arXiv:2602.04201v1 [cs.LG] 4 Feb 2026

从稀疏传感器到连续场：用于时空重建的 STRIDE

YanjieTong、Peng Chen佐治亚理工学院计算科学与工程学院，美国佐治亚州亚特兰大，邮编 30332 {ytong80, pchen402}@gatech.edu

摘要

从稀疏点传感器测量重建高维时空场，是学习参数化偏微分方程动力学的一项核心挑战。现有方法往往难以在不同轨迹和参数设置之间实现泛化，或者依赖与离散化绑定的解码器，无法自然地迁移到不同网格和分辨率。我们提出 STRIDE（时空循环隐式解码器），这是一种两阶段框架：它通过时间编码器将一段短时间窗口内的传感器测量映射为潜在状态，再通过调制隐式神经表示（INR）解码器，在任意查询位置重建场。采用傅里叶多分量多层神经网络（FMMNN）作为隐式神经表示骨干网络，可提升对复杂空间场的表征能力，并比基于正弦函数的隐式神经表示实现更稳定的优化。我们提供了有条件的理论依据：在低维参数化不变集上，若点测量满足稳定延迟可观测性，则重建算子可经由有限维嵌入进行因子分解，因此 STRIDE 类架构是自然的近似器。在涵盖混沌动力学和波传播的四项具有挑战性的基准测试中，实验结果表明，STRIDE 在极度稀疏的传感条件下优于强基线方法，支持超分辨率，且对噪声保持稳健。

1 引言

许多科学与工程系统由非线性偏微分方程（PDEs）支配，并在依赖于参数（例如外力、几何形状、材料属性或初始条件/边界条件）的高维时空场上演化 [1, 2]。然而在实际应用中，测量通常仅限于稀疏点传感器，因此恢复完整场就构成了一个病态的状态估计问题 [3]。尽管高保真求解器能够生成准确的轨迹，但其计算成本限制了在不同参数设置下进行重复模拟以及实时部署的可行性 [4]。这些限制促使人们开发学习型代理模型，从稀疏测量中重建完整的时空状态，同时能够在不同轨迹以及（可能未观测到的）参数之间实现泛化。

现有将稀疏观测映射到完整状态的数据驱动方法大致分为两类：仅利用同时测量进行重建的方法 [5, 6], , 以及显式利用时间历史的方法（例如时滞嵌入或循环状态估计器） [7, 8, 9, 10]。前者在映射近似瞬时的情况下表现良好，但在参数化或混沌状态下可能面临困难，因为相同的传感器快照可能对应多个潜在状态。后者通过使用较短的观测窗口来减少这种歧义，呼应了经典的嵌入与可观测性思想 [11, 12], , 但许多现有设计仍依赖于与固定离散化绑定的解码器，或其参数数量随输出维度扩展，从而限制了其向不规则网格和不同分辨率的迁移能力。

一种互补方法是使用隐式神经表示（INR）来表示场，即将坐标映射到场的连续映射，可在任意位置进行查询，因此能够自然地支持不规则网格和超分辨率。在隐式神经表示骨干网络中，SIREN 凭借正弦激活函数展现出强大的表达能力 [13]。在偏微分方程学习中，调制隐式神经表示（例如 FiLM调制的SIREN）已用于算子学习和时空预测[14, 15, 16]。尽管 SIREN 等正弦激活网络具有很强的表达能力，但在对高频内容进行建模时，往往会遇到具有挑战性的优化

地形。为了解决这一问题，近期提出了傅里叶多分量多层神经网络（FMMNN），以增强优化稳定性，并改善对细尺度空间结构的表示 [17]。

我们提出 STRIDE（时空循环隐式解码器），这是一个将加窗传感器历史与连续解码相结合的两阶段框架。STRIDE 通过时间编码器（例如长短期记忆网络 [18], 或 Mamba [19]等替代方案）将短观测窗口映射为低维潜在状态，并利用调制 INR 解码器在任意查询位置重建场。我们的默认实例采用带有轻量平移调制的 FMMNN，从而实现分辨率不变重建，并相对于基于正弦的骨干网络提高训练稳定性。我们进一步给出条件性理论依据：在有效低维参数化不变集上的点测量满足稳定延迟可观测性时（Mañé型投影结果 [20]），重建算子可通过有限维嵌入进行分解，从而使 STRIDE类架构成为自然的逼近器。

我们的贡献：

- **两阶段从稀疏传感器到连续场重建**。 我们引入 STRIDE，它将窗口编码器（历史/延迟信息）与调制 INR 解码器相结合，在多轨迹、参数化偏微分方程设定下，从稀疏点传感器重建连续时空场，且不假设参数在推理时可被观测。
- **与离散化和分辨率无关的解码**。 STRIDE通过基于坐标的隐式神经表示进行解码，并采用随机空间采样进行训练，因此适用于不规则网格，还可通过在任意位置查询解码器实现超分辨率。
- **借助 FMMNN 实现稳定且强大的 INR 解码**。 我们开发了一种基于 FMMNN 并采用平移调制的 INR 解码器设计。与调制 SIREN 骨干网络相比，该设计能够更好地表示空间场，并具有更优的训练动力学。
- **有条件的理论依据**。 在有效低维参数不变集上满足稳定延迟可观测性假设的条件下，我们对重建算子的存在性和稳定性进行了形式化论证，并证明该算子可分解为经过有限维嵌入的映射，从而为 STRIDE 类逼近提供支持。
- **广泛的实证评估**。 我们在四个具有挑战性的数据集（混沌动力学、流体流动、浅水流和地震波传播）上对 STRIDE 进行了基准测试，并针对传感器预算、窗口长度、噪声、空间分辨率和架构选择（时间编码器和隐式神经表示骨干网络）开展了消融实验。

论文结构如下：第 2 节介绍 STRIDE，第 3 节基于延迟可观测性给出理论依据，第 4 节报告主要实验结果，第 5 节总结局限性并展望未来方向。

2 方法：STRIDE

本节介绍 STRIDE，这是一个两阶段框架：(i) 利用时间编码器将稀疏点传感器测量的短期历史编码为潜在状态；(ii) 通过调制隐式神经表示（INR）将该潜在状态解码为连续空间场。我们将介绍观测模型、两阶段映射、架构实现以及训练过程。

2.1 设置与观测模型

考虑空间域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d_\xi}$ 上由参数 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{d_\mu}$索引的参数化 时空动力系统（例如偏微分方程（PDE））。对于固定的 $\boldsymbol{\mu}$，离散时间索引 t 处的状态是一个向量值场 $\boldsymbol{x}_t(\cdot;\boldsymbol{\mu}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d_x}$；我们将其逐点值写作 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\ t;\boldsymbol{\mu}) := \boldsymbol{x}_t(\boldsymbol{\xi};\ \boldsymbol{\mu})$，其中 $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$。

我们通过位于 $\{\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(N_s)}\} \subset \Omega$ 的 N_s 点传感器以及固定的通道投影 Π 来观测系统： $\mathbb{R}^{d_x} \to \mathbb{R}^{d_o}$ 选择观测到的 d_o 通道。时刻 t 的测量向量为

$$\boldsymbol{y}_t(\boldsymbol{\mu}) := \big(\Pi\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, t; \boldsymbol{\mu}), \ldots, \Pi\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}^{(N_s)}, t; \boldsymbol{\mu})\big) \in \mathbb{R}^p, \quad p = N_s d_o. \tag{1}$$

给定一个观测窗口 $\boldsymbol{y}_{t-k:t}(\boldsymbol{\mu}) = \{\boldsymbol{y}_{t-k}(\boldsymbol{\mu}) \ldots, \boldsymbol{y}_t(\boldsymbol{\mu})\}$ 以及一个查询点 $\boldsymbol{\xi}$，我们的目标是在时间 t重建完整场，即针对任意 $\boldsymbol{\xi}$，在整个 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$上均匀预测 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\ t;\boldsymbol{\mu})$。为便于阅读，我们通常省略对 $\boldsymbol{\mu}$的依赖。在推理时，$\boldsymbol{\mu}$ 不假定已被观测，STRIDE 仅将测量窗口$\boldsymbol{y}_{t-k:t} = \{\boldsymbol{y}_{t-k}, \ldots, \boldsymbol{y}_t\}$ 作为输入。

2.2 两阶段架构

STRIDE 由一个时间（窗口）编码器 $\mathcal{G}$ 和一个调制 INR 解码器 $\mathcal{F}$ 组成：前者将观测窗口 $\boldsymbol{y}_{t-k:t}$ 映射为潜在状态 $\boldsymbol{z}_t \in \mathbb{R}^{d_z}$，后者将查询位置 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{z}_t$ 映射为重建的场值。

在第一阶段，编码器 $\mathcal{G}$ 处理固定窗口 $\boldsymbol{y}_{t-k:t}$ 内的稀疏传感器测量值，并输出 $\boldsymbol{z}_t$。当 $\mathcal{G}$ 被实例化为循环模型（例如，长短期记忆网络/门控循环单元）时，它自回归地演化隐藏状态 $\boldsymbol{h}_i \in \mathbb{R}^{d_z}$，我们将最终隐藏状态作为潜在状态。具体而言，

$$\boldsymbol{h}_i = g(\boldsymbol{h}_{i-1}, \boldsymbol{y}_i), \quad i = t-k, \ldots, t, \quad \boldsymbol{h}_{t-k-1} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

其中 g 是循环更新。对于早期时刻，我们用零填充缺失的历史观测，即 $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{0}$（当 $i \leq 0$时）。一般而言（包括非循环窗口编码器），我们记为 $\boldsymbol{z}_t = \mathcal{G}(\boldsymbol{y}_{t-k:t})$。

在第二阶段，调制 INR 解码器 $\mathcal{F}$ 接收查询位置 $\boldsymbol{\xi}$ 和潜在状态 $\boldsymbol{z}_t$，并输出相应的场值。具体而言，我们将 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \in \mathbb{R}^{d_x}$ 重建为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_t), \tag{3}$$

其中 $\mathcal{F}$ 被实现为具有共享参数的基于坐标的隐式神经表示，并带有由小型超网络根据 $\boldsymbol{z}_t$ 预测的轻量级平移调制 （FiLM）。该设计通过在任意一组查询点上评估 $\mathcal{F}$，从而在推理时支持不规则网格和任意分辨率。

2.3 架构选择

时间编码器 $\mathcal{G}$。 受 SHRED [7] 和 SHRED-ROM [8], 的启发，我们将 LSTM 作为默认的时间模型。STRIDE 不受此选择的限制，我们还评估了包括 GRU [21]和 Mamba [19]在内的其他循环编码器。为隔离循环机制的作用，我们还考虑了非循环窗口编码器，例如应用于拼接观测的 MLP，以及针对观测序列的多头自注意力编码器。

