arXiv:2602.04205v1 [math.AP] 4 Feb 2026

三维径向情形下纯泡型II型爆破解在能量临界波动方程中的不存在性

Ruipeng Shen 天津大学
应用数学中心 中国天津

2026年2月5日

摘要

本文研究三维径向情形下聚焦型能量临界波动方程。根据在径向情形下已得到验证的孤子分解猜想，任意II型爆破解在趋近爆破时刻时，都会分解为若干个彼此解耦的基态、一个自由波以及一个小误差的叠加。我们证明，不存在任何纯泡型II型爆破解。换言之，无论泡数是多少，II型爆破解的孤子分解中的自由波部分都不可能为零。

1 引言

1.1 背景

本文研究三维空间中的聚焦型能量临界波动方程 ace

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^4 u, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \\ (u, u_t)|_{t=0} = (u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2. \end{cases} \tag{CP1}$$

我们关注具有径向对称的解。众所周知，(CP1) 的解满足能量守恒定律：

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x,t)|^2 + \frac{1}{2} |u_t(x,t)|^2 - \frac{1}{6} |u(x,t)|^6 \right) \mathrm{d}x = \text{Const.}$$

径向解最重要的不变性是伸缩。也就是说，若 u 是 (CP1) 的一个解，那么

$$u_\lambda = \frac{1}{\lambda^{1/2}} u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda} \right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

也是 (CP1) 的一个解。我们称该方程为“能量临界”，因为 u 和 u_λ 的初始数据具有相同的 $\dot{H}^1 \times L^2$ 范数，即波动方程的能量范数。

聚焦情形下解的整体行为比散焦情形下复杂得多 $\partial_t^2 u - \Delta u = -|u|^4 u$；后者在20世纪最后几十年得到了深入研究。简而言之，散焦情形下所有有限能量解都在整个时间轴上有定义，并且在两个时间方向上都散射。例如，请参见 [17, 33, 34, 35, 36, 40], 。如果初始数据的能量范数较小，那么 (CP1) 的相应解仍会散射。然而，对于大解，情况则有所不同。

基态 (Ground states) (CP1) 的一个典型不散射解是 Talenti-Aubin 解

$$W(x)=\left(\frac{1}{3}+|x|^2\right)^{-1/2}.$$

该解在所有（不一定是径向的）方程 (CP1) 的平稳解中能量最小，也就是说，它是椭圆方程 $-\Delta u=F(u)$ 的解。事实上，所有径向有限能量平稳解恰好为 $\{0,\pm W_\lambda\}$，其中

$$W_\lambda=\frac{1}{\lambda^{1/2}}W\left(\frac{x}{\lambda}\right),\qquad \lambda>0.$$

除 0 以外，这些解的能量都相同，因此统称为基态。

Fin有限时间爆破。与散焦情形不同，方程 (CP1) 的解可能在有限 time $T_+\in\mathbb{R}^+$。经典的局部理论由此给出

$$\|u\|_{L^5L^{10}([0,T_+)\times\mathbb{R}^3)}=+\infty.$$

有限时间爆破解还可进一步分为两类：I 型爆破解满足

$$\limsup_{t\to T_+}\|(u,u_t)\|_{\dot H^1\times L^2}=+\infty.$$

这类解可以显式构造。显然，下面是方程 (CP1) 的一个解

$$u(x,t)=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}(T_+-t)^{-1/2},$$

在 $t\to T_+$ 时爆破。随后，利用光滑截断技术和有限传播速度，可得到一个有限能量 I 型爆破解。

II 型爆破解 相比之下，II 型爆破解满足

$$\limsup_{t\to T_+}\|(u,u_t)\|_{\dot H^1\times L^2}<+\infty.$$

孤子分解猜想预言，当时间趋近爆破时刻时，II 型爆破解总能分解为若干相互解耦的孤立波之叠加、一个自由波（辐射部分）以及一个小误差项。在径向情形下，所有孤立波都是大小虽小但差异显著的基态。更准确地说，我们有

$$\vec u(t)=\sum_{j=1}^{N}\zeta_j(W_{\lambda_j(t)},0)+\vec u_L(t)+o(1),\qquad t\to T_+.$$

其中 $\vec u=(u,u_t)$，u_L 是一个自由波，$\zeta_j\in\{+1,-1\}$；尺度函数 $\lambda_j(t)>0$ 满足

$$\lim_{t\to T_+}\frac{\lambda_{j+1}(t)}{\lambda_j(t)}=0;\qquad\qquad \lim_{t\to T_+}\frac{\lambda_1(t)}{T_+-t}=0.$$

上述解通常称为 N-泡解。特别地，如果 $u_L=0$，则称其为纯 N-泡解。请注意，这一孤子分解猜想已在径向情形下得到验证：首先，Duyckaerts-Kenig-Merle [9] 在三维情形中结合轮廓分解与能量通道方法给出了证明；随后，Duyckaerts-Kenig-Merle [12],Duyckaerts-Kenig-Martel-Merle [7], Collot-Duyckaerts-Kenig-Merle [2] 以及 Jendrej-Lawrie [24]将其推广至高维，尽管非径向情形仍是一个开放问题（关于部分结果，请参见 Duyckaerts- Jia-Kenig [6] ）。最近，作者 [39] 给出了这一猜想在三维径向情形下的另一种证明，并讨论了孤子分解的一些进一步定量性质。

II 型爆破解的存在性 径向 II 型爆破解的存在性早在孤子分解猜想的首次证明之前就已得到验证。单泡爆破解首先由 Krieger-Schlag-Tataru [28], 构造，随后 Krieger-Schlag [29] 以及 Donninger-Huang-Krieger-Schlag [5], 通过选择不同的尺度函数 $\lambda_1(t)$ 进行了构造。高维中的类似 II 型爆破解已在 Hillairet-Rapha¨el [18] 和 Jendrej [20]的工作中得到讨论。关于一个（弱）解在 II 型爆破时刻之后的演化，可参见 Krieger-Wong [30]。

1.2 主要课题与结果

仔细考察 Krieger、Schlag 和 Tataru 的工作 [28] 可以发现，在他们构造的 II 型爆破解示例中，辐射部分 u_L 可以在能量空间中任意小，但不可能为零。自然的问题是：是否存在不含任何辐射的 II 型爆破解（即 $u_L = 0$）？ 换言之，我们关注纯泡爆破解的存在性。已有结果确实为这个问题的答案提供了一些线索。例如，在任意维数的径向情形下，Jendrej [21] 证明了，除非这两个泡的符号相同，否则纯双泡解不存在 $d \geq 3$。

在本文中，我们考虑三维径向情形，并证明上述问题的答案是否定的。换言之，无论泡数和/或各泡的符号如何，纯多泡（或单泡）II 型爆破解都不存在。本文的主要结果是

定理 1.1. 不存在任何满足 (CP1) 的径向纯泡 II 型爆破解 u 。换言之，对于任何径向有限时 II 型爆破解，上述孤子分解中的辐射部分 u_L 都不可能为零。

注 1.2. 根据有限传播速度，定理 1.1 还意味着，在爆破点 $(0, T_+) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$的任意开邻域内，自由波 u_L都不可能消失。该结果的单泡情形此前已有研究。请参见 Duyckaerts-Merle *[13]* 和 Jendrej *[19]*。本工作的创新之处在于，该结果适用于所有泡数和符号。

注 1.3. 整体解，即对所有 $t \geq 0$都有定义的解，其情形截然不同。纯单泡整体解确实存在，例如基态。事实上，Duyckaerts-Merle *[13]* 对能量为阈值能量 $E = E(W, 0)$ 的 (CP1) 的所有解进行了分类。结果表明，在某些技术假设下，所有径向纯单泡整体解都是 $\pm W$、 $\pm W^+$、 $\pm W^-$ 及其伸缩变换和/或时间平移。这里的 $W^\pm$ 是满足以下条件的两个特殊解

- 两个 $\vec{W}^\pm(t)$ 在能量空间中收敛到 $(W, 0)$，当 $t \to +\infty$;
- W^- 在负时间方向散射； W^+ 在负时间方向有限时间爆破。

作者想指出，Jendrej *[21]* 也证明了对于整体解，不存在符号相反的纯双泡。整体情形与有限时间爆破情形的一个主要区别在于，计算第一个气泡尺度 λ_1 时缺乏自然的参考点。更多细节请见注记 4.2。

注记 1.4. 迄今所有已知的孤子分解实例，都是三维径向情形下的单泡解。据作者所知，多泡解是否存在仍是一个未解决的问题。然而，在高维空间中，已经构造出至少含有两个泡的径向解。例如，请参见 Jendrej *[22]*。

注 1.5. 无色散的质量临界 Schr ´odinger 方程的有限时间爆破解确实存在。更多详情请参见 Bourgain-Wang *[1]* 。

注 1.6. 也可以研究孤子分解中爆破行为与辐射部分（在一些研究中也称为渐近轮廓）之间的关系。例如，请参见 Jendrej *[19],* 。对于其他波型方程，也可以研究类似问题。例如，Jendrej-Lawrie-Rodriguez *[23]* 讨论了 1-等变波映射单泡爆破解的孤子分解中的辐射部分。

1.3 总体思路

现在我们给出总体思路并概述证明。无需 loss of generality，我们可以假设爆破时刻 T_+ 为零，且泡数为 $n \geq 1$。基本思路是利用下面这个关于维里泛函的恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty u_t\left(ru_r+\frac{1}{2}u\right)r^2\mathrm{d}r=-\int_0^\infty |u_t|^2r^2\mathrm{d}r$$

并从某个合适的时刻 $t_* < 0$ 积分到 0，从而导出矛盾。为此，我们需要对时间充分接近零时的解 u 给出非常精确的逼近。主要工具包括作者先前工作 [39], 中给出的若干定量孤子分解估计，以及本文证明的这些估计的一个新颖且更精细的版本。这些估计通过波动方程的辐射理论得以证明。作者希望本文能够展示这种辐射理论的稳健性。证明分为以下几个步骤:

辐射的提取 首先，如果 u 是一个径向纯 n 泡型 II 型爆破解（$n \geq 1$），那么在没有色散假设的情况下，对于小的负时间 t，无法保证 u 支撑在球 $\{x : |x| < |t|\}$ 内。结合小数据理论与有限传播速度可知，我们可以将 u 的区域扩展到区域（t_0 是一个合适的小负时间）

$$\{(x,t):|x|>t\geq 0\}\cup\left(\mathbb{R}^3\times(t_0,0)\right)\cup\{(x,t):|x|>t_0-t\geq 0\},$$

与一个函数（称为辐射剖面） $G_- \in L^2(t_0,+\infty)$，使得

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{r>|t-t_0|}\left(|ru_r(r,t)-G_-(r+t)|^2+|ru_t(r,t)-G_-(r+t)|^2\right)\mathrm{d}r=0.$$

此外，不等式 $\|G_-\|_{L^2(t',\,0)}>0$ 对任意 $t'<0$都成立。否则， u 将成为光锥 $\{(x,t):|x|>|t-t'|\}$ 外部的非辐射解，这意味着 u 必为基态或零，从而导致矛盾。关于外部解理论（即仅定义在某个合适光锥外部的解）、辐射场理论以及非辐射解的概念和基本性质，请参阅第2节。

孤子分解 给定时间 $t' \in (t_0, 0)$，我们可以根据辐射剖面 G_-定义一个径向自由波 $v_{t',\,L}$，它在主光锥外与 $u(x,t+t')$渐近等价，即

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{|x|>|t|}|\nabla_{t,x}(u(x,t+t')-v_{t',L}(x,t))|^2\mathrm{d}x=0.$$

由于 $v_{t',L}$ 的 Strichartz 范数受其能量范数控制，而能量范数又受 $\delta(t') \doteq \|G_-\|_{L^2(t',0)} \ll 1$ 控制，我们便得到孤子分解

$$u(x,t'+t)=\sum_{j=1}^n\zeta_jW_{\lambda_j(t')}(x)+v_{t',L}(x,t)+w(t';x,t),\qquad |x|>|t|;$$

结合这些估计（见命题 2.4）

$$\frac{\lambda_{j+1}(t')}{\lambda_j(t')} \lesssim_j \delta(t')^2; \qquad \|\vec{w}(t',\cdot,0)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \lesssim_n \delta(t');$$

这可以通过将右端 $\delta(t')$ 替换为（并将 $\delta(t')^2$ 替换为 $\tau(t')^2$）来进一步改进

$$\tau(t') = \sup_{\lambda\le\lambda_1(t')} \left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_{t',L}\right\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} + \delta(t')^5 \lesssim_1 \delta(t').$$

这里 χ_0 是 $\{(x,t)$ 的特征函数：$|x|>|t|\}$。除非 G_- 在 t' 附近发生强集中，否则这会显著改进孤子分解估计。由 u 的支撑集，我们还可以证明第一个气泡尺度 $\lambda_1(t')$ 满足

$$\lambda_1(t') \approx \left(\int_{t'}^0 G_-(s)\mathrm{d}s\right)^2 \lesssim |t'|\delta(t')^2.$$

提取良好时刻 对每个小时间 $t'<0$，我们可以证明存在一个非负整数 k，使得

$$\|G_-\|_{L^2(t',t'+2^k\lambda_1(t'))} \gtrsim 2^k\delta(t')^2. \tag{1}$$

否则不等式 $\tau(t') \ll \delta(t')^2$ 将成立，且上述孤子分解会“过于良好”，从而下列近似正交性成立

$$E(u) \approx nE(W,0) + E(v_{t',L}) > nE(W,0),$$

由此得出矛盾。一个直接推论是，我们总能找到一个收敛到零的时间序列，使得第一个气泡尺度相对较大 $\lambda_1(t') \ge \delta(t')^{2+\kappa}$。这里 $\kappa>0$ 是一个小常数。事实上，若 $\lambda_1(t')$ 总是非常小，则将该假设与下界 (1) 相结合，会导致 G_- 在任意给定小时间的右端发生过强集中，从而使 $\|G_-\|_{L^2(t',0)}$ 在 t' 到达零之前消失，并给出矛盾。最后我们观察到 $\tau(t')$ 也可以被经典极大函数 $(MG_-)(t')$ 控制。由此观察可得

