arXiv:2602.04219v1 [math.OC] 4 Feb 2026

采样数据乘性系统的 Wasserstein 分布鲁棒控制：具有性能保证的凸松弛*

CHUNG-HAN HSIEH†

摘要。 本文研究存在乘性噪声和分布不确定性的采样数据随机系统的鲁棒最优控制。我们考虑一类离散时间最优控制问题，其中控制器 *jointly* 选择反馈策略和采样周期，以最大化采样间增长因子的最坏情形期望凹效用。我们通过 Wasserstein 模糊集对不确定性建模，并面对由针对对抗分布最大化凹效用所产生的“凹最大化”几何结构这一障碍。与标准凸损失最小化不同，此处的对偶重构需要在半无限约束中进行极小极大互换，而效用的凹性使精确强对偶无法成立。为解决这一问题，我们利用一般极小极大不等式，推导出一种易于处理的凸松弛。我们的方法给出一个严格下界，可作为概率性能保证。我们为所得对偶间隙建立了明确的非渐近界，证明近似误差统一受阶段奖励的利普希茨光滑性和扰动支撑集直径控制。此外，我们提出了确保 *robustviability* 的充要条件，使状态正性不变性在整个歧义集上成立。最后，我们弥合静态优化与动态性能之间的差距，证明该松弛的最优值几乎必然构成渐近平均效用率的严格确定性下界。我们通过一个对数最优投资组合控制问题展示该框架，该问题是乘性随机控制的典型实例。

关键词。 随机最优控制、分布鲁棒优化、Wasserstein距离、采样数据控制、乘性系统、凸松弛、最优增长投资组合

数学主题分类代码。 93E20、93C57、90C47、90C34、93C28、91G10

1. 引言。 本文研究受乘性噪声和分布不确定性影响的采样数据随机系统的鲁棒最优控制。具体而言，我们考虑一类离散时间最优控制问题，其中控制器联合选择反馈策略和采样周期，以最大化采样间增长因子的最坏情况下的期望效用。通过将 Wasserstein 度量纳入采样数据框架，我们提出一种分布鲁棒控制（DRC）策略，确保系统可行性（状态正性），并在扰动分布存在认知不确定性的情况下实现鲁棒性能。此类含乘性噪声的随机系统自然存在于以增长为主导的环境中，且已得到广泛研究；例如，参见 [1, 25, 21, 30]。与实现相关的约束——包括采样保持操作、通信丢失以及数据驱动控制器综合——也已在网络化控制和基于学习的控制领域得到广泛研究；例如，参见 [44, 28, 14]。

为具体说明，我们以定量金融中的最优增长投资组合 （凯利）问题作为贯穿全文的示例；参见 [35, 11, 15, 34]。在这一语境下，系统状态表示财富，乘性噪声表示资产回报，而采样周期对应于再平衡频率。重要的是，金融主要是一个具体实例：核心理论挑战——特别是控制频率、交易成本（执行摩擦）与分布

* 本文部分受台湾国家科学及技术委员会（NSTC）资助，项目编号：NSTC113–2628–E–007–015– 和 NSTC114–2628–E-007–006–。

†台湾新竹国立清华大学数量金融系（ch.hsieh@mx.nthu.edu.tw）。

鲁棒性之间的耦合——对于由乘性噪声驱动的广泛工程与经济系统而言都是根本性的；例如参见 [32] 关于实现延迟下相关正性考量的讨论。

1.1. 动机与文献综述。经典随机最优控制理论如今已相当成熟；参见 [42, 8]。此后，人们提出了许多扩展和改进，以应对建模复杂性和不确定性。特别是，具有乘法效应（随机系数）的随机系统催生了丰富的建模与控制范式；例如，参见 [1, 25]。与此同时，人们也针对随机控制问题提出了基于极小极大（最坏情况）准则的鲁棒表述；例如，参见 [29, 26]。众所周知，在存在比例摩擦的情况下，此类问题的连续时间极限通常会导向奇异随机控制表述 [16]。相比之下，本文提出的采样数据框架避免了这些奇异性，同时保留了严格且易于处理的性能界。

采样数据约束与摩擦。现实中的控制器通过采样保持机制以离散时间运行。采样数据控制和随机再平衡系统的一个核心特征是，采样周期 n 会带来一项根本性的权衡；参见 [3, 36]。经典结果主要关注采样条件下稳定性的保持，而 [41], 我们则着重研究增长和分布不确定性。

事实上，高频控制能够更贴近理想的连续时间策略，但会带来较高的累积摩擦（执行成本）；在我们的框架中，这通过依赖于状态的采样间增长因子 Φ_n体现。相反，低频控制可降低摩擦成本，但会增大离散化误差，并增加受到开环漂移影响的程度。因此，采样决策会通过扰动聚合和累积摩擦直接影响 Φ_n，使控制与采样周期的选择在 Φ_n 中从结构上无法分离。关于随机采样周期采样数据系统的奠基性成果可追溯至[17], ，而基于线性矩阵不等式的乘性噪声控制方法则由[19]发展而来。近期应用已开始将采样周期本身视为决策变量 [37, 46, 30]。这些方法建立在早期关于矩不确定性下鲁棒增长最优性的理论框架 [43], 之上，但通常假设驱动扰动的分布完全已知。

分布不确定性。 分布鲁棒优化（DRO）通过针对概率测度的歧义集进行优化，为应对模型误设提供了系统化框架。此类歧义集可以通过多种度量构造，包括Prohorov度量 [20], 、盒型凸多面体不确定性 [6], 、Kullback-Leibler散度 [5, 33], 以及基于矩的描述 [18]。本文聚焦于 Wasserstein 模糊集，它特别适用于数据驱动场景，并且在温和条件下能够提供有限样本性能保证和渐近一致性 [40, 9, 24]。

在多期马尔可夫决策过程的文献中，已有研究探讨基于 Wasserstein 的分布鲁棒控制 [47], ，其中，通过贝尔曼算子的重构可得到压缩映射，并实现多阶段样本外保证。近期的扩展则通过近似技术，解决了线性二次情形下的可处理性和部分可观测性问题；例如参见 [27]。

与此同时，Wasserstein分布鲁棒优化也已用于金融领域的增长最优决策问题，并由此产生了稳健的“Wasserstein–Kelly”规则；例如，

[43, 39, 31]。然而，这些建模通常忽略了交易成本以及再平衡周期的策略性选择——这两项特征在采样数据实现中至关重要，并且会使控制动作与采样决策直接耦合。相比之下，我们研究的是状态乘性系统的凹效用最大化问题，在这类问题中，极小极大等式所要求的标准凸凹结构通常并不成立，因此无法进行精确的鞍点重构。

凹最大值几何。 最大化凹效用与风险敏感随机控制密切相关；例如，参见 [45, 22]。在相关文献中，指数型（熵型）效用通常能够导出易于处理的动态规划递推，而分布不确定性下的一般凹效用——正如本文所考虑的情形——则需要根本不同的技术。

将标准Wasserstein分布鲁棒优化方法应用于状态乘性系统的效用最大化时，会出现一个关键的理论空白。经典的有限样本Wasserstein分布鲁棒优化结果（例如，[40, 24, 38], ）主要针对最小化凸损失函数而建立；在这一设定下，根据通常的凸性—凹性假设，可通过Sion极小极大定理保证极小极大等式。相比之下，在本文设定中，阶段效用关于扰动是凹的，而可处理性取决于对偶表示的半无限约束中所嵌入的极小极大互换。由于该约束层面的互换不满足所需的凸—凹条件，通常无法得到精确等式。因此，我们依靠一般极小极大不等式构造一种保守的凸松弛，从而为最坏情况下的期望效用提供严格的下界，并给出由该互换所引起的松弛间隙的显式非渐近界。

1.2. 贡献。 据我们所知，这是首个将频率感知采样数据鲁棒控制与乘性系统的Wasserstein分布鲁棒性统一起来的框架。我们的具体贡献如下：

一种统一的采样数据分布鲁棒优化表述： 我们将控制输入 u与采样周期 n 的联合优化表述为最坏情况下的期望效用最大化问题。我们引入鲁棒可行性（引理2.8）这一概念，它是一个严格的不变性条件，确保对于Wasserstein 模糊集内的所有分布，系统状态始终保持严格为正，而这是效用最大化准则适定性的前提。从控制理论视角来看，在存在模型不确定性的乘性系统中，鲁棒可行性约束所起的作用类似于安全不变性。

通过极小极大不等式和概率保证实现的可处理松弛： 针对“凹最大化”困难，我们推导出无限维控制问题的一种计算上易处理的凸松弛（定理3.1）。与通常借助极小极大等式实现精确重构的标准分布鲁棒优化结果不同，我们严格地将所提解表述为下界，即真实最优值的下界，并利用一般极小极大不等式。随后，引理3.9 提供了概率保证，表明这种保守性能够给出实际性能的有效置信下界。在安全关键控制中，最大化下限往往比最大化均值更为可取。

长期性能保证：为弥合静态优化与动态性能之间的差距，我们建立了凸松弛解与系统渐近行为之间的理论联系（定理 3.10）。我们证明，在遍历性假设下，我们的可处理形式的最优值几乎必然构成长期平均效用率的确定性下限。对于

对数效用的特定情形，该结果为渐近资本增长率提供了有保证的下限，从而为滚动时域实施提供了严格的理论依据；参见推论 3.11。该结果将我们的有限时域鲁棒优化与遍历控制理论联系起来；例如，参见 [2, 10]。

显式非渐近对偶间隙分析： 我们为近似结果的质量提供理论保证。在命题 3.5中，我们推导出极小极大对偶间隙的显式非渐近上界。我们证明，该间隙随阶段奖励函数的利普希茨光滑性和扰动支撑集的直径而变化，但与模糊半径无关。这一结果通过量化潜在次优性的最大程度，证明了采用凸松弛的合理性。

实证验证与性能分析： 我们使用主要大型市值标准普尔 500 指数资产的数据集，在对数最优投资组合控制问题上展示了该框架的实际效用。通过采用割平面方案实现分布鲁棒控制器，我们证明，联合优化采样周期与反馈策略，在下行风险和风险调整收益方面显著优于标准市场基准策略。

本文其余部分安排如下。第 2 节详细介绍模型组成部分。第 3节阐述主要理论结果，包括可处理的重构、对偶间隙分析以及各项性能保证。第 4节给出数量金融中的一个示例，第 5 节总结全文。

2. 预备知识与问题表述。 本节在分布不确定性下，对一类采样数据随机乘性控制系统进行建模。

2.1. 符号说明。 全文中，$\mathbb{R}$ 表示实数集，$\mathbb{R}_+$表示非负实数集，$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 表示扩展实数集。所有随机对象均定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$。 记号 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^k$ 上的 ℓ_r-范数（维数 k 由上下文确定），其中 $r \in [1, \infty]$在全文中固定选取。我们用 $\|\cdot\|_*$ 表示与 $\|\cdot\|$对应的对偶范数，定义为 $\|z\|_* := \sup_{x \in \mathbb{R}^k} \{z^\top x : \|x\| \leq 1\}$ for $z \in \mathbb{R}^k$。我们用 δ_x 表示集中单位质量于 x. 的狄拉克测度。两个概率分布 $\mathbb{P}_1$和 $\mathbb{P}_2$ 在 $\mathfrak{X}_1$ 和 $\mathfrak{X}_2$上的乘积分布，分别记为 $_1 \otimes \mathbb{P}_2$ 在 $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$.上。

2.2. 采样数据乘性动态。考虑一个采样周期固定为 $n \geq 1$ 的离散时间随机控制系统。令 $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 表示离散时间索引，它对应于物理时间区间 $[kn,(k+1)n)$。我们将第 k 个区间开始时的标量系统状态记为 $V_k := V(kn) \in \mathbb{R}_+$，并将控制输入记为 $u_k \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$。控制通过零阶保持器 机制实施，在整个区间 $[kn,(k+1)n)$ 内保持恒定。系统按照以下乘性 状态动态演化：

$$V_{k+1} = V_k \, \Phi_n(u_k, \mathcal{X}_{k,n}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