INR解码器 $\mathcal{F}$。 我们研究了两种调制隐式神经表示骨干网络：SIREN [13] 和 FMMNN [17]。标准 SIREN 架构定义为

$$f_\theta(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{W}_L \left(\sigma_{L-1} \circ \sigma_{L-2} \circ \cdots \circ \sigma_0(\boldsymbol{\xi})\right) + \boldsymbol{b}_L, \text{ with } \sigma_i\left(\boldsymbol{\eta}_i\right) = \sin\left(\omega_0 \left(\boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{b}_i\right)\right) \tag{4}$$

其中， $\theta = \{\boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^{L}$ 为可训练参数， ω_0 为控制频率带宽的超参数。为了基于潜在状态 $\boldsymbol{z}$对隐式神经表示进行条件化，我们采用 FiLM式平移调制 [14], ，这提供了一种轻量级的条件化机制。所得的调制SIREN为

$$f_{\theta,\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{W}_L \left(\sigma_{L-1} \circ \sigma_{L-2} \circ \cdots \circ \sigma_0(\boldsymbol{\xi})\right) + \boldsymbol{b}_L, \text{ with } \sigma_i\left(\boldsymbol{\eta}_i\right) = \sin\left(\omega_0 \left(\boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{\phi}_i\right)\right) \tag{5}$$

其中， θ 是共享参数， $\phi = \{\boldsymbol{\phi}_i\}_{i=0}^{L-1}$ 是通过（通常为线性的）超网络从 $\boldsymbol{z}$ 映射得到的平移调制。我们遵循 FiLM 风格调制的标准算子学习实现（例如，15）。

傅里叶多分量多层神经网络（FMMNN）可以像 SIREN 一样用作隐式神经表示骨干网络，同时为高频结构提供更优的优化行为 [17]。

$$f_\theta(\boldsymbol{\xi}) = \sigma_L \circ \sigma_{L-1} \circ \cdots \circ \sigma_1(\boldsymbol{\xi}), \text{ with } \sigma_i\left(\boldsymbol{\eta}_i\right) = \boldsymbol{A}_i \sin\left(\boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{b}_i\right) + \boldsymbol{c}_i \tag{6}$$

其中， $\{\boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{b}_i\}$ 是随机初始化且固定的，而 $\{\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{c}_i\}$ 是可训练的。在每一层中，分量数 d_i 称为秩，隐藏神经元数 n_i 称为层宽度；通常$n_i \gg d_i$，以提供丰富的随机基函数。为了根据某个潜在状态 $\boldsymbol{z}$对网络进行条件化，也会对 FMMNN 应用类似的平移调制。

$$f_{\theta,\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \sigma_L \circ \sigma_{L-1} \circ \cdots \circ \sigma_1(\boldsymbol{\xi}), \text{ with } \sigma_i\left(\boldsymbol{\eta}_i\right) = \boldsymbol{A}_i \sin\left(\boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{b}_i\right) + \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{\phi}_i \tag{7}$$

其中 $\phi = \{\boldsymbol{\phi}_i\}_{i=1}^{L-1}$ a 是应用于每个秩的平移调制，通过可训练的线性超网络从 $\boldsymbol{z}$ 映射得到。

为增强重建效果，加入傅里叶编码 [22]，以更好地捕捉高频空间分量。具体而言，加入一个可训练参数矩阵 P，将空间坐标映射到更高维的嵌入 $\boldsymbol{\xi} \mapsto [\boldsymbol{\xi}, \cos(P\boldsymbol{\xi}),\ \sin(P\boldsymbol{\xi})],$，并将其作为解码器的输入。

2.4 训练与归一化

我们采用端到端训练策略，联合优化时间编码器 $\mathcal{G}$ 和 INR解码器 $\mathcal{F}$的参数。训练数据由以下形式的输入输出对组成：$\{\boldsymbol{y}_{t-k:t}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\ t)\}$，其中 $\boldsymbol{\xi}$表示查询

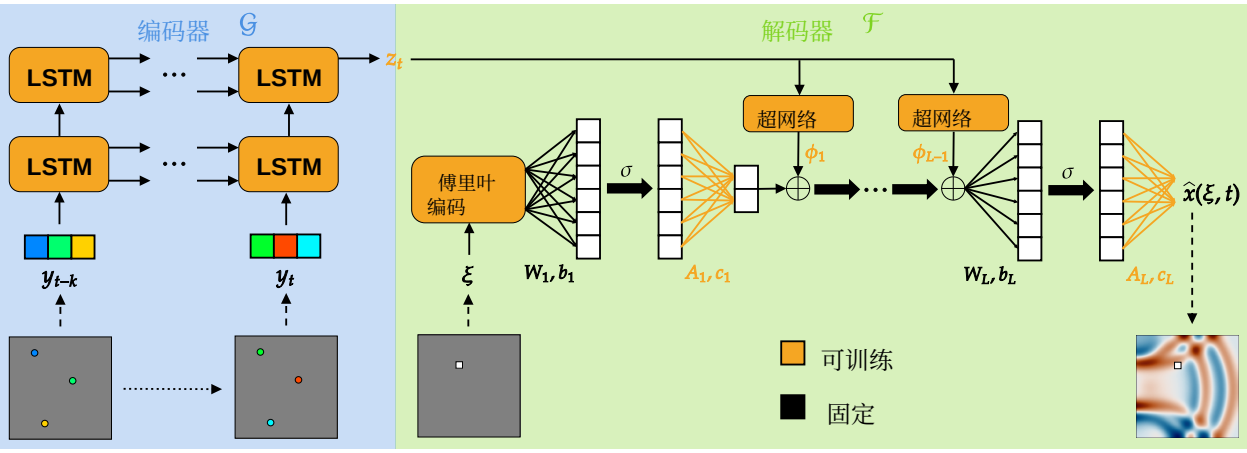


图 1：STRIDE 概览。时间编码器将一段点传感器观测 $\boldsymbol{y}_{t-k:t}$ 映射为潜在状态 $\boldsymbol{z}_t$。随后，条件空间解码器（例如调制 INR 解码器，即采用移位调制的 FMMNN）在任意查询位置 $\boldsymbol{\xi}$ 处计算 $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}, t)$（可选地进行傅里叶编码），从而在参数化轨迹上实现与离散化和分辨率无关的重建。

位置，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$表示对应的真实场值。我们最小化以下均方误差（MSE）：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N_{tr} N_t N_\xi} \sum_{j=1}^{N_{tr}} \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{q=1}^{N_\xi} \left\| \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{\xi}_{j,t}^{(q)}, t; \boldsymbol{\mu}_j\right) - \hat{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{\xi}_{j,t}^{(q)}, t, \boldsymbol{\mu}_j\right) \right\|^2, \tag{8}$$

其中，j 表示在参数 $\{\boldsymbol{\mu}_j\}_{j=1}^{N_{tr}}$ 下生成的训练轨迹，N_t 表示每条轨迹的时间步数。对于每个快照（j，t），我们从可用的空间离散化中（或直接从 Ω 中）采样 N_ξ 个查询点 $\{\boldsymbol{\xi}_{j,t}^{(q)}\}_{q=1}^{N_\xi}$，并通过 $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}, t, \boldsymbol{\mu}_j) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y}_{t-k:t}(\boldsymbol{\mu}_j)))$计算预测结果。与 SHRED 在每个时间步匹配完整空间网格不同，随机空间采样降低了训练成本，并直接支持与离散化和分辨率无关的学习。为实现快速且稳定的训练，我们使用带权重衰减的 SOAP 优化器 [23] 以及 ReduceLROnPlateau 调度器。

在训练之前，我们进行与 [24]类似的逐通道归一化。具体而言，我们对状态变量 $\boldsymbol{x}$（因此也对传感器测量 $\boldsymbol{y}$）和空间坐标 $\boldsymbol{\xi}$ 进行缩放，使每个分量都处于范围$[-1, 1]$内。这种归一化有助于提高数值稳定性，尤其是对于早期快照以及可能包含许多近零值的边界区域。

3 理论依据

我们有条件地说明，为什么从有限时间窗内的点传感器重建完整场是可行的，以及为什么两阶段架构（时间编码器 + 空间解码器）具有足够的表达能力，能够逼近相应的重建算子。

3.1 设置

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d_\xi}$ 为紧空间域，d_x 为场通道数。与第 2 节一致，我们将离散时间索引 t 处的完整状态记为向量值场 $\boldsymbol{x}_t(\cdot) \in X$，并将其逐点值写作$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) := \boldsymbol{x}_t(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{d_x}$。我们通过 $\boldsymbol{x}_t(\cdot; \boldsymbol{\mu})$和 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t; \boldsymbol{\mu})$明确表示其对参数的依赖。这里，$X$是一个连续嵌入到 $C^0(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$中的巴拿赫空间，因此点值求值是连续的；例如，$X = H^s(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$在 $s > d_\xi/2$时可由索 Sobole夫嵌入得到这一性质。

在我们的数值基准测试中，轨迹由参数化 偏微分方程产生：存在一个紧参数集 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{d_\mu}$，每条轨迹都在某个固定的 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$（例如几何形状／外力／初始条件参数）下生成。令 $\{S_{\boldsymbol{\mu}}^t\}_{t \geq 0}$ 表示偏微分方程在参数 $\boldsymbol{\mu}$下于 X 上诱导的（半）流，并固定采样间隔 $\Delta t > 0$，其离散时间映射为 $F_{\boldsymbol{\mu}} := S_{\boldsymbol{\mu}}^{\Delta t}$. 因此，对于固定的 $\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{x}_{t+1} = F_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{x}_t$ 对整数 $t \geq 0$成立。我们假设，对于每个 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$，动力学都存在一个紧前向不变集 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\mu}} \subset X$（例如耗散情形下依赖于参数的全局吸引子），且在该集合上

解映射具有足够的正则性，可用于延迟嵌入论证。为了统一不同参数下的多轨迹学习，我们考虑 $\mathcal{P} \times X$中的增广不变集，

$$\mathcal{A} := \{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{\mu}}\} \subset \mathcal{P} \times X, \tag{9}$$

配备乘积范数 $\|(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{\mu}',\ \boldsymbol{x}')\|_{\mathcal{P}\times X} := \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}'\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|_X$。

3.2 点传感器观测与延迟可观测性

固定 N_s 传感器位置 $\{\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(N_s)}\} \subset \Omega$，并令 d_o 表示每个传感器的观测通道数，因此观测维数为 $p = N_s \times d_o$。令 $\Pi : \mathbb{R}^{d_x} \to \mathbb{R}^{d_o}$ 为选择观测通道的固定线性投影。定义点传感器映射 $h : X \to \mathbb{R}^p$，将投影后的传感器值堆叠为

$$h(\boldsymbol{x}) = \big(\Pi\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}), \ldots, \Pi\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}^{(N_s)})\big) \in \mathbb{R}^p. \tag{10}$$

对于一个 整数滞后 $k \geq 0$，在增广状态上定义前向延迟映射 $\Phi_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^{(k+1)p}$，其定义为

$$\Phi_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) = \big(h(\boldsymbol{x}),\ h(F_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ h(F_{\boldsymbol{\mu}}^k\boldsymbol{x})\big). \tag{11}$$