- 通过稍微调整 t' 的取值，我们可以找到一个时间序列 $t_*\to 0^-$，使得

$$\lambda(t_*) \gtrsim \delta(t_*)^{2+\kappa}; \qquad \tau(t_*) \lesssim \delta(t_*)^{2-\kappa}.$$

- 在区间（t_*,0）内的大多数时间 t，孤子分解都“相当精确”，尽管偶尔可能不够精确。

代入Virial恒等式 在最后一步，我们将

$$\vec{u}(\cdot,t) = \sum_{j=1}^n \zeta_j\left(W_{\lambda_j(t)},0\right) + \vec{v}_{t,L}(\cdot,0) + \vec{w}(t;\cdot,0), \qquad t\in[t_*,0).$$

代入Virial恒等式

$$\int_0^\infty u_t(r,t_*)\left(ru_r(r,t_*)+\frac{1}{2}u(r,t_*)\right)r^2\mathrm{d}r = \int_{t_*}^0\int_0^\infty |u_t|^2r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}t,$$

并通过反证法完成证明。请注意，上述恒等式中的主要项要么来自辐射部分$v_{t,\ L}$，它可以用辐射剖面 G_-显式表示；要么来自尺寸最大的基态（第一个泡），其尺寸也可以通过辐射剖面相当精确地近似。项 $w(t;\cdot,0)$是一个较小的误差项，其

$$\|\vec{w}(t;\cdot,0)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \lesssim_n \tau(t),$$

其中上界 $\tau(t)$ 很小，对于 $t=t_*$ 以及大多数时间 $t\in[t_*,0)$。

1.4 本文结构

本文结构如下：在第2节中，我们首先介绍一些记号、基本概念和预备结果，包括外部解、辐射场及其理论，以及若干关于辐射部分的孤子分解估计。随后，我们证明若干精细孤子分解估计，并在第3节中给出这些估计的一些应用。完成这些准备工作后，余下三节将用于证明主定理。我们在第 4 节中给出第一个泡大小的近似估计，在第5节中证明“良好时刻”的存在性，即第一个泡较大且孤子分解良好的时刻，最后在第6节中应用Virial恒等式完成证明。

2 预备结果

本节简要回顾已有的相关理论和结果。我们首先介绍一些记号。

记号 本文中，记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个常数，使得不等式 $A \leq cB$ 成立。此外，我们用下标表示该常数依赖于相应的下标，而不依赖于其他因素。特别地，记号 $\lesssim_1$ 意味着常数 c 是一个绝对常数。记号 $\gtrsim$ 和 $\simeq$ 的含义也类似。

空间范数 有时需要考虑径向 $\dot{H}^1$ 函数在球外的限制，尤其是在考虑外部解时。我们将 $\mathcal{H}(R)$ 记为径向函数 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ 在区域 $\{x : |x| > R\}$ 上的限制所构成的空间，其范数定义为

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}(R)} = \left(\int_{|x|>R} \left(|\nabla u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2 \right) \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

特别地，我们将 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(0)$ 定义为径向 $\dot{H}^1 \times L^2$ 函数的希尔伯特空间。

非线性项 除非另有说明，全文均使用记号 $F(u) = |u|^4 u$ 。

2.1 外部解

为了避免解在原点附近发生无关紧要的爆破（从某种意义上说，这种爆破被认为是不可预测的），引入定义在适当光锥之外的 (CP1) 的解是有帮助的。我们先介绍一些记号。给定 $R \geq 0$，定义

$$\Omega_R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : |x| > |t| + R\}$$

并用记号 χ_R 表示 Ω_R 的特征函数。同样，我们令

$$\Omega_{R_1,R_2} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : |t| + R_1 < |x| < |t| + R_2\}$$

表示通道状区域，并令 χ_{R_1,R_2} 表示相应的特征函数。我们还将 Y 范数定义为常规的 $L^5 L^{10}$ Strichartz 范数。更准确地说，给定一个时间区间 J，我们定义

$$\|u\|_{Y(J)} = \|u\|_{L^5 L^{10}(J \times \mathbb{R}^3)} = \left(\int_J \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^{10} \mathrm{d}x \right)^{1/2} \mathrm{d}t \right)^{1/5}.$$

这个 Y 范数将经常与上面定义的特征函数结合使用。例如，我们有

$$\|\chi_R u\|_{Y(J)} = \left(\int_J \left(\int_{|x|>|t|+R} |u(x,t)|^{10} \mathrm{d}x \right)^{1/2} \mathrm{d}t \right)^{1/5}.$$

外部解 令 u、F 为定义在区域

$$\Omega = \{(x,t) : |x| > |t| + R,\, t \in (-T_1, T_2)\} \subseteq \Omega_R, \qquad T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

若且唯若 u 是下述线性波动方程的外部解

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(x,t), & (x,t) \in \Omega; \\ (u, u_t)|_{t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H}; \end{cases}$$

当且仅当对于满足以下条件的任意有界闭时间区间 $J \subset (-T_1, T_2)$，不等式 $\|\chi_R u\|_{Y(J)} < +\infty$ 和 $\|\chi_R F\|_{L^1 L^2 (J \times \mathbb{R}^3)} < +\infty$ 成立

$$u = \mathbf{S}_L(u_0, u_1) + \int_0^t \frac{\sin(t-t')\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}} [\chi_R(\cdot, t') F(\cdot, t')] \mathrm{d}t', \qquad (x,t) \in \Omega \tag{2}$$

这里，$\mathcal{S}_L(u_0, u_1)$是初始数据为（u_0, u_1）的自由波。请注意，乘积 $\chi_R F$在区域 Ω_R之外始终为零。尽管初始数据（u_0, u_1）是在上述全空间中定义的，但波传播的有限速度意味着，球 $\{x$ 中的值：$|x| \leq R\}$ 实际上无关紧要。换言之，只需指定初始数据（u_0, u_1）$\in \mathcal{H}(R)$即可。我们也可以用同样的方式定义非线性波动方程的外部解。例如，u 是下列方程的解

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(u), & (x,t) \in \Omega; \\ (u, u_t)|_{t=0} = (u_0, u_1) \end{cases}$$

当且仅当对任意有界闭时间区间$J \subset (-T_1, T_2)$，不等式 $\|\chi_R u\|_{Y(J)} < +\infty$ 成立；这也意味着 $\|\chi_R F(u)\|_{L^1 L^2 (J \times \mathbb{R}^3)} < +\infty$，并且恒等式 (2) 在 $F(x,t) = F(u(x,t))$ 的条件下成立。关于外部解的更多细节，参见 Duyckaerts-Kenig-Merle [11]。

局部理论 外部解关于初始数据的局部适定性和连续依赖性（扰动理论）可直接由 Strichartz 估计（例如参见 [16] ）

$$\sup_t \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} + \|u\|_{L^5 L^{10}} \lesssim_1 \|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}} + \|(\partial_t^2 - \Delta) u\|_{L^1 L^2}$$

以及标准的不动点论证得出。该论证与全空间中的论证 $\mathbb{R}^3$类似，如今已相当标准。局部适定性可参见 [25, 32] ，扰动理论可参见 [27, 37]，仅举数例。

2.2 辐射场

辐射场理论在讨论波动方程时非常有用，尤其是研究解的渐近行为。该理论已有半个多世纪的历史。例如，请参见 Friedlander [14, 15] 。以下表述版本出自 Duyckaerts-Kenig-Merle [10]。

定理 2.1（辐射场）。假设 $d \geq 3$，且令 u 为自由波动方程 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ 的一个解，其初始数据为（u_0，u_1）$\in \dot{H}^1 \times L^2$（$\mathbb{R}^d$）。那么

$$\lim_{t\to\pm\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla u(x,t)|^2 - |u_r(x,t)|^2 + \frac{|u(x,t)|^2}{|x|^2} \right) \mathrm{d}x = 0$$

并且存在两个函数 $G_\pm \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1})$，使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| r^{\frac{d-1}{2}} \partial_t u(r\theta, t) - G_\pm(r \mp t, \theta) \right|^2 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 0;$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| r^{\frac{d-1}{2}} \partial_r u(r\theta, t) \pm G_\pm(r \mp t, \theta) \right|^2 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 0.$$

此外，映射 $(u_0, u_1) \to \sqrt{2} G_\pm$ 是从 $\dot{H}^1 \times L^2(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1})$ 的双射等距。

在本文中，函数 $G_\pm$ 被称为自由波 u 的辐射剖面，或等价地，称为相应初始数据 (u_0, u_1) 的辐射剖面。显然，u 是径向的当且仅当辐射剖面与角度 θ 无关。我们还可以用某一时间方向上的辐射剖面给出自由波的显式公式，以及另一时间方向上的辐射剖面。例如请参见 [3, 31]。在本工作中，我们只需利用一个简单情形，即三维空间中的径向情形。事实上我们有

$$u(r,t) = \frac{1}{r} \int_{t-r}^{t+r} G_-(s) \mathrm{d}s; \qquad G_+(s) = -G_-(-s). \tag{3}$$

这表明，我们可以通过指定其两个辐射剖面 $G_\pm \in L^2(\mathbb{R}^+)$ 在 $s \in \mathbb{R}^+$ 处的取值来唯一确定一个径向自由波。直接计算表明，初始数据 (u_0, u_1) 可由下式给出

$$u_0(r) = \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} G_-(s) \mathrm{d}s; \qquad u_1(r) = \frac{G_-(r) - G_-(-r)}{r}. \tag{4}$$

经分部积分可得

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}(R)}^2 = 8\pi \|G_-\|_{L^2(\{s:|s|>R\})}^2 + 4\pi R |u_0(R)|^2. \tag{5}$$

我们还可以针对非齐次/非线性波动方程的适当解，考虑辐射场和辐射剖面。

Lem引理 2.2（非齐次方程的辐射场）。设 $R \geq 0$。令 u 为
辐射波动方程的外部解

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(t,x); & (x,t) \in \Omega_R; \\ (u, u_t)|_{t=0} = (u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2. \end{cases}$$

若 F满足$\|\chi_R F\|_{L^1 L^2\,(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} < +\infty$，则存在唯一的辐射剖面 $G_\pm \in L^2([R, +\infty))$，使得

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{R+t}^\infty \left(|G_+(r-t) - r u_t(r,t)|^2 + |G_+(r-t) + r u_r(r,t)|^2 \right) \mathrm{d}r = 0; \tag{6}$$
$$\lim_{t\to-\infty} \int_{R-t}^\infty \left(|G_-(r+t) - r u_t(r,t)|^2 + |G_-(r+t) - r u_r(r,t)|^2 \right) \mathrm{d}r = 0. \tag{7}$$

此外，对于上述给出的 $G_\pm$ 以及初始数据（u_0, u_1）对应的辐射剖面$G_{0,\pm}$，以下估计成立：

$$4\sqrt{\pi} \|G_- - G_{0,-}\|_{L^2([R,R'])} \leq \|\chi_{R,R'} F\|_{L^1 L^2((-\infty,0]\times\mathbb{R}^3)}, \qquad R' > R;$$
$$4\sqrt{\pi} \|G_+ - G_{0,+}\|_{L^2([R,R'])} \leq \|\chi_{R,R'} F\|_{L^1 L^2([0,+\infty)\times\mathbb{R}^3)}, \qquad R' > R.$$

证明可见作者先前工作的第2节（引理2.5和注 2.6） [39]。作者想指出，我们实际上可以给出一个显式公式

$$G_+(s) - G_{0,+}(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (s+t)F(s+t,t)\mathrm{d}t.$$

如果 u 是在 Ω_R 中定义且满足 $\|\chi_R u\|_{Y(\mathbb{R})} < +\infty$ 的 (CP1) 外部解，那么引理 2.2 同样适用于该解，因为我们的假设保证了 $\|\chi_R F(u)\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} < +\infty$。引理 2.2 中给出的相应辐射剖面 $G_\pm \in L^2([R,+\infty))$ 被称为 u 的（非线性）辐射剖面。

2.3 渐近等价的解

假设 $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \dot{H}^1 \times L^2)$ 和 $R \geq 0$。如果 u 和 v 满足 R-弱渐近等价关系，则称它们是 R-弱渐近等价的，即

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{|x|>R+|t|} |\nabla_{t,x}(u-v)|^2\mathrm{d}x = 0.$$

特别地，如果 $R = 0$，那么我们称它们彼此渐近等价。由于上述积分只涉及 u, v 在外部区域 Ω_R 中的取值，因此上述定义同样适用于外部解 u 和 v。

辐射部分 给定定义在 Ω_0, 上的 (CP1) 径向外部解，若 u 与自由波 v_L渐近等价，则称 v_L 为 u 的辐射部分（在光锥之外）。事实上，外部解 u 在 Ω_0 中与某个自由波渐近等价，当且仅当 $\|\chi_0 u\|_{Y(\mathbb{R})} < +\infty$。若 $\|\chi_0 u\|_{Y(\mathbb{R})} < +\infty$，则可由引理 2.2 确定其（非线性）辐射剖面 $G_\pm \in L^2(\mathbb{R}^+)$，继而为 $s > 0$构造一个具有相同辐射剖面的自由波，这就是所需的渐近等价自由波。关于条件$\|\chi_0 u\|_{Y(\mathbb{R})} < +\infty$ 为何也是必要的，请参阅 [38]。请注意，这里对辐射部分的定义不同于本文引言部分所述的孤子分解中，爆破时刻T_+的辐射部分 u_L。

