注 3.2）。下面的定理是我们关于一致渐近的第二个主要结果。

定理 1.4. 设 λ、μ 为满足 $|\lambda| = |\mu|$ 的两个分拆。若在 λ中出现奇数次的奇整数个数与在 μ 中出现奇数次的奇整数个数之和至多为 2，则之字形数$z_{\lambda,\mu}(g,m)$ 的一致对数渐近在 m、$g \to \infty$ 时至少为 $2g \ln m + 4m \ln m$，即

$$\liminf_{g,m\to\infty} \frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,m)}{2g \ln m + 4m \ln m} \geq 1.$$

由于真之字形数（相应地，之字形数）分别作为具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数（相应地，实双重 Hurwitz 数）的下界，定理 1.3与定理 1.4 蕴含其复对应物的一致渐近。

推论 1.5. 设 λ、μ 为满足 $|\lambda| = |\mu|$ 的两个分拆。则下列陈述成立。

(1) 若 λ, μ 满足定理 *1.3* 中的条件，则当 $m, h, g \to \infty$ 时，$h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,h,m)$ 的一致对数渐近至少为 $\frac{h}{3} \ln h + 2g \ln m + 4m \ln m$。*(2)* 若 λ, μ 满足定理 *1.4* 中的条件，则当 m, $g \to \infty$ 时，$h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,m)$ 的一致对数渐近至少为 $2g \ln m + 4m \ln m$。

根据推论 1.5，我们得到简单 Hurwitz 数对数渐近的一致界。这为 Dubrovin、Yang 和 Zagier 提出的问题提供了部分答案（参见问题 1.1）。定理 1.3 的另一个有趣推论是，随着次数趋于无穷且仅添加简单分歧点，具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数与其复数对应物在对数意义下渐近等价。

定理 1.6。设 λ，μ 是两个分拆，且满足 $|\lambda| = |\mu|$。假设 λ，μ 满足定理1。3中的条件。那么存在一个整数 c_0，它依赖于 λ 和 μ，使得当 $h > c_0$，$g \geq 0$ 固定时，有

$$\ln z_{\lambda,\mu}(g,h,m) \sim 4m \ln m \sim \ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,h,m), \ as \ m \to \infty.$$

随着亏格趋于无穷，且只添加简单分歧点，下面的定理表明，实双重 Hurwitz 数（带有三重分歧）及其复对应物的对数具有相同的阶。

定理 1.7。设 λ, μ 是两个分拆，且满足 $|\lambda| = |\mu|$。那么以下结论成立。

(1) 假设 λ, μ 满足定理 1。3中的条件。那么存在一个整数c_0，它依赖于 λ, μ，使得当 $h > c_0$, $m > 1$ 固定时，$\ln z_{\lambda,\mu}(g,h,m)$和 $\ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,h,m)$ 与 $g \to \infty$同阶：

$$\liminf_{g\to\infty} \frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,h,m)}{\ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,h,m)} \geq \frac{\ln(m-1)}{\ln(\frac{(|\lambda|+2c+h+2m-1)(|\lambda|+2c+h+2m-2)}{2})}.$$

(2) 假设 λ, μ 满足定理 1.4中的条件。则存在一个整数 N_0，它依赖于 λ, μ，使得若 $m > N_0$ 固定，则 $\ln z_{\lambda,\mu}(g,m)$ 和$\ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,m)$ 与 $g \to \infty$同阶：

$$\liminf_{g\to\infty} \frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,m)}{\ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,m)} \geq \frac{\ln(m-N_0)}{\ln(\frac{(|\lambda|+2m)(|\lambda|+2m-1)}{2})}.$$

由实不变量与其复对应物[23, 24, 27, 32, 34, 12, 13], 之间的对数等价，自然可以预期，仅具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数$H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_s^-,0,\Lambda_s^+,0)$与其复对应物 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;s,0)$对数等价。然而，当次数趋于无穷且仅添加三重分歧点时， $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;\ s,0)$的对数渐近仍未得到确立。因此，我们无法确认仅具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的对数增长估计是否最优。尽管如此，当 $m\to\infty$ 且仅添加简单分歧点时，复数（以及实数）双 Hurwitz 数 $H_g^{\mathbb{C}}((\lambda,1^m),(\mu,1^m);0,t)$ 的对数增长率 $2m\ln\ m$ [17, 32, 12] 给出的实双重 Hurwitz 数（仅具有三重分歧）的对数增长上界严格更大。未来，若能确定次数趋于无穷且仅添加三重分歧点时 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;s,0)$ 的对数渐近，将会非常有趣。

问题 1.8. 仅具有三重分歧的复双重 *Hurwitz* 数的大次数渐近是什么？

在第 2节中，我们回顾具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的定义以及修正热带对应定理。第3节介绍广义之字形数的定义及其性质。我们在第 4节中建立仅具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数对数渐近的下界。在第 5节中，我们引入真之字形数，并证明它是具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的下界。具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近将在第 6节中推导。两个一致极限的证明见附录 A。

2. Preliminaries on the modified tropical correspondence theorem

本节回顾具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的定义，以及修正热带对应定理 [15,定理 5.11]。

2.1. 具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数。 固定整数 $d\geq 1$、$g\geq 0$，并令 λ、 μ 表示 d的两个分拆。选取满足$2s+t=l(\lambda)+l(\mu)+2g-2$的非负整数 s、 t ，其中等式由黎曼-赫尔维茨公式确定。令$b=\{b_1,\dots,b_{s+t}\}\subset\mathbb{RP}^1\setminus\{0,\infty\}$ 为一个集合，其元素按 $b_1<b_2<\cdots<b_{s+t}$的方式排序。映射 $r\colon\ b\to\{2,3\}$ 称为 b 上的一个 (s、 t)-分歧函数，如果 $|r^{-1}(3)|=s$ 且$|r^{-1}(2)|=t$。集合b 与其上的分歧函数 r 一起称为一个(s、 t)-分支点集。

定义 2.1。 具有三重分歧的复双重 *Hurwitz* 数定义为

$$H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;s,t)=\sum_{[\pi]}\frac{1}{|\operatorname{Aut}^{\mathbb{C}}(\pi)|},$$

其中求和取遍所有满足下列条件的分歧覆盖 $\pi\colon C\to\mathbb{CP}^1$ 的同构类 $[\pi]$ ：

(1) C 是亏格为 g的连通黎曼曲面；(2) $\pi\colon\ C\to\mathbb{CP}^1$ 是次数为 d的全纯映射；(3) π 在0和 ∞上的分歧型分别为 λ和 μ；(4) 令b 为一个(s， t)-分支点集。在 $r^{-1}(3)$中的点上， π 的分歧型为(3，1，.....，1)，而在 $r^{-1}(2)$中的点上，它有简单分歧；

(5) π 在所有其他点处无分歧。

这里，两个这样的覆盖 $\pi_1 : C_1 \to \mathbb{CP}^1$ 与 $\pi_2 : C_2 \to \mathbb{CP}^1$ 的同构，是满足 $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ 的黎曼曲面同构 $\varphi : C_1 \to C_2$。群 $\mathrm{Aut}^{\mathbb{C}}(\pi)$ 表示分歧覆盖 π 的自同构群。

众所周知，数 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda, \mu; s, t)$ 仅依赖于分拆 λ、μ 以及整数 s、t [8, 29]。当 $s = 0$ 时，数 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda, \mu; 0, t)$ 是通常的复双重 Hurwitz 数，我们用简写 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda, \mu; t)$ 表示 $H_g^{\mathbb{C}}(\lambda, \mu; 0, t)$。

一个 (s,t)-元组 $\Lambda_{s,t}$ 是由 d 的分拆组成的集合 $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{s+t})$，其中 s 个条目为 $(3,1,\ldots,1)$，其余 t 个为 $(2,1,\ldots,1)$。设 b 为一个 (s,t)-分支点集，且 $\Lambda_{s,t}$ 为一个 (s,t)-元组。若 $\Lambda_{s,t}$ 与 b 相容，则

- $\Lambda_i = (3,1,\ldots,1)$ iff $r(b_i) = \overline{3}$, and $\Lambda_j = (2,1,\ldots,1)$ iff $r(b_j) = 2$.

对于相容的 b 和 $\Lambda_{s,t}$，将 $\Lambda_{s,t}$ 分裂为 $\Lambda_{s,t}^- = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{|b\cap\mathbb{R}^-|})$ 和 $\Lambda_{s,t}^+ = (\Lambda_{1+|b\cap\mathbb{R}^-|}, \ldots, \Lambda_{s+t})$。这个分裂 $\Lambda_{s,t} = (\Lambda_{s,t}^-, \Lambda_{s,t}^+)$ 称为 b 的相容有符号分裂。

定义 2.2。设 $\Lambda_{s,t} = (\Lambda_{s,t}^-, \Lambda_{s,t}^+)$ 是 (s,t)-分支点集 b的相容有符号分裂。三重分歧实双重赫尔维茨数是以下数量

$$H_g^{\mathbb{R}}(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t}^-, \Lambda_{s,t}^+) = \sum_{[(\pi,\tau)]} \frac{1}{|\mathrm{Aut}^{\mathbb{R}}(\pi,\tau)|},$$

其中，求和遍历所有 (π, τ) 的分歧覆盖的同构类 $\pi : C \to \mathbb{CP}^1$ 它们满足定义 2.1 中的条件（1）–（5）以及以下补充要求。

- $\tau : C \to C$ 是 C 上满足 $\pi \circ \tau = \mathrm{conj} \circ \pi$ 的反全纯对合，其中 conj 表示标准的复共轭；

这里，两个实覆盖 $(\pi_1 : C_1 \to \mathbb{CP}^1, \tau_1)$ 和 $(\pi_2 : C_2 \to \mathbb{CP}^1, \tau_2)$ 的同构是一个黎曼曲面同构 $\varphi : C_1 \to C_2$，满足 $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ 且 $\varphi \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \varphi$。群 $\mathrm{Aut}^{\mathbb{R}}(\pi, \tau)$ 表示实分歧覆盖 (π, τ) 的自同构群。

注意，当两个分拆 λ、μ 固定时，$H_g^{\mathbb{R}}(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t}^-, \Lambda_{s,t}^+)$ 取决于两个序列 $\Lambda_{s,t}^-$ 和 $\Lambda_{s,t}^+$ [29, 第 2] 节。在 $s = 0$ 且 $|b \cap \mathbb{R}^+| = r \le t$ 的情形下，我们用 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda, \mu; r)$ 表示普通实双重 Hurwitz 数 $H_g^{\mathbb{R}}(\lambda, \mu; \Lambda_{0,t}^-, \Lambda_{0,t}^+)$。

2.2. **修正热带对应定理**。热带曲线 C 定义为仅含1价顶点和3价顶点的连通度量图。C 的3价顶点称为 C的内部顶点，而 C 的1价顶点称为叶子。用 $\mathrm{Vert}(C)$ 表示 C的内部顶点和叶子构成的集合。C 的内边 e 是长度有限的边 $\ell(e) \in \mathbb{R}$，而与叶子相连的边称为端，其长度为无限。用 $\mathrm{Edge}(C)$ 表示 C的边集。两个热带曲线 C_1、C_2 之间的同构 $\Phi : C_1 \to C_2$ 是一个等距同胚 $\Phi : C_1^\circ \to C_2^\circ$，其中 C_1° 和 C_2°分别是从 C_1 和 C_2 中删除所有1价顶点后得到的子图。对于任意顶点 $v \in C$，令 $\mathrm{val}(v)$ 表示其价。C 的亏格是 C的第一贝蒂数$b_1(C)$。我们将 $T\mathbb{P}^1 = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 视为热带射影直线。

固定两个整数 $d \ge 1$、$g \ge 0$。设 λ、μ 是 d 的两个分拆，并设 s, t 是两个非负整数，使得 $2s + t = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2$。

定义 2.3. 令 $x' = \{x'_1, \ldots, x'_{2s}\} \subset \mathbb{R}$ 按 $x'_1 < \cdots < x'_{2s}$ 排序。对于 $i = 1, \ldots, s$，令 $x_i = (x'_{2i-1}, x'_{2i})$，并令 $x = \{x_1, \ldots, x_s\}$ 为这些有序对构成的集合。令

$y = \{y_1, \ldots, y_t\} \subset \mathbb{R} \setminus x'$ 是一个满足 $y_1 < \ldots < y_t$ 的有序集。不交并 $z = x \sqcup y$ 称为一个 (s,t)-分布，如果对于所有 $i = 1, \ldots, s$，都有 $[x'_{2i-1}, x'_{2i}] \cap y = \emptyset$。我们用 $x_i < y_j$ 表示 $x'_{2i-1} < x'_{2i} < y_j$，并假设 $z = \{z_1, \ldots, z_{s+t}\}$ 按 $z_1 < \cdots < z_{s+t}$ 排序，其中 $z_i \in x \sqcup y$。

定义 2.4. 设 $z = x \sqcup y$ 是一个 (s,t)-分布。类型为 (g, λ, μ, z) 的一个热带覆盖 φ：$C \to T\mathbb{P}^1$ 是从亏格为 g 的热带曲线 C 到 C 的连续映射，并满足以下条件：

(1) $x' \sqcup y$ 是 C 在 φ 下的内部顶点像，这些顶点称为 $T\mathbb{P}^1$ 的内部顶点。(2) φ 将 C 的所有叶子映射到 $\{\pm\infty\}$。(3) φ 是分段整数仿射线性的，其在边 e 上的斜率 $\omega(e) \in \mathbb{N}_{>0}$ 定义为 e 的权重。(4) φ 在 C 的每个内部顶点处满足平衡条件。(5) λ（分别为 μ）的条目是由 φ 映射到与 $-\infty$（分别与 $+\infty$）相邻的边上的端的权重。

对于 $T\mathbb{P}^1$ 的任意一条边 e'，平衡条件意味着总和

$$\deg(\varphi) := \sum_{\substack{e \text{ edge of } C \\ e' \subset \varphi(e)}} \omega(e)$$

与 e'无关，称为 φ的次数。

在第4–6节中，我们经常使用热带覆盖的组合描述来研究具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近行为。为方便读者，我们在 [32, 注 5。3] 中回顾了 [32, 注 5。3] 的内容，见注2.5。

注2.5（[32, 注 5。3]）。设 C 是一个亏格为 g 的图，且仅含有 1 价顶点和 3价顶点。假设 C 带有一个定向 $\mathcal{O}$，使得 C中不存在有向圈。设 C 的每条边都赋予一个正整数权重，且满足平衡条件。该定向在 C的内部顶点上诱导出一个偏序 $\mathcal{P}$。设 $z \subset \mathbb{R}$ 是一个由 r 个点组成的集合，满足 $z_1 < \cdots < z_r$，其中 C的内部顶点数为 r。那么，C的内部顶点上任意一个扩展偏序 $\mathcal{P}$ 的全序 $v_1, \ldots\ldots, v_r$，都唯一确定一个满足以下条件的热带覆盖 φ：$C \to T\mathbb{P}^1$

- 每条边上的受限定向与 $T\mathbb{P}^1$ 在 φ下的定向（从$-\infty$到 $+\infty$）一致；
- 每条边的给定权重与由 φ诱导的权重一致；
- $\varphi(v_i) = z_i$，对 $i = 1, \ldots, r$。

反之，设 φ：$C \to T\mathbb{P}^1$ 是类型为（g，λ，μ，z）的热带覆盖。热带映射 φ与热带射影直线 $T\mathbb{P}^1$ 在热带曲线 C上诱导一个定向 $\mathcal{O}$：C 的每条边 e 从 v_1（e）定向到 v_2（e），其中 v_1（e）与 v_2（e）是 e的端点，且φ（v_1（e））$< \varphi$（v_2（e））。显然，C 是不含有向圈的定向。C 的每条边 e 带有权重 ω（e）。映射 φ与 z在 C的内部顶点上确定唯一的全序 $v_1, \ldots\ldots, v_r$，使得 $\varphi(v_i) = z_i$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, r$。全序 $v_1, \ldots\ldots, v_r$延拓了由定向 $\mathcal{O}$所诱导的偏序 $\mathcal{P}$。

热带覆盖 φ 的对称环（分别为对称叉</style>）：$C \to T\mathbb{P}^1$ 是同一权重的一对内部边（分别为端），且与相同的两个顶点（分别为一个顶点）相邻。若一个对称叉的端可以定向为

从叶子指向内部顶点（分别为从内部顶点指向叶子），则该对称叉为向内（分别为向外）。令 Sym(φ) 表示 $\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1$ 的对称环和对称叉的集合。