其中，$\mathcal{X}_{k,n}$ 表示第 k 个区间内的聚合外生输入（扰动），其取值属于紧集 $\mathfrak{X}_n \subset \mathbb{R}^d$。函数 $\Phi_n : \mathcal{U} \times \mathfrak{X}_n \to (0, \infty)$ 是状态转移映射，表示采样间的增长因子。该函数刻画了控制决策与不确定性耦合作用的影响，并隐式考虑了执行摩擦（例如效率损失、预算成本等）以及外部环境的乘性强迫。

注 释 2.1（维度不匹配）。该表述明确允许控制维数与扰动维数不同（$m \neq d$）。这种灵活性能够涵盖多种

情形，例如欠驱动 （$m < d$）：低维控制（如标量杠杆比率）面对高维噪声；又如冗余 （$m > d$）：由少数低维潜在因子驱动的大规模投资组合配置。

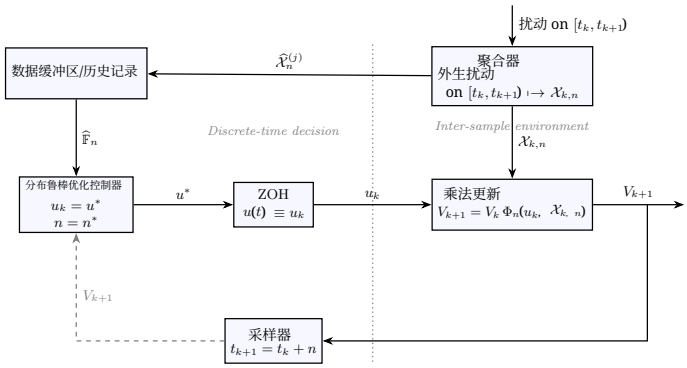


FIG. 1。 *Schematic of the sampled-data loop. The analysis uses the sampled state* $V_k = V(t_k)$ *and an aggregated disturbance* $\mathcal{X}_{k,n}$ *over* $[t_k, t_{k+1})$ *where* $t_k = kn$.

2.3. 性能准则与状态正性。 设 $U : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ 是一个凹且非递减的效用函数。我们用给定的阶段奖励 $r_n(u, x) := U(\Phi_n(u, x))$，来衡量一个采样周期内的性能。风险规避增长因子的一个典型例子对应于对数效用 $U(t) = \log t$。

为确保问题在存在不确定性的情况下仍定义良好，我们施加可行性约束。固定一个可行性裕度 $\eta > 0$，使得 $[\eta, \infty) \subseteq \mathrm{dom}(U)$。我们将可行控制集 定义为：

$$\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n; \eta) := \big\{ u \in \mathcal{U} : \Phi_n(u, x) \geq \eta, \quad \forall x \in \mathfrak{X}_n \big\}. \tag{2.2}$$

该条件保证阶段奖励 $r_n(u, x)$ 在扰动支撑集 $\mathfrak{X}_n$ 上一致地定义良好且有限。

2.4. 关于增长因子的既定假设。 为确保计算上的可处理性，并推导对偶间隙的显式非渐近界，我们对系统数据和效用函数施加以下结构性假设。

假设 2.2（正则性与光滑性）。对于每个固定的采样周期$n \geq 1$，我们假设满足以下条件：

(A1) (紧致性) 可行控制集 $\mathcal{U} \subset \mathrm{R}^m$ 非空、紧且凸。扰动支撑集 $\mathfrak{X}_n$ 非空且紧。
(A2) (连续性与分别凹性) 阶段奖励映射 $(u, x) \mapsto r_n(u, x)$ 连续，并且对每个 $x \in \mathfrak{X}_n$，关于 u 为凹函数；对于每个 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n; \eta)$，关于 x 在 $\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$ 上为凹函数，其中 $\mathrm{conv}(\cdot)$ 表示凸包。**(A3) (一致 L_n-光滑性)** 对每个 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n; \eta)$，映射 $x \mapsto r_n(u, x)$ 在 $\mathfrak{X}_n$ 上可微，且其梯度 $\nabla_x r_n(u, x)$ 满足一致利普希茨条件：存在一个常数 $L_n > 0$，使得

$$\sup_{u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \sup_{\substack{x, y \in \mathfrak{X}_n \\ x \neq y}} \frac{\big\| \nabla_x r_n(u, x) - \nabla_x r_n(u, y) \big\|_*}{\|x - y\|} \leq L_n.$$

备注 2.3. 假设2.2(A2) 保持了问题的凹最大化特征。满足 (A2) 的一个充分条件是 $\Phi_n(u,\ x)$ 关于 $(u,\ x)$ 为凹函数，且 U在 $[\eta,\infty)$ 上为凹且单调不减。假设 2.2(A3) 是唯一一个将对偶间隙界与效用的具体选择联系起来的假设。以下示例说明，仿射对数情形满足假设 2.2(A3)。

例 2.4（对数最优投资组合控制）。设 $u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$ 表示针对某个 $\eta>0$，投资于风险资产的投资组合权重向量。考虑仿射增长因子（常见于投资组合优化中，例如参见 [31]） $\Phi_n(u,x)=u^\top x+c_n(u)$，以及效用 $U(y)=\log(y)$。阶段奖励为 $r_n(u,x)=\log(u^\top x+c_n(u))$。关于扰动 x 的梯度为 $\nabla_x r_n(u,x)=\underset{u}{u^\top x+c_n(u)}=\underset{u}{\Phi_n(\cdot,x)}$。注意，由于 $u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$，我们有 $\Phi_n(u):=\min_{x\in\mathfrak{X}_n}\Phi_n(u,x)\geq\eta$。因此，对于任意 $x,y\in\mathfrak{X}_n$，

$$\begin{aligned}\|\nabla_x r_n(u,x)-\nabla_x r_n(u,y)\|_* &= \left\|u\left(\frac{1}{\Phi_n(u,x)}-\frac{1}{\Phi_n(u,y)}\right)\right\|_*\\ &\leq \|u\|_*\,\frac{|\Phi_n(u,y)-\Phi_n(u,x)|}{\Phi_n(u,x)\,\Phi_n(u,y)}\\ &= \|u\|_*\,\frac{|u^\top(y-x)|}{\Phi_n(u,x)\,\Phi_n(u,y)}\\ &\leq \|u\|_*\,\frac{\|u\|_*\,\|y-x\|}{\underline{\Phi}_n(u)^2}=\frac{\|u\|_*^2}{\underline{\Phi}_n(u)^2}\,\|x-y\|,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由广义柯西-施瓦茨不等式 $|u^\top z|\leq\|u\|_*\|z\|$ 得出，例如参见 [4]。因此，$\nabla_x r_n(u,\ x)$ 在 $\mathfrak{X}_n$ 上是 $L_n(u)$-利普希茨的，其 $L_n(u)$ 为 $=\underset{\Phi_n}{\overset{\|u\|_*^2}{u}}$（）²特别地，由于 $\Phi_n(u)\geq\eta$，我们有 $L_n(u)\leq\frac{\|u\|_*^2}{\eta^2}$，因此—

$$\sup_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)}L_n(u)\leq\sup_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)}\frac{\|u\|_*^2}{\eta^2}.$$

由于 $\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)\subseteq\mathcal{U}$ 且 $\mathcal{U}$ 根据 (A1) 为紧集，$\sup_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)}\|u\|_*<\infty$；因此存在一个有限的一致常数 $L_n:=\sup_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)}L_n(u)$，从而验证仿射对数情形下的假设 2.2(A3)。

2.5. Wasserstein 模糊集。 如第 1 节所述，真实的扰动分布通常未知。为了在应对这种不确定性的同时避免最坏情形鲁棒优化过度的保守性，我们使用 Wasserstein 度量对分布不确定性进行建模。令 $\mathcal{M}(\mathfrak{X}_n)$ 为所有概率分布 $\mathbb{F}$ 支撑于 $\mathfrak{X}_n$。由于 $\mathfrak{X}_n$ 是紧集，所有此类分布都具有有限矩。

Definition 2.5（Wasserstein 度量）。对于 $p\in[1,\infty)$ 以及任意两个分布$\mathbb{F}^1,\mathbb{F}^2\in\mathcal{M}(\mathfrak{X}_n)$，由第 *p-Wasserstein* 度量 $W_p:\ \mathcal{M}(\mathfrak{X}_n)\times\mathcal{M}(\mathfrak{X}_n)\to\mathbb{R}$ 由第 $\|\cdot\|$ 2.1 节中固定的底层范数 定义如下

$$W_p(\mathbb{F}^1,\mathbb{F}^2):=\left(\inf_{\Pi\in\Gamma(\mathbb{F}^1,\mathbb{F}^2)}\mathbb{E}_{(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2)\sim\Pi}[\|\mathcal{X}^1-\mathcal{X}^2\|^p]\right)^{1/p}$$

其中 $\Gamma(\mathbb{F}^1,\mathbb{F}^2)$是 $\mathfrak{X}_n\times\mathfrak{X}_n$ 上以$\mathbb{F}^1$ 和$\mathbb{F}^2$为边缘分布的联合分布（耦合）集合。

全文中，我们固定一个阶 $p \in [1,\infty)$，并使用 p-Wasserstein 度量 W_p。本文中所有Wasserstein模糊集均相对于同一底层范数定义 $\|\cdot\|$。与数据驱动表述一致，例如参见 [12, 40, 47],令 $\widehat{\mathcal{X}}_n^{(1)},\dots,\widehat{\mathcal{X}}_{(N_n)n} \in \mathfrak{X}_n$ 表示 n期聚合扰动的观测样本，其中 N_n 为时域 n处可用的样本数量。相应的经验分布为 $\widehat{\mathbf{F}}_n := \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n}\delta_{\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}}$, 其中 δ_x 表示 x处的狄拉克测度。

对于半径 $\varepsilon \geq 0$，*Wasserstein* 模糊集 定义为以 $\mathbf{F}_n$ 为中心、半径为 ε 的球：

$$\mathcal{B}_\varepsilon^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n) := \left\{\mathbb{F} \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_n) : W_p(\mathbb{F},\widehat{\mathbb{F}}_n) \leq \varepsilon\right\}. \tag{2.3}$$

为确保统计有效性，针对每个采样周期分别校准歧义半径如下。

Definition 2.6（校准歧义半径）。固定全局置信水平 $\beta \in (0,1)$ 和有限候选集 $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$。对于每个 $n \in \mathcal{N}$，选择半径 $\varepsilon_n \geq 0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{F}_{\mathrm{true},n} \in \mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)\right) \geq 1 - \frac{\beta}{|\mathcal{N}|}, \tag{2.4}$$

其中，$|\mathcal{N}|$ 表示集合 $\mathcal{N}$ 的基数，$\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}$ 表示通用 n 周期聚合扰动 $\mathcal{X}$ 的真实分布。[1] 因此，根据并集界，

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathcal{N}}\{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n} \in \mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)\}\right) \geq 1-\beta.$$

注 2.7。请注意，对于通用球的定义，若 $\varepsilon = 0$，则 $\mathcal{B}_\varepsilon^{(p)}(\widehat{\mathbf{F}}_n) = \{\widehat{\mathbf{F}}_n\}$，这是一个单元素经验分布。

2.6. 鲁棒可行性与可行控制。在乘法系统中，状态正性是性能准则适定性的前提。与经典控制中的稳定性或不变性要求类似，参见 [13, 21]，我们要求控制 u 确保状态轨迹在歧义集上始终严格为正。

我们通过鲁棒可行性这一概念将其形式化。回顾在 $\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$ 中定义的可行控制集合 2.2。以下引理表明，对增长因子的这一静态约束足以确保分布不确定性下的动态状态不变性。

Lemma 2.8（鲁棒可行性条件）。固定一个采样周期 $n \geq 1$。令$V_0 > 0$。若控制 u 是可行的，即 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$，则对于任意模糊半径$\varepsilon \geq 0$ 以及任意分布 $\mathbb{F} \in \mathcal{B}_\varepsilon^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)$，状态演化满足

$$\mathbb{P}^{\mathbb{F}}(V_{k+1} \geq \eta V_k) = 1 \quad \textit{and} \quad \mathbb{P}^{\mathbb{F}}(V_{k+1} > 0) = 1, \quad \forall k \geq 0.$$