非辐射解。若一个解 u 满足自由波动方程、非线性波方程 (CP1) 或其他相关波动方程，当且仅当它（R-弱）渐近等价于零时，就称其为（R-弱）非辐射解。非辐射解是能量通道方法中的一个重要课题（例如参见 [4, 8, 26] ），近年来在非线性波动方程的研究中发挥着重要作用。我们考虑两个重要的例子。

第一个例子是自由波动方程的径向 R-弱非辐射解。根据辐射场的基本理论，这等价于相应的辐射剖面满足：对 $s > R$，有 $G_\pm(s) = 0$；或者 $G_-(s)$ 的支撑集位于区间 $[-R, R]$。因此，借助 (3)，我们可以根据辐射剖面，明确给出区域 Ω_R 内弱非辐射自由波 u 的取值。

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\int_{-R}^{R} G_-(s)\mathrm{d}s, \qquad r > |t| + R.$$

这些非辐射解构成一个由 $1/r$ 张成的一维线性空间。第二个例子是 (CP1) 的非辐射解。事实上，正如引言中所提到的，所有非平凡的 (CP1) 径向非辐射解恰好都是基态 $\pm W_\lambda(x)$。当 $r \gg \lambda$ 非常大时，重新缩放的基态 W_λ 满足

$$W_\lambda(x) \approx \frac{\lambda^{1/2}}{r}.$$

也就是说， $\pm W_\lambda$ 的渐近行为总是类似于某个合适的径向（弱）非辐射自由波。事实上，正如 [38] 所示，对于能量临界波动方程的任意径向非辐射解，这种渐近等价都会成立。

备注 2.3。本文中的标准基态 $W(x)$ 是另一个基态的伸缩版本（因此略有不同），后者 $(1+|x|^2/3)^{-1/2}$ 用于大多数相关研究。这一选择有助于我们在计算辐射剖面时消除不必要的常数。

2.4 几乎非辐射解的孤子分解

只要主光锥中的辐射在 Strichartz 范数意义下足够弱，下面的命题就能逐一分离出每个泡。该命题在作者先前的工作 [39], 中得到证明，其精细版本将在下一节证明；它们在本文的论证中起着至关重要的作用。

命题 2.4。设 n 为正整数。那么存在一个小常数 $\delta_0 = \delta_0(n) > 0$和一个绝对常数 $c_2 \gg 1$，使得如果定义在 Ω_0中的径向外部解 u 满足 (CP1)，且与一个满足 $\delta \doteq \|\chi_0 v_L\|_{Y(\mathbb{R})} < \delta_0$的有限能量自由波 v_L 渐近等价，那么以下情况之一成立：

(a) 存在一个序列 $(\zeta_j, \lambda_j) \in \{+1,-1\} \times \mathbb{R}^+$ 对于 $j = 1, 2, \cdots, J$，满足 $0 \le J \le n-1$，使得

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \lesssim_j \delta^2, \qquad j = 1, 2, \cdots, J-1;$$

$$\left\| \vec{u}(\cdot,0) - \sum_{j=1}^{J} \zeta_j (W_{\lambda_j}, 0) - \vec{v}_L(\cdot,0) \right\|_{\dot{H}^1 \times L^2} + \left\| \chi_0 \left(u - \sum_{j=1}^{J} \zeta_j W_{\lambda_j} \right) \right\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_J \delta.$$

(b) 存在一个序列 $(\zeta_j, \lambda_j) \in \{+1,-1\} \times \mathbb{R}^+$ 对于 $j = 1, 2, \cdots, n$，满足

$$\frac{|\alpha_{j+1}|}{|\alpha_j|} \lesssim_j \delta, \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1;$$

使得 u 在外部区域中满足以下孤子分解估计

$$\left\| \vec{u}(\cdot,0) - \sum_{j=1}^{n} (W^{\alpha_j}, 0) - \vec{v}_L(\cdot,0) \right\|_{\mathcal{H}(c_2\lambda_n)} + \left\| \chi_{c_2\lambda_n} \left(u - \sum_{j=1}^{n} W^{\alpha_j} \right) \right\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_n \delta.$$

注记 2.5. 这里的命题与 *[39]* 中给出的原命题略有不同，体现在两个方面

- *[39]* 中的命题 4.1 适用于定义在较小外部区域 Ω_R上的 (CP1) 径向解，只要它仍然与具有较小 Strichartz 范数的自由波（弱）渐近等价。为简单起见，我们在此仅使用一个较弱的版本。更多详情请参见 *[39]* 的注记 4.2。

- 原命题使用单个参数 α 来表示一个基态

$$W^\alpha = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{3} + \frac{|x|^2}{\alpha^4} \right)^{-1/2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

我们将这个单参数替换为两个参数 ζ 和 λ。不难看出

$$W^\alpha = \zeta W_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \zeta \lambda^{1/2}.$$

注 2.6. 我们称定义在 Ω_0 中的径向外部解 u为 J-泡解，当且仅当 u 与一个自由波 v_L 渐近等价，且满足 $\|\chi_0 v_L\|_{Y(\mathbb{R})} < \delta_0(J+1)$，并且命题 2.4 给出的孤子分解恰好包含 J 个泡。

下面两个引理有助于比较两个渐近等价解。它们不仅是命题 2.4 证明所必需的，也是本文给出的精细孤子分解估计所必需的。其证明依赖于辐射场理论。请参阅[39]的第 4 节。

引理 2.7. 存在绝对正常数 ε_1、 β、 η，使得若 $0 \le R_1 < R_2$ 且

- u是 (CP1) 的一个外部解，且 S 是下列方程的一个外部解

$$(\partial_t^2 - \Delta)S = F(S) + e(x,t),$$

二者均定义在区域 Ω_{R_1}中，其中 $\|\chi_{R_1} u\|_{Y(\mathbb{R})}$、 $\|\chi_{R_1} S\|_{Y(\mathbb{R})}$、 $\|\chi_{R_1} e(x、\ t)\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} < +\infty$;

- 二者 u、 S 在 Ω_{R_1}中渐近等价;
- u、 S和 $w = u - S$ 满足以下不等式

$$\begin{aligned}\varepsilon \doteq \|\vec{w}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(R_2)} + \|\chi_{R_1,R_2} e(x,t)\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \\ + \|\chi_{R_2}\left(F(u) - F(S) - e(x,t)\right)\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} &\le \varepsilon_1;\\ \|\chi_{R_1,R_2} S\|_{Y(\mathbb{R})} &\le \eta;\\ \sup_{R_1\le r\le R_2}\left(r^{1/2}|w(r,0)|\right) &\le \beta;\end{aligned}$$

于是我们有

$$\|\vec{w}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(R_1)} + \|\chi_{R_1} w\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_1 R_1^{1/2}|w(R_1,0)| + \varepsilon.$$

引理 2.8. 设 η 为引理 2.7 中的常数。存在一个绝对正常数 ε_2，使得若 $3R_2/4 \le R_1 < R_2$ 且

- u是 (CP1) 的一个外部解，且 S 是下列方程的一个外部解

$$(\partial_t^2 - \Delta)S = F(S) + e(x,t).$$

其中 $\|\chi_{R_1} u\|_{Y(\mathbb{R})}$,$\|\chi_{R_1} S\|_{Y(\mathbb{R})}$ $\|\chi_{R_1} e(x,t)\|_{L^1L^2} < +\infty$。

- 解 u, S 在 Ω_{R_1} 中渐近等价。
- u, S和 $w = u - S$ 满足以下不等式

$$\begin{aligned}\varepsilon \doteq \|\vec{w}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(R_2)} + \|\chi_{R_1,R_2} e(x,t)\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \\ + \|\chi_{R_2}\left(F(u) - F(S) - e(x,t)\right)\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} &\le \varepsilon_2;\\ \|\chi_{R_1,R_2} S\|_{Y(\mathbb{R})} &\le \eta;\end{aligned}$$

于是我们有

$$\|\chi_{R_1} w\|_{Y(\mathbb{R})} + \|(w(\cdot,0), w_t(\cdot,0))\|_{\mathcal{H}(R_1)} \lesssim_1 \varepsilon.$$

3 孤子分解的改进

本节将对命题 2.4 作进一步改进。除非辐射部分 v_L 集中在原点 (0,0) 附近一个区域内，且该区域的大小小于或与第一个泡的大小相当，否则我们将得到更好的孤子分解估计。在接下来的几节中，我们将说明，这种集中通常很少发生。

3.1 精细孤子分解估计

本节的主要结果是

命题 3.1. 给定正整数 N，设 u 为 (CP1) 的径向 N-泡解，且辐射部分 v_L 较小。假设命题 2.4 给出如下孤子分解

$$u = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j W_{\lambda_j}(x) + v_L + w.$$

我们定义

$$\delta = \|\chi_0 v_L\|_{Y(\mathbb{R})}; \qquad \tau = \sup_{\lambda \le \lambda_1} \left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2} + \delta^5 \lesssim_1 \delta.$$

若 $\delta < \delta(N)$ 充分小，则必有

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \lesssim_j \tau^2,\ j = 1, 2, \cdots, N-1; \qquad \|\vec{w}(\cdot, 0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_N \tau.$$

注 3.2. 在相同假设下，若将 τ 替换为，则命题 3.1 中的相同估计仍然成立

$$\tau = \max_{j=1,2,\cdots,n} \left\|\chi_0 W_{\lambda_j}^4 v_L\right\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} + \|\chi_0 v_L\|_{Y(\mathbb{R})}^5.$$

证明完全相同。

命题 3.1 的证明。我们需要仔细回顾 [39] 中命题 2.4 的证明。首先回顾以下记号

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j W_{\lambda_j}(x) + v_L, \qquad w_n = u - S_n.$$

近似解 S_n 满足近似方程

$$(\partial_t^2 - \Delta) S_n = F(S_n) + e_n; \qquad e_n = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j F(W_{\lambda_j}) - F(S_n).$$

思路是从 $S_0 = v_L$ 出发，将 u 与每个近似解 S_n 进行比较。如果 r 递减时， u 偏离 S_n ，我们就添加另一个泡 $\zeta_{n+1} W_{\lambda_{n+1}}$ 进行补偿，并证明 u 接近 $S_{n+1} = S_n + \zeta_{n+1} W_{\lambda_{n+1}}$。证明分为以下步骤:

（I）第一步中，我们用 $n = 1$ 证明命题 2.4。我们比较 u 与 v_L。显然，$\|\chi_0 e_0\|_{L^1L^2} = \|\chi_0 v_L\|_{Y(\mathbb{R})} = \delta^5$。如果 $w_0 = u - v_L$ 满足

$$\sup\left(r^{1/2}|w_0(r,0)|\right) \le \beta,$$

其中 β （以及下文中的 η ）是引理 2.7 中的常数，那么我们可以应用引理 2.7，验证结论中情形（a）在 $J = 0$ 下成立。另一方面，如果

$$\sup\left(r^{1/2}|w_0(r,0)|\right) > \beta,$$

我们可以选取一个充分大的常数 c_2 和 $\beta_1 \doteq c_2^{1/2}(1/3 + c_2^2)^{-1/2} < \beta/2$，令

$$R_1 = \max\left\{r : r^{1/2}|w_0(r,0)| = \beta_1\right\}; \qquad \zeta_1 = \operatorname{sign}(w_0(R_1, 0)); \qquad \lambda_1 = c_2^{-1} R_1; \tag{8}$$

并对 u 和近似解 $S_1 = \zeta_1 W_{\lambda_1} + v_L$ 应用引理 2.7，从而推得结论中的情形 (b) 对 $n = 1$成立。

(II) 在第二步中，我们假设命题 2.4 对正整数 n 成立，并证明它对 $n+1$也成立。我们先选取一个小常数 $c_1 = c_1(n)$，使得$\|\chi_{0,\ c}W\|_{Y(\mathbb{R})} < \eta/3n$ 充分小。只需考虑满足结论中情形 (b) 的解 n。应用引理 2.8 可立即得到

$$\|\vec{w}_n(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_1\lambda_n)} + \|\chi_{c_1\lambda_n} w_n\|_{Y(\mathbb{R})} + \|\chi_{c_1\lambda_n}(F(u) - F(S_n) - e_n)\|_{L^1L^2} \lesssim_n \delta.$$

我们还有 $\|\chi_0 e_n\|_{L^1L^2} \lesssim_n \delta$。仍有两种情况。如果

$$\sup r^{1/2}|w_n(r,0)| \le \beta,$$

我们可以对 u 和 S_n 应用引理 2.7，以验证结论中的 (a) 部分对 $n+1$ 在 $J = n$ 下成立。另一方面，如果

$$\sup r^{1/2}|w_n(r,0)| > \beta,$$

我们可以选取

$$R_1 = \max\left\{r : r^{1/2}|w_n(r,0)| = \beta_1\right\}; \qquad \zeta_{n+1} = \operatorname{sign}(w_n(R_1,0)); \qquad \lambda_{n+1} = c_2^{-1}R_1;$$

并对 u 以及半径 R_1 和 $R_2 = c\lambda_n$ 之间的近似解 $S_{n+1} = S_n + \zeta_{n+1}W_{\lambda_{n+1}}$ 应用引理 2.7，从而推出结论中的情形 (b) 对 $n+1$ 成立。

请注意，以下尺度分离估计在这一论证中起着至关重要的作用

$$\left\|\chi_0 (W_\lambda)^k (W_{\lambda'})^{5-k}\right\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \lesssim_1 \min\left\{\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^{1/2}, \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{1/2}\right\}, \qquad k = 1,2,3,4.$$

The 命题 3.1 的证明遵循相同的步骤，但依赖于更精细的上界估计 .
We 将证明分成几个步骤（$1 \le n \le J-1$）：

$$\|\vec{w}_1(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_2\lambda_1)} + \|\chi_{c_2\lambda_1} w_1\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_1 \tau; \tag{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda_{n+1}/\lambda_n \lesssim_n \tau^2; \\ \|\vec{w}_{n+1}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_2\lambda_{n+1})} + \|\chi_{c_2\lambda_{n+1}} w_{n+1}\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_n \tau; \end{cases} \tag{P_n}$$

$$\|\vec{w}_J(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}} + \|\chi_0 w_J\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_J \tau. \tag{P_J}$$