就数据而言，对于在固定 $\boldsymbol{\mu}$ 下生成的轨迹，$\boldsymbol{x}_t = F_{\boldsymbol{\mu}}^t\boldsymbol{x}_0$（时间索引为整数），定义每步传感器向量 $\boldsymbol{y}_t := h(\boldsymbol{x}_t) \in \mathbb{R}^p$。那么，观测窗口 $\boldsymbol{y}_{t-k:t}$ 等于 $\Phi_k(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x}_{t-k})$。

假设3.1（有限维长期复杂性）。增广不变集 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P} \times X$ 是紧致的，且具有有限盒计数维 $d_A := \dim_B(\mathcal{A}) < \infty$。

对于广泛的耗散型偏微分方程，假设3.1 均成立；这类方程的解（半）流具有紧致全局吸引子，且其分形维数/盒计数维有限。典型例子包括一维 Kuramoto–Sivashinsky 方程、二维纳维–斯托克斯方程以及地球物理流（例如参见文献25）。在我们的基准测试中，KS、FlowAO 和 SWE 设置均为耗散型；地震波设置则包含一个吸收阻尼掩膜，可在模拟动力学中引入耗散。此外，我们的数据集具有参数化特征：改变 $\boldsymbol{\mu}$（例如外力/几何剖面、初始条件、震源位置、速度图）会描绘出一族不变集 $\{\mathcal{A}_{\boldsymbol{\mu}}\}_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}}$；假设3.1 表明，由此得到的增广集 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P} \times X$ 仍然具有实质上的有限维特征。

假设 3.2（稳定延迟可观测性）。存在一个滞后量 k 和常数 $L_\Phi,\ L_\Psi > 0$，使得 Φ_k 在 $\mathcal{A}$ 上是单射，且存在其逆映射 $\Psi : Y \to \mathcal{A} \to Y$，满足 $= \Phi_k(\mathcal{A})$ 所示的双 Lipschitz 型稳定性界

$$\|\Phi_k(\boldsymbol{a}) - \Phi_k(\boldsymbol{a}')\| \leq L_\Phi\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}'\|_{\mathcal{P}\times X}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{\mu}',\ \boldsymbol{x}')$，并且

$$\|\Psi(\boldsymbol{y}) - \Psi(\boldsymbol{y}')\|_{\mathcal{P}\times X} \leq L_\Psi\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|. \tag{13}$$

等价地说，该逆映射是连续的，并且对观测窗口的扰动具有稳定性。

假设 3.2 是增广集 $\mathcal{A}$上延迟坐标映射的一个稳定的 可观测性/嵌入条件。对于耗散偏微分方程等无穷维系统，Mañé 投影定理表明，巴拿赫空间中有限盒计数维的紧集可以通过单射线性投影嵌入 $\mathbb{R}^{d_z}$（且具有 Hölder连续逆），只要 d_z 足够大 [20]。在我们的设定中，h 是一个固定的点传感器 映射，无法直接观测$\boldsymbol{\mu}$，因此通有性并非自动成立；因此，我们将假设 3.2 视为关于 $(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x})$ 的可辨识性假设，并通过实证考察参数辨识。

3.3 连续重建算子

将时间索引 t 处的（真实）场定义为 $\boldsymbol{x}(\cdot, t) := \boldsymbol{x}_t(\cdot) \in C^0(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$。在假设 3.2 下，观测窗口 $\boldsymbol{y} \in Y$可识别对应的增广状态$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y}) \in \mathcal{A}$ 于窗口的起始处。窗口结束时的场则为 $F_{\boldsymbol{\mu}}^k\boldsymbol{x}$。由此定义重建算子 T: $Y \to C^0(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$:

$$T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\xi}) := \big(F_{\boldsymbol{\mu}}^k\boldsymbol{x}\big)(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{y} \in Y,\ \boldsymbol{\xi} \in \Omega. \tag{14}$$

引理 *3.3*（ T的连续性与稳定性）。若映射$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) \mapsto F_{\boldsymbol{\mu}}^k\boldsymbol{x}$ 在 $\mathcal{A}$上连续，且点值求值$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$在 X上连续，则 T在紧集 Y上连续。此外，若$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) \mapsto F_{\boldsymbol{\mu}}^k\boldsymbol{x}$ 在 $\mathcal{A}$上（关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\times X}$）是 L_{F^k}-*Lipschitz* 的，且嵌入 $X \hookrightarrow C^0(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$满足 $\|\boldsymbol{x}\|_{C^0} := \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Omega}\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})\| \leq C_{\mathrm{ev}}\|\boldsymbol{x}\|_X,\ \forall \boldsymbol{x} \in X$，则

$$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Omega}\|T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\xi}) - T(\boldsymbol{y}')(\boldsymbol{\xi})\| \leq C_{\mathrm{ev}}\,L_{F^k}\,L_\Psi\,\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|. \tag{15}$$

证明见附录 A.1。稳定延迟可观测性意味着，传感器窗口的微小扰动（噪声、离散化）会导致可控的重建误差。

3.4 通过 STRIDE 类型架构进行逼近

现在，我们将算子 T 与 STRIDE 的结构联系起来。设 $\mathcal{G}: Y \to Z$ 是一个将观测窗口映射到潜在状态 $z \in Z$ 的时间编码器，设 $\mathcal{F}: \Omega \times Z \to \mathbb{R}^{d_x}$ 是一个条件空间解码器。STRIDE 将重建表示为 $\hat{}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y}))$.

定理 3.4 （算子分解与逼近）。 假设满足假设 *3.1–3.2*，且 $G_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) := F_{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{x}$ 在 $\mathcal{A}$上连续。令 $\mathcal{A}_X$ 为 $\mathcal{A}$ 到 X 的投影，并设 $d_X := \dim_B(\mathcal{A}_X)$。则存在一个紧集$Z \subset \mathbb{R}^{d_z}$，满足 $d_z > 2d_X$，以及连续映射 $\mathcal{G}: Y \to Z$和 $\mathcal{F}: \Omega \times Z \to \mathbb{R}^{d_x}$，它们具有 *STRIDE* 形式，使得

$$\sup_{\boldsymbol{y} \in Y} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} \left\| T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y})) \right\| < \varepsilon, \tag{16}$$

其中，$\mathcal{G}$和 $\mathcal{F}$可由标准前馈神经网络在紧集上一致逼近。

证明见附录 A.2。尽管形式上的逼近保证针对的是标准前馈神经网络，但在实践中，我们采用窗口化循环编码器实现 $\mathcal{G}$，并采用调制隐式神经表示实现 $\mathcal{F}$；在我们的实验中，这些架构的表达能力更强。

4 实验

我们在四个基准测试上评估 STRIDE，这些基准测试旨在从稀疏的点传感器观测中重建时空场。基准测试涵盖从混沌动力学到波传播的多种任务，且都涉及由不同初始条件和/或物理参数驱动的多条轨迹。本节中，我们将采用 FMMNN 隐式神经表示骨干网络的默认实现称为 STRIDE-FMMNN，将 SIREN 骨干变体称为 STRIDE-SIREN。

4.1 实验设置

Kuramoto–Sivashinsky 方程。 Kuramoto–Sivashinsky（KS）方程是一种非线性偏微分方程，会呈现时空混沌，并且对初始条件高度敏感。如图 2 所示，即使初始条件几乎相同，系统的动力学仍会出现分歧。根据 [8], ，我们使用指数时间差分四阶 Runge–Kutta（ETDRK4）方法，在 $N_\xi = 100$ 个空间点上施加周期边界条件，生成 $N_t = 201$个快照的数据。我们将黏度固定为 1.0，仅改变初始条件，共生成 1,000 条轨迹。

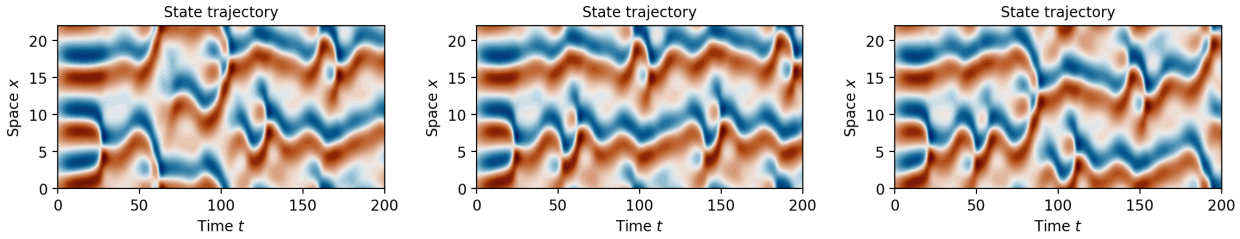


图 2：混沌 KS 系统中的发散轨迹。时空场以几乎相同的频率参数（2.99,3.00, 和 3.01）初始化，展示了系统对初始条件的敏感依赖。

绕障碍物流动。 绕障碍物流动（FlowAO）是一个具有随时间变化的物理参数和几何参数的不可压缩流基准。按照 [8],，我们通过求解非定常 Navier–Stokes 方程生成200条轨迹，每条包含 $N_t = 200$ 个时间步。每条轨迹对应不同的攻角和来流强度随时间变化的曲线，以及不同的障碍物形状；图 3 展示了一条轨迹示例。每个快照包含每个速度分量对应的 $N_\xi = 40{,}296$ 个空间点。

浅水方程。 浅水方程（SWE）用于模拟自由表面流，例如图 4 所示的海啸建模。我们按照 [26]，生成 200 条轨迹，每条包含 $N_t = 201$ 个时间步；轨迹的初始条件是在随机位置设置表面高程的高斯凸起。空间域在两个分辨率下均匀离散：64×64 和 128×128。

