arXiv:2602.04235v1 [math.NA] 4 Feb 2026

面向 C^0 四阶椭圆方程的有限元方法。第一部分：一般边界条件

XIHAO ZHANG*、HENGGUANG LI†、NIANYU YI‡、和PEIMENG YIN§

摘要。 本文是一系列研究在多边形区域上求解 C^0 四阶椭圆方程的有限元方法的论文之一。在本文中，我们研究边界条件如何影响有效 C^0 格式的设计，具体聚焦于不含低阶项的方程，即双调和方程。我们提出了一种修正混合形式，将问题分解为泊松方程组，其中方程的数量取决于最大内角以及其相邻两边上的边界条件。与仅涉及两个 Poisson 问题的朴素混合公式不同，所提出的方法保证了对于任意多边形区域和一般边界条件（包括 Navier、Neumann 和混合边界条件）都能收敛到真实解。我们构造了 C^0 有限元算法，建立了严格的误差估计，并给出了数值实验，以展示所提出方法的适定性和有效性。

关键词。 双调和方程，一般边界条件，混合形式， C^0 有限元方法，误差估计。

MSC分类号。 65N12, 65N30, 35J40

1 引言 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个多边形区域，其边界分解为 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$，其中 Γ_D 与 Γ_N 是 $\partial\Omega$的两个互不相交的开子集。给定 $f \in L^2(\Omega)$，我们希望针对如下四阶椭圆问题发展 C^0 有限元算法：

$$\begin{cases} \Delta^2 u - b\Delta u + cu = f, & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0, & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = \partial_{\mathbf{n}} \Delta u = 0, & \text{on } \Gamma_N. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里， b 和 c 为非负常数，且$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$上的外单位法向量。边界段 Γ_D 和 Γ_N 分别对应于狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件。

为了发展 C^0 具有Navier边界条件的双调和方程的有限元方法，一种典型做法是将该问题重新表述为低阶椭圆方程的完全解耦系统，从而可以直接使用 C^0 有限元空间 [24]。然而，由于（1.1）中存在低阶项，该方程不能改写为完全解耦系统。因此，现有的 C^0 针对Navier边界条件下双调和方程的带校正技术的有限元方法不能直接推广到问题（1.1）。

在一系列工作中，我们旨在为问题（ C^0 有限元方法（1.1）。本文首先关注边界条件对双调和问题有限元方法的影响，即（ C^0 中的情形 $b = c = 0$ （1.2）：

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0, & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = \partial_{\mathbf{n}} \Delta u = 0, & \text{on } \Gamma_N. \end{cases} \tag{1.2}$$

双调和问题在流体力学和结构力学等领域得到了广泛研究 [25,32,34,37,38],，其中不同类型的边界条件对应着特定的应用场景。对于问题（1.2）中定义的边界条件，当 $\Gamma_D = \partial\Omega$ 时，

*湘潭大学数学与计算科学学院，中国湖南湘潭 411105（202431510169@smail.xtu.edu.cn）

†韦恩州立大学数学系与人工智能和数据科学研究所，美国密歇根州底特律（li@wayne.edu）。

‡湖南省科学与工程计算与仿真重点实验室；湘潭大学数学与计算科学学院，中国湖南湘潭 411105（yinianyu@xtu.edu.cn）。§通讯作者。德克萨斯大学埃尔帕索分校数学科学系，美国德克萨斯州埃尔帕索 79968（pyin@utep.edu）。

该问题称为满足 Navier边界条件 [13,35]。这种情况出现在结构力学中，例如描述铰支边界薄板静载荷的模型。相比之下，当 $\Gamma_N = \partial\Omega$ 时，该问题称为 Neumann边界条件情形 [26]。这类问题与薄板自由边界横向振动以及膜材料自然变形等物理模型有关 [11]。

本文将 $\Gamma_D = \partial\Omega$ 和 $\Gamma_N = \partial\Omega$ 视为混合边界条件的平凡情形。一般而言， Γ_D 和 Γ_N 可能是 $\partial\Omega$ 的非平凡子集，因此涵盖了更广泛的物理模型。对于此类四阶问题，可以采用基于直接变分形式的有限元方法 [2]。典型选择包括 C^1 有限元，例如由五次多项式构成的 Argyris元 [36], ，以及 Morley元——一种二次非协调元 [22]。然而，这些有限元空间的构造通常较为复杂，因此相应方法在实际应用中难以实现。其他可行方法还包括间断Galerkin方法 [17] 和 C^0 内部罚Galerkin方法 [4, 5],。不过，罚参数的选取往往颇为微妙。对于具有 Navier 或 Dirichlet边界条件的双调和方程，该问题可以分解为一个泊松方程组和一个 Stokes方程 [16,21]。然而，当四阶椭圆方程包含低阶项时，这种分解便不再适用。

受问题（1.2）中边界条件结构的启发，一种直观的策略是将双调和问题解耦为一个泊松方程组，然后使用标准有限元方法高效求解。基于 C^0 有限元构造的混合有限元方法，为问题（1.2）[1, 6–9, 15, 21, 24, 28]的双调和问题数值近似提供了一个颇具吸引力的框架。现有文献很大一部分聚焦于固支边界条件（也称为 Dirichlet边界条件），即（$u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上） [14, 20, 21, 33]。对于具有 Navier边界条件的双调和问题，研究发现 [12, 18, 24, 31, 39]当区域 Ω 为非凸时，对于某些源项 $f \in L^2$，问题（1.2）的混合有限元解可能与真实解不一致 $f \in L^2$（Ω）。这种差异被称为 Sapongyan悖论 [30, 39]。这是因为，由于存在不属于 H^2（Ω） [29, 39]的低正则性项，混合变分问题解的函数空间可能与相应直接变分问题的函数空间不一致。

最近， [24] 针对具有 Navier边界条件的双调和方程提出了一种修正混合形式。该形式将问题分解为由三个泊松方程组成的系统，并引入一个额外的中间泊松问题，以确保解属于正确的函数空间。对于具有简支边界条件的三调和方程，也发现了类似现象： [23], 该方程可直接分解为三个具有 Dirichlet边界条件的泊松方程。然而，由这些泊松方程得到的解仍可能属于更大的函数空间，从而导致弱解表现出类似 Sapongyan悖论的行为。为解决这一问题，可根据最大内角引入一个至三个额外的泊松方程，进一步将解限制在正确的函数空间中。

现有的 C^0 双调和方程有限元算法大多局限于Navier边界条件。为了针对（ C^0 1.1）开发一种有效的 C^0 有限元算法，关键在于研究一般边界条件如何影响 C^0 有限元近似的收敛性。从这一角度来看，Navier情形可视为一种特殊情形。通过分析拉普拉斯算子在适当边界条件下从 H^2映射到 L^2（Ω）的值域的正交补，我们首先为问题（1.2）构造一种修正解耦格式。该格式将双调和问题转化为由三个或四个泊松问题组成的系统，其中方程数量取决于区域的最大内角（可能包括大于 $\frac{\pi}{2}$ 的角），还取决于边界条件的具体选择。除直接源于双调和问题的两个泊松问题外，还需要数量不等的附加泊松问题，以确保解属于正确的Sobolev空间。特别地，如果仅有一个内角超过$\frac{\pi}{2}$，则对于Navier或诺伊曼边界条件，至多需要一个附加泊松问题；而对于混合边界条件，则最多需要两个附加泊松问题。本文给出了理论分析，以证明所

提出的混合形式，即泊松问题系统，与原双调和问题在适当Sobolev空间中的等价性。每个泊松问题都可以使用标准有限元方法求解，从而形成用于双调和问题（1.2）的混合有限元算法。这样，通过所得泊松问题系统求解问题（1.2）的数值解就变得既简单又高效。