首先，我们对 u 和近似解 S_1 应用引理 2.7，其中 $R_1 = c_2\lambda_1$ 和 $R_2 \to +\infty$，从而得到

$$\|\vec{w}_1(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_2\lambda_1)} + \|\chi_{c_2\lambda_1} w_1\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_1 \|\chi_{c_2\lambda_1} e_1\|_{L^1L^2} \lesssim_1 \tau.$$

这里我们使用估计

$$\|\chi_0 e_1\|_{L^1L^2} \lesssim_1 \|\chi_0 W_{\lambda_1}^4 v_L\|_{L^1L^2} + \|\chi_0 v_L^5\|_{L^1L^2} \lesssim_1 \tau.$$

这验证了 (P_0)。接下来我们假设 (P_0)、(P_1) $\cdots$、(P_{n-1})，并证明 (P_n)。由尺度分离以及 τ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} \|\chi_0 e_n\|_{L^1L^2} &\lesssim_n \sum_{1\le j<k\le n} \left(\|\chi_0 W_{\lambda_j}^4 W_{\lambda_k}\|_{L^1L^2} + \|\chi_0 W_{\lambda_j} W_{\lambda_k}^4\|_{L^1L^2}\right) + \sum_{j=1}^{n} \|\chi_0 W_{\lambda_j}^4 v_L\|_{L^1L^2} + \delta^5 \\ &\lesssim_n \sum_{1\le j<k\le n} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1/2} + \tau \\ &\lesssim_n \tau. \end{aligned}$$

由此立即可得

$$\begin{aligned}\|\chi_{c_2\lambda_n}(F(u)-F(S_n)-e_n)\|_{L^1L^2} &\lesssim_1 \left(\|\chi_{c_2\lambda_n}w_n\|_{Y(\mathbb{R})}^4+\|\chi_0 S_n\|_{Y(\mathbb{R})}^4\right)\|\chi_{c_2\lambda_n}w_n\|_{Y(\mathbb{R})}\\ &\quad+\|\chi_0 e_n\|_{L^1L^2}\\ &\lesssim_n \tau.\end{aligned}$$

给定任意小常数 $c<c_2$（稍后确定），当 $\delta<\delta(n,c)$ 足够小时，我们可以（多次）应用引理 2.8，推得

$$\|w_n(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c\lambda_n)}+\|\chi_{c\lambda_n}w_n\|_{Y(\mathbb{R})}+\|\chi_{c\lambda_n}(F(u)-F(S_n)-e_n)\|_{L^1L^2}\lesssim_{n,c}\tau.$$

不失一般性，我们可以假设 c 是一个足够小的数，使得 t

$$\|\chi_{0,c}W\|_{Y(\mathbb{R})}\le\frac{\eta}{3n}.$$

现在假设 $C>C(n,c)$ 是一个稍后确定的大常数，其中下界 $C(n,c)$ 保证

$$\|\vec{w}_n(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c\lambda_n)}+\|\chi_{c\lambda_n}w_n\|_{Y(\mathbb{R})}+\|\chi_{c\lambda_n}(F(u)-F(S_n)-e_n)\|_{L^1L^2}\le C\tau, \tag{9}$$

这意味着（根据 (5)）

$$\sup_{r\ge c\lambda_n}\left(r^{1/2}|w_n(r,0)|\right)<C\tau;$$

并定义数列 $c\lambda_n>r_0>r_1>r_2>\cdots$ 如下

$$r_k=\max\{r>0:r^{1/2}|w_n(r,0)|=2^kC\tau\},\qquad k=0,1,2,\cdots,\left\lfloor\log_2\frac{\beta_1}{C\tau}\right\rfloor.$$

Wh当 $\delta<\delta(n,c,C)$ 足够小时，我们可以在半径 r_k 和 $c\lambda_n$ 之间应用引理 2.7，得到 deduce

$$\|\vec{w}_n(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(r_k)}+\|\chi_{r_k}w_n\|\lesssim_n 2^kC\tau,\qquad k\ge0.$$

我们将引理 2.2 应用于 w_n，从而得到

$$\begin{aligned}\|G_\pm\|_{L^2(r_k,r_{k-1})} &\lesssim_1 \left\|\chi_{r_k,r_{k-1}}\left(F(u)-F(S_n)-e_n\right)\right\|_{L^1L^2}\\ &\lesssim_n \tau+\left\|\chi_{r_k,r_{k-1}}\left(F(w_n+S_n)-F(S_n)\right)\right\|_{L^1L^2}\\ &\lesssim_n \tau+\left(\|\chi_{r_k,r_{k-1}}w_n\|_{Y(\mathbb{R})}^4+\|\chi_{r_k,r_{k-1}}S_n\|_{Y(\mathbb{R})}^4\right)\|\chi_{r_k,r_{k-1}}w_n\|_{Y(\mathbb{R})}\\ &\lesssim_n \tau+\left((2^kC\tau)^4+\left(\frac{r_{k-1}}{\lambda_n}\right)^{2/5}+\delta^4\right)2^kC\tau\\ &\lesssim_n \left(C^{-1}2^{-k}+(2^kC\tau)^{4/5}+\left(\frac{r_{k-1}}{\lambda_n}\right)^{2/5}\right)2^kC\tau.\end{aligned}$$

Here $G_\pm$ 是 $\vec{w}_n(0)$ 所对应的辐射剖面。根据 r_k 的定义，显式的形式公式 (4) 和柯西-施瓦茨不等式给出

$$\begin{aligned}\left|r_k^{1/2}2^kC\tau-r_{k-1}^{1/2}2^{k-1}C\tau\right| &=|r_k|w_n(r_k,0)|-r_{k-1}|w_n(r_{k-1},0)||\\ &\le|r_kw_n(r_k,0)-r_{k-1}w_n(r_{k-1},0)|\\ &\le\int_{r_k}^{r_{k-1}}(|G_+(s)|+|G_-(s)|)\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim_n\left(C^{-1}2^{-k}+(2^kC\tau)^{4/5}+\left(\frac{r_{k-1}}{\lambda_n}\right)^{2/5}\right)2^kC\tau(r_{k-1}-r_k)^{1/2}.\end{aligned}$$

Thus

$$\left|\frac{2r_k^{1/2}}{r_{k-1}^{1/2}}-1\right| \lesssim_n \left(C^{-1}2^{-k}+(2^kC\tau)^{4/5}+\left(\frac{r_{k-1}}{\lambda_n}\right)^{2/5}\right)\left(1-\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^{1/2}.$$

因此存在一个常数 c_n （仅取决于 n），使得

$$\frac{2r_k^{1/2}}{r_{k-1}^{1/2}} \le 1+c_n\left(C^{-1}2^{-k}+(2^kC\tau)^{4/5}+\left(\frac{r_{k-1}}{\lambda_n}\right)^{2/5}\right). \tag{10}$$

现在我们选取足够小/大的常数 $c=c(n)$ 和 $C=C(n,c)=C(n)$，以及另一个足够大的常数 $N=N(n)\in\mathbb{Z}^+$，使得

$$c_nc^{2/5}<\frac{1}{6}; \qquad c_n/C<\frac{1}{6}; \qquad c_n\left(\beta_1 2^{-N}\right)^{4/5}<\frac{1}{6}.$$

因此，若 $\delta<\delta(n)$ 足够小，则

$$\frac{2r_k^{1/2}}{r_{k-1}^{1/2}}<\frac{3}{2} \implies \frac{r_k}{r_{k-1}}<\frac{9}{16}, \qquad \forall k=1,2,\cdots,K\doteq\left\lfloor\log_2\frac{\beta_1}{C\tau}\right\rfloor-N.$$

将这些代入 (10)，得到 ($k=1,2,\cdots,K$)

$$\begin{aligned}\frac{2r_k^{1/2}}{r_{k-1}^{1/2}} &\le 1+\left(\frac{1}{6}\cdot 2^{-k}+c_n(2^kC\tau)^{4/5}+\frac{1}{6}\left(\frac{9^{k-1}}{16^{k-1}}\right)^{2/5}\right)\\ &\le \exp\left(\frac{1}{6}\cdot 2^{-k}+c_n(2^kC\tau)^{4/5}+\frac{1}{6}\left(\frac{9^{k-1}}{16^{k-1}}\right)^{2/5}\right).\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{4^Kr_K}{r_0}\le \exp\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{3}\cdot 2^{-k}+2c_n(2^kC\tau)^{4/5}+\frac{1}{3}\left(\frac{9^{k-1}}{16^{k-1}}\right)^{2/5}\right)\lesssim_1 1.$$

接下来我们回顾

$$c_2\lambda_{n+1}=\max\{r>0: r^{1/2}|w_n(r,0)|=\beta_1\}<r_K.$$

这立即给出

$$\lambda_{n+1}\lesssim_1 r_K\lesssim_1 4^{-K}r_0\lesssim_n \tau^2\lambda_n,$$

这也意味着

$$\|\chi_0 e_{n+1}\|_{L^1L^2}\lesssim_n \tau.$$

结合不等式 $\tau_{n+1}\lesssim_n\tau^2\lambda_n$ 与（9），我们得到

$$\|\chi_{c\lambda_n}w_{n+1}\|_{Y(\mathbb{R})}+\|\vec{w}_{n+1}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c\lambda_n)}+\|\chi_{c\lambda_n}(F(u)-F(S_{n+1})-e_{n+1})\|_{L^1L^2}\lesssim_n\tau.$$

接着，我们对半径 $R_1=c_2\lambda_{n+1}$ 和 $R_2=c\lambda_n$ 之间的 S_{n+1} 和 u 应用引理 2.7，推得

$$\|\chi_{c_2\lambda_{n+1}}w_{n+1}\|_{Y(\mathbb{R})}+\|\vec{w}_{n+1}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_2\lambda_{n+1})}+\|\chi_{c_2\lambda_{n+1}}(F(u)-F(w_{n+1})-e_{n+1})\|_{L^1L^2}\lesssim_n\tau,$$

只要 $\delta<\delta(n)$ 足够小。这最终验证了 (P_n)。为了完成证明，只需假设 (P_0)、(P_1) $\cdots$、(P_{J-1}) 并验证 (P_J)。我们的归纳假设意味着

$$\begin{aligned}\|\chi_0e_J\|_{L^1L^2}&\lesssim_J\tau;\\ \|\chi_{c_2\lambda_J}w_J\|_{Y(\mathbb{R})}+\|\vec{w}_J(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_2\lambda_J)}+\|\chi_{c_2\lambda_J}(F(u)-F(w_J)-e_J)\|_{L^1L^2}&\lesssim_J\tau.\end{aligned}$$

我们可以多次应用引理 2.8 来推出

$$\|\chi_{c_1\lambda_J} w_J\|_{Y(\mathbb{R})} + \|\vec{w}_J(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(c_1\lambda_J)} + \|\chi_{c_1\lambda_J}(F(u) - F(w_J) - e_J)\|_{L^1L^2} \lesssim_J \tau$$

这里的 $c_1 = c_1(J)$ 是一个小常数，使得

$$\|\chi_{0,c_1} W\|_{Y(\mathbb{R})} < \frac{\eta}{3n}.$$

我们假设 u 是一个 J-泡解，这意味着

$$\sup_{r>0}\left(r^{1/2}|w_J(r,0)|\right) \le \beta,$$

这使我们能够在半径 0 与 $c_1\lambda_J$ 之间对 u 和 S_J 应用引理 2.7，从而得到

$$\|\chi_0 w_J\|_{Y(\mathbb{R})} + \|\vec{w}_J(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_J \tau.$$

证明至此完成。 □

接下来，我们通过考察辐射剖面的极大函数，给出一种求得 τ 上界的方法。该上界将在后续各节中使用。

Le引理 3.3. 设 v_L 是一个辐射剖面为 G_- 的径向自由波，且 λ 为正数 .
*The*n 有

$$\left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2} \lesssim_1 \lambda^{1/2}\left(\sup_{r>0}\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}|G_-(s)|\mathrm{d}s\right).$$

证明。我们将 Ω_0 分成无限多个区域 $\Omega_0 = \Psi_0 \cup \Psi_1 \cup \Psi_2 \cup \cdots$

$$\Psi_0 = \{(x,t) : |t| < |x| < \lambda\}; \qquad \Psi_k = \left\{\max\{|t|, 2^{k-1}\lambda\} < |x| < 2^k\lambda\right\},\ k = 1,2,\cdots;$$

并令 $\tilde{\chi}_k$ 为 Ψ_k的特征函数。我们有

$$\begin{aligned}\left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2} &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\tilde{\chi}_k W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2}\\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}\|\tilde{\chi}_k W_\lambda\|_{Y(\mathbb{R})}^4\,\|\tilde{\chi}_k v_L\|_{Y(\mathbb{R})}\\ &\lesssim_1 \sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}\|\tilde{\chi}_k v_L\|_{Y(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

接下来，我们求 $\|\tilde{\chi}_k v_L\|_{Y(\mathbb{R})}$ 的上界。为方便起见，令

$$M = \sup_{r>0}\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}|G_-(s)|\mathrm{d}s.$$

G_- 的辐射剖面给出了 v_L 的显式公式

$$|v_L(x,t)| = \frac{1}{|x|}\left|\int_{t-|x|}^{t+|x|}G_-(s)\mathrm{d}s\right| \le \frac{1}{|x|}\int_{-2|x|}^{2|x|}|G_-(s)|\mathrm{d}s \le 2M, \quad |x| > |t|.$$

这意味着

$$\|\tilde{\chi}_k v_L\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_1 (2^k\lambda)^{1/2}M.$$