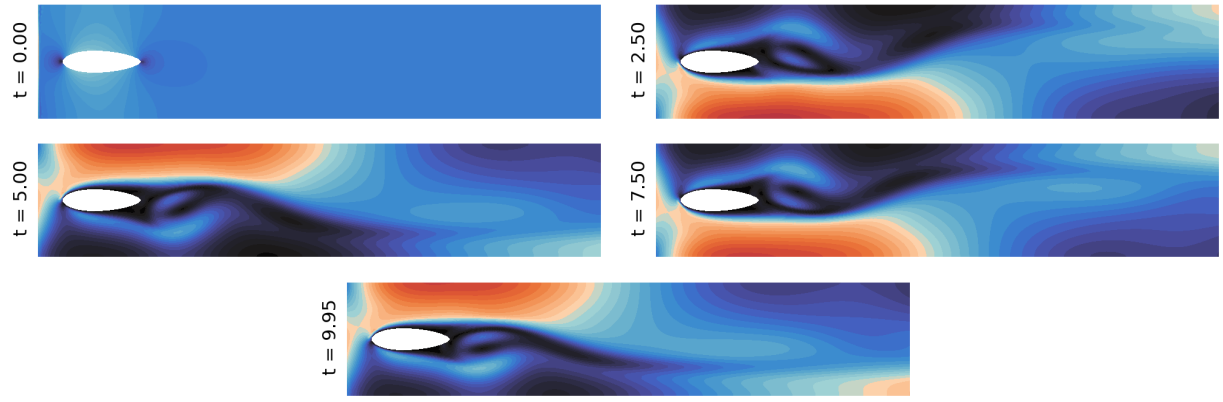


图3：FlowAO 算例中速度场的示例轨迹，展示了受时变攻角和来流强度影响的非定常流动模式。

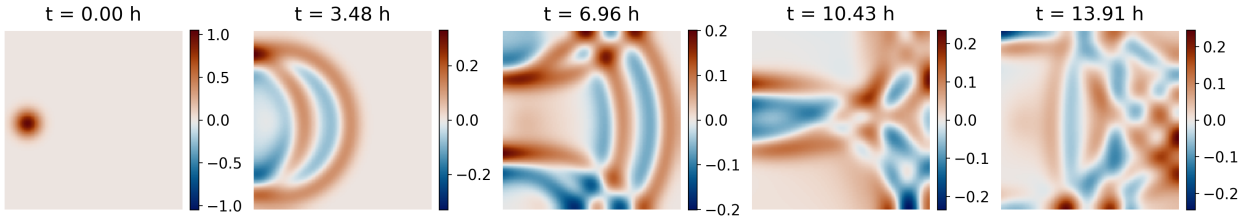


图4：示例轨迹　　浅水方程算例中表面高程的传播，展示了海啸状波浪，生成自高斯源。

地震波传播。 我们考虑由声波方程支配的波场。使用 Devito [27], , 我们生成了 1,000 条轨迹，每条包含 $N_t = 201$ 个时间步；在源自 OpenFWI 数据集的“FlatVel-B”（FVB）多层速度图中，Ricker震源（10 Hz）被放置在随机位置。 [28], 中展示了一个样本，见图 5。空间分辨率为 70×70，并在计算域边界处应用吸收阻尼掩膜，以模拟无限域。层间边界会引发复杂的波动现象，包括折射和反射，从而显著增加重建任务的难度。图 6 展示了一个波传播示例。

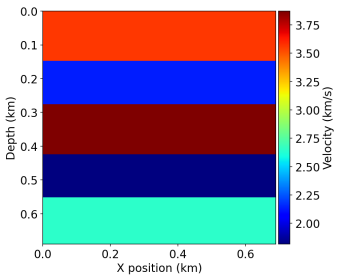


图5：速度图示例。

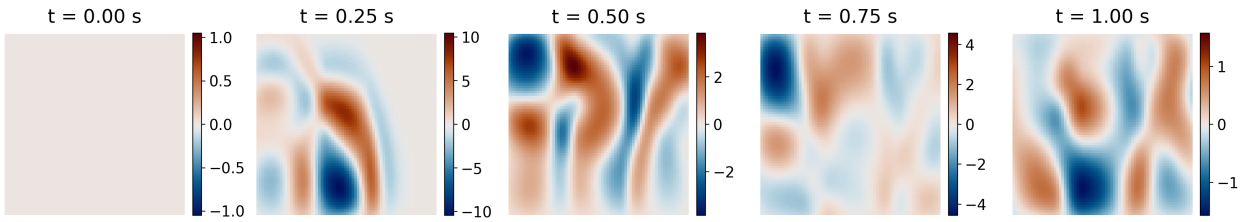


图6：声波在多层速度图中传播的轨迹示例，展示了复杂的反射和折射。

4.2 评估指标

生成的轨迹按 80%/10%/10% 划分为训练集、验证集和测试集。在训练和验证期间，我们可以按照第 2 节所述对空间查询点进行子采样；在测试时，我们在所有可用空间点上评估重建结果。对于 KS 和 FlowAO 情况，我们

报告每个状态变量的平均相对 ℓ_2 误差，

$$\epsilon = \frac{1}{N_{\text{test}} N_t} \sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} \sum_{t=1}^{N_t} \frac{\|\boldsymbol{x}_{j,t} - \hat{\boldsymbol{x}}_{j,t}\|_2}{\|\boldsymbol{x}_{j,t}\|_2}, \tag{17}$$

其中，$\|\cdot\|_2$ 是空间离散化上的欧几里得范数，N_{test} 是测试轨迹的数量。由于波场的动态范围较大，对于浅水方程和地震案例，我们报告以下整体相对弗罗贝尼乌斯误差，

$$\epsilon = \frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_F}{\|\boldsymbol{x}\|_F}, \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 和$\hat{}\boldsymbol{x}$ 是通过堆叠测试样本的真实空间场和预测空间场（涵盖时间和空间维度）构成的矩阵。

4.3 数值结果

表 1 汇总了我们的方法和基线方法在四个数据集上的重建误差和参数量。STRIDE-SIREN 使用相同的 STRIDE 架构，但将隐式神经表示骨干网络替换为调制SIREN。对于 FlowAO，我们仅在传感器位置观测水平速度分量，并重建两个速度分量；我们报告水平分量的误差。对于浅水方程，我们仅观测表面高程，并重建高程和两个速度分量；我们报告表面高程的误差。对于 STRIDE- FMMNN，由于 FMMNN 中的随机权重固定，我们以（可训练/总计）的形式报告参数量。模型超参数通过在验证集上进行贝叶斯优化来选择。为确保对解码器进行公平比较，所有模型均使用相同的传感器测量、时间滞后 k 和潜在维度 d_z。有关超参数搜索和训练的详情，请参阅附录 B。

STRIDE-FMMNN 在所有数据集上均取得最低误差。SHRED 在 KS 上表现良好，但随着空间维数增加，性能会下降，因为其参数数量主要由浅层解码器的最后一层决定，并随输出维度扩展。SHRED-ROM 通过本征正交分解（POD）减少参数，但在本质上属于高维的系统中会产生较大的误差。在四个数据集上，POD 在测试集上的平均相对重建误差分别为 0.57%、0.45%、0.80% 和 1.47%，使用的模态数分别为 20、150、400 和 2000。STRIDE-SIREN 是一种有竞争力的基线模型，但在模型规模相近时，其表现始终不及 STRIDE-FMMNN，尤其是在波传播问题中。

表 1：各数据集上的模型参数数量与重建误差（ϵ）对比。

模型	数据集 $\rightarrow$	*KS*	*FlowAO*	浅水方程（*128×128*）	地震
SHRED	#参数	425K	32.5M	20.1M	3.09M
	误差 ϵ	6.20E-2	4.13E-2	1.75E-1	1.67E-1
SHRED-ROM	#参数	393K	395K	917K	1.93M
	误差 ϵ	6.28E-2	6.53E-2	5.14E-1	4.87E-1
STRIDE-SIREN	#参数	448K	121K	397K	1.49M
	误差 ϵ	6.34E-2	3.12E-2	4.62E-2	1.12E-1
STRIDE-FMMNN	#参数	348K/484K	103K/149K	337K/407K	1.39M/1.80M
	误差 ϵ	**3.09E-2**	**2.97E-2**	**2.78E-2**	**8.41E-2**

不同模型之间的比较结论同样适用于更具挑战性的浅水方程变体。如表2所示，当我们将模拟物理时间加倍（同时保持 $N_t = 201$ 不变）时，STRIDE- FMMNN 仍然是表现最佳的模型；此时，波反射使轨迹末段附近的情况更加复杂。

表2：扩展浅水方程（128×128）数据集上的参数和误差模型比较 t.

模型	SHRED	SHRED-ROM	STRIDE-SIREN	STRIDE-FMMNN
#参数	20.1M	917K	1.45M	918K/1.53M
误差 ϵ	20.25%	57.09%	2.89%	**2.51%**

图7比较了 STRIDE-FMMNN 与基线方法在扩展版（时间加倍）浅水方程（128×128）的一个测试快照上的表现。随着波浪在物理域内来回反弹，表面高程场 η 在最后一个时间步附近呈现出高度复杂的结构。在稀疏观测相同的情况下，STRIDE-FMMNN 的重建精度显著高于 SHRED 和 STRIDE-SIREN。

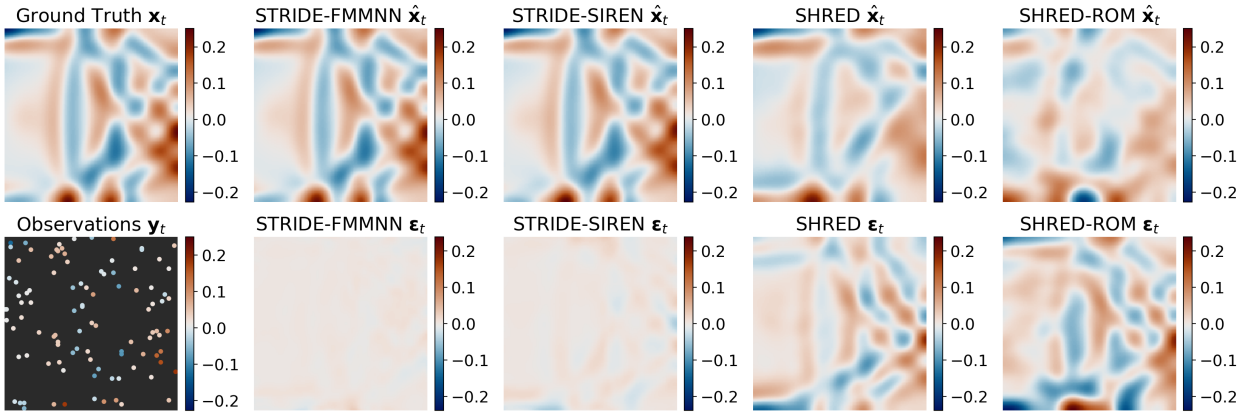


图 7：扩展 SWE（128×128）案例中表面高程 η 的可视化。第一列显示示例测试轨迹中最后一个（第 200 个）时间步的真实值，以及作为模型输入、在 100 个随机位置采集的观测值。接下来的列显示 STRIDE-FMMNN 和基线方法在同一快照上的预测结果与误差。

图 8 展示了 STRIDE-FMMNN 与基线方法在地震数据集中的一个代表性测试快照上的视觉对比。所提出框架的优越性在最终时间步尤为明显，此时波场由于在多层介质中的累积折射与反射而形成高度复杂的干涉模式。