为求解所提出的混合形式，我们采用分片线性C^0 有限元开发了一种数值算法。此外，我们还对辅助函数 w 和解 u的有限元近似进行了误差分析。对于辅助函数 w，其 H^1范数误差是标准的，在准一致网格上以 h^α 的速率收敛，其中 α 取决于最大内角以及该角两侧的边界条件。 L^2 误差估计通过标准的对偶论证推导得出。对于解 u，一般情况下，近似的收敛率为 $h^{\min\{1,2\alpha\}}$ 。对于纳维叶边界条件和诺伊曼边界条件，最优收敛率为 h^1；而对于混合边界条件，当内角不超过 π 时，收敛率为 h^1 ；当内角大于 π时，收敛率为 $h^{2\alpha}$ 。文中给出了数值算例，将所提出的方法与现有数值方法（如 C^0 内罚法）进行比较。采用所提出的 C^0 有限元算法得到的解与使用 C^0 内罚法 [4,5]计算得到的解非常吻合。观察到的数值收敛阶与理论预测高度一致。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们借鉴 [19], 中建立的二阶椭圆方程理论，指出朴素解耦形式所对应解空间的不足。随后，我们刻画拉普拉斯算子的像的正交补的维数，并构造相应的基。基于这些结果，我们提出一种修正格式，并证明其适定性。在第 3 节中，我们针对修正格式给出一种混合有限元算法，并推导准一致网格上主解和辅助函数的误差估计。第 4 节讨论了向 Neumann边界条件的推广。最后，在第 5 节中，我们报告了针对一系列具有代表性的多边形区域及边界条件所进行的数值实验，以验证所提格式的有效性。

2 混合边界条件下的双调和问题 设 $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_d)\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$为一个多重指标，并定义 $\partial^\gamma:=\partial^{\gamma_1}_{x_1}\cdots\partial^{\gamma_d}_{x_d}$, $|\gamma|:=\sum_{i=1}^d\gamma_i$。对于 $m\geq 0$，Sobolev空间 $H^m(\Omega)$ 由弱导数直到 m 阶均平方可积的函数构成。特别地，$L^2(\Omega):=H^0(\Omega)$。对于 $s>0$，设 $s=m+t$ 满足 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$和 $0<t<1$。对于 $D\subseteq\mathbb{R}^d$，分数阶索伯列夫空间 $H^s(D)$ 由 D 中的广义函数 v 构成，且满足

$$\|v\|^2_{H^s(D)}:=\|v\|^2_{H^m(D)}+\sum_{|\gamma|=m}\int_D\int_D\frac{|\partial^\gamma v(x)-\partial^\gamma v(y)|^2}{|x-y|^{d+2t}}\,dx\,dy<\infty.$$

范数$\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$简记为 $\|\cdot\|_s$，其中 $s>0$；$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$简记为 $\|\cdot\|$。我们将$\mathring{H}^s_0(D)$定义为 $C^\infty_0(D)$在 $H^s(D)$中的闭包，将 $H^{-s}(D)$定义为 $H^s_0(D)$的对偶空间，将 $H^s(D)$定义为所有在 D 上满足如下条件的函数 v 所构成的空间：其在 D 外的零延拓 $\tilde{v}$ 属于 $H^s(\mathbb{R}^d)$；并将 $\widetilde{H}^{-s}(D)$定义为 $H^s(D)$的~模空间。此外，对于量 a,b，我们使用记号 $a\lesssim b$ 表示 $a\leq Cb$，其中$C>0$ 是仅依赖于 Ω 和边界条件的常数。

本节中，我们在假设 $\Gamma_D\neq\emptyset$ 的条件下考虑问题 (1.2)。特殊情形 $\Gamma_N=\partial\Omega$ 将在 第 4 节 中讨论。我们定义 Sobolev空间

$$V^2:=\{v\in H^2(\Omega):v|_{\Gamma_D}=0,\ \partial_{\mathbf{n}}v|_{\Gamma_N}=0\}. \tag{2.1}$$

问题（1.2）的变分形式为：求 $u\in V^2$ 使得

$$a(u,v)=(f,v),\quad\forall v\in V^2, \tag{2.2}$$

其中，双线性形式 $a(u,\ v)$ 定义为

$$a(u,v):=\int_\Omega\Delta u\Delta v\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

对于任意 $u,\ v \in V^2$，双线性形式 $a(u,\ v)$ 在 V^2 上连续：

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, \mathrm{d}x \right| \le \|\Delta u\| \, \|\Delta v\| \le \|u\|_2 \, \|v\|_2.$$

对于任意 $u \in V^2$，$a(u,\ u)$ 的强制性由不等式 [19, 定理 2.2.3] 得出：

$$\|u\|_2^2 \lesssim \|\Delta u\|^2 = a(u,u).$$

因此，Lax–Milgram定理保证变分问题（2.2）是适定的。

2.1 朴素混合公式 问题（1.2）可解耦为两个具有混合边界条件的泊松问题

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} w = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} -\Delta \bar{u} = w & \text{in } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} \bar{u} = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \tag{2.4}$$

这称为朴素混合公式。定义 Sobolev空间

$$V^1 := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

那么，问题（2.4）对应的变分形式为求 $\bar{u},\ w \in V^1$ 使得

$$\begin{cases} A(w,\phi) = (f,\phi), & \forall \phi \in V^1, \\ A(\bar{u},\psi) = (w,\psi), & \forall \psi \in V^1, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中双线性形式

$$A(\phi,\psi) := \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

该解耦系统由两个标准的 Poisson 问题组成；在混合边界条件下，每个问题都是适定的并具有唯一解，只要 $\Gamma_D \neq \emptyset$。给定 $f \in H^{-1}(\Omega)$，变分问题（2.5）存在弱解（$\bar{u},\ w$）$\in V^1 \subset H^1(\Omega)$。由于解 u（即原问题（1.2）的解）属于 V^2，自然要问解 $\bar{u}$（来自混合形式（2.4））是否也属于 V^2。若否，则 $\bar{u}$ 不能被视为原双调和问题（1.2）的真实解。

Navier边界条件，即 $\Gamma_D = \partial\Omega$，混合形式（2.4）与原双调和问题之间的等价性已在 [24]中得到研究。研究表明，在具有凹角的区域中，混合形式（2.4）的解与双调和问题（1.2）的解不属于同一Sobolev空间，该现象称为Sapongyan悖论 [29, 39]。对于如（1.2）中具有混合边界条件的双调和问题，混合形式（2.4）的解也会出现类似差异。下文中，我们将详细分析解的结构，并发展有效方法以解决该问题。

2.2 修正混合形式 对于双调和问题（1.2），我们允许在不同类型的边界条件交汇处出现等于 π 的内角，并且在分析中将每个这样的边界过渡点视为多边形区域 Ω 的一个顶点。于是，Ω 的每条棱边都完全属于 Γ_D 或 Γ_N。

Definition 2.1（顶点、棱边与指示集）。设 $\{Q_j\}_{j=1}^n$ 表示 $\partial\Omega$的顶点，按逆时针排序，内角为 ω_j。对每个 j，设开集 Γ_j 为连接Q_{j-1} 与 Q_j $(Q_0 = Q_n)$的棱边，使得 $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^n \bar{\Gamma}_j$. 对于顶点 Q_j，指标 j 根据相邻棱边 Γ_j 与 Γ_{j+1} 上的边界条件分类为如下指示集：

- $\mathcal{D}^2$: $\Gamma_j, \Gamma_{j+1} \subset \Gamma_D$;
- $\mathcal{N}^2$: $\Gamma_j, \Gamma_{j+1} \subset \Gamma_N$;

- $\mathcal{M}'$: $\Gamma_j \subset \Gamma_N$, $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_D$;
- $\mathcal{M}''$: $\Gamma_j \subset \Gamma_D$, $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_N$。