将其代入上述不等式，即完成证明。 □

3.2 精细估计的一个应用

在本小节中，我们证明，除非其辐射部分的辐射剖面 $G_-(s)$ 在某种意义下集中于 $s=0$，否则一个 J-泡解 (CP1) 通常具有比 $JE(W,0)$ 更多的能量。

引理 3.4. 给定一个正整数 J，设 u 是注 2.6 中所述的 (CP1) 的径向 J-泡解，其辐射部分为 v_L，第一个泡大小为 λ_1。存在两个小常数 $c=c(J)$ 和 $\delta=\delta_1(J)$，使得若 v_L 的辐射剖面 G_- 满足 $\|G_-\|_{L^2(\mathbb{R})}<\delta_1$，并且

$$\|G_-\|_{L^2(-2^k\lambda_1,2^k\lambda_1)}\le c\cdot 2^k\|G_-\|^2_{L^2(\mathbb{R})},\qquad \forall k\ge 0.$$

那么必有 $E(u)>JE(W,0)$。

注 3.5. v_L 的辐射剖面 G_- 可由 u 对应的（非线性）辐射剖面 $g_\pm\in L^2(\mathbb{R}^+)$ 唯一确定。事实上，我们有

$$G_-(s)=\begin{cases} g_-(s), & s>0;\\ -g_+(-s), & s<0.\end{cases}$$

*Pro*引理 3.4 的.....首先，我们回顾证明引理中给出的记号 Ψ_k、$\tilde\chi_k$ 3.3 以及不等式

$$\left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2}\lesssim_1\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}\|\tilde\chi_k v_L\|_{Y(\mathbb{R})}.$$

这里 $\lambda\le\lambda_1$ 是一个小泡尺度。v_L 关于 G_- 的显式公式表明，Ψ_k 中 v_L 的值仅依赖于区间$(-2^{k+1}\lambda,2^{k+1}\lambda)$中 G_- 的值。由 Strichartz 估计可得

$$\|\tilde\chi_k v_L\|_{Y(\mathbb{R})}\lesssim_1\|G_-\|_{L^2(-2^{k+1}\lambda,2^{k+1}\lambda)}\lesssim_1\|G_-\|_{L^2(-2^{k+1}\lambda_1,2^{k+1}\lambda_1)}\lesssim_1 c\cdot 2^k\delta^2.$$

这里为方便起见，我们定义$\delta=\|G_-\|_{L^2(\mathbb{R})}$。因此，我们有

$$\sup_{\lambda\le\lambda_1}\left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2}\lesssim_1 c\delta^2.$$

这表明，若 $\delta<\delta(c,J)$充分小，则

$$\tau=\sup_{\lambda\le\lambda_1}\left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_L\right\|_{L^1L^2}+\|\chi_0 v_L\|^5_{Y(\mathbb{R})}\lesssim_1 c\delta^2+\delta^5\lesssim_1 c\delta^2.$$

然后应用命题 3.1 即得孤子分解

$$\vec u(\cdot,0)=\sum_{j=1}^{J}\zeta_j(W_{\lambda_j},0)+\vec v_L(\cdot,0)+\vec w_J(\cdot,0),$$

with

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\lesssim_J c^2\delta^4;\qquad\qquad \|\vec w_J(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}}\lesssim_J c\delta^2.$$

这些估计，以及由尺度分离得到的以下不等式

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla W_{\lambda_j}\cdot\nabla W_{\lambda_k}\right|\mathrm{d}x\lesssim_1\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1/2},\qquad j<k;$$

$$\sum_{\ell=1}^{5}\int_{\mathbb{R}^3}W_{\lambda_j}^{\ell}W_{\lambda_k}^{6-\ell}\mathrm{d}x\lesssim_1\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1/2},\qquad j<k;$$

给出以下近似正交性性质

$$\left|\|\vec{u}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}}^2 - J\|W\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^2 - 8\pi\delta^2\right| \lesssim_J \sum_{j=1}^{J}\left|\langle W_{\lambda_j}, v_L(\cdot,0)\rangle_{\dot{H}^1}\right| + c\delta^2;$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,0)|^6\mathrm{d}x - J\|W\|_{L^6}^6\right| \lesssim_J \sum_{j=1}^{J}\int_{\mathbb{R}^3} W_{\lambda_j}^5|v_L(x,0)|\mathrm{d}x + c\delta^2.$$

将它们结合起来可得到能量估计

$$\left|E(u) - JE(W,0) - 4\pi\delta^2\right| \lesssim_J \sum_{j=1}^{J}\left|\langle W_{\lambda_j}, v_L(\cdot,0)\rangle_{\dot{H}^1}\right| + \sum_{j=1}^{J}\int_{\mathbb{R}^3} W_{\lambda_j}^5|v_L(x,0)|\mathrm{d}x + c\delta^2.$$

接下来，我们给出右端项的上界。首先注意到

$$\begin{aligned}\langle W_{\lambda_j}, v_L(\cdot,0)\rangle_{\dot{H}^1} &= 4\pi\int_0^\infty \partial_r(rW_{\lambda_j})\partial_r(rv_L(r,0))\mathrm{d}r\\ &= 4\pi\int_0^\infty \frac{1}{3\lambda_j^{1/2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{r^2}{\lambda_j^2}\right)^{-3/2}[G_-(r)+G_-(-r)]\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

由此立即得到

$$\begin{aligned}\left|\langle W_{\lambda_j}, v_L(\cdot,0)\rangle_{\dot{H}^1}\right| &\lesssim_1 \int_0^{\lambda_j}\frac{1}{\lambda_j^{1/2}}(|G_-(r)+|G_-(-r)|)\mathrm{d}r + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k-1}\lambda_j}^{2^k\lambda_j}\frac{\lambda_j^{5/2}}{r^3}(|G_-(r)+|G_-(-r)|)\mathrm{d}r\\ &\lesssim_1 \|G_-\|_{L^2(-\lambda_j,\lambda_j)} + \sum_{k=1}^{\infty}2^{-5k/2}\|G_-\|_{L^2(-2^k\lambda_j,2^k\lambda_j)}\\ &\lesssim_1 \sum_{k=0}^{\infty}2^{-5k/2}\|G_-\|_{L^2(-2^k\lambda_1,2^k\lambda_1)}\\ &\lesssim_1 c\delta^2.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} W_{\lambda_j}^5|v_L(x,0)|\mathrm{d}x &= \int_{|x|<\lambda_j} W_{\lambda_j}^5|v_L(x,0)|\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k-1}\lambda_j<|x|<2^k\lambda_j} W_{\lambda_j}^5|v_L(x,0)|\mathrm{d}x\\ &\lesssim_1 \|v_L(\cdot,0)\|_{L^6(\{x:|x|<\lambda_j\})} + \sum_{k=1}^{\infty}2^{-5k/2}\|v_L(\cdot,0)\|_{L^6(\{x:|x|<2^k\lambda_j\})}\\ &\lesssim_1 \sum_{k=0}^{\infty}2^{-5k/2}\|G_-\|_{L^2(-2^k\lambda_j,2^k\lambda_j)}\\ &\lesssim_1 \sum_{k=0}^{\infty}2^{-5k/2}\|G_-\|_{L^2(-2^k\lambda_1,2^k\lambda_1)}\\ &\lesssim_1 c\delta^2.\end{aligned}$$

综上，我们得到

$$\left|E(u) - JE(W,0) - 4\pi\delta^2\right| \lesssim_J c\delta^2.$$

这最终验证了，只要 $c = c(J)$ 和 $\delta < \delta_1(J) \doteq \delta(c,J)$ 都足够小， $E(u) > JE(W,0)$ 就成立。 □

4 第一个泡的尺度

本文其余部分将用于证明我们的主定理。证明从一些准备工作开始。我们采用反证法。不失一般性，假设 u 在所有充分小的负时间上都有定义，并在时间 $t=0$ 以 II 型方式爆破，且泡数为 $n \geq 1$。这个泡数以及我们对自由波部分$u_L=0$的假设，立即给出

$$E(u) = nE(W,0).$$

假设 $u_L = 0$ 还意味着

$$u(x,t) = 0, \qquad |x| > -t > 0. \tag{11}$$

事实上，由 $u_L = 0$ 的孤子分解立即可得

$$\lim_{t\to 0^-} \|\vec{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{H}(|t|)} = 0.$$

沿时间反向求解波动方程，并应用有限传播速度，我们立即得到 (11)。此外，回想事实 $\vec{u}(t) \in \dot{H}^1 \times L^2$，我们可以固定一个较小的负时间 t_0，并找到一个较小的数 $r_0 > 0$，使得

$$\|\vec{u}(t_0)\|_{\mathcal{H}(|t_0|-r_0)} \ll 1.$$

根据外部解的小数据理论，如有必要，我们可以扩展解 u 的区域，使得 u 也在区域中有定义

$$\{(x,t) : |x| > |t| - r_0, t \leq t_0\}$$

鉴于 u 的支撑集，我们可以通过定义 $u(x,t) = 0$ （当 $|x| > t \geq 0$ 时）进一步扩展其区域。总之，我们可以在该区域中定义 u （见图1）

$$\big(\mathbb{R}^3 \times [t_0, 0)\big) \cup \{(x,t) : |x| > t \geq 0\} \cup \{(x,t) : |x| > |t| - r_0, t < t_0\},$$

使得 u 在每个光锥 $|x| = |t - t_1|$ 之外都是一个外部解（对于 $t_1 \in [-r_0, 0)$。此外，外部解的小数据理论以及 u 的支撑集也意味着， u 的（非线性）辐射剖面满足

$$G_\pm(s) = 0, \quad s > 0; \qquad\qquad \|G_-\|_{L^2([-r_0,+\infty))} \ll 1.$$

对于每个固定的 $t \in [-r_0, 0)$，考虑时间平移解 $u(\cdot, \cdot + t)$，并将其区域限制在 Ω_0。不难看出，这个外部解渐近等价于由辐射剖面确定的自由波$v_{t,\ L}$

$$G_{t,+}(s) = 0, \quad s > 0; \qquad\qquad G_{t,-}(s) = G_-(s+t), \quad s > 0.$$

显然，我们有

$$\|\chi_0 v_{t,L}\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_1 \|\vec{v}_{t,L}\|_{\mathcal{H}} \lesssim_1 \|G_-\|_{L^2([t,0])} \ll 1.$$

为方便起见，我们定义 $\delta(t) = \|G_-\|_{L^2([t,0])}$。由命题 2.4 可知，存在 $\zeta_j \in \{+1, -1\}$ 和尺度函数 $\lambda_j(t)$，对于 $j = 1, 2, \cdots, n$，使得

$$\frac{\lambda_{j+1}(t)}{\lambda_j(t)} \lesssim_j \delta^2(t), \quad j = 1, 2, \cdots, n-1; \qquad \left\| \vec{u}(t) - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j (W_{\lambda_j(t)}, 0) - \vec{v}_{t,L}(0) \right\|_{\mathcal{H}} \lesssim_n \delta(t).$$

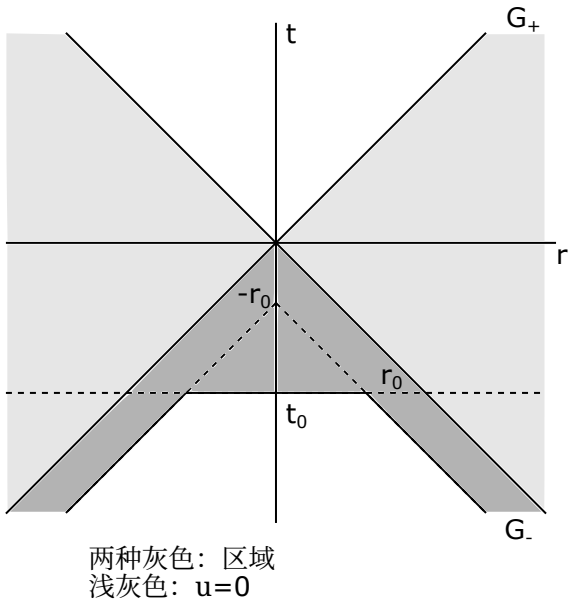


图1： u的区域延拓

这里我们只考虑充分小的时间 t，并使用关于泡数的假设。根据连续性论证，符号 ζ_j 不依赖于小时间 t 的选取。为方便起见，我们定义

$$w(t;x,t')=u(x,t+t')-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j W_{\lambda_j(t)}(x)-v_{t,L}(x,t'),\qquad (x,t')\in\Omega_0.$$

我们可以将孤子分解改写为以下形式：

$$\vec{u}(\cdot,t)=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j(W_{\lambda_j(t)},0)+\vec{v}_{t,L}(\cdot,0)+\vec{w}(t;\cdot,0);\qquad \|\vec{w}(t;\cdot,0)\|_{\mathcal{H}}\lesssim_n \delta(t).$$

请注意，对于任意 $t<0$, $\|G_-\|_{L^2(t,\,0)}>0$。否则， $u(\cdot,\cdot+t)$ 必定是一个非辐射解，因此它要么是零解，要么是基态。这就产生了矛盾。下面的引理对第一个泡的大小给出了精确估计。

引理 4.1. 存在一个小常数 $\delta_0>0$，使得若 u 是定义在外部区域 Ω_0 上的 (CP1) 径向解，并满足以下条件

- $\vec{u}(0)$ 支撑于球 $\{x:\ |x|\le R\}$;
- 该解是 Ω_0 中的散射外部解，即 $\|\chi_0 u\|_{Y(\mathbb{R})}<+\infty$;
- u 的（非线性）辐射剖面满足 $G_+(s)=0$，其中 $s>0$ 对应正时间方向，而 $\delta\doteq\|G_-\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}<\delta_0$ 对应负时间方向;

那么以下情形恰有一种成立：

(a) u是一个零气泡解。此外

$$\left|\int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s\right|\lesssim_1 R^{1/2}\delta^5.$$