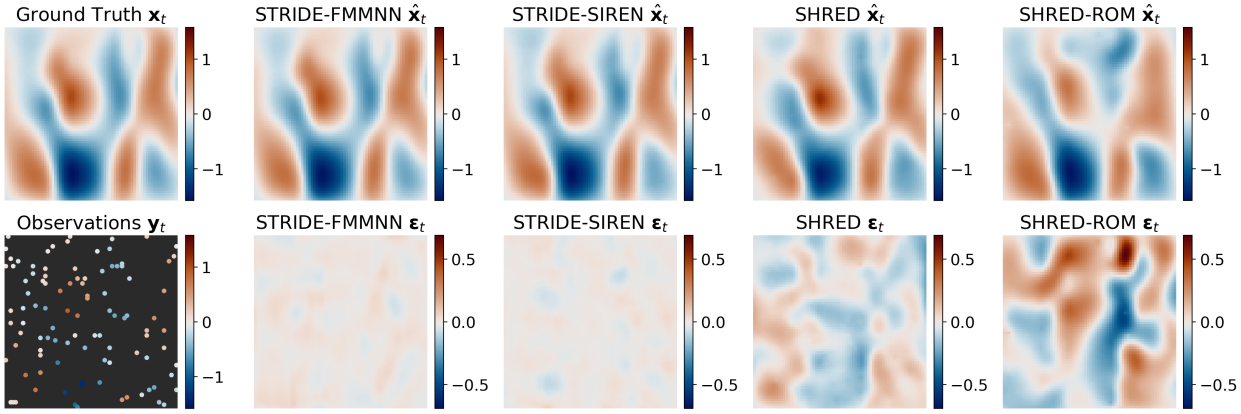


图 8：复杂干涉条件下的声波重建视觉对比。（左）$t = 200$ 时刻的真实值及 100 个随机稀疏观测值。（右）STRIDE-FMMNN 和基线方法的预测波场及相应误差图，突出展示了我们模型捕捉复杂反射与折射模式的能力。

如图 9 所示，在 KS 和 SWE 案例中，STRIDE-FMMNN 在每个时间步的表现均优于 SHRED、STRIDE-SIREN 和 SHRED-ROM。尽管所有模型在早期时刻（历史信息有限）都表现出较大的误差，但随着混沌动力学（KS）使预测变得更具挑战性，以及空间场（SWE）日益复杂，STRIDE-FMMNN 仍能保持较低的误差。

图 10 展示了 STRIDE-FMMNN 在 FlowAO 和 Seismic 上生成的代表性潜在状态轨迹。在 FlowAO 中，经过初始预热期（时间滞后 k）后，潜在状态呈现出明显的周期性行为，这与周期性尾流动力学一致。在 Seismic 中，潜在幅值随时间衰减，这与波场到达边界并被阻尼掩膜吸收时的衰减情况相符。

除了提升精度之外，STRIDE-FMMNN 还通过基于坐标的解码和随机空间采样，支持离散化不变和分辨率不变训练。我们考虑一种更具挑战性的情形，其中初始高斯凸起的标准差

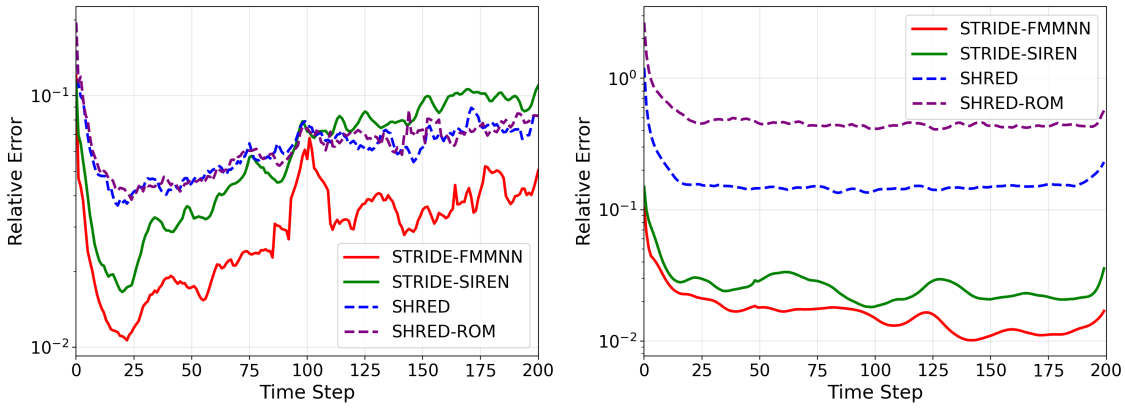


图 9：KS（左）和浅水方程（128×128）（右）案例中，沿测试轨迹的平均相对预测误差，对比 STRIDE-FMMNN、STRIDE-SIREN 与基线方法。

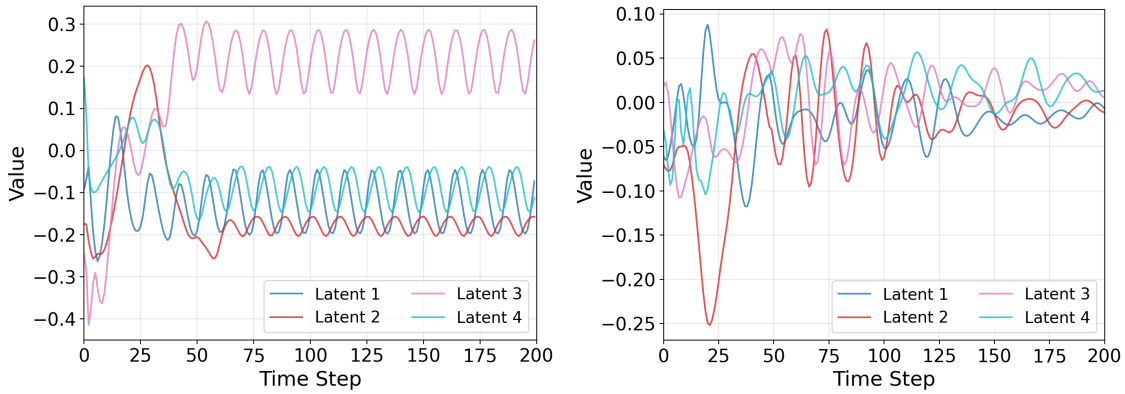


图 10：FlowAO（左）和地震（右）案例的一个测试轨迹中，STRIDE-FMMNN 的前四个潜在状态。

减半，从而使波场的特征频率加倍。在此，我们通过对高分辨率模拟数据进行下采样来生成低分辨率数据，并将传感器布置在均匀网格上，以确保评估的一致性。如表 3 所示，在标准设置下，只要模型规模和训练预算（固定为每个快照 $N_\xi = 4{,}096$ 个查询点）保持不变，STRIDE-FMMNN 在不同分辨率下都能取得稳定的性能。在超分辨率设置下（在低分辨率数据上训练，在更高分辨率下测试），STRIDE-FMMNN 无需重新训练即可保持相近的误差。具体而言，从 64 超分辨至 128 时，其相对误差与直接使用 128 分辨率数据集训练所得的误差相当。此外，该方法的表现显著优于依赖双线性插值对低分辨率预测结果进行上采样的基线方法。

表 3：扩展高频浅水方程案例中，STRIDE-FMMNN 的预测误差（%）与插值基线在标准任务和超分辨率任务上的比较。

VAR.	标准		超分辨率	插值。
	64	128	64 → 128	64 → 128
u	6.89	7.02	6.97	8.02
v	5.15	5.03	5.29	6.66
η	6.27	6.57	6.32	7.57

STRIDE-FMMNN 中的 FMMNN骨干网络比 STRIDE- SIREN 带来更稳定的优化和更快的收敛。图 11 展示了在模型规模相近且优化器/学习率调度器设置相同的条件下，STRIDE-FMMNN 和 STRIDE-SIREN 三次运行的训练动力学。学习率为 2e-3 时，STRIDE-FMMNN

在 300 个训练轮次内收敛，而 STRIDE-SIREN 在学习率为 1e-4 时约经过 700 个训练轮次收敛（以验证损失为准）。将 STRIDE-SIREN 的学习率调高（例如 2e-4）时，我们观察到早期出现峰值，导致模型不收敛。最后，STRIDE-FMMNN 在收敛时呈现出较高的训练损失但较低的验证损失，这表明其低秩、部分可训练参数化设计减少了过拟合。

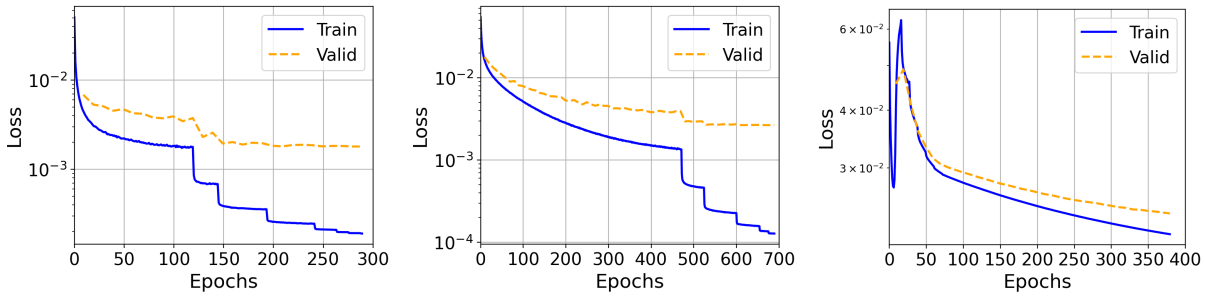


图11：KS情形下STRIDE-FMMNN（左）与STRIDE-SIREN（中和右）的训练动力学。三次训练使用相同的优化器和学习率调度器，学习率分别设为2e-3、1e-4和2e-4。

图12展示了时间滞后和随机传感器数量对STRIDE-FMMNN在浅水方程（128×128）数据集上总体相对误差的影响。经验表明，相对误差随时间滞后延长和随机传感器增多而降低。这验证了第3节中所讨论的时间滞后与传感器数量的选择。

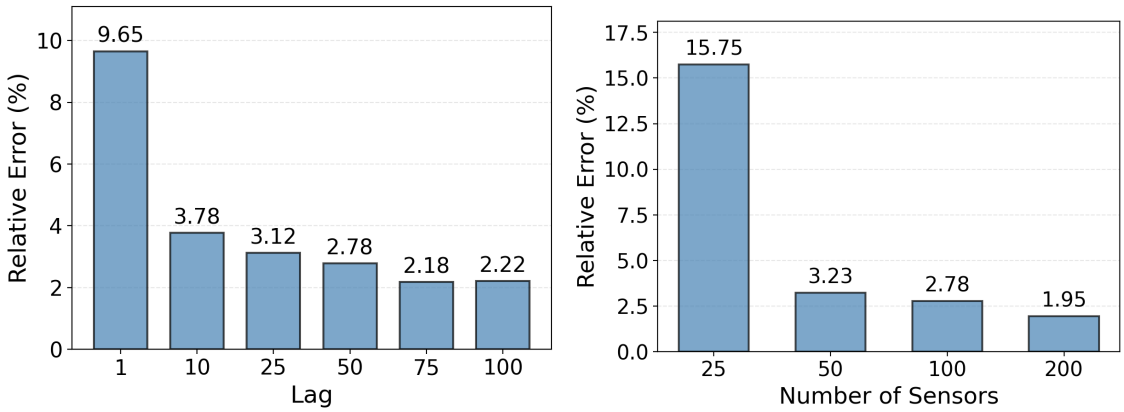


图12：STRIDE-FMMNN在浅水方程（128×128）数据集上针对时间滞后和传感器数量的消融研究。

表4评估了STRIDE-FMMNN在不同观测噪声水平下的稳健性。我们将噪声水平定义为所施加高斯噪声的标准差相对于真实观测标准差的比值。结果表明该框架具有稳健性，在20%的高噪声条件下预测误差低至6.24%。