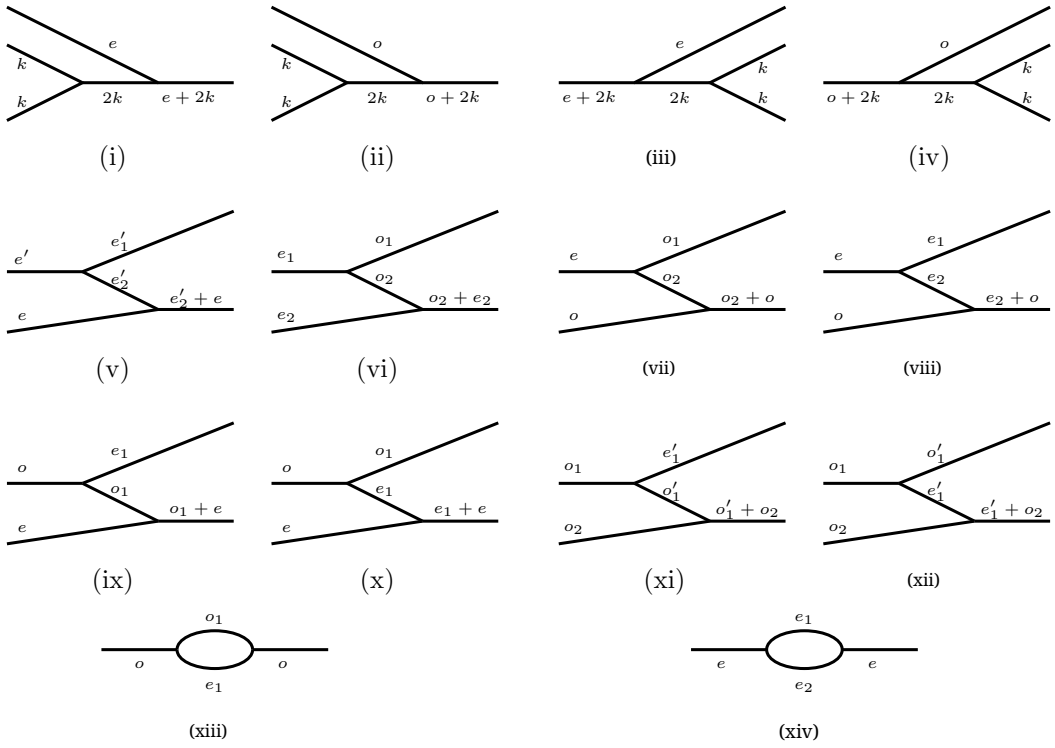


FIGURE 1. 分解热带覆盖的顶点对。

定义 2.6。若热带覆盖 $\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1$ 的类型为 (g, λ, μ, z)，且满足以下条件，则称其为分解热带覆盖：

(1) 对每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，顶点对 $x_i = (x'_{2i-1}, x'_{2i})$ 对应于图 1 中两个相邻的 3 价顶点，允许沿水平线反射。(2) 图 k 1 第一行中权重相同的两条旗标组成的顶点对，要么是 C 的对称叉，要么包含在 C 的对称环中。

设 φ 是一个类型为 (g, λ, μ, z) 的分解热带覆盖。图 1 中任一图里连接两个顶点的边，称为该顶点对的可收缩边。若对称环或对称叉中不含可收缩边，则称其为不可收缩的。我们使用以下记号。

- Symc(φ)：φ 的对称环集合：$C \to T\mathbb{P}^1$。
- $E_c(\varphi)$：C 中偶数条可收缩边的集合。
- $\mathrm{Sym}_3(\varphi)$（分别为 $\mathrm{Sym}_2(\varphi)$）：与可收缩边相邻（分别为不相邻）的不可收缩对称环/叉的集合。

- $\mathrm{Symc}_c(\varphi)$：可收缩对称环的集合。
- $\mathrm{Nsym}_c(\varphi)$：由两条偶可收缩边组成的非对称环的集合。

注意，$\mathrm{Sym}_3(\varphi)$是包含权重k 旗对的对称叉和对称环的集合，位于图1的第一行。

定义 2.7。一个带颜色热带覆盖（$\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1,\ \rho$）由一个热带覆盖、一个子集 $I_\rho(\varphi) \subset \mathrm{Sym}(\varphi)$，以及对 $C\setminus(I_\rho(\varphi))^\circ$ 中偶权边子图的每个连通分支指定红色或蓝色组成。

设 $(\varphi_1\colon C_1 \to T\mathbb{P}^1;\ \rho_1)$ 和 $(\varphi_2\colon C_2 \to T\mathbb{P}^1;\ \rho_2)$ 为带颜色热带覆盖。保持着色且满足 $\varphi_2\circ\Phi=\varphi_1$ 的热带曲线同构 $\Phi\colon C_1\to C_2$ 称为带颜色热带覆盖 (φ_1,ρ_1) 与 (φ_2,ρ_2) 之间的同构。对于类型为 (g,λ,μ,z) 的带颜色热带覆盖 (φ,ρ)，正点（分别为负点）是 C 中某个内部顶点在图2左侧两列（分别为右侧两列）所示情形下的像，并允许沿竖直线反射。

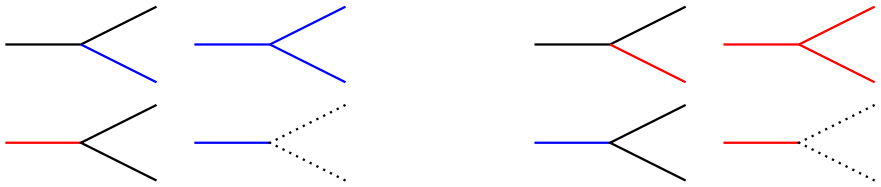


FIGURE 2. 正顶点和负顶点：偶边用颜色标出，奇边用黑色标出，边 I_ρ 用虚线表示。

定义 2.8. 分解热带覆盖 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 的一种着色 ρ 称为有效的，如果一对顶点 x'_{2i-1}, x'_{2i} 中，x_i 两个顶点符号相同，$\mathrm{Sym}_3(\varphi)\subset I_\rho(\varphi)$ 且 $\mathrm{Symc}_c(\varphi)\cap I_\rho(\varphi)=\emptyset$。

根据定义 2.8，任意一对顶点 $x'_{2i-1},x'_{2i},\ i=1,\dots,s$, 都是 C 中两个相邻 3价顶点的像，如图 3所示，允许沿竖直线反射。设 z^-(分别 z^+) 表示负（分别为正）点或（φ,ρ）的集合。存在一种自然的带符号分拆，将 $z=x\sqcup y=z^-\sqcup z^+$ 分成正、负点或顶点对。

有效着色的可解析热带覆盖（φ,ρ）的重数定义为

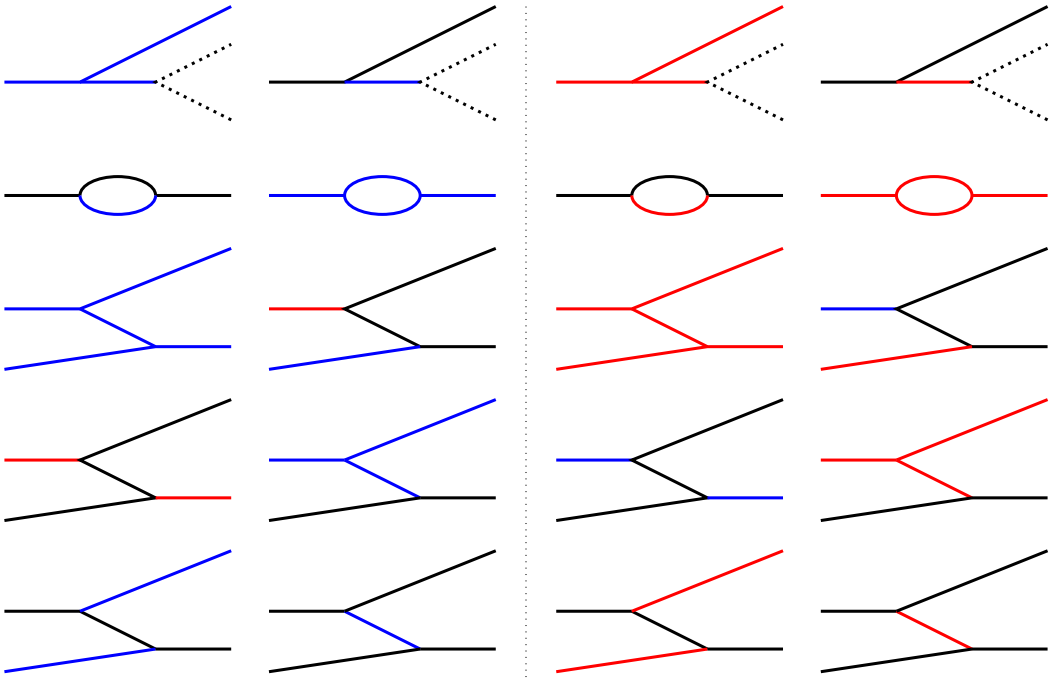
$$\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)=\frac{2^{|E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)|+|\,\mathrm{Symc}(\varphi)\cap\mathrm{Sym}_3(\varphi)|+|\,\mathrm{Nsym}_c(\varphi)|}}{2^{|\,\mathrm{Sym}_2(\varphi)|}}\prod_{e\in\mathrm{Symc}(\varphi)\cap I_\rho}\omega(e), \tag{1}$$

其中 $\omega(e)$ 是虚线对称环 e 中一条边的权重，而 $E(I_\rho)$ 是 $C\setminus I_\rho^\circ$ 中权重为偶数的内部边的集合。

注记 2.9. 由方程（1），有效着色的可解析热带覆盖（φ,ρ）的重数仅依赖于集合 I_ρ，而不依赖于偶内边的着色。

定义 2.10. 设 $\Lambda_{s,t}=(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{s+t})$ 是一个带有带符号分拆 $\Lambda_{s,t}=(\Lambda_s^-,\Lambda_s^+,t)$ 的 (s,t)-元组。设 $z=x\sqcup y$ 是一个(s,t)-分布，其中 x 是由 s 个对组成的集合，y 是由 t 个点组成的集合。设 $z^-=\{z_1^-,\dots,z_{|z^-|}^-\}$ 与 $z^+=\{z_1^+,\dots,z_{|z^+|}^+\}$ 是z 的一个带符号分拆。若 $|z^-|=|\Lambda_s^-|$、t且下列条件成立，则分裂 $z=z^-\sqcup z^+$ 与 $\Lambda_{s,t}$ 的分裂 $(\Lambda_s^-,t,\Lambda_s^+,t)$ 相容。

- $\Lambda_i^*=(3,\ 1,\ \dots\dots,\ 1)$ 当且仅当 $z_i^*\in x$，且 $\Lambda_j^*=(2,\ 1,\ \dots\dots,\ 1)$ 当且仅当 $z_j^*\in y$，其中 $*=\pm$。



(1) 正对 (2) 负对

FIGURE 3. 带符号对：偶边以彩色绘制，奇边以黑色绘制。虚线边是 I_ρ 中包含的对称环或叉。

定理*2.11*（[15, 定理*5.*11]）。设 $g \geq 0$、$d \geq 1$、$s \geq 0$ 和 $t \geq 0$ 为四个整数，并设 λ、μ 是 d 的两个分拆，使得 $2s + t = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2$。设 $\tilde{z} = x \sqcup y$ 为一个（s，t）-分布，其带有一个分裂 $\tilde{z}^- \sqcup \tilde{z}^+$，并与一个（$s$，$t$）-元组 $\Lambda_{s,t}$ 的带符号分拆（$\Lambda_{s,t}^-$、$\Lambda_{s,t}^+$）相容。则有

$$H_g^{\mathbb{R}}(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t}^-, \Lambda_{s,t}^+) = \sum_{[(\varphi,\rho)]} \mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi, \rho), \tag{2}$$

其中求和遍历同构类 $[(\varphi, \rho)]$，这些同构类对应于类型为 $(g, \lambda, \mu, \tilde{z})$ 的有效着色解消热带覆盖，其正点和负点或点对重现了分裂 $\tilde{z}^+ \sqcup \tilde{z}^-$。

3. GENERALIZED ZIGZAG NUMBERS

本节将介绍广义之字形数，它是 Rau 在 [32], 提出的之字形数的推广。随后，我们将讨论这种推广的性质。

设 $g \geq 0$、$d \geq 1$ 为两个整数，且假设 λ、μ 是 d的两个分拆。设 s, t为两个非负整数，使得 $2s + t = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2$。设 $z = x \sqcup y$ 为一个 (s, t)-分布。下文中，我们假设 $2s + t > 0$ 且 $\{\lambda, \mu\} \not\subset \{(2k), (k, k)\}$（见 [32,备注 2.5]）。

定义3.1。若存在非空连通子图 $S \subset C \setminus \mathrm{Sym}_2(\varphi)$ 满足以下条件，则称分解热带覆盖 φ：$C \to T\mathbb{P}^1$（类型为 $(g, \lambda, \mu, x \sqcup y)$）为广义之字形覆盖：

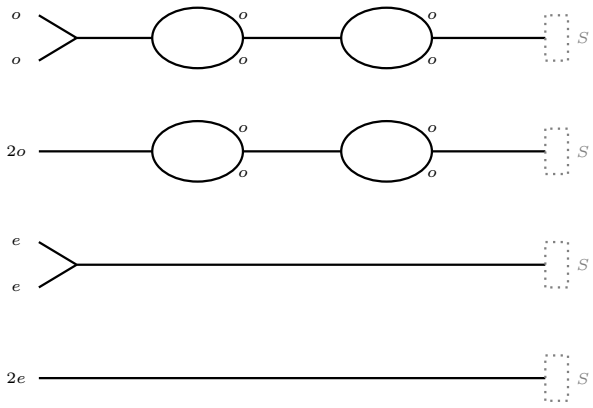


FIGURE 4. 广义之字形覆盖的尾部。对称环的数量可以是任意的。

（1）的所有可收缩边都包含在 S 中，且 S 至少包含一个内部顶点；（2）除了偶可收缩边外，中不存在偶边；（3）的连通分支均为图 4 所示的尾部。此外，图4 中的环和叉均为对称的，且对称环的权重为奇数。

图 4 中广义之字形覆盖的一个尾部 φ 称为向内尾（分别为向外尾部），如果通过 φ，该尾部可以定向为从叶子指向内部顶点（分别为从内部顶点指向叶子）。

注 3.2。令 $s=0$（即 $x=\emptyset$），并令 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 为一个类型为 $(g,\ \lambda,\ \mu,\ x\sqcup y)$ 的广义之字形覆盖。那么 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 是 Rau 在[32, 定义 4.4]中引入的之字形覆盖的一种变体。注意，在 [32, 定义 4.4], 中，一个之字形覆盖中只有一个奇权对称叉。

命题 3.3。令 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 为一个类型为 $(g,\ \lambda,\ \mu,\ z)$ 的广义之字形覆盖。对于 $z=z^+\sqcup z^-$ 的 $(s,\ t)$-分布 $z=x\sqcup y$ 的任意带符号分拆，至少存在一个 分解热带覆盖 φ 的有效着色，使得 $(\varphi,\ \rho)$ 是一个有效着色的可解析热带覆盖，其正点和负点或点对重现该分拆 $z=z^+\sqcup z^-$。

证明。设 $z=z^+\sqcup z^-$ 是 (s,t)-分布 $z=x\sqcup y$ 的一个带符号分拆。那么，任意顶点对 $x_i=(x'_{2i-1},x'_{2i})$ 的符号都是固定的。如何给与 $\varphi^{-1}(x_i)$ 相邻的边着色，由图3中这些边的局部图示决定。根据定义3.1中的条件(1)和(2)，与 $\varphi^{-1}(x)$ 相邻的所有边都按照图3着色。如何将边的颜色扩展到 S 中的所有边，在命题4.8]的证明中有述。任何顶点 $\varphi^{-1}(y_i)$（其中 $y_i\in y$）都与一条不可收缩的偶边相邻。由定义3.1(2)，若顶点 $\varphi^{-1}(y_i)\in S$，则必须连接一条如图 4 所示的尾。固定 $\varphi^{-1}(y)$ 中顶点的符号后，如何将边的颜色扩展到如图 4 所示的尾，在命题4.8]的证明中有述。此外，若图 4 所示尾部中的所有对称叉均为奇权，则扩张是唯一的。□

命题 3.4. 设 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 是类型为 (g,λ,μ,z) 的广义之字形覆盖，且 ρ 是 φ 的有效着色。则下述陈述成立。

(a) (φ,ρ) 的重数为

$$\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)=2^{|\,\mathrm{Symc}(\varphi)\cap\mathrm{Sym}_3(\varphi)|}\prod_{e\in\mathrm{Symc}(\varphi)\cap I_\rho}\omega(e). \tag{3}$$

(b) 若重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 为奇数，则对于 φ 的任意有效着色 ρ'，重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho')$ 为奇数。

证明. (a) 根据定义3.1， $E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)$ 中的每条偶内边都包含在图 4 所示的一个尾部中，因此数量 $|E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)|$ 等于数量 $|\mathrm{Sym}_2(\varphi)|$。我们证明下面的集合 $\mathrm{Nsym}_c(\varphi)=\emptyset$。若 $s=|x|=0$，则根据定义，集合 $\mathrm{Nsym}_c(\varphi)=\emptyset$。在情形 $s=\dashv|x|=1$ 中，若集合 $\mathrm{Nsym}_c(\varphi)\neq\emptyset$，则与可收缩非对称圈相邻的两条偶边不属于 S。这两条偶边必定包含在图 4 所示的尾部中，因此有 $\{\lambda,\mu\}\subset\{(2k),(k,k)\}$。这与我们的假设 $2s+t>0$ 和 $\{\lambda,\mu\}\not\subset\{(2k),(k,k)\}$ 矛盾。因此，在情形$s=|x|=1$ 中，集合 $\mathrm{Nsym}_c(\varphi)=\emptyset$。现在考虑 $s=|x|\succ 1$ 的情形。若集合 $\mathrm{Nsym}_c(\varphi)\neq\emptyset$，则任意圈 $Cy\in\mathrm{Nsym}_c(\varphi)$ 都包含在 S 中。由于子图 S 连通，与 Cy 相邻的两条边中至少有一条是包含在S中的内边。这就产生了矛盾。因此，$\mathrm{Nsym}_c(\varphi)=\emptyset$。根据方程（1），$(\varphi,\rho)$ 的重数由方程 (3) 给出。