证明。 固定 $\varepsilon \geq 0$ 以及$\mathbf{F} \in \mathcal{B}_\varepsilon^{(p)}(\widehat{\mathbf{F}}_n)$。根据定义，歧义集是 $\mathcal{M}(\mathfrak{X}_n)$的子集，这意味着每个可行分布都支撑在紧集 $\mathfrak{X}_n$上。

[1]此类半径可由集中界得到，例如参见 [23], 在适当的抽样假设下，或通过经验方法进行校准（例如，在存在序列依赖时采用区块自助法）。

条件 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\ \eta)$表明，对任意这样的F，$\Phi_n(u, \mathcal{X}) \geq \eta$几乎必然成立，其中 $\mathcal{X}$ 表示一般的 n周期聚合扰动。由于动态是乘性的，即 $V_{k+1} = V_k \Phi_n(u, \mathcal{X})$，若 $V_k > 0$，则几乎必然有 $V_{k+1} \geq \eta V_k$。给定 $V_0 > 0$ 与 $\eta > 0$，严格正不变性可由归纳法得出。

□

尽管鲁棒可行性是一项硬约束，但也可以考虑概率松弛。我们定义这一概念，以阐明约束层次。

Definition 2.9 ((ε，δ)-可行性)。固定 $n \geq 1$、$\varepsilon \geq 0$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$。若控制 $u \in \mathcal{U}$ 满足 $\inf_{\mathbb{F} \in \mathcal{B}_\varepsilon^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \mathbb{P}^{\mathbb{F}}\left(\Phi_n(u,\ \mathcal{X}) \geq \eta\right) \geq 1 - \delta$，则称其为 ($\varepsilon$，$\delta$)-可行的。

注 2.10. 与鲁棒可行性不同，(ε，δ)-可行性并不要求 $\Phi_n(u,\ x) \geq \eta$在 $x \in \mathfrak{X}_n$ 上一致成立。因此，对于在零点处存在奇异性的效用函数（例如$U = \log$），仅有 (ε，δ)-可行性通常不能确保对于所有 $\mathrm{F} \in \mathcal{B}_\varepsilon^{(p)}(\widehat{\mathrm{F}}_n)$，$\mathrm{E}^{\mathbb{F}}[U(\Phi_n(u,\ \mathcal{X}))]$ 有限。

下述定理确立了硬鲁棒约束与概率机会约束之间的层次关系。

Theorem 2.11（生存性条件层次）。对于给定的 $n \geq 1$，以下蕴含关系成立：

（i）若 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}$（$n$；$\eta$），则对于（$\varepsilon, \delta$），对所有 $\varepsilon \geq 0$ 和 $\delta \in$（0，1）均具有生存性。

（ii）反之，若对于每个 $\varepsilon \geq 0$ 和每个 $\delta \in$（0，1），u 都具有（ε, δ）生存性，则

$$\inf_{x \in \mathfrak{X}_n} \Phi_n(u, x) \geq \eta.$$

证明。（i）若 $\inf_{x \in \mathfrak{X}_n} \Phi_n(u, x) \geq \eta$，则事件 $\{\Phi_n(u, \mathcal{X}) \geq \eta\}$ 在任何以 $\mathfrak{X}_n$ 为支撑集的分布下几乎必然发生。因此，在任何以 $\mathfrak{X}_n$ 为支撑集的分布下，其概率均为 1，从而满足任意 δ 对应的条件。

（ii）我们用反证法。假设对于所有 ε, δ，u 都具有（ε, δ）-生存性，但存在某个 $x^* \in \mathfrak{X}_n$ 使得 $\Phi_n(u, x^*) < \eta$。令 $\mathrm{F}^* = \delta_{x^*}$ 为位于 x^* 处的狄拉克测度。由于 $x^* \in \mathfrak{X}_n$，$\mathrm{F}^* \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_n)$。考虑距离 $W_p(\mathrm{F}^*, \widehat{\mathrm{F}}_n)$。由于 $\mathfrak{X}_n$ 是紧的，该距离有限。选取模糊半径 $\varepsilon' \geq W_p(\mathrm{F}^*, \widehat{\mathrm{F}}_n)$。则 $\mathrm{F}^* \in \mathcal{B}_{\varepsilon'}^{(p)}(\widehat{\mathrm{F}}_n)$。在此 F^* 下，事件 $\{\Phi_n(u, \mathcal{X}) \geq \eta\}$ 的概率为零。这意味着

$$\inf_{\mathbb{F} \in \mathcal{B}_{\varepsilon'}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \mathbb{P}^{\mathbb{F}}\left(\Phi_n(u, \mathcal{X}) \geq \eta\right) = 0,$$

这违反了对于任意 $\delta < 1$，u 是 (ε', δ)-可行的条件。 □

基于这一层次结构，在本文余下部分中，我们施加鲁棒可行性约束 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n; \eta)$，其定义见 (2.2)。由于 $\mathfrak{X}_n$ 是紧的，且对于每个固定的 u，$x \mapsto \Phi_n(u, x)$ 连续，因此该条件等价地写作

$$\min_{x \in \mathfrak{X}_n} \Phi_n(u, x) \geq \eta. \tag{2.5}$$

特别地，最小值可以取到。此外，如果对于每个 x，$u \mapsto \Phi_n(u, x)$ 是凹的，那么 $g(u) := \min_{x \in \mathfrak{X}_n} \Phi_n(u, x)$ 作为凹函数的逐点下确界也是凹的；因此，其超水平集 $\{u \in \mathcal{U}:\ g(u) \geq \eta\} = \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n; \eta)$ 是凸的。

2.7. 分布鲁棒控制问题表述。现在我们可以正式提出采样数据分布鲁棒控制问题。目标是最大化采样周期内增长因子的最坏情况下的期望效用。

问题2.12（时域一致的分布鲁棒控制）。固定一个全局置信水平 $\beta \in (0,1)$和一个可行性裕度 $\eta > 0$。令 $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ 为有限的采样周期候选集，并对每个 $n \in \mathcal{N}$ 根据 $\widehat{\mathbb{F}}_n$ 由 N_n 样本构造，并按照定义2.6选择 ε_n。关于采样周期 n和控制 u 的联合优化为

$$\max_{n\in\mathcal{N}} \max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}^{\mathbb{F}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))]\,. \tag{2.6}$$

问题（2.6）是一个混合整数优化问题，因为其中包含离散变量 n。然而，对于固定的采样周期 n，最大化

$$\inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \mathbb{E}^{\mathbb{F}}\left[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))\right]$$

关于 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$ 的问题是一个凹最大化问题，前提是 $U(\Phi_n(u,\cdot))$ 为凹函数。通过求解这些有限个可处理子问题并选出最优采样周期 n^*，即可得到全局解。

备注 2.13（与机会约束的关系）。我们采用鲁棒可行性约束 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$，而非概率（$\varepsilon$，$\delta$）可行性约束。这是出于可处理性的审慎设计选择：$\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$ 是一个确定性凸集，可保持整体问题的凸性。相比之下，分布鲁棒机会约束通常会导致非凸可行集，使问题在计算上难以处理。此外，对于在零点处具有奇异行为的对数效用及其他效用函数，在 $\mathfrak{X}_n$ 上一致地施加 $\Phi_n(u,\ x)$ 可确保所有歧义集中的分布下期望效用均为有限值，从而保证目标函数适定。若放宽为分布机会约束，则必须限制为下界有界的效用函数，这会排除经典对数效用的情形。

备注 2.14（归约至样本均值近似）。若将模糊半径设为 $\varepsilon = 0$，集合 $\mathcal{B}_0^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)$ 将退化为单点经验分布 $\widehat{\mathbb{F}}_n$。此时，问题（2.6）便归约为风险敏感控制问题的样本均值近似（SAA）：

$$\max_{n\in\mathcal{N}} \max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \frac{1}{n}\frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} U\left(\Phi_n\left(u,\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\right)\right).$$

这恢复了标准的期望效用最大化，同时保留了确保有效性所必需的严格可行性约束。

3. 理论结果。 本节证明，无限维分布鲁棒控制问题2.12 可以通过一个具有凹目标函数的有限维凸规划来近似，从而提高计算可处理性。

3.1. 可处理形式。尽管我们的对偶推导与 [40], 有相似之处，但优化的极性恰好相反：我们求解一个最大—最小风险敏感问题，其目标函数关于决策变量是凹函数。因此，无法直接应用 Sion极小极大定理来证明强对偶。我们改用一般极小极大不等式，推导出一个严格的下界。

THEOREM 3.1（固定采样周期的可处理凸松弛 n）。固定采样周期 $n \in \mathcal{N}$，并令 $\varepsilon_n \geq 0$ 为定义 *2.6* 中给出的校准模糊半径*2.6*。令 $p \in [1, \infty)$ 和 $q = \frac{p}{p-1}$，其中 $q = \infty$ 若 $p = 1$。以下凸规划的最优值给出了一个可处理下界：

(3.1)

$$
\begin{aligned}
J^*_{\mathrm{cvx}}(n) := \sup_{u,\lambda,s_j,z_j} \; & \frac{1}{n}\left(-\lambda\varepsilon_n^p + \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} s_j\right) \\
\text{s.t.} \; & \min_{x\in\mathfrak{X}_n}\left[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})\right] - \Omega_p(z_j,\lambda) \geq s_j, \quad \forall j = 1,\ldots,N_n, \\
& \lambda \geq 0, \\
& u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta).
\end{aligned}
$$

其中正则化项$\Omega_p(z_j, \lambda)$ 定义为：

$$
\Omega_p(z_j,\lambda) := \begin{cases} \frac{1}{q}(p\lambda)^{1-q}\|z_j\|_*^q & \text{if } p > 1, \\ 0 & \text{if } p = 1,\ \|z_j\|_* \leq \lambda, \\ \infty & \text{otherwise}, \end{cases}
$$

其中 $z_j \in \mathbb{R}^d$ 为对偶变量，$\|\cdot\|_*$ 是与*Wasserstein* 度量中所用原始范数 $\|\cdot\|$ 相关联的对偶范数。对于 $p > 1$，我们在 $\lambda = 0$处采用扩展值约定：$\Omega_p(0,\ 0) = 0$，且$\Omega_p(z,\ 0) = +\infty$（对于 $z \neq 0$）。

证明。利用Wasserstein距离，其来自定义2.5，我们首先重新表述问题2.12的内层最小化问题，通过拉格朗日对偶化。具体而言，我们观察到

$$
\inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \mathbb{E}^{\mathbb{F}}\left[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))\right] = \begin{cases} \inf\limits_{\Pi,\mathbb{F}} \displaystyle\int U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))\, d\mathbb{F}(\mathcal{X}) \\ \text{s.t. } \Pi \in \Gamma(\mathbb{F},\widehat{\mathbb{F}}_n), \\ \quad \displaystyle\int \|\mathcal{X} - \mathcal{X}'\|^p\, d\Pi(\mathcal{X},\mathcal{X}') \leq \varepsilon_n^p, \end{cases} \tag{3.2}
$$

其中 Π 是定义在 $\mathfrak{X}_n \times \mathfrak{X}_n$ 上的联合分布，其边缘分布为 $\mathbb{F}$ 和 $\widehat{\mathbb{F}}_n$。鉴于经验分布 $\widehat{\mathbb{F}}_n$ 是离散的，根据标准的分解定理，例如参见 [40]，任意耦合 Π 都可分解为条件分布 $\mathbb{F}_j$，其支撑集位于 $\mathfrak{X}_n$，并与每个样本 $\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}$相对应。因此，关于概率测度的无限维优化问题（3.2）可化为有限个子问题之和：

$$
\begin{cases} \inf\limits_{\mathbb{F}_j\in\mathcal{M}(\mathfrak{X}_n),\,\forall j} \dfrac{1}{N_n}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_n}\int U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))\, d\mathbb{F}_j(\mathcal{X}) \\ \text{s.t. } \dfrac{1}{N_n}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_n}\int \|\mathcal{X} - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\|^p\, d\mathbb{F}_j(\mathcal{X}) \leq \varepsilon_n^p \end{cases}
$$

$$
= \sup_{\lambda\geq 0} \inf_{\mathbb{F}_j\in\mathcal{M}(\mathfrak{X}_n),\,\forall j} \left\{-\lambda\varepsilon_n^p + \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n}\int\left[U(\Phi_n(u,\mathcal{X})) + \lambda\|\mathcal{X} - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\|^p\right] d\mathbb{F}_j\right\} \tag{3.3}
$$

$$
= \sup_{\lambda\geq 0}\left\{-\lambda\varepsilon_n^p + \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n}\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\left[U(\Phi_n(u,x)) + \lambda\|x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\|^p\right]\right\}, \tag{3.4}
$$