(b) u 是一个至少含有一个泡的解。此外，由命题 2.4 给出的第一个泡的符号 ζ_1 和大小 λ_1 必须满足以下不等式

$$\lambda_1 \lesssim_1 R\delta^2; \qquad \left| \int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s + \zeta_1 \lambda_1^{1/2} \right| \lesssim_1 R^{1/2}\delta^{9/5}.$$

证明。首先， $\vec{u}(0)$ 的支撑集意味着 $u \equiv 0$ 属于 Ω_R，因此对于 $s > R$， $G_-(s) = 0$。我们用记号 v_L 表示在 Ω_0 中与 u 渐近等价的径向自由波。 v_L 的辐射剖面 g_- 支撑在 $[0, R]$ 中，且

$$g_-(s) = G_-(s), \qquad s \in [0, R].$$

由 Strichartz 估计可知 $\|v_L\|_{Y(\mathbb{R})} \lesssim_1 \delta$。与命题 2.4 证明的第一步相同，我们定义 $w = u - v_L$ 并考察 $r^{1/2}w(r, 0)$ 的值。直接计算可得

$$\sup_{r \geq R} r^{1/2}|w(r,0)| \lesssim_1 \|\vec{w}(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(R)} = \|\vec{v}_L(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(R)} \lesssim_1 \delta. \tag{12}$$

回顾命题 2.4 的证明可知，存在两种情况。第一种情况下， $\vec{u}(0)$ 的孤子分解中不含任何泡，并且下列不等式成立

$$\sup_{r>0} r^{1/2}|w(r,0)| < \beta.$$

这使我们能够应用引理 2.7，进而得到

$$\|\vec{u}(\cdot,0) - \vec{v}_L(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_1 \|\chi_0 v_L^5\|_{L^1L^2} \lesssim_1 \delta^5.$$

这意味着

$$\|\vec{v}_L(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}(R)} \lesssim_1 \delta^5 \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s \right| \lesssim_1 R^{1/2}\delta^5.$$

这里我们利用显式公式

$$v_L(r,0) = \frac{1}{r}\int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s, \qquad r > R. \tag{13}$$

在第二种情况下，以下不等式成立，并且 $\vec{u}(0)$的孤子分解至少包含一个泡

$$\sup_{r>0} r^{1/2}|w(r,0)| \geq \beta.$$

当 δ 足够小时，我们选择

$$R_1 = \max\left\{ r > 0 : r^{1/2}|w(r,0)| = \delta^{-1/5}W(\delta^{-2/5}) \right\}.$$

由于 $\delta \ll \delta^{-1/5}W(\delta^{-2/5}) \simeq_1 \delta^{1/5} \ll 1$，我们可以将 R_1 的这个定义与 (8) 和 (12) 进行比较，从而推得 $R_1 \in (c_2\lambda_1, R)$。接下来，我们对 u 和 $v_L + \zeta W_\lambda$ 应用引理 2.7，其中 $\lambda = \delta^{2/5}R_1$ 和 $\zeta = \mathrm{sign}(w(R_1, 0))$ 位于半径 R_1 和 $R_2 \to +\infty$ 之间，从而推得

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(\cdot,0) - \vec{v}_L(\cdot,0) - (\zeta W_\lambda, 0)\|_{\mathcal{H}(R_1)} &\lesssim_1 \|\chi_{R_1}\left[F(\zeta W_\lambda) - F(v_L + \zeta W_\lambda)\right]\|_{L^1L^2} \\ &\lesssim_1 \left(\|\chi_{R_1}v_L\|_{Y(\mathbb{R})}^4 + \|\chi_{R_1}W_\lambda\|_{Y(\mathbb{R})}^4 \right) \|\chi_{R_1}v_L\|_{Y(\mathbb{R})} \\ &\lesssim_1 \delta^{9/5}. \end{aligned} \tag{14}$$

结合 $\vec{u}(0)$ 的支撑集和 (13) 的显式表达式，我们得到

$$\left\|\frac{\alpha'}{|x|}+\zeta W_\lambda\right\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R\})}\lesssim_1 \delta^{9/5};\qquad\qquad \alpha'=\int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s. \tag{15}$$

由于

$$\|\alpha'/|x|\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R\})}\lesssim_1 R^{-1/2}\int_0^R|G_-(s)|\mathrm{d}s\lesssim_1\delta,$$

不等式 (15) 意味着

$$\|W_\lambda\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R\})}\lesssim_1\delta\ll 1\quad\Longrightarrow\quad\lambda\lesssim_1 R\delta^2.$$

我们观察到

$$\partial_r W_\lambda=-\frac{r}{\lambda^{5/2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)^{-3/2}=-\frac{\lambda^{1/2}}{r^2}\left(1+\frac{\lambda^2}{3r^2}\right)^{-3/2}=-\frac{\lambda^{1/2}}{r^2}+O_1\left(\frac{\lambda^{5/2}}{r^4}\right),\quad r>R\gg\lambda,$$

这意味着

$$\left\|W_\lambda-\frac{\lambda^{1/2}}{|x|}\right\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R\})}\lesssim_1\left\|\frac{\lambda^{5/2}}{r^4}\right\|_{L^2([R,+\infty);r^2\mathrm{d}r)}\lesssim_1\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{5/2}\lesssim_1\delta^5.$$

将其代入 (15)，我们得到

$$\left\|\frac{\alpha'+\zeta\lambda^{1/2}}{|x|}\right\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R\})}\lesssim_1\delta^{9/5}\quad\Longrightarrow\quad|\alpha'+\zeta\lambda^{1/2}|\lesssim_1 R^{1/2}\delta^{9/5}. \tag{16}$$

现在我们弄清 (ζ,λ) 与原始孤子分解中第一个泡的符号 ζ_1 及大小 λ_1 之间的关系。我们回顾 $c_2\lambda_1<R_1$，结合 (14) 与原始孤子分解，从而推出

$$\|\zeta W_\lambda-\zeta_1 W_{\lambda_1}\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R_1\})}\lesssim_1\delta\ll 1.$$

结合这一事实

$$\|W\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>r\})}\simeq_1\min\{1,r^{-1/2}\},$$

以及 $\lambda=R_1\delta^{2/5}$，我们得到 $\zeta=\zeta_1$ 和 $\lambda\simeq_1\lambda_1$。通过与上述类似的论证可得

$$\left\|W_\lambda-\frac{\lambda^{1/2}}{|x|}\right\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R_1\})}\lesssim_1\left(\frac{\lambda}{R_1}\right)^{5/2}\lesssim_1\delta;$$
$$\left\|W_{\lambda_1}-\frac{\lambda_1^{1/2}}{|x|}\right\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R_1\})}\lesssim_1\left(\frac{\lambda_1}{R_1}\right)^{5/2}\lesssim_1\delta.$$

结合上述三个估计可立即得到

$$\left\|\frac{\lambda^{1/2}}{|x|}-\frac{\lambda_1^{1/2}}{|x|}\right\|_{\dot{H}^1(\{x:|x|>R_1\})}\lesssim_1\delta\quad\Longrightarrow\quad\left|\lambda^{1/2}-\lambda_1^{1/2}\right|\lesssim_1 R_1^{1/2}\delta.$$

由估计 $R_1\delta^{2/5}=\lambda\lesssim_1 R\delta^2$，我们还有 $R_1\lesssim_1 R\delta^{8/5}$。因此，我们得到估计 $|\lambda^{1/2}-\lambda_1^{1/2}|\lesssim_1 R^{1/2}\delta^{9/5}$。结合式（16），最终得到

$$\left|\int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s+\zeta_1\lambda_1^{1/2}\right|\lesssim_1 R^{1/2}\delta^{9/5}.$$

证明至此完成。 □

注记 4.2. 对于本节开头所述 II 型爆破解 u，我们可以将上述引理应用于其时间平移版本 $u(\cdot, \cdot + t)$，并针对较小的时间 $t < 0$ 得出结论：

$$\lambda_1(t) \lesssim_1 |t|\delta(t)^2; \qquad \left| \int_t^0 G_-(s)\mathrm{d}s + \zeta_1 \lambda_1(t)^{1/2} \right| \lesssim_1 |t|^{1/2}\delta(t)^{9/5}.$$

这里，G_- 是 u的（非线性）辐射剖面。$\vec{u}(t)$ 支撑在球$\{x\colon\ |x| < |t|\}$ 这一事实在论证中起着重要作用，因为在估计第一个气泡尺度时，$r = |t|$ 会成为一个自然的参照点。整体解的情形则大不相同。事实上，类似的泡大小估计很可能不成立。考虑基态 $W(x)$的情形。泡大小是常数 1，但辐射强度为零，即 $G_- = 0$且 $\delta = 0$。

5 良好时刻的选择

本节中，我们始终假设 u 是一个无辐射的径向 II 型爆破解，其在负时间方向上的（非线性）辐射剖面为 G_-，辐射部分为$v_{t,\ L}$，第一个气泡尺度为 $\lambda_1(t)$，范数函数为 $\delta(t)$，这些均如第 4 节开头所定义。不失一般性，我们还假设第一个泡的符号 ζ_1 为负。本节将证明，我们可以找到满足以下条件的时刻 t

(a) 这些时间充分接近爆破时刻 0；

(b) 对这些时间，关于第一个泡大小的“几乎最好可能的”下界估计成立。如引理 4.1 所示，不等式 $\lambda_1(t) \lesssim_1 |t|\delta(t)^2$ 对所有充分小的时间成立。给定任意小常数 κ，我们证明大致相反的不等式$\lambda_1(t) \gtrsim_1 |t|\delta(t)^{2+\kappa}$ 对选定的时间也成立。

(c) 对这些时间，精细孤子分解成立。命题 2.4 表明，下列估计对所有充分小的时间成立：

$$\frac{\lambda_{j+1}(t)}{\lambda_j(t)} \lesssim_j \delta(t)^2; \qquad \|\vec{w}(t;\cdot,0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_n \delta(t).$$

我们应用极大函数经典理论推出该估计

$$\tau(t) \doteq \sup_{\lambda \le \lambda_1(t)} \left\| \chi_0 W_\lambda^4 v_{t,L} \right\|_{L^1 L^2} + \delta(t)^5 \le \delta(t)^{2-\kappa}$$

对选定的时间也成立。命题 3.1 在进一步的论证中立即给出这些时间的下列精细孤子分解估计。

$$\frac{\lambda_{j+1}(t)}{\lambda_j(t)} \lesssim_j \delta(t)^{4-2\kappa}; \qquad \|\vec{w}(t;\cdot,0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_n \delta(t)^{2-\kappa}.$$

上述估计在我们主定理的证明中起着至关重要的作用。我们首先找到满足 (a) 和 (b) 的时间，然后略微调整 t 的取值，使它们也满足 (c)。

引理 5.1. 给定任意常数 $\kappa > 0$ 和时间 $t_0 < 0$，存在一个时间 $t \in [t_0, 0)$，使得 $\lambda_1(t) \ge |t|\delta(t)^{2+\kappa}$。

证明。我们用反证法证明。假设对于所有 $t \in [t_0, 0)$，$\lambda_1(t) < |t|\delta(t)^{2+\kappa}$。不失一般性，我们可以假设 $\delta(t_0) < \min\{\delta_1(n)\ c\}$，其中 $\delta_1(n)$ 和 c 是

引理 3.4 中给出的常数。根据引理 3.4 以及事实 $E(u) = nE(W, 0)$，对于任意 $t \in [t_0, 0)$，存在一个非负整数 $k(t)$，使得

$$\|G_-\|_{L^2(t,t+2^{k(t)}\lambda_1(t))} > c \cdot 2^{k(t)}\delta(t)^2. \tag{17}$$

由于 $\|G_-\|_{L^2(t,\ +\infty)} = \delta(t)$，我们有

$$c \cdot 2^{k(t)}\delta(t)^2 < \delta(t) \qquad \Longrightarrow \qquad 2^{k(t)} < c^{-1}\delta(t)^{-1}. \tag{18}$$

由此可得

$$2^{k(t)}\lambda_1(t) \le \frac{\delta(t)}{c\delta(t)^2} \cdot |t|\delta(t)^{2+\kappa} = c^{-1}|t|\delta(t)^{1+\kappa} < |t|.$$

因此，我们归纳地定义时间序列 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < 0$

$$t_{m+1} = t_m + 2^{k(t_m)}\lambda_1(t_m), \qquad m \ge 0.$$

为方便起见，我们还定义一个正数递减序列

$$\varphi_m = \delta(t_m)^2 = \int_{t_m}^{0} |G_-(s)|^2 \mathrm{d}s.$$

由 (17) 可知，序列 φ_m 满足

$$\varphi_m - \varphi_{m+1} > c^2 2^{2k(t_m)}\delta(t_m)^4 = c^2 2^{2k(t_m)}\varphi_m^2. \tag{19}$$

这保证了 $\varphi_m \to 0$。我们还可以通过以下方式选取一个序列 $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$

$$m_{\ell+1} = \min\{m > m_\ell : \varphi_m < \varphi_{m_\ell}/2\}, \qquad \ell \ge 0.$$

该定义以及式（19）意味着

$$\frac{1}{2} \le \prod_{m=m_\ell}^{m_{\ell+1}-2} \frac{\varphi_{m+1}}{\varphi_m} \le \prod_{m=m_\ell}^{m_{\ell+1}-2} \left(1 - c^2 2^{2k(t_m)}\varphi_m\right).$$

这意味着

$$\sum_{m=m_\ell}^{m_{\ell+1}-2} 2^{2k(t_m)}\varphi_m \lesssim_1 c^{-2}. \tag{20}$$

接下来我们断言，当 $m \to +\infty$ 时，t_m 收敛到一个负数。这等价于说

$$\prod_{m=0}^{\infty} \frac{t_{m+1}}{t_m} > 0.$$

由于

$$\frac{t_{m+1}}{t_m} = 1 - \frac{2^{k(t_m)}\lambda_1(t_m)}{|t_m|} \ge 1 - 2^{k(t_m)}\delta(t_m)^{2+\kappa},$$