为便于分析，全文采用以下假设：

Assumption 2.2. ***(i)*** Ω的所有内角均不超过$\frac{\pi}{2}$，但最大内角$\omega := \omega_\ell$ 位于顶点 $Q := Q_\ell$，其中 $1 \le \ell \le n$。换言之，我们考虑的多边形至多只有一个顶点会引发 ***Sapongyan*** 悖论。***(ii)*** 除了与 Q相邻的两条棱边外，所有边界棱边上均施加 ***Dirichlet***边界条件。在 Γ_ℓ 和$\Gamma_{\ell+1}$ 上的边界条件，如图 1 所示，将在后文说明。等价地，

$$\tilde{\Gamma} := \partial\Omega \setminus (\bar{\Gamma}_\ell \cup \bar{\Gamma}_{\ell+1}) \subset \bar{\Gamma}_D. \tag{2.7}$$

将顶点 Q 置于原点，并使与其相邻的棱边 $\Gamma_{\ell+1}$ 沿水平正轴。令 $(r,\ \theta)$ 表示极坐标。于是 Ω 位于由 $\theta = 0$ 和$\theta = \omega$围成的锥形区域内。定义扇形区域

$$K_\omega^R := \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Omega \,\middle|\, (r,\theta) \in (0,R) \times (0,\omega) \right\},$$

其中 R 的选取应使 得 $K_\omega^R \subset\Omega$。区域和扇形区域的示意图见 图 1。
其为 ch

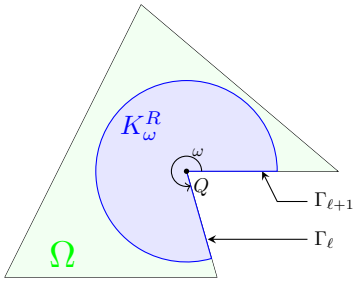


图 1：Ω 和 K_ω^R。

2.2.1 L^2 基函数 拉普拉斯算子 $\Delta : V^2 \to L^2(\Omega)$ 是单射的，其值域 $\mathcal{S} := \Delta(V^2)$ 构成 $L^2(\Omega)$ 的一个闭子空间，其有限余维为 [19]。令 $\mathcal{S}^\perp$ 表示 $\mathcal{S}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的正交补。于是有正交分解 $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp = L^2(\Omega)$。$\mathcal{S}^\perp$ 不一定为空。对于一个多边形，若 $\omega < \frac{\pi}{2}$，则有 $\mathcal{S} = L^2(\Omega)$，并且当源项属于 $L^2(\Omega)$ 时，泊松问题的解属于 V^2。然而，如果指标 $\ell \in \mathcal{D}^2$且 $\omega > \pi$，则已证明 $\dim(\mathcal{S}^\perp) = 1$ [19, 24]，即 $\mathcal{S} \subsetneq L^2(\Omega)$。在这种情况下，一般而言$w \notin \mathcal{S}$，这意味着由混合形式 (2.4) 得到的解 $\bar{u}$ 不属于 V^2。当指标 ℓ 属于定义 2.1 中定义的其他指示集时，根据最大内角 ω 和指示集的类型，也可能出现 $\mathcal{S} \subsetneq L^2(\Omega)$ 的情形。类似于 $\ell \in \mathcal{D}^2$的情况，其他所有情形下的正交补 $\mathcal{S}^\perp$ 都是有限维的，并且具有可显式确定的基。

Definition 2.3. 在顶点 Q，我们定义函数 $\xi_m = \xi_m(r,\theta;\ \tau, R) \in L^2(\Omega)$ 如下：

$$\xi_m := \chi s_m + \zeta_m, \tag{2.8}$$

其中截断函数 $\chi = \chi(r;\ \tau, R) \in C^\infty(\Omega)$ 满足

$$\chi(r;\tau,R) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le \tau R, \\ 0, & r \ge R, \end{cases}$$

$s_m = s_m(r,\theta) \in L^2(\Omega)$ 取决于 Q 处的指示函数以及内角 ω,

$$s_m := \begin{cases} r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right), & \ell \in \mathcal{D}^2,\ \omega \in (\pi, 2\pi),\ m = 1, \\ r^{-\frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right), & \ell \in \mathcal{N}^2,\ \omega \in (\pi, 2\pi),\ m = 1, \\ r^{-\frac{\pi}{2\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right), & \ell \in \mathcal{M}',\ \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ m = 1, \\ r^{-\frac{(2m-1)\pi}{2\omega}} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2\omega}\theta\right), & \ell \in \mathcal{M}',\ \omega \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),\ m = 1, 2, \\ r^{-\frac{\pi}{2\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right), & \ell \in \mathcal{M}'',\ \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ m = 1, \\ r^{-\frac{(2m-1)\pi}{2\omega}} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2\omega}\theta\right), & \ell \in \mathcal{M}'',\ \omega \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),\ m = 1, 2, \end{cases} \tag{2.9}$$

且 $\zeta_m \in H^1(\Omega)$ 定义为泊松问题的变分解

$$\begin{cases} -\Delta\zeta_m = \Delta(\chi s_m) & in\ \Omega, \\ \zeta_m = 0 & on\ \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}}\zeta_m = 0 & on\ \Gamma_N. \end{cases} \tag{2.10}$$

由截断函数 χ可得

$$\chi s_m = \partial_{\mathbf{n}}(\chi s_m) = 0 \quad \text{on } \tilde{\Gamma}.$$

在 s_m （2.9）中的定义意味着，对于 $j = \ell,\ \ell + 1$,

$$\begin{cases} \chi s_m|_{\Gamma_j} = 0 & \text{if } \Gamma_j \subset \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}}(\chi s_m)|_{\Gamma_j} = 0 & \text{if } \Gamma_j \subset \Gamma_N. \end{cases} \tag{2.11}$$

此外，我们注意到

$$\Delta(\chi s_m)|_{K_\omega^{\tau R} \cup (\Omega \setminus K_\omega^R)} = 0, \quad \Delta(\chi s_m) \in C^\infty(K_\omega^R \setminus K_\omega^{\tau R}),$$

这意味着 $\Delta(\chi s_m) \in L^2(\Omega)$。由（2.10）的椭圆正则性，可得 $\zeta_m \in H^1(\Omega)$。

我们在 $L^2(\Omega)$ 中引入拉普拉斯算子 Δ 的极大扩张：

$$D(\Delta, L^2(\Omega)) = \{v \in L^2(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}.$$

对于函数 v，令 $\gamma_j v$ 为 v 在 Γ_j上的限制。

LEMMA 2.4. *[19, 定理 1.5。2]* 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$的一个开多边形子集。则映射 g

$$v \mapsto \{\gamma_j v, \gamma_j(\partial v/\partial n)\},$$

该映射定义在 $H^2(\Omega)$ 上，并且可唯一连续扩张为一个算子，从 $D(\Delta, L^2(\Omega))$ 映射到$\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j)$。

因此，函数 ξ_m 在 (2.8) 中具有以下性质。

LEMMA 2.5. *(i)* ξ_m 取决于 r、 θ，但不依赖于 τ、 R。也就是说，对于任意两个不同的参数对 (τ_l, R_l)、 $l = 12$，若满足 $\min\{\tau_1 R_1, \tau_2 R_2\} > \delta > 0$，则可得

$$\xi_m(r, \theta; \tau_1, R_1) = \xi_m(r, \theta; \tau_2, R_2).$$

(ii) 函数 $\xi_m \in D(\Delta, L^2(\Omega))$ 唯一确定，并满足

$$\begin{cases} -\Delta\xi_m = 0 & in\ \Omega, \\ \xi_m = 0 & on\ \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}}\xi_m = 0 & on\ \Gamma_N. \end{cases} \tag{2.12}$$