其中，等式（3.3）在以下情形下成立：若 $\varepsilon_n > 0$，则原始问题存在一个严格可行点 $\widehat{\ }\mathbb{F}_n$，且 $W_p(\widehat{\ }\mathbb{F}_n, \widehat{\ }\mathbb{F}_n) = 0 < \varepsilon_n$，因此强对偶成立；参见 [40, 24]。若 $\varepsilon_n = 0$，则 $\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\ }\mathbb{F}_n) = \{\widehat{\ }\mathbb{F}_n\}$，该化简可直接得出。

引入上图辅助变量 s_j，针对 $j = 1, \ldots\ldots, N_n$，我们将该问题改写为：

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
\sup\limits_{\lambda, s_j} -\lambda\varepsilon_n^p + \dfrac{1}{N_n}\sum\limits_{j=1}^{N_n} s_j \\
\text{s.t.} \inf\limits_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[U(\Phi_n(u,x)) + \lambda\|x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\|^p\Big] \geq s_j, \quad \forall j \\
\qquad \lambda \geq 0
\end{cases} \\
(3.5)\quad &= \begin{cases}
\sup\limits_{\lambda, s_j} -\lambda\varepsilon_n^p + \dfrac{1}{N_n}\sum\limits_{j=1}^{N_n} s_j \\
\text{s.t.} \inf\limits_{x\in\mathfrak{X}_n}\left[U(\Phi_n(u,x)) + \sup\limits_{z_j}\left\{z_j^\top\left(x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\right) - \Omega_p(z_j,\lambda)\right\}\right] \geq s_j, \quad \forall j \\
\qquad \lambda \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中正则化项$\Omega_p(z_j, \lambda)$满足

$$
\Omega_p(z_j,\lambda) := \begin{cases}
\frac{1}{q}(p\lambda)^{1-q}\|z_j\|_*^q & \text{if } p > 1, \\
0 & \text{if } p = 1,\ \|z_j\|_* \leq \lambda, \\
\infty & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

其由幂范数函数的缩放凸共轭导出。此处，最后一个等式（3.5）通过运用双共轭恒等式成立 $\lambda\|x - \widehat{\mathcal{X}}_j\|^p = \sup_{z_j}\{z_j^\top(x - \mathcal{X}_j) - \Omega_p(z_j,\lambda)\}$，这是Fenchel–Moreau定理的直接应用，例如参见 [4]。因此，我们将（3.5）进一步改写如下：

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
\sup\limits_{\lambda, s_j} -\lambda\varepsilon_n^p + \dfrac{1}{N_n}\sum\limits_{j=1}^{N_n} s_j \\
\text{s.t.} \inf\limits_{x\in\mathfrak{X}_n}\sup\limits_{z_j}\Big[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big] \geq s_j, \quad \forall j \\
\qquad \lambda \geq 0
\end{cases} \\
(3.6)\quad &\geq \begin{cases}
\sup\limits_{\lambda, s_j} -\lambda\varepsilon_n^p + \dfrac{1}{N_n}\sum\limits_{j=1}^{N_n} s_j \\
\text{s.t.} \sup\limits_{z_j}\inf\limits_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big] \geq s_j, \quad \forall j \\
\qquad \lambda \geq 0
\end{cases} \\
(3.7)\quad &= \begin{cases}
\sup\limits_{\lambda, s_j, z_j} -\lambda\varepsilon_n^p + \dfrac{1}{N_n}\sum\limits_{j=1}^{N_n} s_j \\
\text{s.t.} \inf\limits_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})\Big] - \Omega_p(z_j,\lambda) \geq s_j, \quad \forall j \\
\qquad \lambda \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中不等式（3.6）由应用于约束核心项的一般极小极大不等式（$\inf_{\mathcal{X}}\sup_{z_j}[\cdot] \geq \sup^{z_j}\inf_{\mathcal{X}}[\cdot]$）推出。注意，（3.6）中的严格等式

并不一定成立，因为目标函数关于 x （根据假设2.2）是凹函数，不满足关于最小化变量应用 Sion 定理所要求的凸性条件。因此，施加更强的条件（上述最后一个系统）即可得到有效的下界。

由于 $\mathfrak{X}_n$ 是紧集且目标函数连续，根据魏尔斯特拉斯极值定理，下确界可以取到。将其代回关于 u 的最大化问题，得到问题（3.1）。由于可行集是闭集，且定义域 $\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$ 是紧集，因此保证存在最优解。

为完成证明，尚需说明上述问题是一个凸规划。注意，目标函数关于 λ, s_j 是线性的。集合 $\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$ 是凸集。约束

$$G_j(u,z_j,\lambda) := \min_{x\in\mathfrak{X}_n}\left[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})\right] - \Omega_p(z_j,\lambda) \geq s_j$$

定义了一个凸可行集。第一项是关于 (u,z_j) 的凹函数的逐点最小值，因此是凹函数。（由于 $U(\Phi_n(\cdot,x))$ 根据假设 2.2 是凹函数，且关于 z_j 的线性项也是凹函数；正则化项 $\Omega_p(z_j,\lambda) \propto \frac{\|z\|_*^q}{\lambda^{q-1}}$ 是凸幂函数 $g(z)=\|z\|_*^q$ 的透视函数。由于透视函数保持凸性，$-\Omega_p(z_j,\lambda)$ 是凹函数。）凹函数的逐点最小值仍为凹函数。因此，G_j 是凹函数之和，超水平集条件 $G_j(u,z_j) \geq s_j$ 定义了一个凸集。对于 $p=1$，该约束可简化为 $\|z_j\|_* \leq \lambda$，这同样是凸的。此外，约束 $\lambda \geq 0$ 是凸的。由于两个凸集的交集仍为凸集，整个问题是一个凸规划。

□

注 3.2（关于对偶及由此产生的间隙）。（i）定理 3.1 中可处理形式的推导涉及一次关键的极小极大互换（见不等式 (3.6)）。由于效用 $U(\Phi_n(u,x))$ 关于最小化变量 x 为凹函数（在假设 2.2 下），因此不满足 Sion极小极大定理的凸性条件，无法得到精确等式。因此，必须使用一般极小极大不等式，而定理 3.1 中的形式为真实最优值提供了严格下界。该对偶间隙的大小本质上取决于阶段奖励 $x \mapsto U(\Phi_n(u,x))$ 在支持集 $\mathfrak{X}_n$ 上的光滑程度，且这一性质对 u 一致成立。（ii）只要阶段奖励 $x \mapsto r_n(u;x)$ 在 $\mathfrak{X}_n$ 上为仿射函数，定理 3.1 中的凸松弛就是精确的；见命题 3.5。

下一个推论表明，上述半无限凸松弛还可以进一步表示为有限凸形式。

Corollary 3.3（半无限约束的约化）。固定 $p\in[1,\infty)$，$n\in\mathcal{N}$，并令 ε_n 如定义2.6所述。凸近似问题(3.1) 等价于以下优化问题：

$$\begin{aligned}
&\sup_{u,\lambda,s_j,z_j} \frac{1}{n}\left(-\lambda\varepsilon_n^p + \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} s_j\right)\\
&s.t. \quad \min_{x\in\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))}\left[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})\right] - \Omega_p(z_j,\lambda) \geq s_j, \quad \forall j,\\
&\quad \lambda \geq 0,\\
&\quad u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，$\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))$是紧支撑集 $\mathfrak{X}_n$的凸包的极点集。此外，若支持集 $\mathfrak{X}_n$ 是凸多胞体，则$\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)) =$

$\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}_n)$ 是一个有限的顶点集，因此该问题可化简为有限维凸规划问题。

证明。 固定 u， z_j 和一个样本索引 j。定义一个辅助函数：

$$\psi_j(x) := U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top (x - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}).$$

这是定义在紧集 $\mathfrak{X}_n$ 上的连续凹函数。因此，根据魏尔斯特拉斯极值定理，该函数能取得最小值。

值得注意的是，由于 $\mathfrak{X}_n$ 是紧集，其凸包 C ：$=\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$ 是一个紧凸集。我们引用凸分析中的基本结果：在 ψ_j上取得最小值的凹函数 C 会在其某个极点处取得该最小值，参见[7,命题 2.4。1]因此，我们有

$$\min_{x\in \mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)} \psi_j(x) = \min_{x\in \mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))} \psi_j(x). \tag{3.9}$$

此外，由于$\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)) \subseteq \mathfrak{X}_n \subseteq \mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$，凸包上的最小值等价于原集合 $\mathfrak{X}_n$ 上的最小值，从而得出所需结果：

$$\min_{x\in \mathfrak{X}_n} \psi_j(x) = \min_{x\in \mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))} \psi_j(x), \tag{3.10}$$

因此，(3.10) 意味着 $\min_{x\in\mathfrak{X}_n} \psi_j(x) - \Omega_p(z_j, \lambda) = \min_{x\in\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))} \psi_j(x) - \Omega_p(z_j, \lambda)$，因为 $\Omega_p(\cdot)$ 与 x 无关。因此，半无限约束 $\min_x \psi_j(x) - \Omega_p(z_j, \lambda) \geq s_j$ 成立，当且仅当它对所有 $v \in \mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))$ 都成立。若 $\mathfrak{X}_n$ 是多面体，则 $|\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}_n)| < \infty$，从而保证约束数量有限。 □

备注 3.4（计算复杂度）。推论 3.3 将由以下对象索引的半无限约束 $\mathfrak{X}_n$ 等价地转化为由极点集 $\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))$ 索引的约束。一般而言，$\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))$ 可能是无限集（例如，当 $\mathfrak{X}_n$ 为严格凸时），因此得到的形式仍然是半无限的。不过，如果 $\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$ 是多面体，那么 $\mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n))$ 就是有限顶点集。在这种情况下，约束数量按 $N_n \times |\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}_n)|$增长，但仍可能随扰动维数 d 呈指数增长（例如，对于超立方体，$|\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}_n)| = 2^d$）。当 $|\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}_n)|$ 较大时，可以使用割平面法（见附录 A），通过迭代添加被违反的极点约束来求解该问题。

3.2. 理论保证与极小极大对偶间隙分析。 定理 3.1 中的可处理形式给出了可计算的 下界，用于界定真实最优值。该下界源于一般极小极大不等式（3.6）的使用，这是由效用函数关于扰动变量 x的凹性所必需的。因此，该形式在实践中的有效性取决于由此产生的极小极大对偶间隙的大小。

从理论上讲，这一差距源于效用函数在支持集上的光滑性（非线性） $\mathfrak{X}_n$。下面的命题通过给出一个基于光滑常数的显式可计算界，对此进行了形式化 L_n ；该光滑常数在假设2.2中引入。

Proposition 3.5（极小极大对偶间隙界）。固定 $u \in \mathcal{U}_\nu(n;\eta)$ 和 $\lambda \geq 0$。令 $\mathfrak{D} := \sup_{x,y\in\mathfrak{X}_n} \|x-y\|$ 表示扰动支持集在底层 ℓ_r-范数 $\|\cdot\|$下的直径。对于任意阶 $p \in [1,\infty)$，每个数据

样本 j 的极小极大对偶间隙定义为

$$\Delta_j(u,\lambda) := \inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[U(\Phi_n(u,x)) + \lambda\|x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\|^p\Big] - \sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[U(\Phi_n(u,x)) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big],$$

上界为 $\Delta_j(u,\lambda) \le \frac{1}{2}L_n\mathfrak{D}^2$，其中 L_n 是假设 *2.2(A3)* 中的统一光滑性上界。此外，若复合阶段奖励映射 $x\mapsto r_n(u,\ x)$在 $\mathfrak{X}_n$上为仿射，则松弛是精确的，即 $\Delta_j = 0$.