Tab图 4：不同观测噪声水平（%）下 STRIDE-FMMNN 的预测误差（%），其中 η)

噪声水平	0	5	10	20
误差	2.78	3.22	4.04	6.24

我们在固定潜在维度并采用相同 FMMNN解码器的条件下，比较 STRIDE-FMMNN 中不同的时间编码器。图 13 左图显示，在准确度和参数效率方面，循环模型（LSTM、门控循环单元和 Mamba）均显著优于多层感知机和自注意力变体。Mamba 的预测误差最低，模型规模与 LSTM 相当。右图总结了 LSTM 与 Mamba 在不同数据集上的表现：除 KS 外，Mamba 在大多数情况下略优于 LSTM。这表明 Mamba 是一种很有潜力的时间编码器，可用于提取潜在状态。

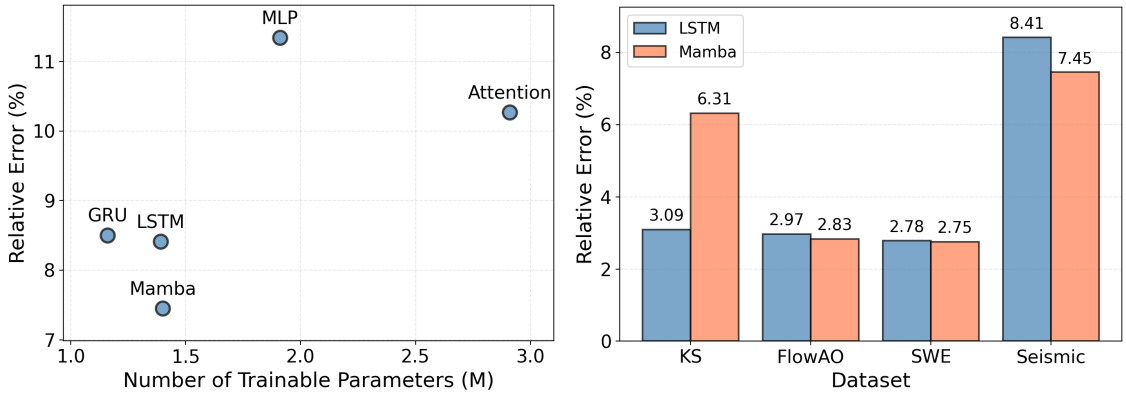


图13：在地震数据集上比较时间模型（左），以及按数据集展示使用长短期记忆网络或 Mamba 得到的预测误差（右）。

图 14 展示了 STRIDE-FMMNN 在浅水方程案例的分布内和分布外（OOD）样本上的表现。如前所述，当测试样本来自训练范围内时，所提出的模型取得了非常低的相对误差。然而，即使 OOD 样本中的动力学只是简单地翻转，对未见场景的泛化仍是一项重大挑战。只有当测试样本与训练范围相当接近时，预测误差才保持在 10% 以下。对于远在该分布范围之外的样本，相对误差很容易超过 30%。

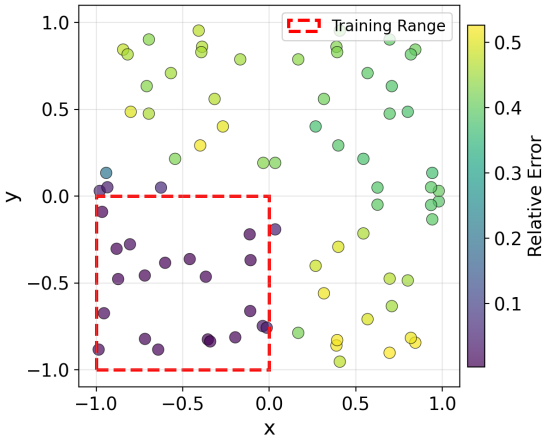


图14：STRIDE-FMMNN 在浅水方程数据集上的泛化分析。散点图展示了分布内和分布外样本中表面高程（η）的相对预测误差。每个点的坐标对应初始高斯凸起的中心。训练轨迹的初始位置均位于左下四分之一区域内。

除了全场重建之外，还可以利用简单的多层感知机，根据 STRIDE-FMMNN 学到的、包含丰富信息的潜在状态准确估计底层控制参数。如图 15 所示，在一个测试轨迹示例中，浅水方程和 FlowAO 案例的估计参数与真实值非常接近。在所有测试轨迹中，定义初始高斯凸起位置的两个参数（从 $[-1, 0] \times [-1, 0]$ 中采样）的平均绝对误差分别为 **1.47e-3** 和 **8.33e-4**。时变攻角的平均绝对误差为 **2.10e-2**。

图 16 展示了使用 STRIDE-FMMNN 进行自回归预测的性能。为扩展该框架以实现未来状态预测，我们在学习到的潜在状态时间序列上训练了一个辅助长短期记忆网络。这样便能够外推未来的潜在轨迹，随后通过预训练的 FMMNN解码器将其映射回完整的空间场。在浅水方程案例中，该模型展现出稳健的短期预测能力；经过 21 个时间步后，所有三个状态变量的相对误差均维持在约 25%。然而，地震案例的挑战显著更大。在同样的 21 步区间内，预测误差迅速增大，接近 100%。

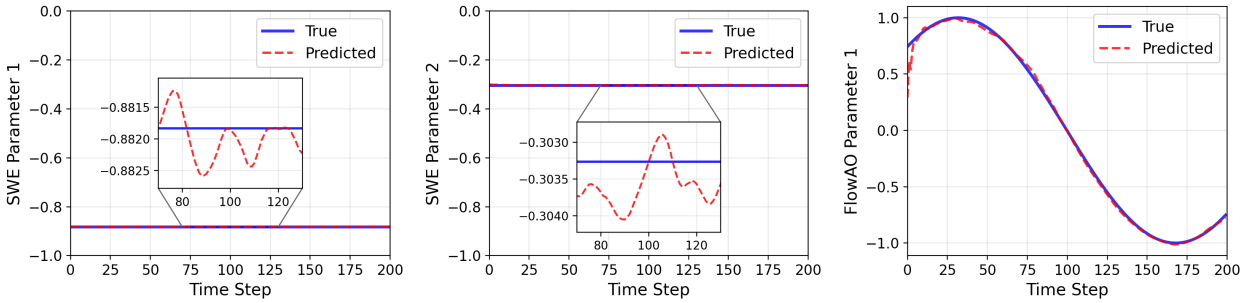


图15：根据 STRIDE-FMMNN 学得的潜在状态进行参数估计。左图和中图：浅水方程案例中一个测试轨迹的初始高斯凸起坐标（x 和 y 位置）估计结果。右图：FlowAO 案例中时变攻角的估计结果。

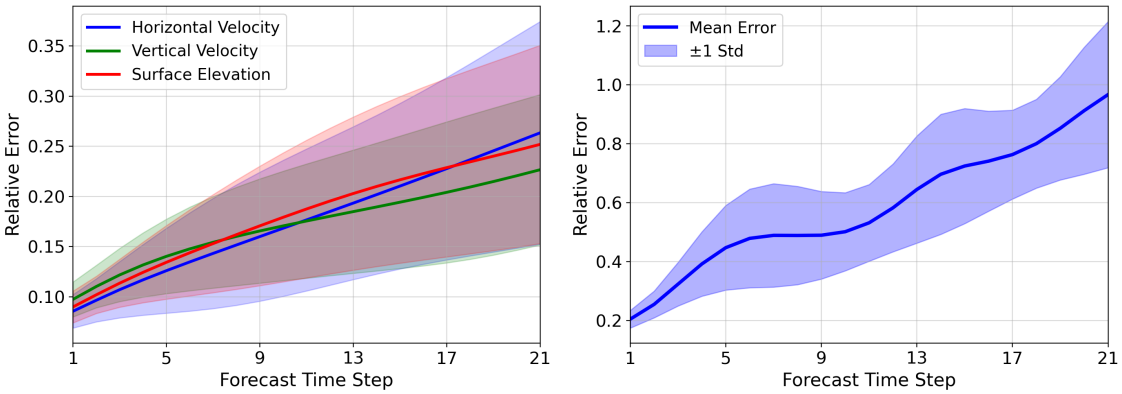


图16：STRIDE-FMMNN 的自回归预测性能。图中展示了浅水方程（左）和地震（右）案例中相对预测误差随时间的变化。阴影区域表示所有测试轨迹的标准差。

所提框架的性能也取决于传感器布置，尤其是在观测极其稀疏时。如图 17 所示，我们针对浅水方程案例训练了 STRIDE-FMMNN，使用 25 个传感器，并采用三种不同的布置策略。这里，QR 指的是在 PySensors [29], 中实现的 SSPOR算法，该算法默认采用 QR优化。三种配置为 η 带来的总体相对误差分别为 **15.75%**、**16.28%** 和 **6.49%**。这些发现凸显了数据驱动的传感器布置在降低重建误差方面的关键作用。值得注意的是，QR 布置通过将传感器集中在左下方四分之一区域（高斯凸起的初始位置），实现了最低误差，从而捕获了更多关于底层动力学的信息。

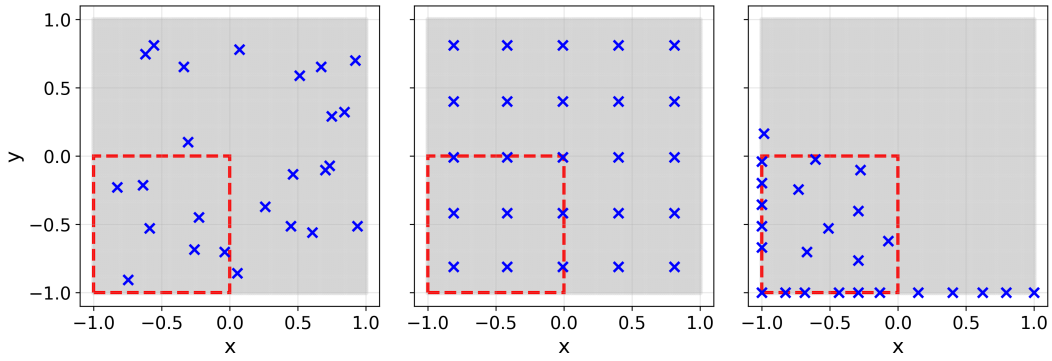


图17：浅水方程领域中稀疏传感器布置策略的比较：随机（左）、均匀（中）和 QR（右）。三种布置策略下 η 的相对预测误差分别为 15.75%、16.28% 和 6.49%。