证明。 (i) 的证明与 [24], 中的引理 2.4 类似，而 (ii) 的证明则由 [19]中的引理 2.3.6 得出。 □

由于 $\xi_m(r,\ \theta;\ \tau,\ R)$ 与 τ和 R(见 引理 2.5) 无关，因此我们可以简单地写成

$$\xi_m(r,\theta) := \xi_m(r,\theta;\tau,R).$$

2.2.2 拉普拉斯算子像的正交空间 我们明确刻画正交补 $\mathcal{S}^{\perp}$。首先确定其中可能包含的分量。

LEMMA 2.6. 函数 ξ_m 定义于 (2.8) 属于 $\mathcal{S}^{\perp}$。特别地，对于 $\ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ 和$\omega \in (3\pi/2,\ 2\pi)$，函数 ξ_m、 $m = 1$、2 线性无关。

证明。 对于任意 $v \in \mathcal{S}$，存在 $z \in V^2$ 使得 $-\Delta z = v$。对 v与 ξ_m 取内积，得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\xi_m \mathrm{d}x &= \int_\Omega -\Delta z\, \xi_m \mathrm{d}x = \int_\Omega -z\Delta\xi_m \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} z\partial_{\mathbf{n}}\xi_m - \partial_{\mathbf{n}} z\, \xi_m \mathrm{d}s \\ &= \int_\Omega -z\Delta\xi_m \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_D} -\partial_{\mathbf{n}} z\, \xi_m \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_N} z\partial_{\mathbf{n}}\xi_m \mathrm{d}s = 0,\end{aligned}$$

其中我们使用了（2.12）。因此， $\xi_m \in \mathcal{S}^{\perp}$。

若 $\ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$和 $\omega \in (3\pi/2,\ 2\pi)$，假设存在某些常数 $k_1,\ k_2$，

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 + \chi(k_1 s_1 + k_2 s_2) = 0,$$

这意味着 $\chi(k_1 s_1 + k_2 s_2) = -(k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2) \in H^1(\Omega)$。由于 $s_m \notin H^1(\Omega),\ \ m = 1,\ 2$，故有

$$k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0. \tag{2.13}$$

将（2.13）乘以 $r^{-\frac{\pi}{2\omega}}$可得 $k_2 r^{-\frac{\pi}{2\omega}} s_2 = -k_1 r^{-\frac{\pi}{2\omega}} s_1 \in L^2(\Omega)$。然而，由于 $r^{-\frac{\pi}{2\omega}} s_2 \notin L^2(\Omega)$，必有 $k_2 = 0$，因此 $k_1 = 0$。于是， ξ_1 和 ξ_2 线性无关。 □

考察 多边形区域中 $\mathcal{S}^{\perp}$ 的维数时，我们回顾以下结果。

LEMMA 2.7. *[19, 定理 2.3。7]* 给定一个一般多边形区域， $\mathcal{S}^{\perp}$ 的维数等于集合 $\{\lambda_{j,m}:\ 0 < \lambda_{j,\ m} < 1,\ m \geq 1\}$的基数，即，

$$\dim \mathcal{S}^{\perp} = \mathrm{card}\{\lambda_{j,m}:\ 0 < \lambda_{j,m} < 1,\ m \geq 1\}. \tag{2.14}$$

这里，$\lambda_{j,m}\,(j = 1, \ldots, n;\ m \geq 1)$ 表示该边值问题的特征值

$$-\partial_\theta^2\phi = \lambda^2\phi, \qquad \theta \in (0,\omega_j), \quad \phi \in D_j, \tag{2.15}$$

其中，可容许集 D_j 定义为

$$D_j = \begin{cases} \{\phi \in H^2([0,\omega_j]) : \phi(0) = 0,\ \phi(\omega_j) = 0\}, & j \in \mathcal{D}^2, \\ \{\phi \in H^2([0,\omega_j]) : \phi'(0) = 0,\ \phi'(\omega_j) = 0\}, & j \in \mathcal{N}^2, \\ \{\phi \in H^2([0,\omega_j]) : \phi'(0) = 0,\ \phi(\omega_j) = 0\}, & j \in \mathcal{M}', \\ \{\phi \in H^2([0,\omega_j]) : \phi(0) = 0,\ \phi'(\omega_j) = 0\}, & j \in \mathcal{M}''. \end{cases}$$

对于一般的多边形区域，可以很容易验证，对于固定的 j，特征值问题（2.15）的解由下式给出

$$\lambda_{j,m} = \begin{cases} m\pi/\omega_j, & j \in \mathcal{D}^2, \\ (m-1)\pi/\omega_j, & j \in \mathcal{N}^2, \\ \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi/\omega_j, & j \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'', \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

于是， $\mathcal{S}^{\perp}$ 在（2.14）中的维数降为

$$d_{\perp} := \dim \mathcal{S}^{\perp} = \operatorname{card}\left\{j \in \mathcal{D}^2 \cup \mathcal{N}^2 : \ \omega_j \in (\pi, 2\pi)\right\} + \operatorname{card}\left\{j \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'' : \ \omega_j \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\right\} + 2\operatorname{card}\left\{j \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'' : \ \omega_j \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)\right\}, \tag{2.16}$$

这表明 $\mathcal{S}^{\perp}$ 是有限维的，其维数由多边形区域上的内角 ω_j以及所规定的边界条件类型决定。

重新审视先前的假设后，我们得到如下结果。

COROLLARY 2.8. 在 假设 2.2下，正交空间 $\mathcal{S}^{\perp}$ 成立

$$d_{\perp} = \begin{cases} 1, & \ell \in \mathcal{D}^2 \cup \mathcal{N}^2, \omega \in (\pi, 2\pi), \ or\ \ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'', \omega \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi], \\ 2, & \ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'', \omega \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi). \end{cases} \tag{2.17}$$

此外， $\mathcal{S}^{\perp}$ 可以表示为

$$\mathcal{S}^{\perp} = \underset{m}{span}\{\xi_m\}, \tag{2.18}$$

其中 $\xi_m,\ m = 1, \ldots, d_{\perp}$ 由 (2.8)给出。

证明。 根据 ξ_m 在 (2.8) 中的定义以及 引理 2.7，可得 $d_{\perp} = card\{\xi_m\}$。此外，$_m$引理 2.6 推出 $\xi_m \in \mathcal{S}^{\perp}$，因此 (2.18) 成立。 □

2.3 修正混合形式及其适定性 由推论2.8，任意函数$w \in L^2(\Omega)$ 均可分解为

$$w = w_{\mathcal{S}} + w_{\mathcal{S}^{\perp}}, \tag{2.19}$$

其中 $w_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ 和 $w_{\mathcal{S}^{\perp}} \in \mathcal{S}^{\perp}$ 满足

$$w_{\mathcal{S}^{\perp}} = \sum_{m=1}^{d_{\perp}} c_m \xi_m, \ \text{and}\ (w_{\mathcal{S}}, w_{\mathcal{S}^{\perp}}) = 0.$$

对等式两边与2.19的 ξ_m 取内积，可得关于系数的线性方程组：

$$\Xi C = W, \tag{2.20}$$

其中 $\Xi = [(\xi_m, \xi_{m'})]_{m,\ m'=1}^{d_{\perp}} \in \mathbb{R}^{d_{\perp} \times d_{\perp}}$ 是相应的格拉姆矩阵，$C = [c_m]_{m=1}^{d_{\perp}} \in \mathbb{R}^{d_{\perp}}$ 是系数向量，而 $W = [(w, \xi_m)]_{m=1}^{d_{\perp}} \in \mathbb{R}^{d_{\perp}}$ 是右端向量。