证明。为证明极小极大对偶间隙存在上界，我们定义与内部变分问题相关的原始值和对偶值。对于固定的 $u\in\mathcal{U}_v(n;\ \eta)$、 $\lambda\ge 0$ 和数据样本 $\widehat{\mathcal{X}}_{(j)n}$，令 $f_u(x)$: $= U(\Phi_n(u,x))$。根据假设 2.2(A2)， f_u 在 $\mathfrak{X}_n$上为凹函数。根据假设 2.2(A3)， f_u 在 $\mathfrak{X}_n$ 上可微，且 ∇f_u 在 $\mathfrak{X}_n$上为 L_n-利普希茨连续。利用 Fenchel表示 $\lambda\|v\|^p = \sup_z\{z^\top v - \Omega_p(z,\lambda)\}$，如定理 3.1 的证明中所推导，内部问题的原始值为：

$$P_j := \inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[f_u(x) + \lambda\|x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\|^p\Big] = \inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\Big[f_u(x) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big]. \tag{3.11}$$

通过交换下确界和上确界来定义对偶值：

$$D_j := \sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[f_u(x) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big]. \tag{3.12}$$

极小极大对偶间隙为二者之差， $\Delta_j := P_j - D_j$。一般极小极大不等式指出，inf sup$[\cdot]\ge$ supinf$[\cdot]$，由此可得 $\Delta_j\ge 0$。我们接下来的任务是为其求一个上界。

为求该间隙的上界，我们对凹函数 $f_u(x)$进行线性化。任取一个线性化点 $y\in\mathfrak{X}_n$。令 $T_y(x) := f_u(y) + \nabla f_u(y)^\top(x-y)$，它表示 f_u 在点 y处的切超平面。由于 $f_u(x)$是凹函数，因此它位于其切线下方：

$$f_u(x)\le T_y(x),\qquad \text{for all } x\in\mathfrak{X}_n. \tag{3.13}$$

余项 $R(x,\ y) := T_y(x) - f_u(x) \ge 0$。

此外，根据假设 2.2(A3)，梯度 ∇f_u 是 L_n-利普希茨的，即 $\|\nabla f_u(x) - \nabla f_u(y)\|_* \le L_n\|x-y\|$ 对所有 $x,\ y\in\mathfrak{X}_n$均成立。应用（范数广义）下降引理，例如参见 [4, 引理 5。7] 对凸函数 $-f_u$ 可得一致上界

$$0\le R(x,y)\le\frac{1}{2}L_n\|x-y\|^2\le\frac{1}{2}L_n\mathfrak{D}^2,\qquad \text{for all } x,y\in\mathfrak{X}_n, \tag{3.14}$$

其中 $\mathfrak{D} := \sup_{x,y\in\mathfrak{X}_n}\|x-y\|$。现在，将 $f_u(x) = T_y(x) - R(x,y)$ 代入 P_j 和 D_j 的表达式中，可得以下界：

界定原问题：利用（3.13），我们代入 T_y 作为 f_u：

$$P_j = \inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\Big[f_u(x) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big] \le \inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\Big[T_y(x) + z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j,\lambda)\Big] =: P_{\mathrm{lin}}(y).$$

*Boun*界定对偶：由于 $\Omega_p(z_j,\ \lambda)$ 与 x 无关，因此余项可以分离：

$$\begin{aligned} D_j &= \sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[T_y(x)-R(x,y)+z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})-\Omega_p(z_j,\lambda)\Big] \\ &\geq \sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\left(\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[T_y(x)+z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})-\Omega_p(z_j,\lambda)\Big]-\sup_{x'\in\mathfrak{X}_n}R(x',y)\right) \\ &= \sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\left(\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[T_y(x)+z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})\Big]-\Omega_p(z_j,\lambda)\right)-\sup_{x'\in\mathfrak{X}_n}R(x',y) \\ &:= D_{\rm lin}(y)-\sup_{x'\in\mathfrak{X}_n}R(x',y), \end{aligned}$$

其中 $D_{\rm lin}(y):=\sup_{z_j\in\mathbb{R}^d}\inf_{x\in\mathfrak{X}_n}\Big[T_y(x)+z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})-\Omega_p(z_j,\lambda)\Big]$。

缩小差距：项 $P_{\rm lin}(y)$ 和 $D_{\rm lin}(y)$ 分别表示涉及函数 $\mathfrak{L}(x,z_j)=T_y(x)+z_j^\top(x-\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})-\Omega_p(z_j,\lambda)$ 的极小极大问题的原问题和对偶。注意，$\mathfrak{L}(x,z_j)$ 关于 x 是仿射的，关于 z_j 是凹的。由于仿射函数在紧集 $\mathfrak{X}_n$ 上的极值与其在该集合凸包 $\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$ 上的极值相同，因此我们可以在定义域 $\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$ 上考虑该问题，而不改变最优值。由于 $\mathrm{conv}(\mathfrak{X}_n)$ 是紧凸集，Sion极小极大定理适用于这一扩展，从而得到 $P_{\rm lin}(y)=D_{\rm lin}(y)$。

因此，我们有

$$\Delta_j=P_j-D_j\leq P_{\rm lin}(y)-\left(D_{\rm lin}(y)-\sup_{x'\in\mathfrak{X}_n}R(x',y)\right)=\sup_{x'\in\mathfrak{X}_n}R(x',y). \tag{3.15}$$

利用式（3.14）中的一致上界，我们得到 $\Delta_j\leq\frac{1}{2}L_n\mathfrak{D}^2_\sigma$

为完成证明，考虑阶段奖励 $f_u(x)$ 关于 x 为仿射函数的情形，即 $f_u(x):=a(u)^\top x+b(u)$。此时，对于任意线性化点 y，余项都是精确的。也就是说，

$$\begin{aligned} R(x,y)=T_y(x)-f_u(x)&=f_u(y)+a(u)^\top(x-y)-f_u(x)\\ &=\big[a(u)^\top y+b(u)\big]+a(u)^\top(x-y)-\big[a(u)^\top x+b(u)\big]\\ &=a(u)^\top y+a(u)^\top(x-y)-a(u)^\top x=0. \end{aligned}$$

将其代入界（3.15），我们得出 $\Delta_j\leq$ 上确界$_{x\in\mathfrak{X}_n}R(x,\ y)=0.$ □

备注 3.6（关于对偶间隙界的一般性）。请注意，命题 3.5 中的界与 Wasserstein 阶数 p 和半径 ε_n无关；它仅取决于光滑常数 L_n 和 $\mathfrak{X}_n$的直径 $\mathfrak{D}$。此外，该界是关于 $\lambda\geq 0$ 的最坏情况一致估计。我们还注意到，当 $\lambda=0$ 时，可行性迫使 $z_j=0$（对于 $p=1$，通过 $\|z_j\|_*\leq\lambda$；对于 $p>1$，根据扩展值约定，$\Omega_p(z,0)=+\infty$ 对于 $z\neq 0$），因此 $P_j=D_j$ 且 $\Delta_j(u,0)=0$。

现在，我们将一般的对偶界专门应用于例2.4中讨论的广泛使用的仿射对数结构。

Corollary 3.7（仿射对数结构的显式对偶间隙界）。固定 $n\in\mathcal{N}$，$u\in\mathcal{U}_{\rm v}(n;\eta)$ 和 $\lambda\geq 0$。考虑例 2.4 中的情形，其中$\Phi_n(u,x)=u^\top x+c_n(u)$ 且 $U(\cdot)=\log(\cdot)$。定义实现裕度 $\Phi_n(u):=\min_{x\in\mathfrak{X}_n}\Phi_n(u,x)$。那么，对于每个 $j=1,\ldots,N_n$，

$$\Delta_j(u,\lambda)\leq\frac{\|u\|_*^2}{2\underline{\Phi}_n(u)^2}\mathfrak{D}^2\leq\frac{\|u\|_*^2}{2\,\eta^2}\mathfrak{D}^2.$$

证明。由于 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$，根据定义可得 $\Phi_n(u,x) \geq \eta$ 对所有 $x \in \mathfrak{X}_n$ 都成立。对 $x \in \mathfrak{X}_n$ 取最小值，得到 $\Phi_n(u) = \min_{x\in\mathfrak{X}_n} \Phi_n(u,x) \geq \eta$。此外，正如例 2.4 中推导的，$\nabla_x r_n(u,\cdot)$ 是 $L_n(u)$-利普希茨函数，其中 $L_n(u) := \frac{\|u\|_*^2}{\Phi_n(u)^2}$ 因此，

$$L_n(u) = \frac{\|u\|_*^2}{\Phi_n(u)^2} \leq \frac{\|u\|_*^2}{\eta^2},$$

代入命题3.5 即可得出所述结论。 □

注 3.8（间隙界的大小与解释）。推论 3.7 为极小极大对偶间隙提供了两级证书。第一个界以实现裕度 $\Phi_n(u) = \min_{x\in\mathfrak{X}_n} \Phi_n(u,x)$ 表示，是一种后验估计，可针对给定的可行控制 u 进行评估，通常也更为紧致。第二个界则用设计可行性裕度 η 替代 $\Phi_n(u)$，作为对所有 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$均成立的统一先验包络。在这两种情况下，界都随 $\|u\|_*$ 和 $\mathfrak{D}$的平方变化，并且相应的裕度（$\Phi_n(u)$ 或 η）趋近于零时，界会增大。

LEMMA 3.9（概率性能保证）。固定 $\beta \in (0,1)$和一个有限候选集 $\mathcal{N}$。对于每个 $n \in \mathcal{N}$，令 ε_n 根据定义 2.6 进行校准，即 $P\left(F_{\mathrm{true},n} \in \mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{F}_n)\right) \geq 1 - \frac{\beta}{|\mathcal{N}|}$. 令 $J_{\mathrm{cvx}}^*(n)$表示定理 3.1 中基于 F_n 和半径 ε_n构造的易处理规划的最优值。那么，以至少 $1-\beta$ 的概率（相对于生成 $\{\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\}$的抽样），以下结论对所有 $n \in \mathcal{N}$同时成立：

$$J_{\mathrm{cvx}}^*(n) \leq \max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))]\,.$$

证明。固定 $\beta \in (0,1)$ 和一个有限候选集 $\mathcal{N}$。对每个 $n \in \mathcal{N}$，令 ε_n 满足 (2.4)。则不等式 (2.4) 与并集界可得

$$\mathbb{P}\Big(\forall n \in \mathcal{N}:\ \mathbb{F}_{\mathrm{true},n} \in \mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)\Big) \geq 1-\beta.$$

在该事件上，对每个固定的 n，定理 3.1 给出

$$J_{\mathrm{cvx}}^*(n) \leq \max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}^{\mathbb{F}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))]\,. \tag{3.16}$$

由于 $\mathbb{F}_{\mathrm{true},\,n}$ 在同一事件上属于歧义集，因此对每个固定的 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$,

$$\inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \mathbb{E}^{\mathbb{F}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))]\,.$$

在两边取 $\max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \frac{1}{n}(\cdot)$ 可得

$$\max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}_{\varepsilon_n}^{(p)}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}^{\mathbb{F}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))] \leq \max_{u\in\mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}[U(\Phi_n(u,\mathcal{X}))]\,.$$

与（3.16）结合即可完成证明。 □

3.3. 长期性能保证。前述结果给出了单个采样周期的性能保证。然而，在闭环运行中，鲁棒策略 u^* 会在无限时域内反复应用。现在，我们建立易处理松弛 $J^*_{\mathrm{cvx}}(n)$ 与系统长期性能之间的联系。首先，我们给出一个适用于满足既定假设的任意凹效用的一般结果。这确保了该松弛的最优值为长期平均效用率提供一个确定性下界。

THEOREM 3.10（长期平均效用保证）。固定 $n \in \mathcal{N}$。假设在真实分布 $F_{\mathrm{true},n}$ 下，n 周期聚合扰动序列 $\{\mathcal{X}_{k,n}\}_{k\geq 0}$ 严格平稳且遍历。令 ε_n 根据定义 2.6 进行校准，并定义覆盖事件 $\mathcal{E}_n := \{F_{\mathrm{true},n} \in \mathcal{B}^{(p)}_{\varepsilon_n}(\widehat{F}_n)\}$。令 u^* 为易处理松弛 (3.1) 的一个最优控制，其最优值为 $J^*_{\mathrm{cvx}}(n)$。在事件 $\mathcal{E}_n$ 条件下，长期平均效用率满足