(b) 如果 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 是奇数，则我们得到 $\mathrm{Symc}(\varphi)\cap\mathrm{Sym}_3(\varphi)=\emptyset$，并且 $\mathrm{Symc}(\varphi)\cap I_\rho$ 中的每个对称环的权重都是奇数。注意，集合 $\mathrm{Symc}(\varphi)\cap\mathrm{Sym}_3(\varphi)$ 不依赖于着色 ρ。令 ρ' 为 φ的任意有效着色。重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho')$ 只取决于集合 $I_{\rho'}$。由于 $\mathrm{Symc}(\varphi)\cap\mathrm{Sym}_3(\varphi)=\emptyset$，$\mathrm{Symc}(\varphi)\cap I_{\rho'}$ 中的对称环只能从 $\mathrm{Sym}_2(\varphi)$ 中选取。根据定义3.1(3)以及（a）中的陈述，重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho')$ 是奇数。

□

命题 3.5。 设 (φ,ρ) 是一个有效着色的可解析热带覆盖。那么 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$是一个整数。此外，如果 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 是奇数，则分解热带覆盖 φ 必须是一个广义之字形覆盖。

证明。我们采用 [32, 引理 4.2] 的证明思路来证明此命题。设（$\varphi\colon\ C\to T\mathbb{P}^1,\rho$）是一个有效着色的可解析热带覆盖。将集合 $\mathrm{Sym}_2(\varphi)$ 中所有对称叉和对称环替换为权重适当的偶边，得到一条新的热带曲线 C_1。由于 $2s+t>0$ 且 $\{\lambda,\mu\}\not\subset\{(2k),\ (k,k)\}$，热带曲线 C_1 至少有一个内部顶点。 C_1中的偶内边数量非负。通过插入对称环/叉，可以从 C_1 恢复 C。在 C_1中插入对称环或对称叉时，至少会产生一条新的偶内边，因此数量 $|\mathrm{Sym}_2(\varphi)|\le|E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ|$。因此，重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 是一个整数。 $C\setminus(E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ)$中的偶内边必须是偶可收缩边，或是 I_ρ中对称环里的偶边。当且仅当 $|\mathrm{Sym}_2(\varphi)|=|E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ|$、$|\mathrm{Symc}(\varphi)\cap\mathrm{Sym}_3(\varphi)|+|\mathrm{Nsym}(\varphi)|=0$，且 $\mathrm{Symc}(\varphi)\cap I_\rho$ 中的每个对称环的权重均为奇数时，（φ,ρ）的重数为奇数。现在假设 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 为奇数。如果集合 $E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ$ 包含一个偶数环（即两条具有相同两个端点的偶边），那么我们有 $|\mathrm{Sym}_2(\varphi)|<|E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ|$。这就产生了矛盾，因此热带曲线 C 中， $E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ$内不存在偶数环。由于热带曲线 C 在 I_ρ 中没有偶对称环，且 $|\mathrm{Sym}_2(\varphi)|=|E(I_\rho)\setminus E_c(\varphi)^\circ|$，上文得到的热带曲线 C_1 除偶可收缩内边外，不含其他偶内边。因此，$\mathrm{Sym}_2(\varphi)$中的所有元素都包含在图 4 所示类型的尾部中。令 S 为子图

属于 C_1 通过移除 的所有偶端得到，那么 S 也是 的一个子图。容易看出， S 满足定义 3.1中的三个条件，因此 φ 是一个广义之字形覆盖。□

注 3.6. 设 $\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1$ 是一个类型为 (g,λ,μ,z) 的广义之字形覆盖， ρ 是 φ的有效着色。由命题 3.4 可知，重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 的奇偶性不依赖于着色 ρ。特别是，如果 $s=0$ （即 $x=\emptyset$），方程 (3) 表明 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 是奇数（另见 [32, 命题 4.7]）。由于 [32,定义 3.3] 中使用的重数不同于 [29, 推论 5.9] 中的重数（见 [32, 注 3.5]），在 $s=0$ 的情形下，根据 [32, 定义 3.3] 中的重数，存在重数为偶数的广义之字形覆盖。这些广义之字形覆盖具有图 4 所示的第三种尾部类型。如果 $t=0$ （即 $y=\emptyset$），方程 (3) 与本手稿先前版本中 [14, 命题 4.4] 所进行的纯组合计算一致。

引理 3.7. 设 o 是一个奇整数，且 λ_1、λ_2、μ_1、μ_2 是四个分拆，使得 $|\lambda_1|=|\mu_1|+o$ 和 $|\lambda_2|+o=|\mu_2|$。假设存在 n_1 个广义之字形覆盖 $\varphi_1\colon C_1\to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g_1,\lambda_1,(\mu_1,o)\,x_1\sqcup y_1)$，并且其非空连通子图 S_1 包含一个由 $o\in(\mu_1,o)$ 加权、且不属于任何对称叉的向外端 l_1。进一步假设存在 n_2 个广义之字形覆盖 $\varphi_2\colon C_2\to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g_2,(\lambda_2,o)\,\mu_2,x_2\sqcup y_2))$，并且其非空连通子图 S_2 包含一个由 $o\in(\lambda_2,o)$ 加权、且不属于任何对称叉的向内端 l_2。令 a 为集合 $x_1\sqcup y_1$ 中的最大数，令 b 为集合 $x_2\sqcup y_2$ 中的最小数。我们将每个 $x_2\sqcup y_2$ 中的数加上 $|a-b|+1$ 后得到的集合记为 $x_2'\sqcup y_2'$。那么，存在 $n_1\cdot n_2$ 个广义之字形覆盖$\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g_1+g_2,(\lambda_1,\lambda_2),(\mu_1,\mu_2)\,x\sqcup y)$，它们是通过沿着$l_1$和 l_2将 φ_1 与 φ_2 粘合而得到的。这里， $x=x_1\cup x_2'$ 和 $y=y_1\cup y_2'$。

证明。设 $\varphi_1\colon C_1\to T\mathbb{P}^1$（分别为 $\varphi_2\colon C_2\to T\mathbb{P}^1$）是类型为 $(g_1,\lambda_1,(\mu_1,o)\,x_1\sqcup y_1)$（分别为 $(g_2,(\lambda_2,o)\,\mu_2,x_2\sqcup y_2)$）的广义之字形覆盖，且满足引理 3.7 中的假设。根据注 2.5，图 C_1 （分别为 C_2）由映射φ_1 （分别为 φ_2）定向并赋予权重。此外，映射 φ_1 （分别为 φ_2）在 C_1 （分别为 C_2）的内部顶点上诱导出一个全序，记作 $O(C_1)$ （分别为 $O(C_2)$）。

我们将端 $l_1\subset C_1$ 与端 $l_2\subset C_2$ 粘合，得到新图 C。在 C_1 （分别为 C_2）中，端 l_1 （分别为 l_2）的定向向外（分别向内），也就是说，它从内部顶点指向叶子（分别从叶子指向内部顶点）。粘合过程保留了 C_1 和 C_2上的定向与权函数。具体而言，如果新图 C 中的边 E 包含在 C_1中，那么它就沿用 C_1的定向和权重；否则， E 沿用 C_2的定向和权重。因此，图 C是一个定向带权图。我们将 $O(C_1)$ $O(C_2)$ 选作 C内部顶点上的全序。该全序与定向相容，也就是说，它扩展了由 C上的定向在 C 的内部顶点上诱导出的偏序。根据 [32, 注 5.3], , 此全序唯一确定一个类型为 $(g_1+g_2,(\lambda_1,\lambda_2),(\mu_1,\mu_2)\,x\sqcup y)$ 的热带覆盖 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$，其中 $x=x_1\cup x_2'$ 和 $y=y_1\cup y_2'$。根据构造，我们知道热带覆盖 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 是一个广义之字形覆盖。

设 $\varphi_1'\colon C_1'\to T\mathbb{P}^1$ 是类型为 $(g_1,\lambda_1,(\mu_1,o)\,x_1\sqcup y_1)$ 的广义之字形覆盖，且设 $\varphi_2'\colon C_2'\to T\mathbb{P}^1$ 是类型为 $(g_2,(\lambda_2,o)\ \mu_1,x_2\sqcup y_2)$ 的广义之字形覆盖。上述构造通过将 φ_1' 与 φ_2'粘合，得到类型为 $(g_1+g_2,(\lambda_1,\lambda_2),(\mu_1,\mu_2)\ x\sqcup y)$ 的广义之字形覆盖 $\varphi'\colon C'\to T\mathbb{P}^1$。若 $\varphi'\colon C'\to T\mathbb{P}^1$ 同构于

广义之字形覆盖 $\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1$，则 $\varphi_1'\colon C_1' \to T\mathbb{P}^1$ 同构于 $\varphi_1\colon C_1 \to T\mathbb{P}^1$，且 $\varphi_2'\colon C_2' \to T\mathbb{P}^1$ 同构于 $\varphi_2\colon C_2 \to T\mathbb{P}^1$。因此，命题得证。□

定义 3.8. 令 $\mathcal{Z}_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})$ 表示类型为 (g,λ,μ,z) 的广义之字形覆盖的同构类的集合，其中 (s,t)-分布 $z = x \sqcup y$ 与 (s,t)-元组 $\Lambda_{s,t}$ 相容。类型为 (g,λ,μ,z)-的广义之字形数 是数

$$Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}) = \sum_{[\varphi]\in\mathcal{Z}_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})} 2^{m(\varphi)}.$$

此处，若对某个有效着色 ρ，$\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 为奇数，则 $m(\varphi) = 0$，否则 $m(\varphi) = 1$。

注 3.9. 数 $Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})$ 不依赖于 z 的带符号分拆。事实上，重数 $\mathrm{mult}^{\mathbb{R}}(\varphi,\rho)$ 的奇偶性仅依赖于广义之字形覆盖 φ，而不依赖于 φ 的着色 ρ（见注 3.6）。广义之字形覆盖 $\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1$是带有附加组合条件的分解热带覆盖，即定义3.1中的三个条件。这三个条件既独立于着色ρ，也独立于 z 的带符号分拆。因此，数 $Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t})$ 独立于z的带符号分拆。

命题 *3.10*。固定两个整数 $d \geq 1$, $g \geq 0$，以及 d 的两个分拆 λ,μ。设 s,t 是两个非负整数，使得 $2s+t = l(\lambda)+l(\mu)+2g-2$。假设 $2s+t>0$ 和 $\{\lambda,\mu\} \not\subset \{(2k),(k,k)\}$。设 $\Lambda_{s,t}$ 是一个带有带符号分拆 $(\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+)$ 的 (s,t) 元组。那么，我们有

$$Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}) \leq H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+) \leq H_g^{\mathbb{C}}(\lambda,\mu;s,t),$$

and

$$Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}) \equiv H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,t}^-,\Lambda_{s,t}^+) \mod 2.$$

证明。由命题3.3、命题 3.4 和定义 3. 8. □

4. Asymptotics for real double Hurwitz numbers with only triple ramification

当 $t=0$ 时，数 $Z_g(\lambda,\mu;\Lambda_{s,0})$ 为仅有三重分歧的实双重 Hurwitz 数提供下界。本节研究当 $s\to\infty$ 和 g 固定时，$H_g^{\mathbb{R}}(\lambda,\mu;\Lambda_{s,0}^-,\Lambda_{s,0}^+)$ 的对数渐近增长。

4.1. 非消失定理。 我们回顾一下 [32, Section 5] 中分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ 的尾部分解 。我们记作 $\lambda^2=(\lambda_1,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_n)$。$\lambda$ 的尾部分解为

$$\lambda = (\lambda_{o,o}^2,\lambda_{e,e}^2,\lambda_o,\lambda_e), \tag{4}$$

其中 $\lambda_{o,o}$、$\lambda_{e,e}$、λ_o 和 λ_e 是分拆，满足：

- $\lambda_{o,o}$ 中的任一项都是奇整数；
- $\lambda_{e,e}$ 中的任一项都是偶数；
- λ_o 中的任一项都是奇数，且在 λ_o 中只出现一次；
- λ_e 中的任一项都是偶数，且在 λ_e 中只出现一次。

给定一个尾部分解 $\lambda=(\lambda_{o,o}^2,\lambda_{e,e}^2,\lambda_o,\lambda_e)$，我们用 $\lambda\setminus\lambda_e$ 表示具有尾部分解 $(\lambda_{o,o}^2,\lambda_{e,e}^2,\lambda_o)$ 的分拆。

定理 4.1。设 $g \geq 0$ 和 $d \geq 1$ 是两个整数，且 λ、μ 是 d 的两个分拆，使得 $l(\lambda) \equiv l(\mu)$ 模 2。设 z 是一个 $(s、0)$-分布，其中 $s = \frac{1}{2}(l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2)$。假设以下条件成立：

$$\begin{aligned} &\min(l(\lambda_o), l(\mu_o)) > 0, l(\lambda_e) = l(\mu_e) = 0, \\ &|l(\lambda_o) - l(\mu_o)| < 2\min(l(\lambda_{o,o}), l(\mu_{o,o})). \end{aligned} \tag{5}$$

那么，至少存在一个类型为(g, λ, μ, z)的广义之字形覆盖。

证明。由于 $l(\lambda_o) + l(\mu_o) \equiv |\lambda| + |\mu| \bmod 2$, $l(\lambda_o) + l(\mu_o)$ 是偶数。假设 $l(\lambda_o) - l(\mu_o) = 2a$。我们通过考虑以下三种情形，构造一个类型为 (g, λ, μ, z) 的广义之字形覆盖：$a > 0, \underline{a} = 0$ 和 $a < 0$。

情形 $a > 0$：根据假设 $|l(\lambda_o) - l(\mu_o)| < 2\min(l(\lambda_{o,o}) \ l(\mu_{o,o}))$，可以从 $(\mu^2_{o,o})$ 中选取 $2a$ 个条目，并将其并入分拆 μ_{oo}。设 $(\mu^2_{o,o}) = (\bar{\mu}^2_{o,o}, \tilde{\mu}^2_{o,o})$，且 $l(\tilde{\mu}_{o,o}) = a$。两个分拆 (λ_o) 和 $(\mu_o, \tilde{\mu}^2_{o,o})$ 的长度相同，并设 $k = l(\lambda_o) = l(\mu_o, \tilde{\mu}^2_{o,o})$。假设 λ_o 中的条目 λ^1_o、……、λ^k_o 满足 $\lambda^1_o < \cdots < \lambda^k_o$，而 $(\mu_o, \tilde{\mu}^2_{o,o})$ 中的条目 μ^1_o、……、μ^k_o 满足 $\mu^1_o \leq \cdots \leq \mu^k_o$。类型为 $(0, \lambda, \mu, z)$ 的广义之字形覆盖按如下方式构造。

(a) 我们从 k 条弦 S_1、……、S_k 开始。将 S_i 的两片叶子分别标记为 λ^{k-i+1}_o和 μ^i_o，其中 $i = 1$、……、k。弦 S_i 的定向从标记为 λ^{k-i+1}_o的叶子指向标记为 μ^i_o的叶子。

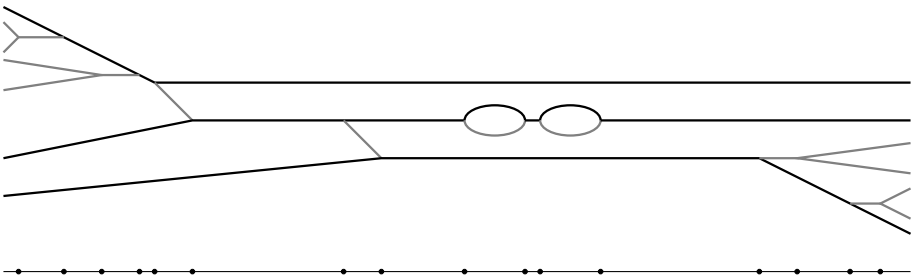


FIGURE 5. 广义之字形覆盖的一个例子：偶数可收缩边和带有对称叉的尾部用灰色绘制，弦和奇数可收缩边用黑色绘制。

(b) 我们将 $l(\lambda_{o,o}) + l(\lambda_{e,e})$ 个尾部（每个尾部都带有对称叉，即图 4 中的第一种和第三种类型）附加到弦 S_1 上（示例见图 5）。将所得的图记为 C_1。对称叉用 λ_{o}、$_o$ 以及 λ_{e}、$_e$的条目标记，其中每个条目恰好使用一次。这些尾部从其叶子定向至尾部与弦 S_1的交点。于是，C_1 是一个定向的图，并将与对称叉相邻的内边视为可收缩边。$C_1 \setminus \cup_{i=2}^k S_i$ 中与和 λ_o（分别为 λ_{o}、$_o$ 或 λ_{e}、$_e$）相关联的叶子相邻的端，赋予权重 λ_o（分别为 λ_{o}、$_o$ 或 λ_{e}、$_e$）。对于 $C_1 \setminus \cup_{i=2}^k S_i$中的任意三价顶点，通过在该顶点应用平衡条件，可由其入边的权重确定其出边的权重。因此，$C_1 \setminus \cup_{i=2}^k S_i$ 中的每条边都带有权重。

(c) 我们通过可收缩边 E_i 将弦 S_i 连接到弦 S_{i+1}，其中 $1 \leq i \leq k-1$。假设所得的图记为 C_2。假设 E_i 与S_i 在 v_i 相交，并与 S_{i+1} 在 v'_{i+1}相交。注意，所有弦 $S_1, \ldots, S_k$ 都是定向的。