LEMMA 2.9. 线性方程组 (2.20) 存在唯一解。

证明。 若 $d_{\perp} = 1$，则系数可明确表示为 $c_1 = \frac{(w,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}$。若 $d_{\perp} = 2$，根据 引理 2.6，基函数 ξ_1 和 ξ_2 线性无关。因此，相应的格拉姆矩阵 Ξ 满足

$$|\Xi| = \|\xi_1\|^2 \|\xi_2\|^2 - (\xi_1, \xi_2)^2 > 0,$$

这意味着 Ξ是非奇异的。因此，系数向量 C 被唯一确定。于是，朴素混合公式（2.4）可以改进为 □ 修正混合形式

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} w = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = w_{\mathcal{S}} & \text{in } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u} = 0 & \text{on } \Gamma_N. \end{cases} \tag{2.21}$$

相应的变分形式求解 $\tilde{u}$, $w \in V^1$ 使得

$$\begin{cases} A(w,\phi) = (f,\phi), & \forall \phi \in V^1, \quad (2.22a) \\ A(\tilde{u},\psi) = (w_{\mathcal{S}},\psi), & \forall \psi \in V^1, \quad (2.22b) \end{cases}$$

对于修正混合形式（2.21），有以下结果。

THEOREM 2.10. 对于 $f \in L^2(\Omega)$，解 $\tilde{u}$ 修正变分问题 (2.22) 与双调和问题的解 u (2.2)相同，即 $\tilde{u} = u \in V^2$。

证明。 由于 $w_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$，可得 $\tilde{u} \in V^2$。对于任意 $v \in V^2$，有

$$(\Delta\tilde{u},\Delta v)_\Omega = (w - w_{\mathcal{S}^\perp},\Delta v)_\Omega = -(w,\Delta v)_\Omega + (w_{\mathcal{S}^\perp},\Delta v)_\Omega = (\nabla w,\nabla v)_\Omega - (w,\partial_{\mathbf{n}} v)_{\partial\Omega}.$$

由于 $w \in V^1$, $v \in V^2$，有 $(w, \partial_{\mathbf{n}} v)_{\partial\Omega} = (w, \partial_{\mathbf{n}} v)_{\Gamma_D} + (w, \partial_{\mathbf{n}} v)_{\Gamma_N} = 0$. 因此，

$$(-\Delta\tilde{u},\Delta v)_\Omega = (\nabla w,\nabla v)_\Omega = (f,v)_\Omega.$$

因此， $\tilde{u}$ 满足（2.2）。由 2.2 在 V^2 中解的唯一性，可得 $\tilde{u} = u$。 □

下文中，我们不区分 u 和 $\tilde{u}$，并统一将它们记为 u。

LEMMA 2.11. 修正混合形式(w,u) 的解(2.22) 满足

$$\|w\|_1 \lesssim \|f\|, \quad \|u\|_2 \lesssim \|f\|.$$

3 C^0 有限元方法基于修正混合形式，我们提出一种 C^0用于双调和问题（1.2）的线性有限元方法，并推导了误差估计。

用 $\mathcal{T}_h$ 表示 Ω 的三角剖分。 C^0-Lagrange 有限元空间 V_h 定义为

$$V_h := \{v \in C^0(\Omega) \cap V^1 : v|_K \subset P_1,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{3.1}$$

其中， P_1 表示每个单元 K上的线性多项式空间。

我们基于（ C^0 2.21）提出一种用于双调和问题（1.2）的有限元算法，见算法 2.213.1。

算法 3.1： C^0 有限元方法

步骤1：求解 $w_h \in V_h$ 。步骤2：求解$\zeta_{m、h} \in$ $_h$、 $\leq m \leq$ $_\perp$，其中 χ、 s_m 在定义2.3中给出；计算$\xi_{m、h} = (\zeta_{m、h} + \chi s_m)$；步骤3：计算系数(3.2)，其中 $\Xi_h \in \mathbb{R}^{d_\perp \times d_\perp}$ 是系数矩阵，其第 mm'个元素为$(\xi_{m、h}、\xi_{m'、h})$，$C_h = [c_{1,h},\ldots,c_{d_\perp,h}]^\top \in \mathbb{R}^{d_\perp}$，以及 $W_h \in \mathbb{R}^{d_\perp}$，其第 m个元素为$(w_h、\xi_{m、h})$。步骤4：由(3.3)求解 $u_h \in V_h$

$$\Xi_h C_h = W_h,$$

$$A(u_h,v_h) = \left(w_h - \sum_{m=1}^{d_\perp} c_{m,h}\xi_{m,h}, v_h\right), \quad \forall v_h \in V_h.$$

根据 Lax-Milgram定理，算法 3.1 中的方程适定。

REMARK 3.1. 根据 假设 2.2，若 $\ell \in \mathcal{D}^2 \cup \mathcal{N}^2$ 对于 $\omega < \pi$ 且 $\ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ 对于 $\omega \leq \frac{\pi}{2}$，则解满足 $u \in V^2$。在这些情况下，算法 3.1退化为朴素混合有限元方法。

REMARK 3.2. 算法 3.1 可自然推广到具有诺伊曼边界条件的双调和方程（$\Gamma_N = \partial\Omega$），我们将在 第 4节讨论这一内容，方法是将有限元空间 V_h 替换为 V_h （(4.9)）中定义的。

在所有情况下， s_m 在（2.9）中具有如下形式

$$s_m(r,\theta) = r^{-\beta_m}\Phi_m(\theta),$$

其中， $\beta_m > 0$ 是（2.9）中指数绝对值所对应的正数， r 在（2.9）中， Φ_m表示适当的三角函数。根据多边形区域上 Poisson 方程的正则性理论（见 [19]），由于 w， ζ_m 求解泊松问题（2.21）、（2.10），我们有

$$w,\ \zeta_m \in H^{1+\alpha}(\Omega),$$

其中 $\alpha := \min_m \beta_m - \varepsilon$，且 $\varepsilon > 0$ 选取得足够小。为简化下文的误差分析，我们进一步假设解表现出由 $\alpha < 1$表征的奇异性。于是，标准的有限元误差估计给出以下结果。

LEMMA 3.3. 令 w， ζ_m，且 ξ_m 分别为 (2.21)、(2.10)和 (2.8)的解，并令w_h、 $\zeta_{m,h}$和 $\xi_{m,h}$ 为算法 3.1中的相应有限元近似。则

$$\|w - w_h\|_1 \lesssim h^{\alpha}\|w\|_{1+\alpha}, \quad \|w - w_h\| \lesssim h^{2\alpha}\|w\|_{1+\alpha},$$
$$\|\xi_m - \xi_{m,h}\|_1 \lesssim h^{\alpha}\|\zeta_m\|_{1+\alpha}, \quad \|\xi_m - \xi_{m,h}\| \lesssim h^{2\alpha}\|\zeta_m\|_{1+\alpha},$$

其中， w 和 ζ_m 满足以下正则性估计：

$$\|w\|_{1+\alpha} \lesssim \|f\|, \quad \|\zeta_m\|_{1+\alpha} \lesssim \|\Delta(\chi s_m)\|.$$

LEMMA 3.4. 设 $\gamma > 0$ 为一个常数，且 p、 q 为有界标量。若 $|p-p_h| \lesssim h^{\gamma}$、 $|q-q_h| \lesssim h^{\gamma}$，则存在 $h_0 > 0$，使得对所有 $h < h_0$，量 p_h 和 q_h 均一致有界，并且

$$|pq - p_h q_h| \lesssim h^{\gamma}.$$

证明。 根据假设，存在 $C > 0$，使得对所有充分小的 h， $|p - p_h| \leq Ch^{\gamma}$ 且 $|q - q_h| \leq Ch^{\gamma}$。选取 $h_0 > 0$ 使得 $Ch_0^{\gamma} < 1$。则对于 $h < h_0$,

$$|p_h| \leq |p| + |p - x_h| \leq |p| + 1, \qquad |q_h| \leq |q| + |q - y_h| \leq |q| + 1,$$