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{Kn} \sum_{k=0}^{K-1} U(\Phi_n(u^*, \mathcal{X}_{k,n})) \geq J^*_{\mathrm{cvx}}(n) \qquad \mathbb{F}_{\mathrm{true},n}\text{-a.s.} \tag{3.17}$$

证明。 定义每周期效用实现值

$$Y_k := \frac{1}{n} U(\Phi_n(u^*, \mathcal{X}_{k,n})), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

由于 $\{\mathcal{X}_{k,n}\}_{k\geq 0}$ 严格平稳且遍历，且映射 $x \mapsto \frac{1}{n}U(\Phi_n(u^*, x))$ 可测，序列 $\{Y_k\}$ 也严格平稳且遍历。此外，由于 $u^* \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n;\eta)$，对于所有 $x \in \mathfrak{X}_n$，均有 $\Phi_n(u^*, x) \geq \eta$。由于 $\mathfrak{X}_n$ 紧，且 $x \mapsto \Phi_n(u^*, x)$ 连续，$\Phi_n(u^*, x)$ 在 $\mathfrak{X}_n$ 上有上界。由于 $U(\cdot)$ 在 $[\eta, \infty)$ 上连续，因此 Y_k 有界，故可积，即 $\mathrm{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}[|Y_0|] < \infty$。应用伯克霍夫遍历定理可得

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Y_k = \mathbb{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}[Y_0] = \frac{1}{n}\mathbb{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}[U(\Phi_n(u^*, \mathcal{X}))] \qquad \mathbb{F}_{\mathrm{true},n}\text{-a.s.}, \tag{3.18}$$

其中 $\mathcal{X}$ 表示一个服从共同分布的聚合扰动$\mathbb{F}_{\mathrm{true},\ n}$ 该分布对应于平稳序列。接下来，回顾一下，定理 3.1 中的易处理松弛是通过在约束层面应用极小极大不等式推导得到的；即见（3.6）。因此，对于任意固定的可行控制 u，该松弛值为相应最坏情况下的期望效用提供了一个下界。特别地，对于松弛优化器 u^*，我们有

$$J^*_{\mathrm{cvx}}(n) \leq \inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}^{(p)}_{\varepsilon_n}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \frac{1}{n}\mathbb{E}^{\mathbb{F}}\left[U(\Phi_n(u^*, \mathcal{X}))\right]. \tag{3.19}$$

在事件 $\mathcal{E}_n$ 条件下，真实分布 $\mathrm{F}_{\mathrm{true},\ n} \in \mathcal{B}^{(p)}_{\varepsilon_n}(\widehat{\mathrm{F}}_n)$。因此，在歧义集上的下确界是真实分布下期望的一个下界；即，

$$\inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{B}^{(p)}_{\varepsilon_n}(\widehat{\mathbb{F}}_n)} \frac{1}{n}\mathbb{E}^{\mathbb{F}}\left[U(\Phi_n(u^*, \mathcal{X}))\right] \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}^{\mathbb{F}_{\mathrm{true},n}}\left[U(\Phi_n(u^*, \mathcal{X}))\right].$$

结合（3.18）和（3.19），即可得到所需结果。 □

对于对数效用这一特例，长期平均效用率与渐近资本增长率一致。下面的推论将这一联系形式化。

COROLLARY 3.11（长期增长率保证）。考虑定理3.10中的设定。若效用函数为对数函数，即 $U(x) = \log(x)$，则在事件 $\mathcal{E}_n$ 发生的条件下，长期实际增长率满足

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{Kn} \log V_K \geq J^*_{\mathrm{cvx}}(n) \qquad \mathbb{F}_{\mathrm{true},n}\text{-}a.s.$$

证明。在乘性动态 $V_{k+1} = V_k \Phi_n(u^*, \mathcal{X}_{k,n})$ 下，第 K 步的状态为 $V_K = V_0 \prod_{k=0}^{K-1} \Phi_n(u^*, \mathcal{X}_{k,n})$。取对数并除以总时间 Kn，得到

$$\frac{1}{Kn} \log V_K = \frac{1}{Kn} \log V_0 + \frac{1}{Kn} \sum_{k=0}^{K-1} \log \Phi_n(u^*, \mathcal{X}_{k,n}).$$

当 $K \to \infty$时，第一项 $\frac{1}{Kn} \log V_0$ 渐近趋于零，而第二项恰好对应于式 (3.17) 中定义的长期平均效用率，其中 $U =$ 为 log。由定理3.10可立即得到结论。 □

3.4. 求解联合优化问题。整体问题 (2.12) 要求对整数值采样周期 n 和连续控制向量 u进行联合最大化，因此这是一个混合整数规划。我们的求解策略利用了候选集 $\mathcal{N}$有限且基数较小这一特点。我们通过显式枚举 n来求解问题：对每个候选项 n，计算相应的最优控制 $u^*(n)$，然后选择能够取得最大经认证目标值的组合 (u^*, n^*)。

对于每个固定的内层问题 n，都是定理3.1和推论3.3中构造的凸规划。由于该规划中的约束数量（由 $\mathfrak{X}_n$的极点索引）会随扰动维数 d呈指数增长，直接枚举这些约束通常在计算上不可行。因此，我们使用切平面算法高效地求解该内层问题，其技术细节见附录A。

4. 说明性示例。本节将第2 节和第3节中构建的采样数据鲁棒控制框架应用于对数最优投资组合控制问题。该问题是乘法随机系统的一个典型示例，其中状态依赖摩擦（交易成本）发挥着主导作用。下文中，为便于说明，我们选取 Wasserstein 阶数 $p = 1$ 和底层范数 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$。

在一般动力学（2.1）的背景下，系统状态 V_k 表示投资组合财富，控制输入 u_k 对应于资产配置权重向量，而扰动 $\mathcal{X}_{k,\ n}$ 则表示采样区间内随机资产收益向量。增长函数 Φ_n 明确刻画了与再平衡相关的交易成本。

4.1. 设置与数据。令 $u \in \mathrm{R}^m_+$ 表示投资于风险资产的投资组合权重向量。我们假设，再平衡相关的交易成本建模为 $TC(u) := \sum_{i=1}^m \kappa_i |u_i|$，其中 $\kappa_i \in [0, 1)$ 表示比例摩擦（例如，

资产 i的经纪费用和滑点）。该模型符合现实世界的交易机制，即费用按交易金额收取。[2]

因此，扣除成本后的增长因子可表示为仿射形式：

$$\Phi_n(u, x) := u^\top x + c_n(u),$$

其中， x 是超额收益向量（即扣除无风险基准后的风险资产收益）， $c_n(u)$表示扣除交易成本后的无风险增长，定义为 $c_n(u) := (1 + r_{f,\,n}) - TC(u)$。此处，$r_{f,\,n}$表示期无风险收益率，通过将再平衡时观察到的国库券年化收益率换算得出。[3] 此公式将基准无风险净漂移（由 $c_n(u)$单独表示）与随机扰动 x分离，同时保留仿射结构。

数据描述。我们考虑一个投资组合，该组合由一种无风险资产和十种风险资产构成；这十种风险资产选自2022年年末标准普尔 500 指数中按市值排名前十的成分股。具体资产列于表1。股票价格数据取自雅虎财经，涵盖2022年1月1日至2025年5月31日。无风险利率采用美国13周期国库券的每日年化收益率（^IRX）。在此期间，平均无风险年化收益率约为：2022年2。02%，2023年5。07%，2024年4。97%，以及2025年初（1月至5月）4。03%。

值得注意的是，该数据集涵盖了不同的市场状态：2022 年的特点是熊市，2023 年则预示着强劲复苏（牛市阶段），而 2024 年和 2025 年初对应温和扩张和波动性时期。这种多样性为评估所提出的分布鲁棒优化方法的适应性提供了可靠的测试环境。

TABLE 1
Selected portfolio constituents (Top 10 S&P 500 stocks by market cap in 2022 year-end

Rank	公司	股票代码	总额占比 指数市值（%）
1	苹果公司	AAPL	6.2
2	微软公司	MSFT	5.3
3	亚马逊公司	AMZN	2.6
4	Alphabet公司C类股	GOOG	1.6
5	Alphabet公司A类股	GOOGL	1.6
6	联合健康集团公司	UNH	1.5
7	强生公司	JNJ	1.4
8	埃克森美孚公司	XOM	1.4
9	伯克希尔·哈撒韦公司B类股	BRK-B	1.2
10	摩根大通公司	JPM	1.3

回测仿真方法和控制方案。 为验证我们的理论，我们实现问题 2.12中定义的联合优化框架。我们考虑一个可行采样周期的有限候选集 $\mathcal{N} := \{5, 21, 42, 63\}$，分别对应每周、每月、每两个月和每季度进行一次控制更新。对于任意特定的采样周期 $n \in \mathcal{N}$ 和回溯窗口，我们构造经验分布 $\widehat{\mathbb{F}}_n$，并根据定义 ε_n 校准模糊半径，使其符合定义 2.6。接着，我们求解定理 3.1 中的可处理凸规划，得到经认证的稳健性能率 $J^*_{\mathrm{cvx}}(n$。我们比较两种控制实施方案：

[2]例如，在台湾证券交易所（TWSE）交易股票通常需支付最高 0.1425% 的经纪商手续费，卖方还需缴纳 0.3% 的证券交易税。同样，盈透证券专业版等专业经纪服务会根据交易金额或交易量，采用按资产类别划分的佣金费率表。[3]在我们的实验中，我们使用芝加哥期权交易所13周国库券利率（IRX）作为代理变量，并通过 $r_{f,n}(t_k)$，将年化收益率 $r_f^{\mathrm{ann}}(t_k)$ 转换为采样周期 n：$= (1 + {}^{r}{}_{\text{年化}f\,(t_k)\,252})^n - 1$。

(*i*)静态采样方案。 在仿真初始化时（$t = 0$），我们使用初始训练数据评估所有候选项的稳健性能率，并选择使最坏情况下界最大的采样周期：

$$n^* \in \arg\max_{n\in\mathcal{N}} J^*_{\mathrm{cvx}}(n).$$

随后，选定的采样周期 n^* 在整个样本外回测期间保持固定，这代表一种标准的采样数据控制器，其更新频率经过预先优化但保持静态。

(*ii*) 自适应采样方案。 在每个控制更新步 k开始时，我们使用当前回溯窗口，重新计算所有候选时域$n \in \mathcal{N}$ 对应的认证性能率 $J^*_{\mathrm{cvx}}(n)$。随后，我们动态选择下一持有区间的最优采样周期：

$$n^*_k \in \arg\max_{n\in\mathcal{N}} J^*_{\mathrm{cvx}}(n).$$

在此方案中，控制器会根据市场波动率和摩擦估计的变化，在线自适应调整采样周期 n^*_k。

样本外回测仿真遵循标准的滚动窗口流程，初始账户价值为 $V_0 =$\$1：

(*i*) 数据构造： 在第 k 个再平衡期开始时，即时间点 t_k，我们使用长度为 $L = 252$ 个交易日（约一年）的固定回溯窗口。根据这段历史数据 $[t_k - L, t_k]$，我们构造一组包含 $N_n = L - n + 1$ 个重叠样本的 n 期复合收益向量 $\{\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\}_{j=1}^{N_n}$。这些样本构成经验分布 $\widehat{\mathbf{F}}_n$。[4]

(*ii*)鲁棒优化：我们使用经验分布 $\widehat{\ }$定理 3.1 推导出的易处理凸规划 $\mathbb{F}_n$，求得鲁棒最优控制向量 u^*_k（投资组合权重），用于接下来的采样周期。在自适应时域策略中，每个再平衡时点都会针对所有 $n \in \mathcal{N}$执行这一优化，并选择 n^*_k 认证值最大的时域。

(*iii*) 执行：将投资组合再平衡至目标权重 u^*_k。风险资产的再平衡交易量会产生交易成本。随后，在接下来的 n 个交易日内，资产持仓保持不变（零阶保持实现）；对于固定时域策略， $n = n^*$；对于自适应时域策略， $n = n^*_k$。