选择可收缩边 E_i，使得根据定向，v_i 在S_i 中位于所有其他内部顶点之后，而 v'_{i+1} 在 S_{i+1} 中位于所有其他内部顶点之前。S_1 中与关联于 μ_o^1 的叶子相邻的端是一条来自 v_1的出边，并令 μ_o^1为该端的权重。假设 $2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \lambda_o^k \le \mu_{oo}^1$。若 $\lambda_o^{k-1} \ge \mu_o^2$，则由本证明第一段中的假设可得 $\lambda_o^k > \lambda_o^{k-1} \ge \mu_o^2 \ge \mu_o^1$，这与不等式 $2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \lambda_o^k \le \mu_o^1$矛盾。因此，必有$\lambda_o^1 < \cdots < \lambda_o^{k-1} < \mu_o^2 \le \cdots \le \mu_{oo}^k$。然而，这会导致矛盾：$d = 2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \sum_{j=1}^k \lambda_o^j < \sum_{j=1}^k \mu_o^j \le d.$。我们得出结论，$2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \lambda_o^k > \mu_{oo}^1$。选择 E_1 的定向，使其成为来自 v_1 的出边（即，E_1 的定向从 v_1 指向 v'_2），并将 E_1 赋予权重 $2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \lambda_o^k - \mu_{oo}^1$。$S_i, i = 2, \ldots, k$（分别为 $i = 2, \ldots, k-1$）中与关联于 λ_o^{k-i+1}（分别为 μ_o^i）的叶子相邻的端，其权重为 λ_o^{k-i+1}（分别为 μ_o^i）。假设 $C_2 \setminus (\cup_{j=i+1}^k S_j \cup (\cup_{l=i}^{k-1} E_l))$ 中的所有边都已赋予权重并定向，其中 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$。我们接下来证明，可将可收缩边 E_i 定向为来自 v_i 的出边。我们使用记号 $\lambda_o^{k+1} = \mu_o^0 = 0$。假设以下不等式成立：

$$(2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \sum_{j=k-i+2}^{k+1} \lambda_o^j - \sum_{j=0}^{i-1} \mu_o^j) + \lambda_o^{k-i+1} \le \mu_o^i. \tag{6}$$

如果 $\lambda_o^{k-i} \ge \mu_o^{i+1}$，根据本证明第一段中的假设，我们有 $\lambda_o^j > \mu_o^h$对任意 $j \in \{k-i+1, k-i+2, \ldots, k\}$ 以及任意 $h \in \{1, 2, \ldots, i\}$。这将推出关系 $\sum_{j=k-i+1}^{k+1} \lambda_o^j > \sum_{j=0}^i \mu_o^j$，这与方程（6）矛盾。因此，我们必有 $\lambda_o^1 < \cdots < \lambda_o^{k-i} < \mu_o^{i+1} \le \cdots \le \mu_o^k$。由此得到矛盾：

$$d = 2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \sum_{j=1}^k \lambda_o^j < \sum_{j=1}^k \mu_o^j \le d.$$

我们得出结论：

$$2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \sum_{j=k-i+1}^{k+1} \lambda_o^j > \sum_{j=0}^i \mu_o^j.$$

v_i 处的平衡条件意味着，可收缩边 E_i 是 v_i的一条出边，而 E_i 的权重为$2|\lambda_{o,o}| + 2|\lambda_{e,e}| + \sum_{j=k-i+1}^{k+1} \lambda_o^j - \sum_{j=0}^i \mu_{oo}^j$ v'_{i+1} 的出边的权重由 v'_{i+1}处的平衡条件决定。于是，$C_2 \setminus (\cup_{j=i+2}^k S_j \cup (\cup_{l=i+1}^{k-1} E_l))$中的所有边都赋予了权重并确定了方向。重复这一过程，可确保 C_2 中的所有边都赋予了权重并确定了方向。

(*d*) 我们将带有对称叉的 $l(\bar{\mu}_{o,o}) + l(\mu_{e,e})$ 个尾连接到弦 S_k 上。注意，顶点 v'_k 先于这些尾与 S_k的所有交点。将所得的图记为 $C_\circ$。与 $l(\bar{\mu}_{o,o}) + l(\mu_{e,e})$ 对称叉相邻的内部边是可收缩边。对称叉由 $\bar{\mu}_{o,o}$ 和$\mu_{e,e}$的条目标记，每个条目恰好使用一次。这些尾从其与S_k 的交点定向至其叶子。因此，C 成为一个定向图。C中与关联于 $\bar{\mu}_{o,o}$ 或 $\mu_{e,e}$（分别为 μ_o^k）的叶子相邻的端，其权重为 $\bar{\mu}_{o,o}$ 或 $\mu_{e,e}$（分别为μ_o^k）。对于 $C \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} (S_i \cup E_i))$ 中的任意三价顶点，应用该顶点处的平衡条件，即可将权函数扩展到所有 $C_\circ$。因此，C 是一个零属带权定向图。图 C 的定向在其内部顶点上诱导出一个偏序 $\mathcal{P}$。由 [32, 注 5.3] 可知，C 内部顶点上任何扩展 $\mathcal{P}$ 的全序都能诱导出唯一的热带覆盖 $\varphi : C \to T\mathbb{P}^1$，其

类型为 $(0,\ \lambda,\ \mu,\ z)$。为确保 $\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$ 是一个广义之字形覆盖，只需在 C 的内部顶点上选择一个相容的全序，使得每条可收缩边的两个端点按照该全序彼此相邻。这样的全序显然存在。因此，我们得到一个类型为 $(0,\ \lambda,\ \mu,\ z)$ 的广义之字形覆盖$\varphi\colon C\to T\mathbb{P}^1$。

要获得任意亏格的广义之字形覆盖 g，可以适当地将 g 个可缩圆放置到一个奇数端（示例见图5）。

情形 $a=0$：在此情形下，两个分拆 λ_o 和 μ_o 具有相同的长度。设$k=l(\lambda_o)=l(\mu_o)$。进一步假设，λ_o中的条目 λ_o^1、……、λ_o^k满足 $\lambda_o^1<\cdots<\lambda_o^k$；类似地，$\mu_o$中的条目 μ_o^1、……、μ_o^k满足 $\mu_o^1<\cdots<\mu_o^k$。针对情形 $a>0$ 所概述的构造经过直接修改后可适用于情形 $a=0$，因此此处省略细节。

情形 $a<0$：由假设 $|l(\lambda_o)-l(\mu_o)|<2\min(l(\lambda_{o,o}),l(\mu_{o,o}))$，可以从 $(\lambda_{o,o}^2)$ 中选取 $|2a|$ 个条目，并将其加入分拆 λ_o。设 $(\lambda_{o,o}^2)=(\bar\lambda_{o,o}^2,\tilde\lambda_{o,o}^2)$，且 $l(\tilde\lambda_{o,o})=|a|$。两个分拆 $(\lambda_o,\tilde\lambda_{o,o}^2)$ 和 (μ_o) 具有相同的长度，因此设 $k=l(\lambda_o,\tilde\lambda_{o,o}^2)=l(\mu_o)$。进一步假设，$(\lambda_o,\tilde\lambda_{o,o}^2)$ 中的条目 λ_o^1、……、λ_o^k满足 $\lambda_o^1\le\cdots\le\lambda_o^k$；类似地，$\mu_o$中的条目 μ_o^1、……、μ_o^k满足 $\mu_o^1<\cdots<\mu_o^k$。针对情形 $a>0$ 详述的构造经过直接修改后可适用于情形 $a<0$，因此我们省略具体细节。□

4.2. **渐近增长率**。在本节中，我们考虑当次数趋于无穷且亏格固定时，广义之字形数的渐近增长。

Lemma 4.2. 对任意整数 $m>3$，至少存在 $\lfloor\frac{m-1}{3}\rfloor!$ 个广义之字形覆盖类型为 $(0,(1^m),(1^m)\ \bar z)$，其中 $\bar z$是一个$(m-1,0)$-分布。

证明。我们首先考虑 $m=3n+1$ 的情形。我们证明，至少存在 $n!$ 个类型为 $(0,(1^{3n+1}),(1^{3n+1})\ z)$ 的广义之字形覆盖。设 $\varphi_i\colon C_i\to T\mathbb{P}^1$ 为图6所示的类型为 $(0,\lambda_i,\mu_i,z_i)$ 的广义之字形覆盖，其中 $i=1,\dots,n$，以及 $\lambda_i=\mu_i=(1^4)$。设 $e_i,e_i',\bar e_i,\bar e_i'$ 为图6所示 C_i 的四个端。由注 2.5，该映射

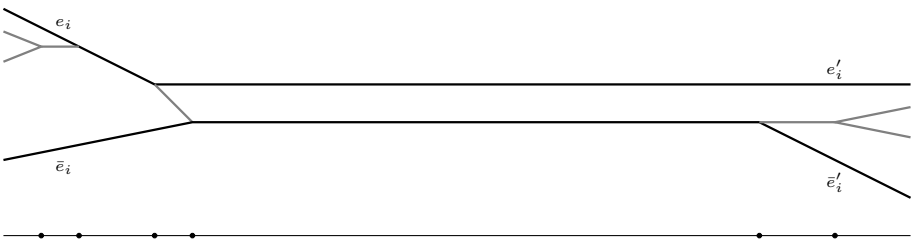


FIGURE 6. 广义之字形覆盖 $\varphi_i\colon C_i\to T\mathbb{P}^1$ 类型为 $(0,\ 1_4,\ 1_4,\ x_i)$。

φ_i 在 C_i上诱导出一个定向 $\mathcal{O}_i$。令 $\mathcal{P}_i$ 为由 $\mathcal{O}_i$确定的 C_i内部顶点上的偏序。映射 φ_i 和 z_i 也确定了 C_i内部顶点的一个全序。令 $O(C_i)$ 表示 C_i内部顶点的这个全序。注意，该全序是 $\mathcal{P}_i$的一个扩张。C_i 的每条边都由映射 φ_i赋予权重，而边的权重可通过使用 C_i每个顶点处的平衡条件得到。

设 C 是按如下方式粘合 $C_1,\dots,C_n$ 而得到的图。对每个 $i\in\{1,\dots,n-1\}$，我们通过下述手术 (1) 或手术 (2) 之一将 C_i 与 C_{i+1} 粘合：

(1) 将 C_{i+1} 的端 e_{i+1} 与 C_i 的端 $\bar{e}'_i$ 粘合；(2) 将 C_{i+1} 的端 e'_{i+1} 与 C_i 的端 $\bar{e}_i$ 粘合。粘合过程与 $C_1, \dots, C_n$ 上的定向和权重相容。换言之，如果 C 中的边 e 是 C_i 中的一条边，那么 e 就按照 C_i 上的定向和权函数进行定向和赋权。因此，图 C 是定向的且带权的。C 上的定向 $\mathcal{O}$ 在 C 的内部顶点上诱导出偏序 $\mathcal{P}$。根据注 [32,注 5.3。], , 对 C 的内部顶点任取一个扩张 $\mathcal{P}$ 的全序，便可得到一个类型为 $(0, (1^{3n+1}), (1^{3n+1})\ z)$ 的热带覆盖 $\varphi\colon C \to T\mathbb{P}^1$。

设 σ 是集合 $\{1, \dots, n\}$ 的一个排列。对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$，如果 $i+1$ 在序列 $\sigma(1) \dots, \sigma(n)$ 中紧跟在 i 之后，我们就对 C_i 和 C_{i+1} 施加类型（1）手术。否则，我们对 C_i 和 C_{i+1} 施加类型（2）手术。记 C_σ 为通过这一过程得到的图。图 C_σ 按照上一段所述进行定向和赋权。我们用 $\mathcal{O}_\sigma$ 表示 C_σ 的定向，并用 $\mathcal{P}_\sigma$ 表示由 $\mathcal{O}_\sigma$ 确定的其内部顶点上的偏序。C_σ 的内部顶点的全序 $(O(C_{\sigma(1)}) \dots, O(C_{\sigma(n)}))$ 是 $\mathcal{P}_\sigma$ 的一个扩张。设 $\varphi_\sigma\colon C_\sigma \to T\mathbb{P}^1$ 为唯一一个与全序 $(O(C_{\sigma(1)}) \dots, O(C_{\sigma(n)}))$ 对应的、类型为 $(0, (1^{3n+1}), (1^{3n+1})\ z)$ 的热带覆盖（例子见图 7）。由于

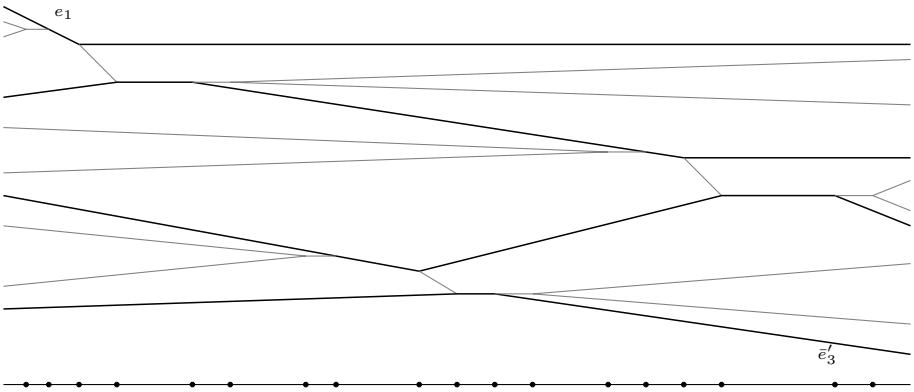


FIGURE 7. 一个例子：该排列为 $O(C_1)\ O(C_3)\ O(C_2)$。

φ_1，……，φ_n 都是广义之字形覆盖，覆盖 φ_σ 满足定义3.1中的条件。因此，对于集合 σ 的每个排列 $\{1, \dots, n\}$，我们都得到一个广义之字形覆盖φ_σ。集合 n有 ! 个排列 $\{1, \dots, n\}$，因此共有 $n!$ 个广义之字形覆盖。类似于引理证明最后一段中的论证 3.7可知，如果 σ_1和 σ_2 是两个不同的排列，那么 φ_{σ_1} 与 φ_{σ_2}不同构。为简洁起见，此处省略该论证的细节。

与前一种情形相同的论证给出了类型为 $(0, (1^{3n+2}), (1^{3n+2})\ z)$ 和 $(0, (1^{3n+3}), (1^{3n+3})\ z)$ 的广义之字形覆盖数量下界的证明，其中 $n > 0$ 为任意值。当 $\neg\varphi_1$ 时，结论仍成立：将前一种情形中的 $C_1 \to T\mathbb{P}^1$ 替换为类型为 $(0, (1^5), (1^5)\ z'_1)$ 的广义之字形覆盖 $\varphi'_1\colon\ C'_1 \to T\mathbb{P}^1$，以及类型为 $(0, 16, 16, z''_1)$ 的广义之字形覆盖 $\varphi''_1\colon\ C''_1 \to \bar{T}\mathbb{P}^1$，分别如图8所示。□

定理 4.3. 给定一个整数 $g \geq 0$ 和两个分拆 λ, μ，满足 $|\lambda| = |\mu|$ 和$l(\lambda_e) = l(\mu_e) = 0$，则存在一个整数 n_0，它取决于 λ, μ，使得对于任意 $h > n_0+3$，有

$$|\mathcal{Z}_g((\lambda, 1^h), (\mu, 1^h); \Lambda_{s,0})| \geq |\mathcal{Z}_g((1^{h-n_0}), (1^{h-n_0}); \Lambda_{h-n_0-1,0})|,$$



(1) φ_1' : $C_1' \to T\mathbb{P}^1$ (2) φ_1'' : $C_1'' \to T\mathbb{P}^1$

FIGURE 8. 广义之字形覆盖 φ_1' 和 φ_1''。

其中 $2s = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2 + 2h$。

证明。由于 $l(\lambda_e) = l(\mu_e) = 0$，我们得出 $l(\lambda) \equiv l(\mu)$ 模 2。假设 $|l(\lambda_o) - l(\mu_o)| = 2b$，且 $\min(l(\lambda_o), l(\mu_o)) > 0$。那么，分拆 $(\lambda, 1^{2a})$、$(\mu, 1^{2a})$（其中 $a > b$）满足定理 4.1 的条件。另一方面，如果 $|l(\lambda_o) - l(\mu_o)| = 2b$ 且 $\min(l(\lambda_o), l(\mu_o)) = 0$，那么，分拆 $(\lambda, 1^{2a+1})$、$(\mu, 1^{2a+1})$（其中 $a > b$）满足定理 4.1 的条件。由于这两种情形的证明相同，我们只考虑 $\min(l(\lambda_o), l(\mu_o)) > 0$ 的情形。