因此， p_h 和 q_h 均一致有界。

此外，可得

$$|pq - p_h q_h| = |p(q - q_h) + (p - p_h)q_h| \leq |p|\,|q - q_h| + |p - p_h|\,|q_h|.$$

利用上述界，我们得到

$$|pq - p_h q_h| \leq |p|\,Ch^{\gamma} + Ch^{\gamma}(|q| + 1) \lesssim h^{\gamma}.$$ □

根据算法 u_h 中的有限元近似 3.1，我们有如下结果。

THEOREM 3.5. 设 u 为修正混合形式 (2.22)的解，且 u_h 为算法 3.1中的有限元近似。则，

$$\|u - u_h\|_1 \lesssim h^{\min\{1,2\alpha\}}. \tag{3.4}$$

更具体地说，

$$\|u - u_h\|_1 \lesssim \begin{cases} h^{2\alpha}, & \text{if } \ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'', \omega > \pi, \\ h, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.5}$$

证明。将 $\psi = v_h$ 代入（2.22b），并用（3.3）从（2.22b）中相减，得到

$$A(u-u_h, v_h) = \left((w - \sum_{m=1}^{d_\perp} c_m \xi_m) - (w_h - \sum_{m=1}^{d_\perp} c_{m,h}\xi_{m,h}), v_h \right). \tag{3.6}$$

令 $u_I \in V_h$ 表示 u 在 V_h 上的拉格朗日插值。由于 $u \in V^2 \subset H^2(\Omega)$，三角剖分 $\mathcal{T}_h$ [10] 上的标准插值估计给出

$$\|u - u_I\|_1 \lesssim h\|u\|_2.$$

记 $\varepsilon_h = u_I - u$ 和 $e_h = u_I - u_h$。取 $v_h = e_h$ 代入（3.6），可得

$$\begin{aligned}
|e_h|_1^2 &= (\nabla\varepsilon_h, \nabla e_h) + (w - w_h, e_h) - \sum_{m=1}^{d_\perp}(c_m - c_{m,h})(\xi_m, e_h) - \sum_{m=1}^{d_\perp} c_{m,h}(\xi_m - \xi_{m,h}, e_h) \\
&\le |\varepsilon_h|_1|e_h|_1 + (\|w - w_h\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_m - c_{m,h}|\|\xi_m\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_{m,h}|\|\xi_m - \xi_{m,h}\|)\|e_h\| \\
&\lesssim \left(|\varepsilon_h|_1 + \|w - w_h\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_m - c_{m,h}|\|\xi_m\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_{m,h}|\|\xi_m - \xi_{m,h}\| \right) \|e_h\|_1.
\end{aligned}$$

由庞加莱不等式 [27],

$$\|e_h\|_1^2 \lesssim |e_h|_1^2 \lesssim (|\varepsilon_h|_1 + (\|w - w_h\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_m - c_{m,h}|\|\xi_m\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_{m,h}|\|\xi_m - \xi_{m,h}\|)\|e_h\|_1,$$

这意味着

$$\|e_h\|_1 \lesssim |u - u_I|_1 + \|w - w_h\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_m - c_{m,h}|\|\xi_m\| + \sum_{m=1}^{d_\perp}|c_{m,h}|\|\xi_m - \xi_{m,h}\|. \tag{3.7}$$

由（2.20）和（3.2），系数可表示为

$$c_m = \frac{1}{|\Xi|}\sum_{m'=1}^{d_\perp}\Xi_{(m',m)}(w, \xi_{m'}), \qquad c_{m,h} = \frac{1}{|\Xi_h|}\sum_{m'=1}^{d_\perp}\Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h}).$$

记号 $\Xi_{(m',m)}$ 和 $\Xi_{h,(m',m)}$ 分别表示 Ξ 和 Ξ_h的代数余子式。特别地，若 $\dim \mathcal{S}^\perp = 1$，则有 $\Xi_{(1,1)} = \Xi_{h,(1,1)} = 1$。

由引理 3.3，存在 $h_0 > 0$，使得对所有 $h < h_0$，均有$\|\xi_{m,h}\|_1 \le \|\xi_m\|_1 + 1$ 且$\|w_h\|_1 \le \|w\|_1 + 1$。注意，对于 $m,\ m' \ge 1$,

$$\begin{aligned}
|(\xi_m, \xi_{m'}) - (\xi_{m,h}, \xi_{m',h})| &= |(\xi_m, \xi_{m'} - \xi_{m',h}) + (\xi_m - \xi_{m,h}, \xi_{m',h})| \\
&\le \|\xi_{m'} - \xi_{m',h}\|\|\xi_m\| + \|\xi_m - \xi_{m,h}\|\|\xi_{m',h}\| \lesssim h^{2\alpha}, \qquad (3.8)\\
|(w, \xi_{m'}) - (w_h, \xi_{m',h})| &\le |(w, \xi_{m'} - \xi_{m',h}) + (w - w_h, \xi_{m',h})| \\
&\lesssim \|\xi_{m'} - \xi_{m',h}\|\|w\| + \|w - w_h\|\|\xi_{m',h}\| \lesssim h^{2\alpha}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

由于每个量 $\Xi_{(m',m)}(w, \xi_{m'})$ 和 $|\Xi|$ 都是项 $(\xi_m, \xi_{m'})$、$(w, \xi_{m'})$ 的乘积及常数的线性组合，因此由 引理 3.4 结合 $\gamma = 2\alpha$，以及 (3.8) 和 (3.9) 可得

$$\left|\Xi_{(m',m)}(w, \xi_{m'}) - \Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h})\right| \lesssim h^{2\alpha}, \qquad ||\Xi| - |\Xi_h|| \lesssim h^{2\alpha}.$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
|c_m - c_{m,h}| &= \left| \frac{1}{|\Xi|} \sum_{m'=1}^{d_\perp} \Xi_{(m',m)}(w, \xi_{m'}) - \frac{1}{|\Xi_h|} \sum_{m'=1}^{d_\perp} \Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|\Xi|} \sum_{m'=1}^{d_\perp} \left(\Xi_{(m',m)}(w, \xi_{m'}) - \Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h}) \right) + \left(\frac{1}{|\Xi|} - \frac{1}{|\Xi_h|} \right) \sum_{m'=1}^{d_\perp} \Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h}) \right| \\
&\leq \frac{1}{|\Xi|} \sum_{m'=1}^{d_\perp} \left| \Xi_{(m',m)}(w, \xi_{m'}) - \Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h}) \right| + \frac{||\Xi_h| - |\Xi||}{|\Xi\Xi_h|} \sum_{m'=1}^{d_\perp} \left| \Xi_{h,(m',m)}(w_h, \xi_{m',h}) \right| \\
&\lesssim h^{2\alpha}.
\end{aligned}
$$

由引理 3. 4, $|c_{m,h}|$ 一致有界。将 $|c_m - c_{m,h}|$ 的估计代入（3.7）得

$$
\begin{aligned}
\|u - u_h\|_1 &\lesssim \|u - u_I\|_1 + \|u_I - u_h\|_1 \\
&\lesssim \|u - u_I\|_1 + \|w - w_h\| + \sum_{m=1}^{d_\perp} |c_m - c_{m,h}| \|\xi_m\| + \sum_{m=1}^{d_\perp} |c_{m,h}| \|\xi_m - \xi_{m,h}\| \\
&\lesssim h^{\min(1,2\alpha)},
\end{aligned}
$$

由此，当 3.5) 中的估计成立，且 $\alpha < \frac{1}{2}$ 当 $\ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$, $\omega > \pi$。 □