(*iv*)更新：采样周期结束时，账户价值 V_{k+1} 按市值计价。回溯窗口向前移动 n 天，然后从步骤 1 重复此过程。

该程序生成完整的样本外财富轨迹。在主要的频率选择程序中，歧义半径按 ε_n 定义2.6进行校准。除非另有说明，全文均采用 10 个基点的比例交易成本率。

4.2. 样本外表现。图2 比较了不同再平衡方案的样本外财富轨迹。我们评估了静态—

[4]由于这些 n期样本存在重叠，因此具有序列依赖。定义2.6 中有限样本覆盖要求的标准充分条件通常是在独立同分布抽样假设下推导的；因此，在我们的实现中，半径 ε_n 通过区块自助法进行校准，作为满足目标覆盖条件的一种实用近似。

采样控制器（采用固定 n^*）和自适应采样控制器（采用动态 n_k^*）。基准策略——买入并持有和每日再平衡等权投资组合——实现了最高的名义累计财富，但也遭受了显著回撤（约 20%；见表 最大回撤 中的2）。相比之下，所提出的分布鲁棒优化方案在保持竞争力增长的同时，提供了更优的下行风险控制。值得注意的是，在此次回测模拟中，自适应采样方案取得了最高的风险调整后绩效（年化夏普比率 $= 0.50$），验证了动态频率选择的优势。图 3 展示了自适应策略在基准成本设定下选取的实际采样周期序列 n_k^*。

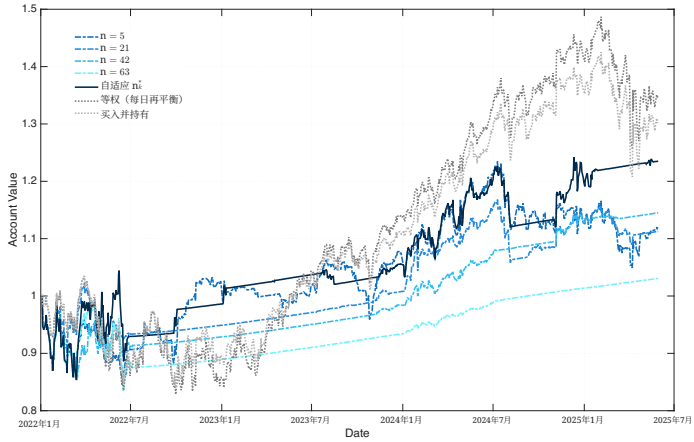


FIG. 2. *Out-of-sample wealth trajectories comparing static sampling with fixed n^* and adaptive sampling with dynamic n_k^*. The DRO strategies induce a conservative allocation during high-volatility regimes effectively limits the downside risks.*

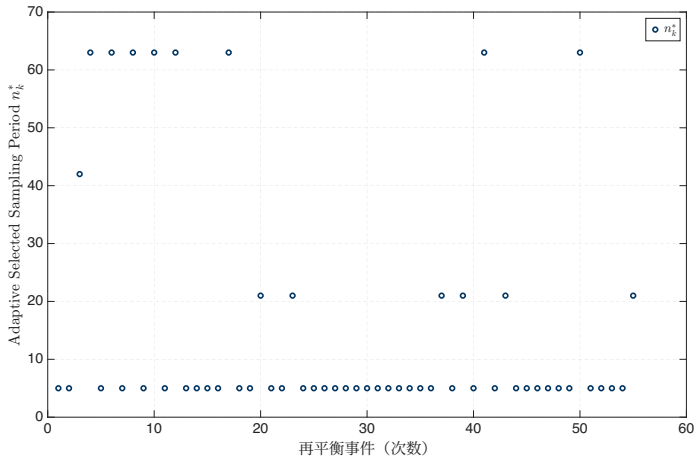


FIG. 3. *Adaptive sampling schemes implied sequence of selected sampling period n_k^*. The controller autonomously switches between high-frequency and low-frequency updates based on the trade-off between growth opportunities and friction (transaction costs).*

表2 总结了不同抽样策略和期限下的样本外交易表现。报告的指标包括最终账户价值（FV）、

复合年增长率（CAGR）、[5] 总回报（TR）、最大回撤（MDD）、年化夏普比率（SR）和年化波动率（Vol），以及与交易相关的统计数据。

总体而言，与基准策略（买入并持有策略和每日再平衡等权投资组合）相比，所提出的分布鲁棒优化方案在实现具有竞争力的风险感知增长（见最终价值、复合年增长率和总回报）的同时，也展现出更强的下行风险控制能力，具体表现为回撤（最大回撤）更小、波动性（年化波动率）更低。我们观察到，当估计的分布不确定性较高时，最坏情形绩效评估会变得更加保守，促使控制器将配置转向无风险资产，或降低再平衡频率以保全资本。

TABLE 2 *Out-of-sample performance comparison of strategies. Shorthands:* `FV` *= final account value,* `TR` *= total return,* `CAGR` *= compound annual growth rate,* `MDD` *= maximum drawdown,* `SR` *= annualized Sharpe ratio* `Vol` *= annualized volatility* `Best/Worst` *= best/worst single-day return* `TC` *= cumulative „ , , , realized transaction costs paid over the backtest* `#Reb` *= number of rebalances. Here a proportional transaction-cost rate of 10 bps is applied.*

策略	n	FV	CAGR	TR	MDD	SR	Vol	TC	#Reb
静态	5	1.1183	3.34%	11.83%	15.07%	0.31	13.79%	0.0881	171
静态	21	1.1126	3.19%	11.26%	13.06%	0.37	9.90%	0.0112	41
静态	42	1.1451	4.06%	14.51%	14.35%	0.46	9.77%	0.0064	21
静态	63	1.0308	0.89%	3.08%	16.54%	0.13	11.68%	0.0043	14
自适应	n_k^*	1.2352	6.41%	23.52%	15.14%	0.50	14.75%	0.0358	60
EW（每日）	1	1.3504	9.24%	35.04%	19.95%	0.36	18.62%	0.0092	854
买入并持有	–	1.3059	8.16%	30.59%	18.80%	0.31	17.62%	0.0000	0

我们进一步分析交易成本和分布不确定性如何共同影响最优再平衡频率。表 3 展示了自适应采样方案的敏感性。正如预期，交易成本的增加会侵蚀绩效，并使最优采样周期转向更长的采样周期。具体而言，对于较低的交易成本（5 基点），自适应方案倾向于选择较短期限（$n = 5$ 选择比例为 77.9%），以捕捉短暂的增长机会。相反，对于较高的交易成本（50 基点），为减轻摩擦，选择显著转向较长期限（$n = 63$ 选择比例为 32.4%）。这一行为证实，所提出的框架能够正确平衡“控制成本”与“不确定性成本”。

TABLE 3 *Transaction Cost Sensitivity Summary (Adaptive Scheme). As transaction costs increase, the controller autonomously shifts toward longer sampling periods (fewer rebalances).*

交易成本率	最终价值	平均 n^* （天）	再平衡次数	$n = 5$	$n = 21$	$n = 42$	$n = 63$
5 基点	1.1776	12.9	68	77.9%	10.3%	2.9%	8.8%
10 基点	1.2352	15.9	55	72.7%	10.9%	1.8%	14.5%
25 基点	1.0824	21.2	41	56.1%	22.0%	0.0%	22.0%
50 基点	1.0042	25.6	34	55.9%	11.8%	0.0%	32.4%

4.3. 极小极大松弛的经验紧致性。为了验证定理3.1中确立的凸松弛的紧致性，我们计算了命题3.5 中推导的极小极大间隙理论上界在整个样本外期间的数值。具体而言，我们将最坏情况互换误差定义为 $\Delta_{\max} := \max_j \Delta_j$ 并验证条件 $\Delta_{\max} \le \frac{1}{2} L_n \mathfrak{D}^2 := B$. 由于上界 B

[5] `CAGR` 计算为 $\mathrm{FV}^{1/T} - 1$，其中 T 表示回测的年数。

仅取决于歧义集的全局几何，满足 $\Delta_{\max} \le B$，因此可作为一致证书，保证每个鲁棒性约束 j 的近似误差均有界。

理论有效性与利用率。理论界 $\Delta_j \le B$ 在采样周期为 $n \ge 21$时，100% 的情况下均得到满足。对于较短的采样周期（$n = 5$），满足率仍高达 94.7%。少数数值例外对应于理论界低于求解器数值容差的边界情况。[6] 图4 展示了静态采样控制和自适应采样控制的时变对偶间隙。

为评估松弛的保守性，我们将间隙利用率定义为比值 $\frac{\Delta_{\max}}{B}$。实验结果表明，观测到的间隙平均为理论界的 2.1% 至 6.4%。这一较低的利用率表明，所提出的凸松弛在实证上远比最坏情况理论界所暗示的更紧。

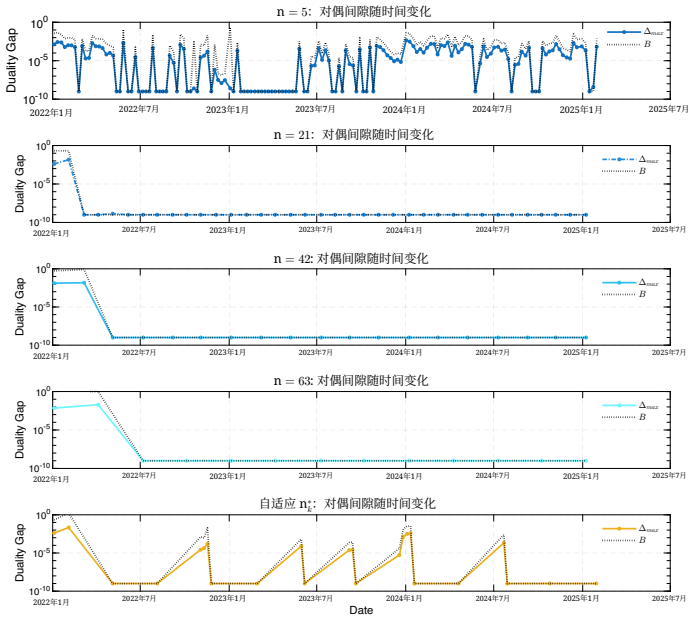


FIG. 4 *Time-varying duality gap for both static- and adaptive-sampling controls. The gap remains consistently small across all sampling periods* $n \in \{5, 21, 42, 63\}$ *and adaptive* n_k^*。

5. 结论。本文建立了一个统一框架，用于在乘性噪声与分布不确定性下对采样数据系统进行鲁棒最优控制。通过联合选择反馈策略与控制采样周期，我们处理了离散化误差、执行成本与模型风险之间的根本权衡。一项核心理论贡献是解决了风险敏感分布鲁棒控制中固有的“凹极大”几何结构。尽管Sion极小极大定理不适用于约束层面的互换，我们证明了

[6]具体而言，我们观察到一些情形：理论界 B 降至 10^{-15} 的量级（这是由低波动时期直径 $\mathfrak{D}$ 趋近于零所导致的）。在这些情况下，求解器固有的数值噪声（约为 10^{-9}）在技术上超过了 B，从而触发了伪违例，尽管两者之间的间隙实际上为零。

一般极小极大不等式给出了一个易于处理的凸松弛，从而为最坏情况下的期望效用提供了严格的下界。

我们提出了四项理论证书，以论证这一框架的合理性。首先，我们建立了概率性能保证(引理3.9)，证明易处理松弛的最优值以高概率构成真实期望效用的有效置信下界。其次，我们推导了极小极大对偶间隙(命题3.5)的非渐近上界，表明近似误差受效用的光滑性和扰动支撑集直径的统一控制。此外，我们还推导出一个必要且充分的条件，以确保在整个歧义集上几乎必然保持严格的状态正性，从而实现鲁棒可行性。第三，也是最重要的一点，我们通过长期增长率保证(定理3.10)，将静态优化与动态性能联系起来，证明所得鲁棒最优值几乎必然构成渐近增长率的确定性下限。