首先，我们构造四种类型的广义之字形覆盖。然后，我们应用引理3.7，以得到所需类型的广义之字形覆盖。

- 设 φ_1： $C_1 \to T\mathbb{P}^1$ 为类型 $(g,\ (\lambda,\ 1^{2a}),\ (\mu,\ 1^{2a})\ z_1)$ 的广义之字形覆盖，由定理4.1构造。注意，根据定理4.1的证明，存在一个向外端 l_1，位于非空子图 $S_1 \subset C_1$ 中，其带权为 μ_o^{max}，且不在对称叉中。这里，μ_o^{max}表示 μ_o中的最大项。
- 设 φ_2： $C_2 \to T\mathbb{P}^1$ 为类型 $(0,\ (\mu_o^{max}),\ (1^{\mu_o^{max}})\ z_2)$ 的广义之字形覆盖，按照图9（1）构造。在非空子图 $S_2 \subset C_2$中，存在一个向内端l_2'，其带权为 μ_o^{max}，以及一个向外端 l_2，其带权为1。此外，l_2' 与 l_2 均不位于对称叉中。
- 取一个整数 $h > 2a + \mu_o^{max} + 1$。令 φ_3： $C_3 \to T\mathbb{P}^1$ 为引理 4.2构造的类型为 $(0, 1^m(1^m), z_3(m = h - 2a - \mu_o^{max} +))2 > 3$的广义之字形覆盖。根据引理 4.2的证明，在非空子图 $S_3 \subset C_3$中，至少有两个向外端 $\bar{}$ $\bar{}$和 l_3，以及两个向内端 l_3和 l_3'；它们的权重均为 1，且都不位于对称叉中。l_3'
- 令 φ_4： $C_4 \to T\mathbb{P}^1$ 为根据图 9$(1^{\mu_o^{max}}$ 2) 构造的类型为 $(0, \mu_o^{max}()\, z_4, (\ S_4 \subset C_4)\, l_4'$ 的广义之字形覆盖。在非空子图 l_4 中，存在一个权重为 1 且不位于对称叉中的向内端 μ_o^{max}，以及一个权重为 l_4' 且不位于对称叉中的向外端。l_4

我们将引理 3.7 应用于广义之字形覆盖 φ_1 和 φ_2。于是得到一个广义之字形覆盖 φ': $C' \to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g, (\lambda, 1^{2a}), (\mu \setminus \mu_o^{max}, 1^{2a+\mu_o^{max}})\, z')$。其中有一个权重为 1 且不位于对称叉中的向外端 $l_2 \subset C'$。接下来，我们沿着 l_2 和 l_3'将 φ' 与 φ_3 粘合。再次应用引理 3.7，得到一个广义之字形覆盖 φ'': $C'' \to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g, (\lambda, 1^{2a+m-1}), (\mu \setminus \mu_o^{max}, 1^{2a+\mu_o^{max}+m-1})\, z'')$。在非空子集 $S'' \subset C''$中，有一个权重为 1 且不在对称叉中的向外端 l_3。最后，根据引理 3.7，我们沿着 l_3 和 l_4' 将 φ'' 与 φ_4 粘合，得到一个广义之字形覆盖φ: $C \to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g, (\lambda, 1^{2a+m-1+\mu_o^{max}-1}), (\mu, 1^{2a+\mu_o^{max}+m-2})\, z)$。由于至少有两个权重均为 1 且不位于

$\bar{}$

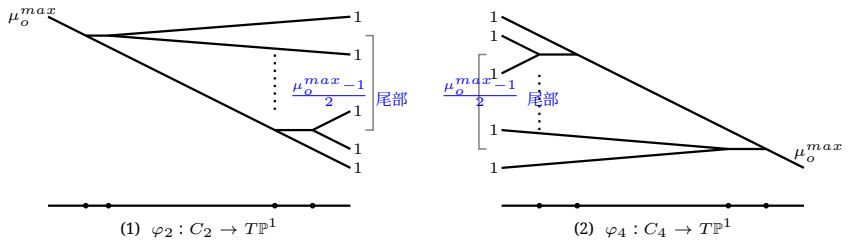


FIGURE 9. 两个广义之字形覆盖 φ_2 和 φ_4。

对称叉中的非空子图 $S_3 \subset C_3$中，因此可知，在非空子图$S \subset C$中也有一个权重为 1 且不位于对称叉中的向内端。示例见图 10 。当 $\mu_o^{max} = 1$时，我们得到一个广义之字形覆盖 φ

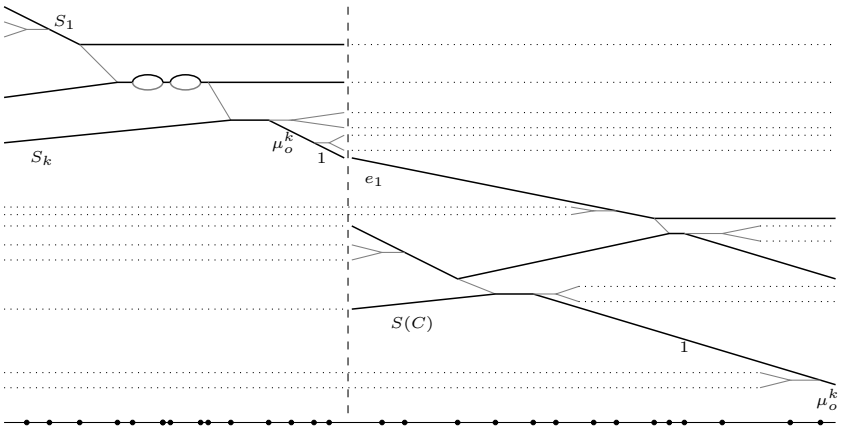


FIGURE 10. 一个粘合后的普适增强覆盖示例。

通过将 φ_1 与 φ_3粘合。令 $n_0 = 2a + \mu_o^{max} - 2$。由于 $m = h - 2a - \mu_o^{max} + 2 > 3$，我们知道 $h = 2a + m + \mu_o^{max} - 2 > n_0 + 3$。因此，根据引理 3.7，类型为（$g$，（$\lambda$，$1^h$），（$\mu$，$1^h$） z）的广义之字形覆盖数量满足

$$|\mathcal{Z}_g((\lambda, 1^h), (\mu, 1^h); \Lambda_{s,0})| \geq |\mathcal{Z}_g((1^{h-n_0}), (1^{h-n_0}); \Lambda_{h-n_0-1,0})|.$$

□

记

$$z_{g,\lambda,\mu}(h) = Z_g((\lambda, (1^h)), (\mu, (1^h)); \Lambda_{s,0}),$$

其中 $2s = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2 + 2h$。

推论4.4。固定一个整数 $g \geq 0$ 以及两个分拆 λ 和 μ，使得 $|\lambda| = |\mu|$ 和$l(\lambda_e) = l(\mu_e) = 0$。则，数量$z_{g,\lambda,\mu}(h)$ 的对数渐近至少为$\ln h$，当 $h \to \infty$时。

证明。如果 h 足够大，根据引理 4.2 和定理 4.3，广义之字形数

$$z_{g,\lambda,\mu}(h) \geq \left\lfloor \frac{h - n_0 - 1}{3} \right\rfloor !,$$

其中 n_0 是由定理 4.3确定的数。因此，我们有

$$\ln z_{g,\lambda,\mu}(h) \geq \ln \left\lfloor \frac{h}{3} - \frac{n_0+1}{3} \right\rfloor !.$$

由于当 $x \to \infty$ 时 $\ln x! \sim \ln x^x$，我们得到 $z_{g,\lambda,\mu}(h)$ 在 $h \to \infty$ 时对数渐近所需的下界。□

5. Lower bounds of real double Hurwitz numbers with triple ramification

当 $s \neq 0$ 和 $t \neq 0$ 时，广义之字形数 $Z_g(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t})$ 取决于分拆序列 $\Lambda_{s,t}$。在本节中，我们引入真之字形数 $Z_g(\lambda, \mu; s, t) \leq Z_g(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t})$，它不依赖于序列 $\Lambda_{s,t}$。

5.1. 真之字形数。 设 $g \geq 0$、$d \geq 1$ 为两个整数，并假设 λ、μ 是 d 的两个分拆。设 s，t 为两个非负整数，使得 $2s+t = l(\lambda)+l(\mu)+2g-2$。选取一个由 $2s+t$ 个点组成的集合 $w = \{w_1, \ldots, w_{2s+t}\} \subset \mathbb{R}$，其元素满足 $w_1 < \cdots < w_{2s+t}$。设 $z = x \sqcup y$ 是由 $x = \{x_1 = (w_1, w_2), \ldots, x_s = (w_{2s-1}, w_{2s})\}$ 和 $y = \{w_{2s+1}, \ldots, w_{2s+t}\}$ 给出的 (s, t)-分布。我们称 $z = x \sqcup y$ 为一个平凡的 (s, t)-分布。

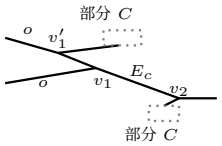


Figure 11. 适当混合广义之字形覆盖的特征边 E_c。

定义 5.1. 设 $z = x \sqcup y$ 是一个平凡的（s，t）分布。类型为（g，λ，μ，$x \sqcup y$）的广义之字形覆盖φ：$C \to T\mathbb{P}^1$ 称为适当混合，如果它满足以下条件。

(1) 存在一条奇数内边 $E_c \subset S$，使得 $C \setminus E_c^\circ$ 由两个连通分支组成。此外，$C \setminus E_c^\circ$ 的一个连通分支的顶点经 φ映射到x，而 $C \setminus E_c^\circ$的另一个连通分支的顶点经 φ映射到 y。内边 E_c 称为特征边。(2) 设 v_1、v_2 是 E_c的两个端点，并假设 E_c 经φ从 v_1 定向到 v_2。存在一个顶点 $v_1' \in C$，使得（v_1'，v_1）经 φ映射到一对 $x_1 \in x$。(3)（v_1'，v_1）处 C 的局部图示如图1(xii)所示。此外，（v_1'，v_1）的两条奇入边是 C 中权重相同的两端。(4) 顶点 v_2 经 φ 映射到 w_{2s+t}，且 v_2 有两条奇入边。（见图 11）。

定义 5.2. 令 $Z_g(\lambda, \mu; s, t)$ 为类型为 $(g, \lambda, \mu, x \sqcup y)$ 的适当混合广义之字形覆盖集合。类型为 $(g, \lambda, \mu, x \sqcup y)$ 的适当混合广义之字形覆盖的数量称为适当之字形数，记作 $Z_g(\lambda, \mu; s, t)$。

5.2. 墙穿越与广义之字形数的下界。 我们研究简单分歧点越过三重分歧点时发生的壁穿越现象。随后，我们证明，对于任意 (s, t)-元组 $\Lambda_{s,t}$，适当之字形数是广义之字形数的下界。

定理 5.3。设 $g \geq 0$ 是一个整数，λ、μ 是两个分拆，且满足 $|\lambda| = |\mu|$。设 s、t 是两个非负整数，满足 $2s + t = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2$。那么，对于任意$(s$、$t)$-元组 $\Lambda_{s,\ t}$，我们有不等式

$$Z_g(\lambda, \mu; s, t) \leq Z_g(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t}).$$

证明。我们假设 $\mathcal{Z}_g(\lambda, \mu; s, t) \neq \emptyset$。为证明我们的结论，只需证明对于任意 (s, t) 元组 $\Lambda_{s,t}$，存在一个单射映射

$$\Phi : \mathcal{Z}_g(\lambda, \mu; s, t) \to \mathcal{Z}_g(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t}).$$

设 $\varphi\colon\ C \to T\mathbb{P}^1 \in \mathcal{Z}_g(\lambda, \mu;\ s, t)$ 是一个类型为 $(g, \lambda, \mu, x \sqcup y)$ 的适当混合广义之字形覆盖。本段中，我们回顾 φ 的一些性质。令 $w = \{w_1, \ldots, w_{2s+t}\} \subset \mathbb{R}$ 为确定平凡 (s, t)-分布 $z = x \sqcup y$ 的集合。令 v_1', v_1 和 v_2 为定义 5.1 中给出的 $\mathcal{C}$ 的顶点。于是 $(v_1', v_1) = \varphi^{-1}(x_1)$ 且 $v_2 = \varphi^{-1}(w_{2s+t})$。根据注 2.5，热带曲线 C 由 φ 定向并赋予权重。C 的定向 $\mathcal{O}$ 在 C 的内部顶点上诱导出一个偏序 $\mathcal{P}$。令 W 为 C 上的权函数。根据注 2.5，覆盖 φ 和 z 在 C 的内部顶点上诱导出全序 $O(C)$。更准确地说，$O(C)$ 是序列 $\varphi^{-1}(x_1) \ldots, \varphi^{-1}(x_s)\ \varphi^{-1}(w_{2s+1}) \ldots, \varphi^{-1}(w_{2s+t})$。全序 $O(C)$ 是偏序 $\mathcal{P}$ 的一个扩张。记 v_y 为 C 的所有内部顶点组成的集合，这些顶点映射到集合 y；记 v_x 为 C 的所有有序对 (v, v') 组成的集合，这些顶点映射到 x。令 $O(C)|_{v_y}$ 和 $O(C)|_{v_x}$ 分别为 $O(C)$ 在 v_y 和 v_x 上的限制全序。注意，$O(C)|_{v_y}$ 是序列 $\varphi^{-1}(w_{2s+1}) \ldots, \varphi^{-1}(w_{2s+t})$，而 $O(C)|_{v_x}$ 是序列 $\varphi^{-1}(x_1) \ldots, \varphi^{-1}(x_s)$。

令 $\Lambda = (\Lambda_1', \ldots, \Lambda_{s+t}')$ 为一个 (s, t)-元组，使得对于 $i = 1, \ldots, t$，$\Lambda_i' = (2, 1, \ldots, 1)$，而对于 $j = t + 1, \ldots, t + s$，$\Lambda_j' = (3, 1, \ldots, 1)$。我们首先考虑 $\Lambda_{s,t} \neq \Lambda$ 的情形。接下来，我们在 C 的内部顶点上构造一个新的全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$，使得 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 是 $\mathcal{P}$ 的扩张，并对应于集合 $\mathcal{Z}_g(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t})$ 中的一个广义之字形覆盖。令 $z' = x' \sqcup y'$ 为一个与 $\Lambda_{s,t}$ 相容的 (s, t)-分布，即 $\Lambda_i = (3, 1, \ldots, 1)$ 当且仅当 $z_i' \in x'$，且 $\Lambda_j = (2, 1, \ldots, 1)$ 当且仅当 $z_j' \in y'$。假设 z' 中的元素满足 $z_1' < \cdots < z_{s+t}'$（也就是说，若 $z_i' = (x_{2i}', x_{2i+1}')$ 是一个对，则 $z_i' < z_j'$ 表示 $x_{2i}' < x_{2i+1}' < z_j'$ 在实数的自然顺序中的关系）。令 $O_1(C) = u_1, \ldots, u_{s+t}$ 为按如下方式确定的全序。若 $z_1' \in x'$，则令 $u_1 = \varphi^{-1}(x_1)$。否则，令 $u_1 = \varphi^{-1}(w_{2s+1})$。假设对于某个 $i \in \{1, \ldots, s+t-1\}$，$u_i$ 已经定义。设 $\varphi^{-1}(x_1) \ldots, \varphi^{-1}(x_{i_0})\ \varphi^{-1}(w_{2s+1}) \ldots, \varphi^{-1}(w_{2s+i_1})$ 已经用于定义 $u_1, \ldots, u_i$。若 $z_{i+1}' \in x'$，我们令 $u_{i+1} = \varphi^{-1}(x_{i_0+1})$；否则，令 $u_{i+1} = \varphi^{-1}(w_{2s+i_1+1})$。通过归纳，我们在 C 的内部顶点上构造出全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$。

现在我们证明，全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 是 $\mathcal{P}$ 的扩张，并且对应于集合 $\mathcal{Z}_g(\lambda, \mu; \Lambda_{s,t})$ 中的一个广义之字形覆盖。由于 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)|_{v_x} = O(C)|_{v_x}$ 和 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)|_{v_y} = O(C)|_{v_y}$，全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 是 $\mathcal{P}|_{v_x}$ 和 $\mathcal{P}|_{v_y}$ 的扩张。根据定义 5.1(2) 和 (4)，若 $i = 1$ 且 $j = t$，则 $\mathcal{P}$ 在集合 $\{\varphi^{-1}(x_i)\ \varphi^{-1}(w_{2s+j})\}$ 上的限制 $\mathcal{P}|_{\{\varphi^{-1}(x_i)\ \varphi^{-1}(w_{2s+j})\}}$ 是一个全序。否则，$\mathcal{P}|_{\{\varphi^{-1}(x_i)\ \varphi^{-1}(w_{2s+j})\}}$ 是空序。设 (s, t)-元组为 $\Lambda_{s,t} = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{s+t})$。由于 $\Lambda_{s,t} \neq \Lambda$，存在一对 (k, l)，使得 $1 \leq k < l \leq s + t$ 且 $\Lambda_k = (3, 1, \ldots, 1)\ \Lambda_l = (2, 1, \ldots, 1)$。根据 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 的构造，我们知道，在全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 中，$\varphi^{-1}(x_1)$ 排在 $\varphi^{-1}(w_{2s+t})$ 之前。因此，$O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 确实是 $\mathcal{P}$ 的扩张。根据备注 5.3]，令 $\varphi_{\Lambda_{s,t}}$：$C \to T\mathbb{P}^1$ 为与全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C)$ 对应的唯一热带覆盖。由于 $\varphi\colon\ C \to T\mathbb{P}^1$ 是一个广义之字形覆盖，因此覆盖 $\varphi_{\Lambda_{s,t}}\colon\ C \to T\mathbb{P}^1$ 也是一个广义之字形覆盖

根据定义。我们通过设定 $\Phi(\varphi)=\varphi_{\Lambda_{s,t}}$ 来定义映射 Φ 。 Φ 的像 $\varphi_{\Lambda_{s,t}}$ 是一个类型为 $(g,\lambda,\mu;z'=x'\sqcup y')$ 的广义之字形覆盖。