REMARK 3.6. 需要指出的是，采用 P_k 多项式的高阶近似，其误差估计并非简单地

$$\|u - u_h\|_1 \lesssim h^{\min\{k,\, 2\alpha\}},$$

因为它还可能受到其他因素的影响。未来研究将对此进行详细探讨。

REMARK 3.7. 在 定理 3.5中，预测的收敛率为 $h^{2\alpha}$，其中 $2\alpha < 1$ 当最大内角超过 π 且对应于混合边界条件时。然而，大量数值实验始终表明，收敛率达到最优值 h。这可能是因为修正混合形式（ $c_2\xi_2$ 中的 $w_{\mathcal{S}}$ 修正项(2.21) 所影响的解分量非常小，尽管该修正仍然是必要的（见 表 7 中的 例 5.4）。

4 诺伊曼边界条件 具体而言，我们考虑纯诺伊曼边界情形，即 $\Gamma_D = \emptyset$, $\Gamma_N = \partial\Omega$。此时，双调和问题（1.2）化简为

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\
\partial_{\mathbf{n}} u = \Delta \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{on } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{4.1}
$$

（4.1）的变分形式是求解 $u \in \bar{V}^2$ 使其满足

$$a(u, v) = (f, v), \qquad \forall v \in \bar{V}^2, \tag{4.2}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$ 满足相容条件 $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$，Sobolev空间 $\bar{V}^2$ 定义为

$$\bar{V}^2 = \{v \in H^2(\Omega) : \partial_{\mathbf{n}} v|_{\partial\Omega} = 0, \int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0\}.$$

与小节 2.1中讨论的一般边界条件类似，问题（4.1）也可以完全分解为朴素混合公式：两个带有 Neumann 边界条件的 Poisson 方程

$$
\begin{cases}
-\Delta w = f & \text{in } \Omega, \\
\partial_{\mathbf{n}} w = 0 & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
-\Delta \bar{u} = w & \text{in } \Omega, \\
\partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{on } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{4.3}
$$

相应的变分形式是求解 $\bar{u},\quad w\in\bar{V}^1$ 使得

$$\begin{cases} A(w,\phi)=(f,\phi), & \forall\phi\in\bar{V}^1,\\ A(\bar{u},\psi)=(w,\psi), & \forall\psi\in\bar{V}^1. \end{cases} \tag{4.4}$$

这里，Sobolev空间 $\bar{V}^1$ 定义为

$$\bar{V}^1=\{v\in H^1(\Omega):\int_\Omega v\,\mathrm{d}x=0\}.$$

注意到 $w\in\bar{V}^1$ 意味着 $\int_\Omega w\mathrm{d}x=0$，这保证了满足 Neumann边界条件的第二个泊松问题的适定性。朴素混合公式（4.3）存在与前文讨论的其他边界条件对应格式相同的问题。接下来，我们将介绍相应的修正混合形式。

4.1 修正混合形式 我们对区域采用与 假设 2.2(i) 中所述相同的假设。特别地，有 $d_\perp=1$。本节中 L^2 函数 ξ （为简便起见，我们省略下标 m ）定义为

$$\xi=\chi s+\zeta,\qquad s=r^{-\frac{\pi}{\omega}}\cos\frac{\pi}{\omega}\theta,\qquad \begin{cases} -\Delta\zeta=\Delta(\chi s) & \text{in }\Omega,\\ \partial_{\mathbf{n}}\zeta=0 & \text{on }\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

这里，ξ 构成正交空间 $\mathcal{S}^\perp$的基函数。于是，修正混合变分形式类似地定义为

$$\begin{cases} -\Delta w=f & \text{in }\Omega,\\ \partial_{\mathbf{n}}w=0 & \text{on }\partial\Omega, \end{cases}\qquad \begin{cases} -\Delta\tilde{u}=w_{\mathcal{S}} & \text{in }\Omega,\\ \partial_{\mathbf{n}}\tilde{u}=0 & \text{on }\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

其中

$$w_{\mathcal{S}}=w-w_{\mathcal{S}^\perp},\qquad w_{\mathcal{S}^\perp}=\frac{(w,\xi)}{\|\xi\|^2}\xi. \tag{4.7}$$

相应的变分形式是求满足以下条件的 $\tilde{u},\quad w\in\bar{V}^1$

$$\begin{cases} A(w,\phi)=(f,\phi), & \forall\phi\in\bar{V}^1,\\ A(\tilde{u},\psi)=(w_{\mathcal{S}},\psi), & \forall\psi\in\bar{V}^1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Lemma 4.1. 修正混合形式(4.6) 或(4.8) 存在唯一解 $w,\ \tilde{u}\in\bar{V}^1$.

证明。 由于 f 满足相容条件， w 的存在性和唯一性显而易见。要证明 $\tilde{u}$的存在性和唯一性，只需证明 (4.7) 中的 $w_{\mathcal{S}}$ 满足相容条件 $\int_\Omega w_{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}x=\int_\Omega w dx-\frac{(w,\xi)}{\|\xi\|^2}\int_\Omega\xi dx=0$。由于 w 满足 $\int_\Omega w\,\mathrm{d}x=0$，只需证明 $\int_\Omega\xi\mathrm{d}x=0$.

首先，(4.5) 存在唯一解 $\zeta\in\bar{V}^1$，这由 $\Delta(\chi s)\in L^2(\Omega)$ 和

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Delta(\chi s)\,\mathrm{d}x&=\int_\Omega(\partial_r^2+r^{-1}\partial_r+r^{-2}\partial_\theta^2)(\chi r^{-\frac{\pi}{\omega}}\cos\frac{\pi}{\omega}\theta)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^R r(\partial_r^2+r^{-1}\partial_r-\frac{\pi^2}{\omega^2})(\chi r^{-\frac{\pi}{\omega}})\,\mathrm{d}r\int_0^\omega\cos\frac{\pi}{\omega}\theta\,\mathrm{d}\theta=0.\end{aligned}$$

于是可得

$$\int_\Omega\xi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\zeta+\chi r^{-\frac{\pi}{\omega}}\cos\frac{\pi}{\omega}\theta\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\zeta\,\mathrm{d}x+\int_0^R\chi r^{1-\frac{\pi}{\omega}}\,\mathrm{d}r\int_0^\omega\cos\frac{\pi}{\omega}\theta\,\mathrm{d}\theta=0.$$

□

与一般边界情形类似，我们有以下结果。

THEOREM 4.2. 解 $\tilde{u}$ 修正混合形式 (4.6) 与以下问题的解相同u 双调和问题 (4.1)，即 $\tilde{u} = u \in \bar{V}^2$。此外，解 (w, u) 修正混合形式 (4.6)还满足

$$\|w\|_1 \lesssim \|f\|, \quad \|u\|_2 \lesssim \|f\|.$$

与有限元空间 V_h 在 (3.1) 中类似，我们引入 C^0-拉格朗日有限元空间

$$\bar{V}_h := \{v \in C^0(\Omega) \cap \bar{V}^1 : v|_K \subset P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{4.9}$$

其中 P_1 表示每个单元上的线性多项式空间 K。那么，基于修正混合形式 (4.1) 的双调和问题有限元算法 (4.6) 也可以˜通过算法 3.1 给出，其中 V_h 替换为 V_h。

对于 ζ， w 在 (4.5) 和 (4.6) 中，可得 w， $\zeta \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ 且 $\alpha = \frac{\pi}{\omega} - \varepsilon$。

THEOREM 4.3. 令 w_h, ξ_h, u_h 为 C^0 在 w, ξ, u 修正混合形式(4.6)中的有限元算法的有限元近似，则有

$$\|w - w_h\|_1 \lesssim h^{\alpha}, \ \|w - w_h\| \lesssim h^{2\alpha}, \ \|\xi - \xi_h\|_1 \lesssim h^{\alpha}, \ \|\xi - \xi_h\| \lesssim h^{2\alpha}, \ \|u - u_h\|_1 \lesssim h.$$