我们在一个对数最优投资组合控制问题上验证了所提框架的实际效用。数值结果表明，自适应采样策略会根据不断变化的市场状况动态选择最优再平衡周期，从而显著提升风险调整后绩效，同时维持系统可行性。未来的工作可以探索利用因子模型将这一框架扩展至高维资产空间，以降低半无限约束的计算复杂度。

参考文献

Control of Linear Discrete-Time Stochastic Dynamic Systems with Multiplicative
[1] M. Aoki,*Disturbances* 20 1975 388 392 ,
IEEE 自动控制汇刊, ( ), 第 – 页。[2] A. Arapostathis, V. S. Borkar, E. Fernández-Gaucherand, M. K. Ghosh, and S. I.
Marcus *Discrete-Time Controlled Markov Processes with Average Cost Criterion: A* , , SIAM 控制与优化 *Survey* 31 1993 282 344
杂志, ( ), 第 – 页。[3] K. J. Åström and B. Wittenmark,
Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Courier Corporation, 2013年。[4] A. Beck,
First-Order Methods in Optimization, SIAM, 2017年。[5] A. Ben-Tal, D. Den Hertog, A. De Waegenaere, B. Melenberg, and G. Rennen, *Robust*
Solutions of Optimization Problems Affected by Uncertain Probabilities, Management Science, 59（2013）, 第341–357页。[6] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, 普林斯顿大学出版社, 2009年。[7] D. Bertsekas, *Convex Optimization Theory*, Athena Scientific, 2009年。[8] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control: Volume I*, Athena Scientific, 2012年。
[9] J. Blanchet and K. Murthy, *Quantifying Distributional Model Risk via Optimal Transport*, Mathematics of Operations Research, 44（2019）, 第565–600页。[10] V. S. Borkar, *Control of Markov Chains with Long-Run Average Cost Criterion*, 载于《随机微分系统、随机控制理论及其应用》, 施普林格, 1988年, 第57–77页。[11] L. Breiman, *Optimal Gambling Systems for Favorable Games*, 第四届伯克利研讨会, 1（1961）, 第65–78页。[12] G. C. Calafiore, *Direct Data Driven Portfolio Optimization with Guaranteed Shortfall Probability* 49 2013 370 380 , Automatica, ( ), 第 –
页。[13] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 牛津, 1998 年。[14] P. Coppens, M. Schuurmans, and P. Patrinos, *Data-Driven Distributionally Robust LQRwith Multiplicative Noise*, 载于动力学与控制学习会议论文集, 《机器学习研究论文集》第120卷, PMLR, 2020年, 第521–530页。
[15] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, 约翰·威立父子出版公司, 2012年。
[16] M. H. Davis and A. R. Norman, *Portfolio Selection with Transaction Costs*, Mathematics of Operations Research, 15（1990）, 第676–713页。[17] W. L. De Koning, *Stationary Optimal Control of Stochastically Sampled Continuous-Time*

Systems, Automatica，24（1988），第77–79页。[18] E. Delage and Y. Ye, *Distributionally Robust Optimization under Moment Uncertainty with Application to Data-Driven Problems* 58 2010 595 612 , Operations Research, ( ), 第 – 页。[19] L. El Ghaoui, *State-Feedback Control of Systems with Multiplicative Noise via Linear Matrix Inequalities* 24 1995 223 228 , Systems & Control Letters, ( ), 第 – 页。[20] E. Erdoğan and G. Iyengar, *Ambiguous Chance Constrained Problems and Robust Optimization* 107 2006 37 61 , Mathematical Programming, ( ), 第 – 页。[21] L. Farina and S. Rinaldi, *Positive Linear Systems: Theory and Applications*, Wiley，2000年。[22] W. H. Fleming and W. M. McEneaney, *Risk-Sensitive Control on an Infinite Time Horizon*, SIAM 控制与优化杂志，33（1995），第1881–1915页。[23] N. Fournier and A. Guillin, *On the Rate of Convergence in Wasserstein Distance of the Empirical Measure* 162 2015 707 738 , Probability theory and related fields, ( ), 第 – 页。[24] R. Gao and A. Kleywegt, *Distributionally Robust Stochastic Optimization with Wasserstein Distance* 48 2023 603 655 , Mathematics of Operations Research, ( ), 第 – 页。[25] E. Gershon, U. Shaked and I. Yaesh, *H_∞ Control and Filtering of Discrete-Time Stochastic Systems with Multiplicative Noise* 37 2001 409 417 , Automatica, ( ), 第 – 页。

[26] J. González-Trejo, O. Hernández-Lerma, and L. F. Hoyos-Reyes, *Minimax Control of Discrete-Time Stochastic Systems*, SIAM 控制与优化杂志，41（2002），第1626–1659页。[27] A. Hakobyan and I. Yang, *Wasserstein Distributionally Robust Control of Partially Observable Linear Stochastic Systems* 69 2024 6121 , IEEE 自动控制汇刊, ( ), 第 – 6136 页。[28] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, *A Survey of Recent Results in Networked Control Systems* 95 2007 138 162 , Proceedings of the I EEE, ( ), 第 – 页。[29] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard, *Stochastic H^∞*, SIAM 控制与优化杂志，36（1998），第1504–1538页。[30] C.-H. Hsieh, *On Asymptotic Log-Optimal Portfolio Optimization*, Automatica，151（2023），第110901页。[31] C.-H. Hsieh, *On Solving Robust Log-Optimal Portfolio: A Supporting Hyperplane Approximation Approach* 313 2024 1129 1139 , European Journal of Operational Research, ( ), 第 – 页。[32] C.-H. Hsieh, B. R. Barmish, and J. A. Gubner, *On Positive Solutions of a Delay EquationArising when Trading in Financial Markets*, IEEE 自动控制汇刊，65（2019），第3143–3149页。[33] Z. Hu and L. J. Hong, *Kullback-Leibler Divergence Constrained Distributionally Robust Optimization* 1 2013 9 , Optimization Online, ( ), 第 页。[34] I. Karatzas and C. Kardaras, *Portfolio Theory and Arbitrage: a course in Mathematical Finance* 214, 2021 , 卷。美国数学学会，。

[35] J. Kelly jr, *A New Interpretation of Information Rate*, The Bell System Technical Journal,（1956）。[36] R. Korn and H. Kraft, *A Stochastic Control Approach to Portfolio Problems with Stochastic Interest Rates* 40 2002 1250 1269 , SIAM 控制与优化杂志, ( ), 第 – 页。[37] D. Kuhn and D. G. Luenberger, *Analysis of the Rebalancing Frequency in Log-Optimal Portfolio Selection* 10 2010 221 234 , 数量金融, ( ), 第 – 页。

[38] D. Kuhn, S. Shafiee, and W. Wiesemann, *Distributionally Robust Optimization*, Acta Numerica，34（2025），第579–804页。[39] J. Y.-M. Li, *Wasserstein-Kelly Portfolios: A Robust Data-Driven Solution to Optimize Portfolio Growth* 2302 13979, 2023 , arXiv预印本 arXiv: 。( )。

[40] P. Mohajerin Esfahani and D. Kuhn, *Data-Driven Distributionally Robust Optimization Using the Wasserstein Metric: Performance Guarantees and Tractable Reformulations*, Mathematical Programming，171（2018），第115–166页。[41] D. Nesic and A. R. Teel, *A Framework for Stabilization of Nonlinear Sampled-Data Systems based on Their Approximate Discrete-Time Models*, IEEE 自动控制汇刊，49（2004），第1103–1122页。[42] H. Pham, *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, 第61卷，Springer Science & Business Media，2009年。[43] N. Rujeerapaiboon, D. Kuhn, and W. Wiesemann, *Robust Growth-Optimal Portfolios*, Management Science，62（2016），第2090–2109页。[44] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M. I. Jordan, and S. S. Sastry, *Kalman Filtering with Intermittent Observations*, IEEE 自动控制汇刊，49（2004），第1453–1464页。[45] P. Whittle, *Risk-Sensitive Optimal Control*, John Wiley and Sons，1990年。[46] Y.-S. Wong and C.-H. Hsieh, *On Frequency-Based Log-Optimal Portfolio With Transaction*

Costs，IEEE 控制系统快报，7 (2023)，第 3489–3494 页。[47] I. YANG，IEEE 自动控制汇刊，66 (2021)，第 3863–3870 页。

附录 A. 通过割平面法进行算法实现。本附录详细介绍了在固定采样周期下求解推论 3.3 中的内循环优化问题的切平面算法 n。所得问题是一个约束由极点集 Ext($\mathfrak{X}_n$) 索引的凸优化问题。当 $\mathfrak{X}_n$ 是一个多面体时，该集合是有限的，约束数量按 $N_n \times |\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}_n)|$ 的规模增长。一般而言，Ext($\mathfrak{X}_n$) 可能是无限集，此时该问题为半无限问题，并通过基于分离预言机的割平面法求解。

Al算法 A.1 求解可处理形式的切平面算法

1: **输入：** 抽取 $n \in \mathcal{N}$ 个样本，样本 $\{\widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}\}_{j=1}^{N_n}$，半径 ε_n、支撑集 $\mathfrak{X}_n$ 和阶 $p \geq 1$。2: **初始化：** 设置迭代计数器 $k \leftarrow 0$。对于每个样本索引 $j \in \{1, \ldots, N_n\}$，初始化 th e 活动约束集 $\mathcal{V}_j^{(0)} \subseteq$Ext(conv($\mathfrak{X}_n$))，其中包含任意非空子集。3: **循环**

4: **求解主问题：** 使用当前活动集求解松弛问题 $\{\mathcal{V}_j^{(k)}\}$:

$$(u^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}, z^{(k)}) \in \arg\max_{u,\lambda,s,z} \quad \frac{1}{n}\left(-\lambda\varepsilon_n^p + \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} s_j\right)$$
$$\text{s.t.} \quad \min_{\mathcal{X}^v \in \mathcal{V}_j^{(k)}} \left[U(\Phi_n(u, \mathcal{X}^v)) + z_j^\top(\mathcal{X}^v - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)}) - \Omega_p(z_j, \lambda)\right] \geq s_j, \quad \forall j,$$
$$\lambda \geq 0, \qquad u \in \mathcal{U}_{\mathrm{v}}(n; \eta).$$

5: **分离预言机：** 对于每个 $j \in \{1, \ldots, N_n\}$，计算违反程度最大的约束:

$$\mathcal{X}_j^* \in \arg\min_{\mathcal{X} \in \mathfrak{X}_n} \left[U(\Phi_n(u^{(k)}, \mathcal{X})) + (z_j^{(k)})^\top(\mathcal{X} - \widehat{\mathcal{X}}_n^{(j)})\right].$$

由于目标函数关于 $\mathcal{X}$ 是凹函数，且 $\mathfrak{X}_n$ 是紧集，因此最小值在 conv($\mathfrak{X}_n$) 的某个极点处取得。因此，该子问题充当由 Ext(conv($\mathfrak{X}_n$)) 索引的半无限约束的分离预言机。

6: 令 ϕ_j^*:= $U(\Phi_n(u^{(k)}, \mathcal{X}_j^*)) + (z_j^{(k)})^\top(\mathcal{X}_j^* - \widehat{\mathcal{X}}_{(j)n})$。7: **检查收敛性：** 若对所有 $j = 1,\ldots, N_n$, $\phi_j^* - \Omega_p(z_j^{(k)}, \lambda^{(k)}) \geq s_j^{(k)}$，则**中断**。8: **添加切平面：** 对于每个不满足条件的 j： 9: 更新 $\mathcal{V}_j^{(k+1)} \leftarrow \mathcal{V}_j^{(k)} \cup \{\mathcal{X}_j^*\}$10: 否则，设定 $\mathcal{V}_j^{(k+1)} \leftarrow \mathcal{V}_j^{(k)}$。11: $k \leftarrow k + 1$。12: **结束循环** 13: **返回** $(u^{(k)}, \lambda^{(k)})$以及给定 n 时的值。

注 A.1. 若 $\mathfrak{X}_n$ 是一个多面体，算法 A.1将在有限次迭代后终止，因为极点约束的数量有限。对于一般的紧 $\mathfrak{X}_n$，该算法实现了半无限凸规划的标准外逼近法，并在分离预言机无法找到违反极点约束的情况时终止。