在本段中，我们证明 Φ 是一个单射。设 φ_1 : $C_1\to T\mathbb{P}^1$ 和 φ_2 :$C_2\to T\mathbb{P}^1$ 是两个不同构的适当混合广义之字形覆盖。若热带曲线 C_1 与 C_2 之间不存在同构，则像 $\Phi(\varphi_1)$ 和 $\Phi(\varphi_2)$ 显然不同构。假设热带曲线 C_1 与 C_2 之间存在同构。令 v'_y （分别为 v'_x）表示由 φ_1 或 φ_2 映射到 y（分别为 x）的顶点（分别为顶点对）的集合。于是，由 φ_1 诱导的全序 $O_1(C_1)=(O_1(C_1)|_{v'_x},O_1(C_1)|_{v'_y})$ 与由 φ_2 诱导的全序 $O_2(C_2)=(O_2(C_2)|_{v'_x},O_2(C_2)|_{v'_y})$ 不同。根据定义，全序 $O_{\Lambda_{s,t}}(C_1)$ 和 $O_{\Lambda_{s,t}}(C_2)$ 不同。因此，两个覆盖 $\Phi(\varphi_1)$ 和 $\Phi(\varphi_2)$ 不同构。由此，映射 Φ 是一个单射。

当$\Lambda_{s,\ t}=\Lambda$，我们通过考察适当混合广义之字形覆盖的墙穿越行为来定义映射 Φ 。令 E_c 为特征奇边，其端点为 v_1和 v_2 ，如定义5.1 所示（见图11）。令 E 为 C中与 v_1相邻的可收缩边。当边 E_c 和 E 的长度收缩至 0 时，边 E_c 和E 退化为收缩后的热带曲线 v' 中的一个五价顶点 C_0 （见图12）。由于

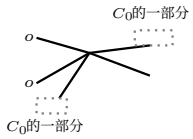


FIGURE 12. 退化曲线 C_0。

C_0 中的每条边也是 C中的边，因此，定向$\mathcal{O}$ 和权函数 W 在 C 上的限制 $\mathcal{O}|_{C_0}$ 和 $W|_{C_0}$ ，分别在 C_0上给出一个定向和一个权函数。 C 的顶点v'_1， v_1， v_2 处的平衡条件蕴含 C_0的 v' 处的平衡条件。令 $v'_y=v_y\setminus\{v_2\}$ 和 $v'_x=v_x\setminus\{(v'_1,\ v_1)\}$。

现在，我们构造一个仅含1价和3价顶点的定向加权图，以解析退化曲线 C_0。设 l_1， l_2 为同一奇数部分的两个向内端

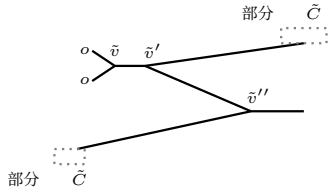


FIGURE 13. 热带曲线 $\tilde{C}$。

与 v' 相邻的 C_0 中的权重。首先，我们将 l_1 和 l_2 替换为向内尾 T，它带有图 4 中第一类对称叉。令 $\tilde{v}$ 表示尾 T 的内部顶点（见图13）。五价顶点 $v'\in C_0$ 被解析为一个四价顶点。接下来，如图1（vii）所示解析该四价顶点，并将两个~解析三价顶点（$\tilde{v}'$、$\tilde{v}''$）视为新图中的一对顶点。令 C 表示经过此过程得到的图（见图13）。在上述过程中，除 E、E_c、(v'_1、v_1) 和 v_2 外， C_0 的所有顶点和边~均保持不变。下面我们证明图 C

由 $\mathcal{O}$ 和 W 定向并赋予权重。端点为 $\tilde{v}'$, $\tilde{v}''$ 的边 E' 从 $\tilde{v}'$ 指向 $\tilde{v}''$，并且是一条可收缩边。注意，向内尾 T 的定向是从其叶子指向 $\tilde{v}'$。受限定向 $\mathcal{O}|_{\tilde{C}\setminus(T\cup E')}$ 和受限权函数 $W|_{\tilde{C}\setminus(T\cup E')}$ 在 $C\setminus(T\cup E')$ 上给出一个定向和一个权函数。图 C 是定向的，并且令 $\mathcal{O}$ 表示 C 上的定向。应用 $\tilde{v}$, $\tilde{v}'$, $\tilde{v}''$ 处的平衡条件后，我们可以确定 C 中与 $\tilde{v}'$ 相邻的两条新内边的权重。因此， C 的每条边都带有权重。令 $\mathcal{P}$ 表示由 $\mathcal{O}$ 确定的 C 内部顶点上的偏序。

我们构造内顶点上的全序 $O_\Lambda(C)$，使得 $O_\Lambda(C)$ 是 $\mathcal{P}$ 的扩张，并对应于集合 $\mathcal{Z}_g(\lambda,\mu;\Lambda)$ 中的一个广义之字形覆盖。令 $O_\Lambda(C)$ 为序列 $O(C)|_{v'_y},\tilde{v},\tilde{v}',\tilde{v}'',O(C)|_{v'_x}$。该序列定义了的内顶点上的全序。注意到 $\mathcal{P}|_{v'_x}=\mathcal{P}|_{v'_x}$ 和 $\mathcal{P}|_{v'_y}=\mathcal{P}|_{v'_y}$，因此我们可以得出，全序 $O_\Lambda(\tilde{C})$ 是 $\tilde{\mathcal{P}}$ 的扩张，如图 13 所示。根据注 5.3]，令 $\tilde{\varphi}\colon \tilde{C}\to T\mathbb{P}^1$ 为与全序 $O_\Lambda(C)$ 对应的唯一热带覆盖。从构造可以很容易看出， $\tilde{\varphi}$ 是类型为 $(g,\lambda,\mu;\Lambda)$ 的广义之字形覆盖。我们定义映射 Φ 如下:

$$\begin{aligned}\Phi:\mathcal{Z}_g(\lambda,\mu;s,t)&\to\mathcal{Z}_g(\lambda,\mu;\Lambda)\\ \varphi&\mapsto\tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

设 $\varphi_1\colon C_1\to T\mathbb{P}^1$ 和 $\varphi_2\colon C_2\to T\mathbb{P}^1$ 是 $\mathcal{Z}_g(\lambda,\mu;s,t)$ 中的两个覆盖，且 $\Phi(\varphi_1)$ 与 $\Phi(\varphi_2)$ 同构。那么热带曲线 C_1 与 C_2同构，并且全序 $O_\Lambda(C_1)$ 与 $O_\Lambda(C_2)$ 相同。由构造和定义 5.1 可知，$C_1\setminus(T_1\cup E_1')$ 与 $C_2\setminus(T_2\cup E_2')$ 同构，且 $O(C_1\setminus(T_1\cup E_1'))=O(C_2\setminus(T_2\cup E_2'))$，其中$T_i$ 和 E_i' 分别是前述构造中的尾部和可收缩边。因此，我们得出 C_1 与 C_2 同构，且 $O(C_1)=O(C_2)$。根据 [32, 注 5.3]，，两个覆盖 φ_1 和 φ_2 同构。因此，当$\Lambda_{s,t}=\Lambda$时，映射 Φ 是单射。至此，证明完成。□

6. Uniform asymptotics

我们运用真之字形数，研究在增加简单分歧点或三重分歧点时，随着次数和亏格均趋于无穷，具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近增长。

6.1. （实）双 Hurwitz 数的一致渐近。本节研究实双 Hurwitz 数对数渐近的一致界，其中次数和亏格均趋于无穷。

引理 6.1。 设 $m\geq 1$ 和 $g\geq 0$ 是两个整数。那么，之字形数

$$Z_g((1^{2m+1}),(1^{2m+1});\Lambda_{0,4m+2g})\geq\frac{(2g)!}{\left((2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2)!\right)^m}\cdot(m!)^4.$$

证明。我们首先在图14中构造一个类型为（g, (1^{2m+1}), (1^{2m+1}) z）的之字形覆盖 φ: $C\to T\mathbb{P}^1$，根据定义5.5]，它被定义为非混合。现在我们来描述图14中所示的这个非混合之字形覆盖 φ： $C\to T\mathbb{P}^1$ 的特征。弦 $S\subset C$ 以黑色表示，其中 S 中的每条边的权重均为1。所有对称环都位于向内尾部上。共有 m个向内尾部和 m个向外尾部，两者的类型均为1、1。 S 中有 m 个弯折点，其峰指向左侧；还有 m 个弯折点

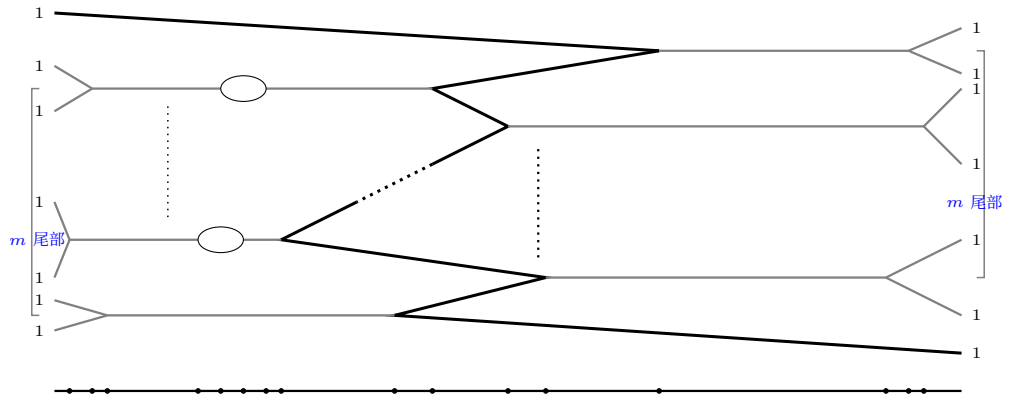


FIGURE 14. 类型为（g、（1^{2m+1}）、（1^{2m+1}） z）的之字形覆盖。

S 中有一些弯折点，其峰指向右侧。假设$z \subset \mathbb{R}$的元素满足$z_1 < \cdots < z_{4m+2g}$。C的内部顶点按如下方式映射到 z：

- m 向内（分别为向外）的对称叉顶点映射到集合 $\{z_1, \ldots, z_m\}$（分别为 $\{z_{3m+2g+1}, \ldots, z_{4m+2g}\}$）；
- m 峰值朝左（分别朝右）的弯折点映射到集合$\{z_{m+2g+1}, \ldots, z_{2m+2g}\}$（分别为 $\{z_{2m+2g+1}, \ldots, z_{3m+2g}\}$）；
- 对称环的顶点被映射到集合 $\{z_{m+1}, \ldots, z_{m+2g}\}$ 上。

根据带余除法，存在唯一的整数 r，使得 $g = \lfloor \frac{g}{m} \rfloor m + r$ 且 $0 \le r < m$。我们选取 r 个向内尾，并在每个向内尾上放置$\lfloor \frac{g}{m} \rfloor + 1$ 个对称环。在剩余的 $m - r$ 个向内尾上，我们分别放置 $\lfloor \frac{g}{m} \rfloor$ 个对称环。

根据注 2.5，热带曲线 C 具有定向和权重。$\mathcal{O}$ 在 C 上的定向在 C 的内部顶点上诱导出一个偏序 $\mathcal{P}$。此外，C 的内部顶点上任何扩展该偏序 $\mathcal{P}$ 的全序，都根据 [32, 注 5.3] 唯一确定一个热带覆盖。为了求具有相同源曲线 C 的热带覆盖数量的下界，我们只需确定扩展偏序 $\mathcal{P}$ 的 C 内部顶点上的全序数量的下界。偏序 $\mathcal{P}$ 在以下四个集合中的每一个上都限制为空序：$W_1 = \varphi^{-1}(\{z_1, \ldots, z_m\})$、$W_2 = \varphi^{-1}(\{z_{m+2g+1}, \ldots, z_{2m+2g}\})$、$W_3 = \varphi^{-1}(\{z_{2m+2g+1}, \ldots, z_{3m+2g}\})$ 和 $W_4 = \varphi^{-1}(\{z_{3m+2g+1}, \ldots, z_{4m+2g}\})$。因此，其中任意一个集合内元素的任意排列都给出 $\cup_{i=1}^{4} W_i$ 上的一个有效全序（如 [32, 引理 5.6] 所证）。令 V_i 为位于一条尾上的对称环顶点的集合，其中 $i = 1$，……，$\min(g, m)$。当偏序 $\mathcal{P}$ 限制在 V_i 上时，它便成为一个全序。令 $v_i \in V_i$ 为 V_i、$i = 1$、……、$\min(g, m)$ 中的一个顶点。如果 $i \neq j$，则偏序 $\mathcal{P}$ 在 $\{v_i, v_j\}$ 上限制为空序。我们假设对于 $i = 1$，……，r，V_i 包含 $2\lfloor \frac{g}{m} \rfloor + 2$ 个顶点，并且对于 $j = r + 1$，……，m，V_j 包含 $2\lfloor \frac{g}{m} \rfloor$ 个顶点。V_1 的顶点可以在序列 1，……，$2g$ 中以 $\binom{2g}{2\lfloor \frac{g}{m} \rfloor + 2}$ 种方式排列。放置好 V_1 的顶点后，V_2 的顶点可以排列为

$\binom{2g-2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor -2}{2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor +2}$ 种方式，剩余的集合 V_i 也依此类推。我们至少得到

$$\begin{aligned}&\binom{2g}{2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor +2}\cdots\binom{2g-2(r-1)\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor -2(r-1)}{2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor +2}\cdot\binom{2g-2r\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor -2r}{2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor}\cdots\binom{2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor}{2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor}\\&=\frac{(2g)!}{\left((2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor +2)!\right)^{r}\cdot\left((2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor)!\right)^{m-r}}\end{aligned}$$

在 $W_5=\varphi^{-1}(z)\setminus(\cup_{i=1}^{4}W_i)$ 上的全序。因此， C的内部顶点至少有 $\frac{(2g)!}{\left((2\left\lfloor \frac{g}{m} \right\rfloor +2)!\right)^{m}}\cdot(m!)^4$ 个全序。 □

定理 6.2. 设 λ 和 μ 是两个分拆，使得 $|\lambda|=|\mu|$ 和 $l(\lambda_o,\mu_o)\leq 2$。那么，存在一个固定整数 N_0，它取决于 λ 和 μ，使得对于任意 $m>N_0$，都有

$$Z_g((\lambda,1^{2m}),(\mu,1^{2m});\Lambda_{0,r_0})\geq Z_g((1^{2m-2N_0+1}),(1^{2m-2N_0+1});\Lambda_{0,r_1}),$$

其中 $r_0=l(\lambda)+l(\mu)+2g-2+4m$, $r_1=4m-4N_0+2g$。

证明. 根据 [32, 命题 5.2]，，存在一个类型为 $(0,(\lambda,1,1),(\mu,1,1);x_1)$ 的之字形覆盖 φ_1 : $C_1\to T\mathbb{P}^1$，其中 x_1 是由 $l(\lambda)+l(\mu)$ 个简单分歧点组成的集合。根据 [32, 命题 5.2], 证明中详述的构造，我们有以下情形。

(1) $l(\lambda_o)=l(\mu_o)=1$: 弦 $S_1\subset C_1$ 有一个权重为 λ_o 的向内端 l_1 和一个权重为 μ_o的向外端 l_1'，二者均不属于任何对称叉。在情形 $\mu_o\neq 1$中，我们构造以下三种类型的之字形覆盖。

- 根据 [32, 命题5.2]，，我们至少有一个类型为$(0,\mu_o,(1^{\mu_o})\ x_2)$的之字形覆盖 φ_2，其中弦有一个权重为 μ_o的向内端 l_2和一个权重为1的向外端 l_2'，二者均不属于任何对称叉。令 $N_0=\frac{\mu_o+1}{2}$。
- 由引理6.1，存在 $Z_g((1^{2m-2N_0+1}),(1^{2m-2N_0+1});\Lambda_{0,r_1})$个类型为$(g,(1^{2m-2N_0+1}),(1^{2m-2N_0+1})\ x_3)$的之字形覆盖 φ_3。此外，每个之字形覆盖的弦都有一个向内端 l_3 和一个向外端 l_3'，二者权重均为1，且不属于任何对称叉。
- 根据 [32, 命题 5.2]，，我们还至少有一个类型为 $(0,(1^{\mu_o})\ \mu_o,\ x_4)$ 的之字形覆盖 φ_4，其弦有一个权重为 1 的向内端 l_4和一个权重为 μ_o的向外端 l_4'，且二者都不属于任何对称叉。

根据引理3.7，令φ_1' 为沿着l_1' 和 l_2将 φ_1 与 φ_2 粘合所得的之字形覆盖。记 φ_2' 为沿着 l_2' 和l_3 将 φ_1' 与 φ_3 粘合所得的之字形覆盖。最后，我们沿着 l_3' 和 l_4将 φ_2' 与 φ_4 粘合。应用引理 3.7，我们得到Z_g个类型为$(g,(\lambda,1^{2m}),(\mu,1^{2m})\ x)$ 的 $(1^{2m-2N_0+1}),(1^{2m-2N_0+1});\Lambda_{0,r_1})$ 之字形覆盖。在情形 $\mu_o=1$ 中，令 $N_0=1$。然后，我们沿着 l_1' 和 l_3 将 φ_1 与之字形覆盖 φ_3 粘合，从而得到所需的不等式。