其中（回顾式（18）以及假设 $\delta(t_0) < c$）

$$2^{k(t_m)}\delta(t_m)^{2+\kappa} \le c^{-1}\delta(t_m)^{1+\kappa} \le \varphi_m^{\kappa/2} \ll 1, \tag{21}$$

只需证明

$$\prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - 2^{k(t_m)}\delta(t_m)^{2+\kappa}\right) > 0,$$

or

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{k(t_m)}\delta(t_m)^{2+\kappa} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{k(t_m)}\varphi_m^{1+\kappa/2} < +\infty.$$

结合 (20)、(21) 以及 φ_{m_ℓ} 至少以指数速度递减这一事实，即可验证这一点

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} 2^{k(t_m)}\varphi_m^{1+\kappa/2} &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=m_\ell}^{m_{\ell+1}-1} 2^{k(t_m)}\varphi_m^{1+\kappa/2} \\ &\le \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\varphi_{m_\ell}^{\kappa/2}\sum_{m=m_\ell}^{m_{\ell+1}-2}\left(2^{2k(t_m)}\varphi_m\right) + \varphi_{m_{\ell+1}-1}^{\kappa/2}\right) \\ &\lesssim_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} c^{-2}\varphi_{m_\ell}^{\kappa/2} < +\infty.\end{aligned}$$

现在令 $t_\infty = \lim t_m < 0$。于是

$$\int_{t_\infty}^{0} |G_-(s)|^2 \mathrm{d}s \le \int_{t_m}^{0} |G_-(s)|^2 \mathrm{d}s = \varphi_m \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_\infty}^{0} |G_-(s)|^2 \mathrm{d}s = 0.$$

这就导出了一个矛盾。 □

引理 5.2. 给定任意时间 $t_0 < 0$ 和一个小常数 $\kappa > 0$，存在一个时间 $t \in [t_0, 0)$，使得辐射剖面 G_- 满足

$$\int_{t}^{0} G_-(s)\mathrm{d}s > \frac{1}{2}|t|^{1/2}\delta(t)^{1+\kappa/2};$$

此外，我们还有

$$\tau(t) \doteq \sup_{\lambda \le \lambda_1(t)} \left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_{t,L}\right\|_{L^1L^2} + \delta(t)^5 \le \delta(t)^{2-\kappa}.$$

证明. 不失一般性，通过令 t_0 趋于零，我们总可以假设 $\delta(t_0)$ 足够小。首先，我们可以应用引理 5.1，找到一个时间 $t_* \in [t_0, 0)$，使得$\lambda_1(t_*) \ge |t_*|\delta(t_*)^{2+\kappa}$。根据注记 4.2 以及我们的假设 $\zeta_1 = -1$，必有

$$\int_{t_*}^{0} G_-(s)\mathrm{d}s \ge \frac{9}{10}|t_*|^{1/2}\delta(t_*)^{1+\kappa/2}.$$

接下来，我们选取 $t^* = t_*(1 - \delta(t_*)^\kappa/16) \in (t_*, 0)$。由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\int_{t_*}^{t^*} |G_-(s)|\mathrm{d}s \le (t^* - t_*)^{1/2}\delta(t_*) \le \frac{1}{4}|t_*|^{1/2}\delta(t_*)^{1+\kappa/2}.$$

因此，对于任意时间 $t \in [t_*, t^*]$，我们有

$$\int_{t}^{0} G_-(s)\mathrm{d}s > \frac{1}{2}|t_*|^{1/2}\delta(t_*)^{1+\kappa/2} \ge \frac{1}{2}|t|^{1/2}\delta(t)^{1+\kappa/2}. \tag{22}$$

为了完成证明，只需选取一个时间 $t \in [t_*, t^*]$，使得关于 $\tau(t)$ 的第二个不等式成立。我们考虑极大函数

$$(\mathbf{M}G_-)(s) = \sup_{r>0}\frac{1}{r}\int_{s}^{s+r} |G_-(s)|\mathrm{d}s, \qquad s > t_*.$$

极大函数的经典理论立即给出

$$\|\mathbf{M}G_-\|_{L^2([t_*,t^*])} \lesssim_1 \|G_-\|_{L^2([t_*,+\infty))} = \delta(t_*).$$

因此，存在一个时间 $t \in [t_*, t^*]$，使得

$$(\mathbf{M}G_-)(t) \lesssim_1 (t^* - t_*)^{-1/2}\delta(t_*) \lesssim_1 |t_*|^{-1/2}\delta(t_*)^{1-\kappa/2}.$$

接着，我们应用引理 3.3 得出（回忆一下 $\lambda_1(t) \lesssim_1 |t|\delta(t)^2$）

$$\sup_{\lambda<\lambda_1(t)} \left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_{t,L}\right\|_{L^1L^2} \lesssim_1 \lambda_1(t)^{1/2}(\mathbf{M}G_-)(t) \lesssim_1 \delta(t)\delta(t_*)^{1-\kappa/2}.$$

接下来，我们回忆式 (22)，并应用柯西-施瓦茨不等式，得出

$$\frac{1}{2}|t_*|^{1/2}\delta(t_*)^{1+\kappa/2} < \int_t^0 G_-(s)\mathrm{d}s \le \delta(t)|t|^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad \delta(t_*) \lesssim_1 \delta(t)^{\frac{1}{1+\kappa/2}}.$$

将此上界代入上面的估计中，我们得到

$$\tau(t) \lesssim_1 \delta(t)^{\frac{2}{1+\kappa/2}}.$$

由于对于任意小的正数常数 κ，$\frac{2}{1+\kappa/2} > 2-\kappa$ 都成立，因此第二个不等式

$$\tau(t) \le \delta(t)^{2-\kappa}$$

只要 $\delta(t_*)$ 足够小，就成立。 □

6 Virial恒等式

现在设 u 是一个带有 n 泡且没有辐射的 II 型爆破解，并且满足 $T_+ = 0$ 和 $\zeta_1 = -1$，如前几节所述。在证明的最后一步，我们应用 Virial恒等式并导出一个矛盾。令

$$I(t) = \int_0^\infty u_t(r,t)\left(ru_r(r,t) + \frac{1}{2}u(r,t)\right) r^2\mathrm{d}r.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_0^\infty \left[u_{tt}\left(ru_r + \frac{1}{2}u\right)r^2 + u_t\left(ru_{rt} + \frac{1}{2}u_t\right)r^2\right]\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \left[\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + |u|^4u\right)\left(ru_r + \frac{1}{2}u\right)r^2 - r^2|u_t|^2\right]\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \left[r^3u_ru_{rr} + \frac{1}{2}r^2uu_{rr} + 2r^2u_r^2 + ruu_r - r^2|u_t|^2\right]\mathrm{d}r \\
&= -\int_0^\infty |u_t|^2r^2\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

显然

$$|I(t)| = \left|\int_0^{|t|} r\cdot u_t(r,t)\left(u_r(r,t) + \frac{1}{2r}u(r,t)\right)r^2\mathrm{d}r\right| \lesssim_1 |t|\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

因此，我们可以将 $I'(t)$ 从 $t_* < 0$ 积分到 $t = 0$，得到

$$I(t_*) = \int_{t_*}^0\int_0^\infty |u_t(r,t)|^2r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}t. \tag{23}$$

回顾

$$\vec{u}(\cdot,t)=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j(W_{\lambda_j(t)},0)+\vec{v}_{t,L}(\cdot,0)+\vec{w}(t;\cdot,0). \tag{24}$$

根据命题 3.1，我们有

$$\frac{\lambda_{j+1}(t)}{\lambda_j(t)}\lesssim_j \tau(t)^2,\quad j=1,2,\cdots,n-1;\qquad\qquad \|\vec{w}(t;\cdot,0)\|_{\mathcal{H}}\lesssim_n \tau(t), \tag{25}$$

with

$$\tau(t)=\sup_{\lambda\le\lambda_1(t)}\left\|\chi_0 W_\lambda^4 v_{t,L}\right\|_{L^1L^2}+\delta(t)^5.$$

为了计算式 (23) 两边的积分中 $\vec{v}_{t,L}(\cdot,0)$ 的贡献，我们需要以下引理

引理 6.1. 设 v^L 是辐射剖面为 $G_-(s)$ 的径向自由波。若 $G_-(s)$ 的支撑集包含于区间 $[0,R]$，则对于 $r\in(0,R)$，我们有

$$v^L(r,0)=\frac{1}{r}\int_0^r G_-(s)\mathrm{d}s;\qquad v_r^L(r,0)=\frac{1}{r}G_-(r)-\frac{1}{r^2}\int_0^r G_-(s)\mathrm{d}s;\qquad v_t^L(r,0)=\frac{1}{r}G_-(r).$$

此外，我们有

$$\int_0^R|v_t^L(r,0)|^2r^2\mathrm{d}r=\int_0^R|G_-(s)|^2\mathrm{d}s;$$

$$\int_0^R v_t^L(r,0)\left(rv_r^L(r,0)+\frac{1}{2}v^L(r,0)\right)r^2\mathrm{d}r=\int_0^R s|G_-(s)|^2\mathrm{d}s-\frac{1}{4}\left(\int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s\right)^2.$$

证明. 证明只需直接计算。首先，由 v^L 的显式公式以及关于 G_- 支撑集的假设，立即可得

$$v_L(r,t)=\frac{1}{r}\int_{t-r}^{t+r}G_-(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{r}\int_0^{t+r}G_-(s)\mathrm{d}s,\qquad r>|t|.$$

$v^L(r,0)$、$v_r^L(r,0)$、$v_t^L(r,0)$ 的表达式随即得出。现在我们来考察这两个积分恒等式。第一个显然成立。我们计算第二个

$$\begin{aligned}\int_0^R v_t^L\left(rv_r^L+\frac{1}{2}v^L\right)r^2\mathrm{d}r&=\int_0^R\frac{G_-(r)}{r}\left(G_-(r)-\frac{1}{2r}\int_0^r G_-(s)\mathrm{d}s\right)r^2\mathrm{d}r\\&=\int_0^R\left(r|G_-(r)|^2-\frac{1}{2}G_-(r)\int_0^r G_-(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r\\&=\int_0^R s|G_-(s)|^2\mathrm{d}s-\frac{1}{4}\left(\int_0^R G_-(s)\mathrm{d}s\right)^2.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

现在我们来近似式 (23) 右侧的积分。考虑极大函数

$$(\mathbf{M}G_-)(t)=\sup_{r>0}\frac{1}{r}\int_t^{t+r}|G_-(s)|\mathrm{d}s.$$

极大函数的经典理论给出

$$\|\mathbf{M}G_-\|_{L^2(t_*,0)}\lesssim_1\|G_-\|_{L^2(t_*,+\infty)}=\delta(t_*).$$

我们回顾引理 3.3 以及引理 4.1，并推出

$$\tau(t) \lesssim_1 \lambda_1(t)^{1/2}(\mathbf{M}G_-)(t) + \delta(t)^5 \lesssim_1 |t_*|^{1/2}\delta(t_*)(\mathbf{M}G_-)(t) + \delta(t_*)^5.$$

由 u的支撑集、孤子分解 (24) 以及估计 $\|\vec{w}(t;\cdot,0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_n \tau(t)$ 可知，(t' 是v_t的时间变量，$L(r,t')$)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |u_t(r,t)|^2 r^2 \mathrm{d}r &= \int_0^{|t|} |u_t(r,t)|^2 r^2 \mathrm{d}r \\ &= \int_0^{|t|} \left|\partial_{t'} v_{t,L}(r,0)\right|^2 r^2 \mathrm{d}r + \mathcal{E}_1(t).\end{aligned}$$

这里，误差项满足

$$|\mathcal{E}_1(t)| \lesssim_n |t_*|^{1/2}\delta(t_*)^2(\mathbf{M}G_-)(t) + |t_*|\delta(t_*)^2(\mathbf{M}G_-)(t)^2 + \delta(t_*)^6.$$

结合引理 6.1，可得

$$\int_0^\infty |u_t(r,t)|^2 r^2 \mathrm{d}r = \int_t^0 |G_-(s)|^2 \mathrm{d}s + \mathcal{E}_1(t).$$

积分可得

$$\int_{t_*}^0 \int_0^\infty |u_t(r,t)|^2 r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}t = \int_{t_*}^0 (s-t_*)|G_-(s)|^2 \mathrm{d}s + \mathcal{E}. \tag{26}$$

这里，误差项满足

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}| &= \left|\int_{t_*}^0 \mathcal{E}_1(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_{t_*}^0 |\mathcal{E}_1(t)|\mathrm{d}t \\ &\lesssim_n |t_*|^{1/2}\delta(t_*)^2 \int_{t_*}^0 (\mathbf{M}G_-)(t)\mathrm{d}t + |t_*|\delta(t_*)^2 \int_{t_*}^0 (\mathbf{M}G_-)(t)^2\mathrm{d}t + |t_*|\delta(t_*)^6 \\ &\lesssim_n |t_*|\delta(t_*)^3.\end{aligned}$$

接下来，我们给出 $I(t_*)$的一个估计。回顾 (24) 中给出的 $\vec{u}(t_*)$的支撑集和孤子分解，可写为

$$I(t_*) = \int_0^{|t_*|} u_t(r,t_*)\left(ru_r(r,t_*) + \frac{1}{2}u(r,t_*)\right) r^2 \mathrm{d}r = \sum_{k=1}^6 I_k$$