4.4 进一步讨论

STRIDE 继承了基于 INR 的解码器在计算方面的权衡。训练需要通过相对较深的坐标到场网络进行反向传播，并在大量查询坐标处反复评估解码器（即使训练时对空间点进行子采样也不例外）。推理时，重建完整场需要在所有空间点处查询解码器，因此运行时间大致随输出分辨率线性增长；相比之下，SHRED 和 SHRED-ROM 只需一次前向传播即可输出完整场（或低维系数）。表 5 显示，STRIDE-FMMNN 和 STRIDE-SIREN 的评估成本都远高于非 INR 基线方法；根据空间分辨率和解码器骨干网络的不同，它们的训练速度也可能较慢。训练和评估均在单块 NVIDIA L40S GPU 上进行。

表 5：各数据集上的模型训练和评估时间对比。STRIDE-FMMNN 使用 FMMNN INR 骨干网络；STRIDE-SIREN 使用 SIREN 骨干网络。

模型	数据集 →	*KS*	*FlowAO*	浅水方程 *(128×128)*	地震
SHRED	T_{train} (S)	1178.20	3502.07	2969.87	14356.15
	T_{test} (S)	0.15	0.64	0.45	0.35
SHRED-ROM	T_{train} (S)	2642.42	1549.72	2454.69	1293.78
	T_{test} (S)	0.14	0.10	0.12	0.25
STRIDE-SIREN	T_{train} (S)	4993.41	4335.55	5140.88	64340.34
	T_{test} (S)	3.30	16.06	14.19	6.90
STRIDE-FMMNN	T_{train} (S)	2076.49	3895.35	7203.90	97803.72
	T_{test} (S)	3.35	13.93	17.82	14.57

这些开销是实现分辨率不变重建和提升表达能力所付出的代价。无需超分辨率重建时，可以在更粗的网格上评估解码器，以速度换取精度；更广泛地说，未来的工作可以着重加速隐式神经表示推理（例如，将模型蒸馏为轻量级网格解码器、采用分层由粗到细查询，或在规则网格上进行缓存）。此外，仍需在大规模实际问题上评估该框架，尤其是那些具有较高频分量的问题。

5 结论

我们提出了 STRIDE，这是一种从稀疏点传感器测量中重建时空场的两阶段框架。STRIDE 首先使用时间编码器将一个短观测窗口映射为低维潜在状态，然后利用基于坐标的隐式神经表示（INR）对该潜在状态进行解码，从而生成连续且分辨率不变的重建结果。在涵盖混沌动力学和波传播的四个基准测试中，我们的默认实现 STRIDE-FMMNN 比强基线方法取得更低的重建误差，且训练起来比 SIREN 骨干变体 STRIDE-SIREN 更稳定，同时保留了通过在任意空间坐标处查询解码器进行超分辨率重建的能力。

从理论角度来看，我们论证了为何有限维潜在状态即可满足需求：在相关不变集上的点测量满足延迟可观测性时，重建算子可通过有限维嵌入进行分解，从而使STRIDE类架构成为自然的逼近器。一个关键局限是继承自隐式神经表示解码器的计算成本，因为重建完整场需要大量坐标查询。未来工作将聚焦于加速隐式神经表示推理，并将STRIDE扩展到更大规模、更高频率的问题以及更具挑战性的传感场景。

致谢：

作者感谢 Nathan Kutz教授在访问佐治亚理工学院期间进行的启发性讨论，也感谢 Sebastian Gutierrez Hernandez 关于 FMMNN架构的课题组报告 [17]。本研究得到美国国家科学基金会资助项目编号2325631的支持。

参考文献

[1] Steven Brunton、Bernd Noack 和 Petros Koumoutsakos。《流体力学机器学习》。《流体力学年度评论》，52(1):477–508，2020年1月。arXiv:1905.11075 [physics].[2] Rui Wang 和 Rose Yu。《动力系统的物理引导深度学习：综述》，2023年2月。arXiv:2107.01272 [cs].[3] N. Benjamin Erichson、Lionel Mathelin、Zhewei Yao、Steven L. Brunton、Michael W. Mahoney 和 J. Nathan Kutz。《利用有限传感器进行流场重建的浅层神经网络》。《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》，476(2238):20200097，2020年6月。arXiv:1902.07358[physics].[4] George Em Karniadakis、Ioannis G. Kevrekidis、Lu Lu、Paris Perdikaris、Sifan Wang 和 Liu Yang。《物理信息机器学习》。《自然评论：物理》，3(6):422–440，2021年6月。出版方：自然出版集团。[5] Javier E. Santos、Zachary R. Fox、Arvind Mohan、Daniel O'Malley、Hari Viswanathan 和 Nicholas Lubbers。《开发 Senseiver，以从稀疏观测中高效重建场》。《自然·机器智能》，5(11):1317–1325，2023年11月。出版方：自然出版集团。[6] Xihaier Luo、Wei Xu、Yihui Ren、Shinjae Yoo 和 Balu Nadiga。《利用隐式神经网络从稀疏观测中连续重建场》，2024年1月。arXiv:2401.11611 [cs].[7] Jan P. Williams、Olivia Zahn 和 J. Nathan Kutz。《利用浅层循环解码器网络进行感知》，2024年6月。arXiv:2301.12011 [math].[8] Matteo Tomasetto、Jan P. Williams、Francesco Braghin、Andrea Manzoni 和 J. Nathan Kutz。《利用浅层循环解码器网络进行降阶建模》，2025年2月。arXiv:2502.10930 [cs].[9] Dongwei Lyu、Rie Nakata、Pu Ren、Michael W. Mahoney、Arben Pitarka、Nori Nakata 和 N. Benjamin Erichson。《WaveCastNet：用于地震预警的人工智能波场预测框架》，2024年5月。arXiv:2405.20516 [cs].[10] Jialin Song、Zezheng Song、Pu Ren、N Benjamin Erichson、Michael W Mahoney 和 Xiaoye S Li。《根据稀疏测量预测高维时空系统》。《机器学习：科学与技术》，5(4):045067，2024年12月。出版方：IOP出版社。[11] Floris Takens。《检测湍流中的奇怪吸引子》。载于 David A. Rand 和 Lai-Sang Young 编，《动力系统与湍流》，1980年沃里克会议，《数学讲义》第898卷，第366–381页。Springer，1981年。[12] Timothy Sauer、James A. Yorke 和 Martin Casdagli。《嵌入学》。《统计物理学杂志》，65(3-4):579–616，1991年。[13] Vincent Sitzmann、Julien N. P. Martel、Alexander W. Bergman、David B. Lindell 和 Gordon Wetzstein。《采用周期激活函数的隐式神经表示》，2020年6月。arXiv:2006.09661 [cs].[14] Ethan Perez、Florian Strub、Harm de Vries、Vincent Dumoulin 和 Aaron Courville。《FiLM：利用通用条件层进行视觉推理》，2017年12月。arXiv:1709.07871 [cs].[15] Louis Serrano、Lise Le Boudec、Armand Kassaï Koupaï、Thomas X. Wang、Yuan Yin、Jean-Noël Vittaut 和 Patrick Gallinari。《利用神经场进行算子学习：在一般几何上求解偏微分方程》，2023年11月。arXiv:2306.07266 [cs].[16] Pan Du、Meet Hemant Parikh、Xiantao Fan、Xin-Yang Liu 和 Jian-Xun Wang。《CoNFiLD：生成时空湍流的条件神经场潜扩散模型》，2024年3月。arXiv:2403.05940 [physics].[17] Shijun Zhang、Hongkai Zhao、Yimin Zhong 和 Haomin Zhou。《傅里叶多分量多层神经网络：释放高频潜力》，2025年6月。arXiv:2502.18959 [cs].[18] Sepp Hochreiter 和 Jürgen Schmidhuber。《长短期记忆网络》。《神经计算》，9(8):1735–1780，1997年11月。[19] Albert Gu 和 Tri Dao。《Mamba：线性时间序列建模与选择性状态空间》，2024年5月。arXiv:2312.00752 [cs].[20] Ricardo Mañé。《关于某些非线性映射的紧不变集的维数》。载于《动力系统与湍流》，1980年沃里克会议，《数学讲义》第898卷，第230–242页。Springer，1981年。[21] Junyoung Chung、Caglar Gulcehre、KyungHyun Cho 和 Yoshua Bengio。《门控循环神经网络在序列建模中的实证评估》，2014年12月。arXiv:1412.3555 [cs]。

[22] Yuan Qiu、Nolan Bridges 和 Peng Chen。导数增强深度算子网络，2024年10月。arXiv:2402.19242 [cs].[23] Nikhil Vyas、Depen Morwani、Rosie Zhao、Mujin Kwun、Itai Shapira、David Brandfonbrener、Lucas Janson 和 Sham Kakade。SOAP：使用 Adam 改进并稳定 Shampoo，2025年1月。arXiv:2409.11321 [cs].[24] Francesco Regazzoni、Stefano Pagani、Matteo Salvador、Luca Dede' 和 Alfio Quarteroni。通过潜在动力学网络学习时空过程的内在动力学。《自然·通讯》，15(1):1834，2024年2月。出版商：自然出版集团。[25] Roger Temam。力学与物理学中的无穷维动力系统，第68卷，应用数学科学丛书。Springer，第2版，1997年。[26] Phillip Si 和 Peng Chen。Latent-EnSF：一种用于稀疏观测数据高维数据同化的潜在集成评分滤波器，2024年9月。arXiv:2409.00127 [cs].[27] Fabio Luporini、Mathias Louboutin、Michael Lange、Navjot Kukreja、Philipp Witte、Jan Hückelheim、Charles Yount、Paul H. J. Kelly、Felix J. Herrmann 和 Gerard J. Gorman。Devito 的架构与性能：一个用于自动化模板计算的系统。《*ACM*数学软件汇刊》，46(1)，2020年4月。[28] Chengyuan Deng、Shihang Feng、Hanchen Wang、Xitong Zhang、Peng Jin、Yinan Feng、Qili Zeng、Yinpeng Chen 和 Youzuo Lin。OpenFWI：用于地震全波形反演的大规模多结构基准数据集，2023年6月。arXiv:2111.02926 [cs].[29] Niharika Karnik、Yash Bhangale、Mohammad G. Abdo、Andrei A. Klishin、Joshua J. Cogliati、Bingni W. Brunton、J. Nathan Kutz、Steven L. Brunton 和 Krithika Manohar。PySensors 2.0：用于稀疏传感器布置的 Python 软件包，2025年9月。arXiv:2509.08017 [cs].[30] Ken-Ichi Funahashi 和 Yuichi Nakamura。利用连续时间循环神经网络逼近动力系统。《神经网络》，6(6):801–806，1993年。[31] Kurt Hornik、Maxwell Stinchcombe 和 Halbert White。多层前馈网络是通用逼近器。《神经网络》，2(5):359–366，1989年。[32] Moshe Leshno、Vladimir Y. Lin、Allan Pinkus 和 Shimon Schocken。具有非多项式激活函数的多层前馈网络可以逼近任意函数。《神经网络》，6(6):861–867，1993年。[33] Lisha Li、Kevin Jamieson、Giulia DeSalvo、Afshin Rostamizadeh 和 Ameet Talwalkar。Hyperband：一种新颖的基于多臂老虎机的超参数优化方法，2018年6月。arXiv:1603.06560 [cs]。