(2) $l(\mu_o)=2$: 设 $\mu_o=(\mu_o^1,\mu_o^2)$。弦 $S_1\subset C_1$ 有两个向外端 E_1、E_2，它们分别由 μ_o^1 和 μ_o^2 带权，且不属于任何对称叉。在此情形中，所需不等式可用与情形 (1) 类似的论证得到，故此处省略细节。

(3) $l(\lambda_o,\mu_o)=0$: 弦 $S_1\subset C_1$ 有两个向外端 E_1、E_2，二者均由 $1\in(\mu,1,1)$ 带权，且不属于任何对称叉。与情形 (1) 类似的论证蕴含所需不等式，故此处省略细节。

(4) $l(\lambda_o)=2$: 假设 $\lambda_o=(\lambda_o^1,\lambda_o^2)$。弦 $S_1\subset C_1$ 有两个向内端 E_1、E_2，它们分别带权 λ_o^1 和 λ_o^2，且不属于任何对称叉。

与情形 (1) 类似的论证蕴含所需不等式，因此我们在此省略细节。

□

定理 1.4 的证明。根据定理 6.2，存在一个固定整数 N_0，它取决于 λ和 μ，使得对于任意 $m > N_0$，都有

$$z_{\lambda,\mu}(g,m) \geq Z_g((1^{2m-2N_0+1}),(1^{2m-2N_0+1});\Lambda_{0,t}),$$

其中 $t = 4m - 4N_0 + 2g$。由引理 6.1 和引理 A.1，可得

$$\liminf_{g,m\to\infty} \frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,m)}{2g\ln m + 4m\ln m} \geq 1.$$

□

定理 1.7(2) 的证明。由 [17] 中的方程 (3) 可知 $H_g^{\mathbb{C}}(1^d,1^d) \sim \frac{2}{d}!^2\binom{d}{2}^{2g+2d-2}$ 当$g\to\infty$时，因此当 g 趋于无穷时，$\ln H_g^{\mathbb{C}}(1^d,1^d) \sim 2g\ln {}^d(d-1)2$。由[32, 定理 5.10] 的证明可知，$H_g^{\mathbb{C}}((\lambda,1^{2m}),(\mu,1^{2m})) \leq H_g^{\mathbb{C}}(1^{|\lambda|+2m},1^{|\mu|+2m})$。由引理 6.1、引理 A.1(1) 和定理 6.2，可得

$$\liminf_{g\to\infty} \frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,m)}{\ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,m)} \geq \frac{\ln(m-N_0)}{\ln(\frac{(|\lambda|+2m)(|\lambda|+2m-1)}{2})}.$$

□

6.2. **具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近**。设 λ 和 μ 是两个分拆，满足 $|\lambda| = |\mu|$。假设存在一个奇数 $o \neq 1$，它在 λ中至少出现两次。令 $2c(\lambda,\mu) = \big||\lambda_e| + 2o - |\mu_e|\big|$,$\lambda' = \lambda\setminus(\lambda_e,o,o)$ 和 $\mu' = \mu\setminus\mu_e$。我们定义

$$z_{\lambda,\mu}(g,h,m) = Z_g((\lambda,1^{2c+h+2m-1}),(\mu,1^{2c+h+2m-1});s(h),t(m)),$$
$$h_{\lambda,\mu}(g,h,m) = H_g^{\mathbb{C}}((\lambda,1^{2c+h+2m-1}),(\mu,1^{2c+h+2m-1});s(h),t(m)),$$

其中 $s(h) = {}^{l(\lambda')+l(\mu')}{}_2 + c + h$, $t(m) = l(\lambda_e) + l(\mu_e) + 2g - 2 + 4m + 2c$。

定理 6.3。设 $g \geq 0$ 为一个整数，λ 和 μ 为两个分拆，满足 $|\lambda| = |\mu|$。假设存在一个奇整数 $o \neq 1$，它在 λ 中至少出现两次，并且 μ中存在一个偶数 $e \geq 2o$。那么，存在一个固定整数 n_0，它依赖于 λ 和 μ，使得对于任意 $h > n_0 + 3$ 和 $m > 1$，有

$$z_{\lambda,\mu}(g,h,m) \geq |\mathcal{Z}_0((1^{h-n_0}),(1^{h-n_0});\Lambda_{h-n_0-1,0})| \cdot Z_g((1^{2m-1}),(1^{2m-1});\Lambda_{0,4m+2g-4}).$$

证明。设 $\lambda' = \lambda\setminus(\lambda_e,(o,o))$，且 $\mu' = \mu\setminus\mu_e$，则 $l(\lambda'_e) = l(\mu'_e) = 0$。假设$||\lambda_e|+2o-|\mu_e|| = 2c$。共有三种情形：$|\lambda_e|+2o-|\mu_e| = 2c > 0$，$|\lambda_e|+2o-|\mu_e| = -2c < 0$或 $|\lambda_e| + 2o - |\mu_e| = 0$。我们分别考察每种情形，以证明定理6.3 。

情形（1）：$|\lambda_e| + 2o - |\mu_e| = 2c > 0$。我们考虑三对分拆：

- $(\lambda', 1^{2c})$ 和 μ';
- (o, o) 和 $(2o-1, 1)$;
- $(\lambda_e, 2o-1, 1^{2m})$ 和 $(\mu_e, 1^{2m+2c-1})$。

令 n_0 为定理 4.3 对于分拆 $(\lambda', 1^{2c})$ 和 μ'所得到的整数。令 h为满足 $h > n_0 + 3$的正整数。接下来，我们构造三种类型的热带覆盖。

(*a*) 令 $\varphi_1\colon\ C_1 \to T\mathbb{P}^1$ 为由定理 4.3 得到的类型为 $(0, (\lambda', 1^{2c+h}), (\mu', 1^h)\ z_1)$ 的广义之字形覆盖。令 l_1 为非空子图 $S_1 \subset C_1$中一个不属于任何对称叉的权重为 1 的内向端。定理 4.3 的证明保证了这样的端存在（另见引理 4.2 中的构造）。根据定理 4.3，至少存在 $|\mathcal{Z}_0((1^{h-n_0}), (1^{h-n_0}); \Lambda_{h-n_0-1}, 0)|$ 个类型为 $(0, (\lambda', 1^{2c+h}), (\mu', 1^h)\ z_1)$ 的广义之字形覆盖。

(*b*) 一个广义之字形覆盖 $\varphi_2\colon\ C_2 \to T\mathbb{P}^1$ 的类型为 $(0,\ (o,\ o),\ (2o-1,\ 1)\ z_2)$ 在图 15。C_2 的每条边的权重在图 15 中标出。其上的定向

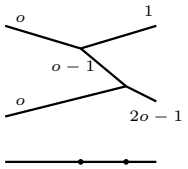


FIGURE 15. 热带覆盖 $\varphi_2\colon\ C_2 \to T\mathbb{P}^1$。

C_2 由覆盖映射 φ_2 诱导，因此权重为 1 的端与权重为 $2o-1$ 的端均定向向外。

(*c*) 我们在此构造之字形覆盖 $\varphi_3\colon\ C_3 \to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(g,\ (\lambda_e,\ 2o-1,\ 1^{2m}),\ (\mu_e,\ 1^{2m+2c-1})\ z_3)$。设 $\varphi_3'\colon\ C_3' \to T\mathbb{P}^1$ 为类型 $(0,\ (\lambda_e,\ 2o-1,\ 1),\ (\mu_e,\ 1^{2c})\ z_3')$ 的之字形覆盖，见图 16。由定理 6.2，至少有 $Z_g((1^{2m-1}),\ (1^{2m-1});\ \Lambda_{0,\ 4m+2g-4})$

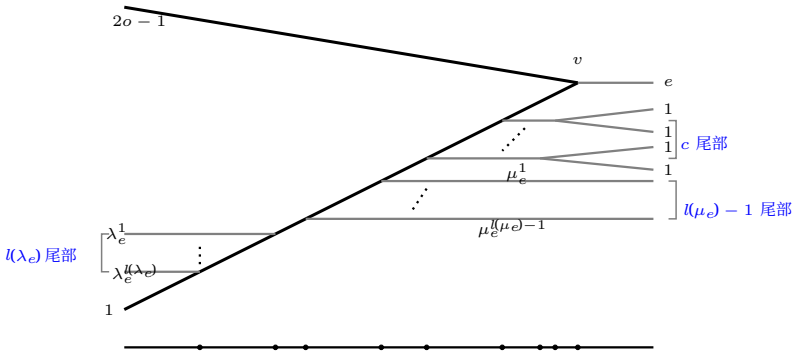


FIGURE 16. 类型为 $(0, (\lambda_e, 2o-1, 1), (\mu_e, 1^{2c})\ z_3')$ 的之字形覆盖。

类型为 $(g、(1^{2m})、(1^{2m})\ z_3'')$ 的之字形覆盖。注意，在此情形下，由定理 6.2 给出的整数 N_0 等于 1。此外，每个这样的之字形覆盖都有一条弦，其两端是权重为 1 的外向端，且不属于任何对称叉。由引理 3.7，我们至少得到 $Z_g((1^{2m-1})、(1^{2m-1});\ \Lambda_{0、\ 4m+2g-4})$ 个之字形覆盖 $\varphi_3\colon\ C_3 \to T\mathbb{P}^1$ 个类型为 $(g、(\lambda_e、\ 2o-1、\ 1^{2m})、(\mu_e、\ 1^{2m+2c-1})\ z_3)$ 的覆盖。

我们首先将 C_2 中权重为 1 的向外端与 $l_1 \subset C_1$ 中权重为 1 的向内端粘合。根据引理 3.7，我们得到一个类型为 $(0, (\lambda', o, o, 1^{2c+h-1}), (\mu', 2o-1, 1^h)\ z_1')$ 的广义之字形覆盖 $\varphi_1'\colon\ C_1 \to T\mathbb{P}^1$。此外，非空子图 $S_1' \subset C_1'$ 中存在一个权重为 $2o-1$ 的向外端。接着，我们将 C_1' 中权重为 $2o-1$ 的向外端与 C_3 的弦中的权重为 $2o-1$ 的端粘合。再次根据引理 3.7，我们知道至少有

$$|\mathcal{Z}_0((1^{h-n_0}), (1^{h-n_0}); \Lambda_{h-n_0-1,0})| \cdot Z_g((1^{2m-1}), (1^{2m-1}); \Lambda_{0,4m+2g-4})$$

类型为 $(g,\ (\lambda,\ 1^r),\ (\mu,\ 1^r);\ s,\ t)$ 的广义之字形覆盖，其中

$$r = 2c + h - 1 + 2m, s = \frac{1}{2}(l(\lambda') + l(\mu')) + c + h,$$
$$t = l(\lambda) + l(\mu) + 2g - 2 + 2r - 2s = l(\lambda_e) + l(\mu_e) + 2g - 2 + 2c + 4m.$$

注意，根据引理 3.7，所有拼接后的广义之字形覆盖都是适当混合的。

情形 $|\lambda_e| + 2o - |\mu_e| = -2c < 0$：我们考虑三对分拆：$\lambda'$ 和 $(\mu',\ 1^{2c})$、$(o,\ o)$ 以及 $(2o-1,\ 1)$、$(\lambda_e,\ 2o-1,\ 1^{2m+2c})$ 和 $(\mu_e,\ 1^{2m-1})$。将定理 n_0 中针对分拆 4.3 得到的整数记为 λ' 和 $(\mu',\ 1^{2c})$。设 h 是满足以下条件的正整数$h > n_0 + 3$。第一种情形下的构造还给出了三种类型的热带覆盖。

- 根据定理 4.3，至少存在 $|\mathcal{Z}_0((1^{h-n_0}),\ (1^{h-n_0});\Lambda_{h-n_0-1,\ 0})|$ 广义之字形覆盖 $\varphi_1\colon C_1 \to T\mathbb{P}^1$，其类型为 $(0,\ (\lambda',\ 1^h),\ (\mu',\ 1^{2c+h})\ z_1)$。
- 类型为 $(0,\ (o,\ o),\ (2o-1,\ 1)\ z_2)$ 的广义之字形覆盖 $\varphi_2\colon C_2 \to T\mathbb{P}^1$。

类型为 $(g,\ (\lambda_e,\ 2o-1,\ 1^{2m+2c}),\ (\mu_e,\ 1^{2m-1})\ z_3)$ 的之字形覆盖 $\varphi_3\colon C_3 \to T\mathbb{P}^1((1^{2m-1}),\ (1^{2m-1});\Lambda_{0,\ 4m+2g-4})$。

由于证明的其余部分与第一种情形的证明几乎相同，为简洁起见，我们省略。

$-|\lambda_e| - 2o + |\mu_e| = 2c = 0$ 的情形可以用类似的方法证明，因此这里省略细节。□

定理 1.6 的证明。根据 [32, 定理 5。10],该数

$$h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,h,m) \le H^{\mathbb{C}}_g(1^{|\lambda|+2c+h+2m-1}, 1^{|\mu|+2c+h+2m-1}).$$

令 $c_0 = n_0+3$，其中 n_0 是定理 6.3 中确定的固定整数。由于 $\ln\ x! \sim x\ln\ x$当 $x \to \infty$时，定理 1.6 可由定理 6.3、引理 6.1 以及 [17] 中的方程（5） 得出。□

定理 1.7(1) 的证明。设 $c_0 = n_0 + 3$，其中 n_0 是定理 6.3中确定的固定整数。由定理 6.3、引理 6.1、引理A.1(1) 以及 [17]中的方程 (3)，我们知道，若 $h > c_0$、$m > 1$ 固定，则有

$$\liminf_{g\to\infty} \frac{\ln z_{\lambda,\mu}(g,h,m)}{\ln h^{\mathbb{C}}_{\lambda,\mu}(g,h,m)} \ge \frac{\ln(m-1)}{\ln(\frac{(|\lambda|+2c+h+2m-1)(|\lambda|+2c+h+2m-2)}{2})}.$$

□

定理 1.3 的证明。由定理 6.3、定理 4.3、引理 4.2 和引理 6.1，数 $z_{\lambda,\mu}(g,h,m) \ge (2g)!\ (\frac{}{(2\lfloor\frac{g}{m-1}\rfloor+2)!)^{m-1}} \cdot (m-1)!^{4\cdot\lfloor\frac{h-n_0+1}{3}\rfloor}$。设 $S(g,h,m)$ 由方程 (7) 定义，则有 $\ln\ z_{\lambda,\mu}(g,h,m) \ge S(g,h,m)$。由引理 A.2 可得 $\lim_{g,h,m\to\infty} S(g,h,m) = 1$。至此，我们完成了定理 1.3 的证明。□

Appendix A. Proofs of two uniform limits

在本附录中，我们证明两个关于一致极限的引理。

引理 A.1。设 m、g 是两个整数，且满足 $m > 1$ 和 $g \ge 0$。那么以下陈述成立。

(1) 若固定 m，且 g 趋于无穷大，则有

$$\ln\left(\frac{(2g)!}{\left((2\lfloor\frac{g}{m}\rfloor+2)!\right)^m}\cdot(m!)^4\right) \sim 2g\ln m.$$

(2) 当 g 和 m 都趋于无穷大时，有

$$\ln\left(\frac{(2g)!}{\left((2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2)!\right)^m}\cdot(m!)^4\right)\sim 2g\ln m+4m\ln m.$$

证明。显然

$$\ln\left(\frac{(2g)!}{\left((2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2)!\right)^m}\cdot(m!)^4\right)=\ln(2g)!+4\ln m!-m\ln\left(2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2\right)!.$$

注意 $\frac{g}{m}+\theta=\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+1$，其中 $0<\theta\leq 1$。根据斯特林公式（例如参见 [37]第 2 页上的公式 (1.4)），我们知道

$$\ln n!=(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\frac{1}{2}\ln 2\pi+o(1).$$

Then

$$\begin{aligned}
&\lim_{g\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{(2g)!}{\left((2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2)!\right)^m}\cdot(m!)^4\right)}{2g\ln m}\\
=&\lim_{g\to\infty}\frac{(2g+\frac{1}{2})\ln(2g)-2g-m\left(2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2+\frac{1}{2}\right)\ln\left(2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2\right)+m\left(2\left\lfloor\frac{g}{m}\right\rfloor+2\right)+O(1)}{2g\ln m}\\
=&\lim_{g\to\infty}\frac{2g\ln(2g)-(2g+2m\theta)\ln\left(\frac{2g}{m}+2\theta\right)+\frac{1}{2}\ln(2g)-\frac{m}{2}\ln\left(\frac{2g}{m}+2\theta\right)+2m\theta+O(1)}{2g\ln m}\\
=&\lim_{g\to\infty}\frac{2g\ln(2g)-2g\ln\left(\frac{2g}{m}+2\theta\right)}{2g\ln m}+0\\
=&1+\lim_{g\to\infty}\frac{\ln\frac{2g}{m}-\ln\left(\frac{2g}{m}+2\theta\right)}{\ln m}\\
=&1+\lim_{g\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{1+\frac{2m\theta}{2g}}}{\ln m}\\
=&1.
\end{aligned}$$

我们已经完成了命题 (1) 的证明。

假设命题 (2) 中的结论不成立。那么存在一个正实数 δ 和两个序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{i\to\infty}g_i=\lim_{i\to\infty}m_i=\infty$ 且

$$\left|\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}-1\right|\geq\delta,\quad\forall i\in\mathbb{N}^+,$$

其中 $S(g_i,\ m_i)=\frac{(2g_i)!}{\left((2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2)!\right)^{m_i}}\cdot(m_i!)^4$。