这里（为简便起见，我们用 λ_j 代替 $\lambda_j(t_*)$）

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{|t_*|} \partial_t v_{t_*,L}(r,0)\left(r\partial_r v_{t_*,L}(r,0) + \frac{1}{2}v_{t_*,L}(r,0)\right) r^2\mathrm{d}r; \\
I_2 &= \sum_{j=1}^n \zeta_j \int_0^{|t_*|} \partial_t v_{t_*,L}(r,0)\left(r\partial_r W_{\lambda_j} + \frac{1}{2}W_{\lambda_j}\right) r^2\mathrm{d}r; \\
I_3 &= \int_0^{|t_*|} \partial_t v_{t_*,L}(r,0)\left(r\partial_r w(t_*;r,0) + \frac{1}{2}w(t_*;r,0)\right) r^2\mathrm{d}r; \\
I_4 &= \int_0^{|t_*|} \partial_t w(t_*,r,0)\left(r\partial_r v_{t_*,L}(r,0) + \frac{1}{2}v_{t_*,L}(r,0)\right) r^2\mathrm{d}r; \\
I_5 &= \sum_{j=1}^n \zeta_j \int_0^{|t_*|} \partial_t w(t_*,r,0)\left(r\partial_r W_{\lambda_j} + \frac{1}{2}W_{\lambda_j}\right) r^2\mathrm{d}r; \\
I_6 &= \int_0^{|t_*|} \partial_t w(t_*;r,0)\left(r\partial_r w(t_*;r,0) + \frac{1}{2}w(t_*;r,0)\right) r^2\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

我们选取一个小常数 $\kappa \ll 1$，并令 t_* 为满足引理 5.2 的充分小时间。将上界 $\tau(t_*) \le \delta(t_*)^{2-\kappa}$ 代入 (25)，立即得到

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \lesssim_j \delta(t_*)^{4-2\kappa},\ j = 1, 2, \cdots n-1; \qquad \|\vec{w}(t_*, \cdot, 0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_n \delta(t_*)^{2-\kappa}.$$

这也意味着

$$\left\| r\partial_r w(t_*, r, 0) + \frac{1}{2} w(t_*; r, 0) \right\|_{L^2(\{x:|x|<t_*\})} \lesssim_1 |t_*| \|\vec{w}(t_*; \cdot, 0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim_n |t_*| \delta(t_*)^{2-\kappa}.$$

Thus

$$|I_3| + |I_4| + |I_6| \lesssim_n |t_*| \delta(t_*)^{3-\kappa}.$$

此外，我们可以应用引理 6.1，得到

$$I_1 = \int_{t_*}^0 (s - t_*) |G_-(s)|^2 \mathrm{d}s - \frac{1}{4} \left(\int_{t_*}^0 G_-(s) \mathrm{d}s \right)^2.$$

为了计算另外两项，我们先进行直接计算

$$\begin{aligned} r\partial_r W_{\lambda_j} + \frac{1}{2} W_{\lambda_j} &= r \cdot \frac{-r}{\lambda_j^{5/2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{r^2}{\lambda_j^2} \right)^{-3/2} + \frac{1}{2\lambda_j^{1/2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{r^2}{\lambda_j^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\lambda_j^{1/2}} \left(\frac{1}{6} - \frac{r^2}{2\lambda_j^2} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{r^2}{\lambda_j^2} \right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left\| r\partial_r W_{\lambda_j} + \frac{1}{2} W_{\lambda_j} \right\|_{L^2([0,|t_*|];r^2\mathrm{d}r)} \lesssim_1 \lambda_j^{1/2} |t_*|^{1/2} \lesssim_1 |t_*| \delta(t_*).$$

由此，我们仍有

$$|I_5| \lesssim_n |t_*| \delta(t_*)^{3-\kappa}.$$

最后我们考虑 I_2。

$$I_2 = \sum_{j=1}^n \zeta_j \int_0^{|t_*|} \partial_t v_{t_*, L}(r, 0) \left(r\partial_r W_{\lambda_j} + \frac{1}{2} W_{\lambda_j} \right) r^2 \mathrm{d}r = \sum_{j=1}^n I_{2,j}.$$

上述 L^2 估计给出

$$|I_{2,j}| \lesssim_1 \delta(t_*) \lambda_j^{1/2} |t_*|^{1/2} \lesssim_n |t_*|^{1/2} \delta(t_*) \lambda_1^{1/2} (\delta(t_*))^{(2-\kappa)(j-1)} \lesssim_n |t_*| \delta(t_*)^{2+(2-\kappa)(j-1)}.$$

Thus

$$\sum_{j=2}^n |I_{2,j}| \lesssim_n |t_*| \delta(t)^{4-\kappa}.$$

然后我们详细计算$I_{2,1}$

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= -\int_0^{|t_*|} \frac{G_-(r + t_*)}{r} \cdot \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \left(\frac{1}{6} - \frac{r^2}{2\lambda_1^2} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{r^2}{\lambda_1^2} \right)^{-3/2} r^2 \mathrm{d}r \\ &= -\lambda_1^{1/2} \int_0^{|t_*|} G_-(r + t_*) \left[\frac{r}{\lambda_1} \left(\frac{1}{6} - \frac{r^2}{2\lambda_1^2} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{r^2}{\lambda_1^2} \right)^{-3/2} \right] \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

我们令 $g(y) = y(1/6 - y^2/2)(1/3 + y^2)^{-3/2}$。不难看出

$$\left| g(y) + \frac{1}{2} \right| \lesssim_1 \min\{1, y^{-2}\}, \qquad y > 0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\left| I_{2,1} - \frac{\lambda_1^{1/2}}{2} \int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s \right| &\lesssim_1 \lambda_1^{1/2} \int_0^{\lambda_1} |G_-(r+t_*)|\mathrm{d}r + \lambda_1^{5/2} \int_{\lambda_1}^{|t_*|} |G_-(r+t_*)| r^{-2}\mathrm{d}r \\ &\lesssim_1 \lambda_1 \delta(t_*) \lesssim_1 |t_*|\delta(t_*)^3.\end{aligned}$$

综上，我们有

$$I(t_*) = \int_{t_*}^0 (s - t_*)|G_-(s)|^2\mathrm{d}s - \frac{1}{4}\left(\int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s\right)^2 + \frac{\lambda_1^{1/2}}{2}\int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s + O_n(|t_*|\delta(t_*)^{3-\kappa})$$

将此式和（26）代入（23）得

$$J \doteq \left| \frac{\lambda_1^{1/2}}{2} \int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{4}\left(\int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s\right)^2 \right| \lesssim_n |t_*|\delta(t_*)^{3-\kappa}. \tag{27}$$

由于 t_* 满足引理 5.2 的结论，我们有

$$\int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s > \frac{1}{2}|t_*|^{1/2}\delta(t_*)^{1+\kappa/2}.$$

此外，根据注记 4.2，以下不等式成立

$$\left| \int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s - \lambda_1^{1/2} \right| \lesssim_1 |t_*|^{1/2}\delta(t_*)^{9/5}.$$

因此，不等式（27）的左端满足

$$J \gtrsim_1 \left(\int_{t_*}^0 G_-(s)\mathrm{d}s\right)^2 \gtrsim_1 |t_*|\delta(t_*)^{2+\kappa}.$$

这就产生了矛盾，因为我们总可以使 $\delta(t_*)$充分小。

致谢

作者得到国家自然科学基金委员会项目12471230的资助。

参考文献

[1] J. Bourgain 与 W. Wang。“具有临界非线性的非线性Schr¨odinger方程爆破解的构造。”《比萨高等师范学校年刊》。科学类。第四辑 25(1997)，第1-2期：197-215。

[2] C. Collot、T. Duyckaerts、C. Kenig 和 F. Merle. “六维空间中径向二次波动方程的孤子分解。” 越南数学杂志 52(2024), no. 3: 735- 773.

[3]R. Cˆote 和 C. Laurent. “线性波在锥附近的集中。” Revista Matem ´atica Iberoamericana 40(2024): 201-250.[4] R. Cˆote、C.E. Kenig 和 W. Schlag. “线性径向波动方程的能量分解。”《数学年刊》358, 3-4(2014): 573-607.[5] R. Donninger、M. Huang、J. Krieger 和 W. Schlag. “ u^5聚焦波动方程的奇异爆破解，维数为 $\mathbb{R}^3$。”《密歇根数学杂志》63(2014), no. 3: 451-501.[6] T. Duyckaerts、H. Jia 和 C.E.Kenig “聚焦能量临界波动方程沿时间序列的孤子分解”，《几何与泛函分析》27(2017): 798-862.[7] T. Duyckaerts、C.E. Kenig、Y. Martel 和 F. Merle. “临界共旋波映射和径向三次波动方程的孤子分解。”《数学物理通讯》391(2022), no. 2: 779-871.[8] T. Duyckaerts、C.E. Kenig 和 F. Merle. “能量临界波动方程小型径向 II 型爆破解的爆破轮廓的普适性。”《欧洲数学学会杂志》13, Issue 3(2011): 533-599.[9] T. Duyckaerts、C.E. Kenig 和 F. Merle. “聚焦能量临界波动方程径向解的分类。”《剑桥数学杂志》1(2013): 75-144.[10] T. Duyckaerts、C.E. Kenig 和 F. Merle. “能量临界波动方程整体解的散射轮廓。”《欧洲数学学会杂志》21 (2019): 2117- 2162.[11] T. Duyckaerts、C. E. Kenig 和 F. Merle. “能量临界聚焦波动方程非辐射解的衰减估计。”《几何分析杂志》31(2021), no. 7: 7036-7074.[12] T. Duyckaerts、C. E. Kenig 和 F. Merle. “奇数空间维数中带径向初值的临界波动方程的孤子分解。”《数学学报》230(2023), no. 1: 1-92.[13] T. Duyckaerts 和 F. Merle. “能量临界波动方程阈值解的动力学。”《国际数学研究论文集》2007, no.4: Article ID. rpn002.[14] F. G. Friedlander. “波动方程脉冲解的辐射场。”《英国皇家学会会刊》A辑 269 (1962): 53-65.[15] F. G. Friedlander. “辐射场与双曲散射理论。” Mathematical Pro-ceedings of Cambridge Philosophical Society 88(1980): 483-515.[16] J. Ginibre 和 G. Velo. “波动方程的广义斯特里查茨不等式。”《泛函分析杂志》133(1995): 50-68.[17] M. Grillakis. “具有临界非线性的波动方程的正则性与渐近行为。”《数学年刊》132(1990): 485-509.[18] M. Hillairet 和 P. Rapha¨el. “四维能量临界波动方程的光滑II型爆破解。”《分析与偏微分方程》5(2012), no. 4: 777-829.[19] J. Jendrej. “径向情形中能量临界波动方程II型爆破速度界。”《国际数学研究通知》2016, no. 16: 6656-6688.[20] J. Jendrej. “五维能量临界波动方程II型爆破解的构造。”《泛函分析杂志》272(2017), no. 3: 866-917.

[21] J. Jendrej.《径向能量临界波动方程中异号双泡解的不存在性》。《比萨高等师范学校年刊》。科学类。第五辑 18(2018), 第2期：735-778。[22] J. Jendrej.《能量临界波动方程双泡解的构造》。《美国数学杂志》141(2019), 第1期：55-118。[23] J. Jendrej、A. Lawrie 和 C. Rodriguez.《指定辐射下起泡波映射的动力学》。《高等师范学校科学年刊》。第四辑 55(2022), 第4期：1135-1198。[24] J. Jendrej 和 A. Lawrie.《径向情形下能量临界非线性波动方程的孤子分解》。《偏微分方程年刊》9(2023), 第2期：论文编号18。[25] L. Kapitanski.《半线性波动方程的弱解及更弱解》。《偏微分方程通讯》19(1994)：1629-1676。[26] C. E. Kenig、A. Lawrie、B. Liu 和 W. Schlag.《线性径向波动方程的能量通道》。《数学进展》285(2015)：877-936。[27] C. E. Kenig 和 F. Merle.《能量临界聚焦非线性波动方程的整体适定性、散射与爆破》。《数学学报》201(2008)：147-212。[28] J. Krieger、W. Schlag 和 D. Tataru.《($\mathbb{R}^3$)临界聚焦半线性波动方程的慢爆破解》。《杜克数学杂志》147(2009), 第1期：1-53。[29] J. Krieger 和 W. Schlag.《三维五次波动方程的全范围爆破指数》。《纯粹与应用数学杂志》101(2014), 第6期：873-900。[30] J. Krieger 和 W. Wong.《临界非线性波动方程的I型爆破形成》。《偏微分方程通讯》39(2014), 第9期：1718-1728。[31] L. Li、R. Shen 和 L. Wei.《自由波辐射场的显式公式及其在能量通道中的应用》。《分析与偏微分方程》17(2024), 第2期：723-748。[32] H. Lindblad 和 C. Sogge.《半线性波动方程的最低正则性存在性与散射》。《泛函分析杂志》130(1995)：357-426。[33] K. Nakanishi.《具有非强制临界非线性项的波动方程解的整体唯一存在性与渐近行为》。《偏微分方程通讯》24(1999)：185-221。[34] K. Nakanishi.《具有索伯列夫临界幂的非线性克莱因–戈尔登方程的散射理论》。《国际数学研究通知》1999, 第1期：31-60。[35] J. Shatah 和 M. Struwe.《非线性波动方程的正则性结果》。《数学年刊》138(1993)：503-518。[36] J. Shatah 和 M. Struwe.《具有临界增长的半线性波动方程在能量空间中的适定性》。《国际数学研究通知》7(1994)：303-309。[37] R. Shen.《具有径向初值的 $\mathbb{R}^3$ 能量次临界非线性波动方程》。《分析与偏微分方程》6(2013)：1929-1987。[38] R. Shen.《三维能量临界波动方程径向解的辐射理论》。（arXiv预印本 2212.03405）。[39] R. Shen.《具有径向初值的三维聚焦能量临界波动方程的动力学》。（arXiv预印本 2507.00391）。

[40] M. Struwe.《克莱因-戈尔登方程的全局正则解》。《比萨高等师范学校年刊》—科学类 15(1988)：495-513。