A 证明

A.1 引理 3.3 的证明

证明。设 $\iota\colon X \hookrightarrow C^0(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$ 表示连续嵌入，并定义 $G_k\colon \mathcal{A} \to X$为 $G_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) := F^k_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{x}$。于是 $T(\boldsymbol{y}) = \iota(G_k(\Psi(\boldsymbol{y})))$。根据假设 3.2，$\Psi\colon Y \to \mathcal{A}$ 是 Lipschitz 连续的，因此也是连续的。根据假设，G_k 在 $\mathcal{A}$ 上连续。因此，复合映射 $\boldsymbol{y} \mapsto \iota(G_k(\Psi(\boldsymbol{y})))$ 是一个从 Y到 $C^0(\Omega\ \mathbb{R}^{d_x})$ 的连续映射，这证明了 T的连续性。对于稳定性界，任取 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in Y$，我们有

$$\|T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{y}')\|_{C^0} \le C_{\mathrm{ev}}\|G_k(\Psi(\boldsymbol{y})) - G_k(\Psi(\boldsymbol{y}'))\|_X,$$

其中我们使用了嵌入不等式。利用 G_k 在 $\mathcal{A}$ 上是 L_{F^k}-Lipschitz 的，且 Ψ 在 Y 上是 L_Ψ-Lipschitz 的，

$$\|G_k(\Psi(\boldsymbol{y})) - G_k(\Psi(\boldsymbol{y}'))\|_X \le L_{F^k}\|\Psi(\boldsymbol{y}) - \Psi(\boldsymbol{y}')\|_{\mathcal{P}\times X} \le L_{F^k}L_\Psi\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|.$$

将上述两个公式合并，即可得到所需的不等式。 □

A.2 定理 3.4 的证明

证明。令 $q = (k+1)p$，并回忆 $Y = \Phi_k(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^q$ 是紧的。定义窗口末端状态映射 $U\colon Y \to X$为

$$U(\boldsymbol{y}) := G_k(\Psi(\boldsymbol{y})) \in X, \quad \boldsymbol{y} \in Y.$$

由于 Ψ 在 Y上连续（假设 3.2），且根据假设，G_k 在 $\mathcal{A}$ 上连续，因此 U 是连续的。此外，$U(Y) \subset \mathcal{A}_X$。

由于 $\mathcal{A}_X$是紧的，且具有有限盒计数维 d_X，Mañé 投影定理表明，对任意整数 $d_z > 2d_X$，存在一个有界线性映射 $E\colon X \to \mathbb{R}^{d_z}$，它在 $\mathcal{A}_X$上是单射，并且在 Z上存在一个（Hölder 连续、因而连续的）逆映射 $E^{-1}\colon Z \to \mathcal{A}_X\colon = E(\mathcal{A}_X) \subset \mathbb{R}^{d_z}$ [20]。定义潜在映射 $H\colon Y \to Z$为$H(\boldsymbol{y}) := E(U(\boldsymbol{y}))$，它作为复合映射是连续的。接下来定义解码器目标 $D : \Omega \times Z \to \mathbb{R}^{d_x}$ 为

$$D(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}) := \big(E^{-1}(\boldsymbol{z})\big)(\boldsymbol{\xi}).$$

这是良定义的，因为 $E^{-1}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{A}_X \subset X$，且点值求值在 X上连续。由于 E^{-1} 在 Z 上连续，且（$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{x}$）$\mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$在 $\Omega \times X$上连续，因此 D 在紧集 $\Omega \times Z$上连续。最后，对于任意 $\boldsymbol{y} \in Y$和 $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$，

$$T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\xi}) = U(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\xi}) = \big(E^{-1}(H(\boldsymbol{y}))\big)(\boldsymbol{\xi}) = D\big(\boldsymbol{\xi}, H(\boldsymbol{y})\big),$$

这就证明了该因子分解。

对于逼近，注意到 H 在紧集 Y 上连续，且 D 在紧集 $\Omega \times Z$上连续。因此 D 一致连续；令 ω_D 为其关于第二个自变量的连续模:

$$\omega_D(r) := \sup\big\{\|D(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}) - D(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}')\| : \boldsymbol{\xi} \in \Omega,\ \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}' \in Z,\ \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\| \le r\big\},$$

因此，当 $r \to 0$时，$\omega_D(r) \to 0$。固定 $\varepsilon > 0$，并选择 $\delta > 0$ 使得 $\omega_D(\delta) \le \varepsilon/2$。根据紧集上的通用逼近，存在神经网络参数化 $\mathcal{G}\colon Y \to \mathbb{R}^{d_z}$ 和 $\mathcal{F}\colon \Omega \times \mathbb{R}^{d_z} \to \mathbb{R}^{d_x}$，使得

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in Y} \|H(\boldsymbol{y}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{y})\| \le \delta \quad \text{and} \quad \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Omega,\ \boldsymbol{z}\in Z} \|D(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z})\| \le \varepsilon/2,$$

例如，对 $\mathcal{G}$ 使用循环／窗口编码器，对 $\mathcal{F}$ [30, 31, 32]使用前馈／调制网络。于是，对于任意 $\boldsymbol{y} \in Y$和 $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$，

$$\begin{aligned}
&\big\|T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y}))\big\| = \big\|D(\boldsymbol{\xi}, H(\boldsymbol{y})) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y}))\big\| \\
&\le \|D(\boldsymbol{\xi}, H(\boldsymbol{y})) - D(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y}))\| + \|D(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y})) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{G}(\boldsymbol{y}))\| \\
&\le \omega_D(\|H(\boldsymbol{y}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{y})\|) + \varepsilon/2 \le \omega_D(\delta) + \varepsilon/2 \le \varepsilon,
\end{aligned}$$

至此，证明完毕。 □

注释 A.1（近似嵌入与误差底限）。假设 3.2 是一种理想化：在有限采样、存在传感器噪声且传感器预算有限的情况下，延迟映射 Φ_k 可能无法在 $\mathcal{A}$上严格满足单射，也可能虽为单射却病态。两种常见的放宽方式可以明确稳定性情况。（*i*）单射但非 *Lipschitz*。如果 Φ_k在 $\mathcal{A}$ 上是单射，但其逆映射仅一致连续，则可用一个连续模 ω 替代假设 3.2 中的 Lipschitz 界，使得

$$\|\Psi(\boldsymbol{y}) - \Psi(\boldsymbol{y}')\|_{\mathcal{P}\times X} \le \omega(\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|), \quad \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in Y. \tag{19}$$

此时稳定性估计变为

$$\|T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{y}')\|_{C^0} \le C_{\mathrm{ev}} L_{F^k}\, \omega(\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|), \tag{20}$$

因此，观测扰动会根据 ω 所编码的（可能是次利普希茨的）条件性转化为重建扰动。（*ii*）非单射（内在歧义）。如果 Φ_k 不是单射，一个有用的可辨识性代理是歧义函数

$$\alpha(\varepsilon) := \sup\Big\{ \|G_k(a) - G_k(a')\|_X : \, a, a' \in \mathcal{A},\ \|\Phi_k(a) - \Phi_k(a')\| \le \varepsilon \Big\}, \tag{21}$$

其中，$a = (\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x})$ 表示增广状态，而 $G_k(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x}) := F^k_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{x}$ 是窗口末端状态。当 $\alpha(\varepsilon) > 0$ 时，两个不同的增广状态（其 $\boldsymbol{\mu}$ 可能不同）可以生成彼此 ε-接近的观测窗口，因此，仅使用该窗口的方法都无法保证将重建误差降低到低于 $C_{\mathrm{ev}}\alpha(\varepsilon)$ 的量级（其中 ε 由噪声/离散化决定）。这两种观点都促使我们增大窗口长度（更大的 k）和/或传感器数量（更大的 p），直到经验映射达到充分良好的条件性，正如我们在消融研究中所探讨的那样。

B 训练细节

为了确定所有示例中 STRIDE-FMMNN 的最佳超参数配置，我们采用贝叶斯优化 [33]进行超参数搜索。所考虑的超参数范围列于表6。STRIDE训练（包括 STRIDE-FMMNN 和 STRIDE-SIREN）的细节及优化后的超参数见表7。SHRED 和 SHRED-ROM 使用与 STRIDE 相同的时间解码器，并采用包含 2 个隐藏层的浅层解码器，两个隐藏层分别有 350 和 400 个神经元，这与 [8]中的默认设置相同。对于所有训练好的模型，我们都采用提前停止机制：在 80 个训练轮次的周期内，如果验证损失在连续 10 个训练轮次中下降幅度未超过 0.5%，则终止训练。

表6：STRIDE-FMMNN训练的超参数搜索范围

超参数	*KS*	*FlowAO*	浅水方程（*128×128*）	地震
潜在状态数量	16 – 128	16 – 128	32 – 256	32 – 256
解码器深度	2 – 10	2 – 10	3 – 12	3 – 12
解码器秩	16 – 128	16 – 128	32 – 256	32 – 256
解码器宽度	256 – 2048	256 – 2048	256 – 2048	256 – 2048
傅里叶嵌入维度	0 – 50	0 – 50	0 – 50	0 – 50
学习率	1E-3 – 5E-3	1E-3 – 5E-3	1E-3 – 5E-3	1E-3 – 4E-3
批次大小	128 – 1024	16 – 128	16 – 128	64 – 128

表 7：STRIDE 的训练细节

超参数	*KS*	*FlowAO*	浅水方程 *(128×128)*	地震
LAG	50	50	50	50
传感器数量	2	3	100	100
空间点数量	100	5000	4096	4900
潜在状态数量	128	64	128	256
隐藏层数量	2	2	2	2
FMMNN解码器深度	3	6	8	4
FMMNN解码器秩	128	32	32	128
FMMNN解码器宽度	1024	256	256	1024
SIREN解码器深度	3	6	8	4
SIREN解码器宽度	384	96	96	384
傅里叶嵌入维度	0	5	20	5
FMMNN学习率	3E-3	3E-3	2E-3	3E-3
SIREN 学习率	1E-4	1E-4	1E-4	1E-4
调度器 gamma/耐心值	0.4/10	0.4/10	0.4/10	0.4/10
批次大小	256	128	128	128

表 8 和表 9 列出了用于参数估计（见图 15）和预测（见图 16）的辅助模型的训练细节。

表 8：辅助MLP（参数估计）的训练细节

超参数	浅水方程（*128×128*）	*FlowAO*
潜在维度	128	64
隐藏维度	128	64
隐藏层数量	2	2
参数维度	2	1
激活函数	GELU	GELU
学习率	2E-4	5E-4
训练轮数	2000	2000
批次大小	1024	1024

表 9：辅助长短期记忆网络（预测）的训练细节

超参数	浅水方程（*128×128*）	地震
输入长度	20	20
输出长度	1	1
潜在维度	128	256
隐藏维度	256	256
隐藏层数量	2	2
学习率	1E-3	1E-3
调度器 gamma/耐心值	0.5/10	0.5/10
训练轮数	400	400
Dropout	0.1	0.1
批次大小	1024	1024