于是我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}=&\frac{\ln(2g_i)!+4\ln m_i!-m_i\ln\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2\right)!}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}\\
=&\frac{\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln m_i}+\frac{4\ln m_i!}{4m_i\ln m_i}\frac{4m_i}{2g_i}-\frac{m_i\ln\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2\right)!}{2g_i\ln m_i}}{1+\frac{4m_i}{2g_i}}.
\end{aligned}$$

如果 $\{\frac{g_i}{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 无界，则不妨取一个子序列，假设 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{g_i}{m_i}=\infty$。于是我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}\\=&\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln m_i}+\frac{4\ln m_i!}{4m_i\ln m_i}\frac{4m_i}{2g_i}-\frac{m_i\ln\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2\right)!}{2g_i\ln m_i}\right)\\=&\lim_{i\to\infty}\frac{\ln(2g_i)!-m_i\ln\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2\right)!}{2g_i\ln m_i}.\end{aligned}$$

由斯特林公式，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}\\=&\lim_{i\to\infty}\frac{(2g_i+\frac12)\ln(2g_i)-m_i\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2+\frac12\right)\ln\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2\right)+O(g_i)+O(\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor)}{2g_i\ln m_i}\\=&\lim_{i\to\infty}\frac{2g_i\ln(2g_i)-(2m_i\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2m_i)\ln\left(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2\right)}{2g_i\ln m_i}.\end{aligned}$$

注意 $\frac{g_i}{m_i}+\theta_i=\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+1$，其中 $0<\theta_i\leq1$。于是

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}\\=&\lim_{i\to\infty}\frac{2g_i\ln(2g_i)-(2g_i+2m_i\theta_i)\ln\left(\frac{2g_i}{m_i}+2\theta_i\right)}{2g_i\ln m_i}\\=&\lim_{i\to\infty}\left(\frac{2g_i\ln(2g_i)-2g_i\ln\left(\frac{2g_i}{m_i}+2\theta_i\right)}{2g_i\ln m_i}+\frac{2m_i\theta_i\ln\left(\frac{2g_i}{m_i}+2\theta_i\right)}{2g_i\ln m_i}\right)\\=&1+\lim_{i\to\infty}\frac{\theta_i\ln\left(\frac{2g_i}{m_i}+2\theta_i\right)}{\frac{g_i}{m_i}\ln m_i}\\=&1.\end{aligned}$$

这是一个矛盾。

若 $\{\frac{g_i}{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 有界，则至多取一个子序列，我们可以假设 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{g_i}{m_i}=b$对某个$b\in[0,\infty)$。我们首先考虑情形 $b\in(0,\infty)$。在此情形下，我们有 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{g_i}{\ln m_i}=1$以及 $\lim\limits_{i\to\infty}\left(\frac{m_i}{\ln(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i}\right\rfloor+2)!}2g_i\ln m_i\right)=0$。于是

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}=\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln g_i}\frac{\ln g_i}{\ln m_i}+\frac{4\ln m_i!}{4m_i\ln m_i}\frac{4m_i}{2g_i}}{1+\frac{4m_i}{2g_i}}=1.$$

最后一个等式源于以下事实：当 $x\to\infty$ 时，$\ln x!\sim x\ln x$。这是一个矛盾。

现在考虑情形 $b=0$。不妨取一个子序列，使得 $g_i < m_i$。那么$S(g_i,m_i) = \frac{(2g_i)!}{2^{m_i}\cdot (m_i!)^4}$。直接计算可得

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\ln S(g_i,m_i)}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\ln(2g_i)!+4\ln m_i!-m_i\ln 2}{2g_i\ln m_i+4m_i\ln m_i}$$
$$= \lim_{i\to\infty}\frac{\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln g_i}\frac{\ln g_i}{\ln m_i}\frac{2g_i}{4m_i}+\frac{4\ln m_i!}{4m_i\ln m_i}-\frac{m_i\ln 2}{4m_i\ln m_i}}{\frac{2g_i}{4m_i}+1} = 1.$$

这是一个矛盾。因此，我们已完成命题 (2) 的证明。 □

引理 A.2. 设

$$S(g,h,m) := \frac{\ln(2g)! + 4\ln(m-1)! - (m-1)\ln(2\underbrace{\left\lfloor\frac{g}{m-1}\right\rfloor}+2)! + \ln\left\lfloor\frac{h}{3}-\frac{n_0+1}{3}\right\rfloor!}{2g\ln m+4m\ln m+\frac{h}{3}\ln h}. \tag{7}$$

那么 $\lim_{g,h,m\to\infty} S(g,h,m) = 1$。

证明。 引理A.2的证明与引理 A.1(2) 的证明类似。假设结论不成立。那么存在一个正实数 δ 以及三个序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty},\{m_i\}_{i=1}^{\infty},\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 $\lim_{i\to\infty} g_i = \lim_{i\to\infty} m_i = \lim_{i\to\infty} h_i = \infty$ 并且

$$|S(g_i,h_i,m_i)-1|\geq\delta,\quad \forall i\in\mathbb{N}^+.$$

我们令

$$a(h) = \frac{\ln\left\lfloor\frac{h}{3}-\frac{n_0+1}{3}\right\rfloor!}{\frac{h}{3}\ln h},\qquad b(h,m) = \frac{\frac{h}{3}\ln h}{2m\ln m},$$

$$S(g,m) = \frac{\ln(2g)!}{2g\ln g}\frac{\ln g}{\ln m}+\frac{4\ln(m-1)!}{4m\ln m}\frac{4m}{2g}-\frac{(m-1)\ln(2\left\lfloor\frac{g}{m-1}\right\rfloor+2)!}{2g\ln m}.$$

Then

$$S(g_i,h_i,m_i) = \frac{S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{4m_i}{2g_i}a(h_i)}{1+\frac{4m_i}{2g_i}+b(h_i,m_i)\frac{m_i}{g_i}}+a(h_i).$$

若 $\{\frac{g_i}{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 无界，则取一个子序列后，不妨设 $\lim_{i\to\infty}\frac{g_i}{m_i}=\infty$。我们有

$$\lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}(S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{4m_i}{2g_i}a(h_i))$$
$$= \lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}\left(\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln m_i}-\frac{(m_i-1)\ln(2\left\lfloor\frac{g_i}{m_i-1}\right\rfloor+2)!}{2g_i\ln m_i}\right)-1.$$

根据引理 A.1证明中的计算，我们知道

$$\lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}(S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{4m_i}{2g_i}a(h_i)) = 0.$$

由于 $1+\frac{4m_i}{2g_i}+b(h_i,m_i)\frac{m_i}{g_i}\geq 1$，我们得到

$$\lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}S(g_i,h_i,m_i) = \lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}\frac{S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{4m_i}{2g_i}a(h_i)}{1+\frac{4m_i}{2g_i}+b(h_i,m_i)\frac{m_i}{g_i}}+1 = 1.$$

这是一个矛盾。

若 $\{\frac{g_i}{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 有界，则不妨取一个子序列，假设 $\lim_{i\to\infty}\frac{g_i}{m_i}=c\in[0,\infty)$。在 $c\neq 0$ 的情形下，有 $\lim_{i\to\infty}\frac{g_i}{\ln m_i}=1$。因此，我们得到

$$\lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}(S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{4m_i}{2g_i}a(h_i))=1+\frac{2}{c}-0-1-\frac{2}{c}=0.$$

由 $1+\frac{4m_i}{2g_i}+b(h_i,m_i)^{\frac{m_i}{g_i}}\geq 1$ 可得 $\lim_{g_i,\ h_i,\ m_i\to\infty}S(g_i,\ h_i,\ m_i)=1$。这与假设矛盾。

在情形 $c=0$ 中，取一个子序列后，我们可以假设对所有 i，都有 $g_i<m_i-1$。于是

$$\begin{aligned}S(g_i,h_i,m_i)=&\frac{\ln(2g_i)!+4\ln(m_i-1)!-(m_i-1)\ln 2+\ln\left\lfloor\frac{h_i}{3}-\frac{n_0+1}{3}\right\rfloor!}{2g_i\ln m+4m_i\ln m+\frac{h_i}{3}\ln h_i}\\=&\frac{\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln g_i}\frac{2g_i\ln g_i}{4m_i\ln m_i}+\frac{4\ln(m_i-1)!}{4m_i\ln m_i}-\frac{(m_i-1)\ln 2}{4m_i\ln m_i}+\frac{\ln\left\lfloor\frac{h_i}{3}-\frac{n_0+1}{3}\right\rfloor!}{\frac{h_i}{3}\ln h_i}\frac{\frac{h_i}{3}\ln h_i}{4m_i\ln m_i}}{\frac{\frac{h_i}{3}\ln h_i}{4m_i\ln m_i}+1+\frac{2g_i\ln m_i}{4m_i\ln m_i}}.\end{aligned}$$

Let

$$a(h_i)=\frac{\ln\left\lfloor\frac{h_i}{3}-\frac{n_0+1}{3}\right\rfloor!}{\frac{h_i}{3}\ln h_i},\qquad b(h_i,m_i)=\frac{\frac{h_i}{3}\ln h_i}{4m_i\ln m_i}$$

$$S(g_i,m_i)=\frac{\ln(2g_i)!}{2g_i\ln g_i}\frac{2g_i\ln g_i}{4m_i\ln m_i}+\frac{4\ln(m_i-1)!}{4m_i\ln m_i}-\frac{(m_i-1)\ln 2}{4m_i\ln m_i}.$$

Then

$$S(g_i,h_i,m_i)=\frac{S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{g_i}{2m_i}a(h_i)}{1+\frac{g_i}{2m_i}+b(h_i,m_i)}+a(h_i).$$

注意到

$$\lim_{g_i,h_i,m_i\to\infty}(S(g_i,m_i)-a(h_i)-\frac{g_i}{2m_i}a(h_i))=0+1-0-1-0=0.$$

我们由 $1+\frac{g_i}{2m_i}+b(h_i,\ m_i)\geq 1$ 得到 $\lim_{g_i,\ h_i,\ m_i\to\infty}S(g_i,\ h_i,\ m_i)=1$。这再次导致矛盾。证明完毕。□

Acknowledgements

第一作者感谢 Ilia Itenberg 在其 2020年 访问 IMJ-PRG 期间，指出了加入非简单分支点时实双重 Hurwitz 数渐近行为的问题。作者感谢 Di Yang 提出双 Hurwitz 数一致渐近的问题，并感谢其提供的宝贵讨论和建议。作者感谢 Chenglang Yang 和 Zhiyuan Wang 的有益讨论，也感谢 Jianfeng Wu 仔细阅读稿件。Y. Ding 获得了国家自然科学基金委员会（编号 12101565）和河南省自然科学基金（编号 212300410287）的资助。H. Liu 获得了国家自然科学基金委员会（编号 12171439）的资助。

References

[1] A. Aggarwal。交数和主层体积的大亏格渐近。 *Invent. Math.*,226(3):897–1010, 2021. [2] B. Bertrand、E. Brugall ´ *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 125 157 171, 2011
e 和 G. Mikhalkin。热带开放 Hurwitz 数。 , : – .

[3] G. Borot、N. Do、M. Karev、D. Lewa ´nski 和 E. Moskovsky。双 Hurwitz 数：多项式性、拓扑递归与交叉理论。 *Math. Ann.*, 387(1-2):179–243, 2023. [4] T. Budzinski 和 B. Louf。高亏格均匀三角剖分的局部极限。 *Invent. Math.*, 223 1 1( ): –47, 2021. [5] N. Caporaso、L. Griguolo、M. Mari ¯no、S. Pasquetti 和 D. Seminara。相变、双重标度极限与拓扑弦。 *Phys. Rev. D*, 75(4):046004, 24, 2007. [6] R. Cavalieri、P. Johnson 和 H. Markwig。热带 Hurwitz 数。 *J. Algebraic Combin.*, 32 2 241( ): –265, 2010. [7] R. Cavalieri、P. Johnson 和 H. Markwig。双 Hurwitz 数的壁穿越。 *Adv. Math.*, 228 4 1894( ): –1937, 2011. [8] R. Cavalieri 和 E. Miles。 *Riemann surfaces and algebraic curves: A first course in Hurwitz theory*, *London Mathematical Society Student Texts*第 87 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2016。[9] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf 和 A. Zorich。psi类交叉数的一致下界。 *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 16:Paper No. 086, 13 pp, 2020. [10] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf 和 A. Zorich。Masur-Veech 体积、简单闭测地线的频率与曲线模空间的交数。 *Duke Math. J.*, 170(12):2633– 2718, 2021.[11] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf 和 A. Zorich。随机方砖曲面与随机多曲线的大亏格渐近几何。 *Invent. Math.*, 230(1):123–224, 2022. [12] Y. Ding。实双重 Hurwitz 数的下界。 *J. Algebraic Combin.*, 57 546, 2023 2 525( ): – .[13] Y. Ding 和 何强。实单调双重 Hurwitz 数的渐近。 *J. Combin. Theory* , : . *Ser. A* 204 105848, 49, 2024
[14] Y. Ding、李奎、H. Liu 和 严东风。具有 3 *ArXiv:* 环的 *2303.03671v1* 2023
实双重 Hurwitz 数。 , .[15] Y. Ding、李奎、H. Liu 和 严东风。具有三重分歧的实双重 Hurwitz 数的一致渐近 I: 热带对应。 *ArXiv: 2303.03671*, 2023. [16] N. Do 和 D. Lewa ´ *Adv. Math.* 403 2022
nski。关于双 Hurwitz 数的 Goulden-Jackson-Vakil 猜想。 , :Paper No. 108339, 31 pp, .[17] B. Dubrovin、D. Yang 和 D. Zagier。经典 Hurwitz 数及相关组合学。 *Mosc.* , ( ): – *Math. J.* 17 4 601 633, 2017
. [18] T. Ekedahl 、 S. Lando 、 M. Shapiro 和 A. Vainshtein。Hurwitz 数与曲线模空间上的交数。 *Invent. Math.*, 146(2):297–327, 2001. [19] I. P. Goulden、D. M. Jackson 和 R. Vakil。探寻双 Hurwitz 数的几何。*Adv. Math.*, 198(1):43–92, 2005. [20] M. Guay-Paquet、H. Markwig 和 J. Rau。具有实正分支点的实双重 Hurwitz 数的组合学。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2016(1):258–293, 2016. [21] J. Guo 和 D. Yang。psi类交叉数的大亏格渐近。 *Math. Ann.*, 388 1 61( ): –97, 2024. [22] A. Hurwitz。关于具有给定分歧点的黎曼曲面。 *Math. Ann.*, 39(1):1– 60, 1891.[23] I. Itenberg、V. Kharlamov 和 E. Shustin。Welschinger 不变量与 Gromov-Witten 不变量的对数等价。 *Russian Math. Surveys*, 59(6):1093–1116, 2004. [24] I. Itenberg、V. Kharlamov 和 E. Shustin。Welschinger 不变量与 Gromov-Witten 不变量对数等价的新情形。 *Proc. Steklov Inst. Math.*, 258(1):65–73, 2007. [25] I. Itenberg、V. Kharlamov 和 E. Shustin。实节点德尔佩佐曲面的相对枚举不变量。 *Selecta Math. (N.S.)*, 24(4):2927–2990, 2016. [26] I. Itenberg、V. Kharlamov 和 E. Shustin。重新审视 Welschinger 不变量。载于 M. Andersson、J. Boman、C. Kiselman、P. Kurasov 和 R. Sigurdsson 编, *Analysis Meets Geometry. Trends* , 第 – *in Mathematics* 239 260 ¨ 2017
页。Birkhuser，查姆，.[27] I. Itenberg 和 D. Zvonkine。实多项式的 Hurwitz 数。 *Comment. Math. Helv.*, 93 3 441( ): –474, 2018. [28] X. Li。Hurwitz 数的高效递推公式。 *in preparation*, 2024. [29] H. Markwig 和 J. Rau。热带实 Hurwitz 数。 *Math. Z.*, 281(1-2):501–522, 2015. [30] A. Okounkov。Hurwitz 数的 Toda 方程。 *Math. Res. Lett.*, 7(4):447–453, 2000.

[31] A. Okounkov 和 R. Pandharipande。格罗莫夫–维滕理论、Hurwitz 理论与完备循环。*Ann. of Math. (2)*，163(2):517–560，2006年。[32] J. Rau。实双重 Hurwitz 数的下界与渐近。 *Math. Ann.*，375(1-2):895–915，2019年。[33] S. Shadrin、M. Shapiro 和 A. Vainshtein。零亏格双 Hurwitz 数的腔室行为。 *Adv. Math.*，217(1):79–96，2008年。[34] E. Shustin。关于德尔佩佐曲面的高亏格 Welschinger 不变量。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，16:6907–6940，2015年。[35] J.-Y. Welschinger。实辛四维流形的不变量与实枚举几何中的下界。 *Invent. Math.*，162(1):195–234，2005年。[36] J.-Y. Welschinger。实代数凸三维流形中实有理曲线的旋量态与枚举不变量。 *Duke Math. J.*，127(1):89–121，2005年。[37] R. Wong。 *Asymptotic approximations of integrals*。Academic Press，波士顿，1989年；2001年由 SIAM（费城，宾夕法尼亚州）重印。[38] C. Yang。变化的亏格下简单 Hurwitz 数与单调 Hurwitz 数的结构。 *arXiv:2503.01920*，27页，2025年。

School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou, 450001, China
Email address: yqding@zzu.edu.cn*Email address*: likui@zzu.edu.cn*Email address*: liuhuan@zzu.edu.cn*Email address*: yandongfeng@zzu.edu.cn