5 数值测试 本节通过若干模型问题的数值实验，验证所提出的 C^0 有限元算法，即算法3.1。**区域形状** 为便于展示，我们考虑图 2所列的区域。这些区域由以原点为中心、边长为 4 的正方形区域去除部分区域后形成 Q 。

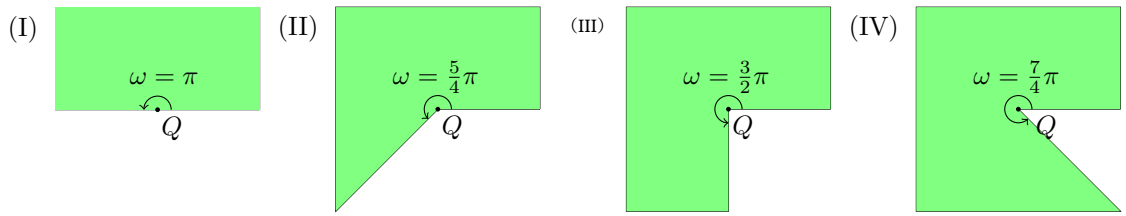


图 2：数值实验中使用的四个不同多边形区域。点 Q 处的再入角内角为 ω。I： $\omega = \pi$，II： $\omega = 5\pi/4$，III： $\omega = 3\pi/2$，IV： $\omega = 7\pi/4$。

B边界条件 边界条件分为以下五种类型 s:

$$B_1 : \partial\Omega = \Gamma_D; \quad B_2 : \tilde{\Gamma} \subset \bar{\Gamma}_D, \ \ell \in \mathcal{N}^2; \quad B_3 : \tilde{\Gamma} \subset \bar{\Gamma}_D, \ \ell \in \mathcal{M}'; \quad B_4 : \tilde{\Gamma} \subset \bar{\Gamma}_D, \ \ell \in \mathcal{M}''; \quad B_5 : \partial\Omega = \bar{\Gamma}_N,$$

˜其中 Γ定义于（2.7）。

截断函数 接下来 [24],我们考虑截断函数

$$\chi(r; \tau, R) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ 1, & r < \tau R, \\ -\frac{3}{16}\left(\frac{2r}{R(1-\tau)} - \frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^5 + \frac{5}{8}\left(\frac{2r}{R(1-\tau)} - \frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^3 - \frac{15}{16}\left(\frac{2r}{R(1-\tau)} - \frac{1+\tau}{1-\tau}\right) + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

对于 图 2中的区域，我们取 $R = 1.8$， $\tau = 0.125$。

由于这些双调和问题没有解析解，我们采用 C^0 内罚不连续 Galerkin（C^0-IPDG）方法 [3,5], 。已有研究表明，该方法所得数值解收敛于真实解，且这一性质不受 Ω 的几何形状和所施加边界条件的影响。在计算中，我们使用 P_2 Lagrange 元，罚参数则根据所考虑的具体问题选取。经过 7 次均匀网格细化后，将所得数值解记为 u_R，并将其作为参考解。

此外，我们将 u_h^N 记为基于朴素混合形式的有限元解，将 u_h^M 记为算法 3.1所得的有限元解。为计算收敛率，对于一般的有限元解 $\mathcal{R}(j)$，我们采用柯西数值收敛率 v_h，其定义如下：

$$\mathcal{R}(j) = \log_2 \frac{|v_j - v_{j-1}|_1}{|v_{j+1} - v_j|_1}, \quad j \geq 1.$$

这里， v_j 表示在经过 j 次一致加密后由初始三角剖分得到的网格 $\mathcal{T}_h$ 上的有限元解 v_h 。

5.1 混合边界条件，其中 $\Gamma_D \neq \emptyset$ 本小节中的所有数值试验，除非另有说明，均设定 $f \equiv 1$ 在 Ω 中。

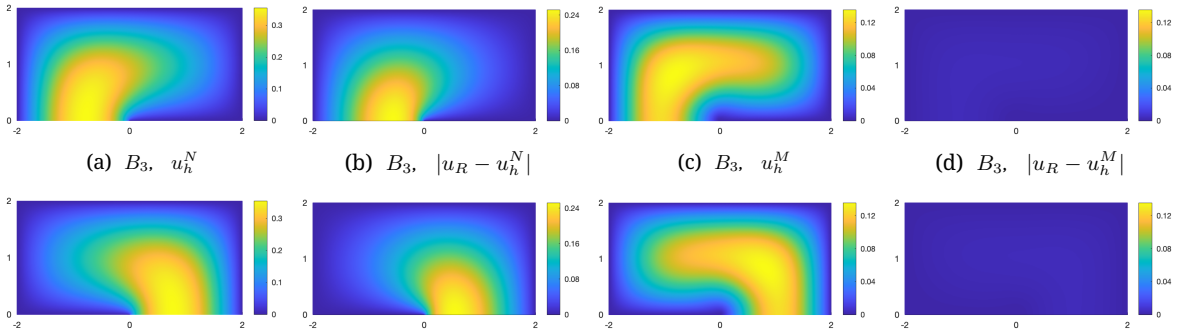
例 5.1. 考虑区域 I，$\Omega = [-2,2] \times [0,2]$，其边界类型为 B_3 和 B_4。相应的三角剖分及网格细化如图 3所示。



(a) 初始网格　　(b) 细化 1 次

图 3：例 5.1：初始网格及细化 1 次后的网格。

考虑再入角 $Q = Q_\ell$，其 $\ell \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$，内角为 $\omega = \pi$，位于分别具有 *Neumann* 和 *Dirichlet*边界条件的棱边交点处。在这种情况下， $d_\perp = 1$。我们计算有限元解 u_h^N 和 u_h^M，参考解则采用罚参数为 $\sigma = 50$ 的 C^0-*IPDG* 方法求得。图 *4* 展示了在经过八次一致加密的网格上计算得到的数值解 u_h^N和 u_h^M，以及它们与参考解之差。表 *1* 列出了经过 *3* 至 *6* 次细化后，差值 $|u_R - u_h^N|$、$|u_R - u_h^M|$的 L^∞ 范数。从这些结果可以看出，朴素混合有限元解 u_h^N 收敛到错误的解，而算法 *3.1* 得到的解则收敛到真实解。



(a) B_3, u_h^N　(b) B_3, $|u_R - u_h^N|$　(c) B_3, u_h^M　(d) B_3, $|u_R - u_h^M|$

(e) B_4, u_h^N　(f) B_4, $|u_R - u_h^N|$　(g) B_4, u_h^M　(h) B_4, $|u_R - u_h^M|$

图 4：　例 5.1：区域 I；边界类型：　B_3，　B_4；　u_h^N，　u_h^M及其与 u_R　　.

表明 w_h 和 u_h^M的收敛率见 表 2。从这些结果可以观察到，u_h^M的收敛阶为 h^1，而 w_h 的收敛率趋近于 h^α ，当$\alpha = 0.5$ 采用边界类型 B_3 和 B_4时，这与 引理 3.3 和定理 3.5中的结果一致。

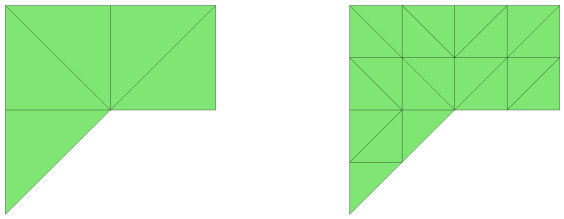
表 1: 例 5.1: 区域 I，L^∞ 误差。

	边界类型	3	4	5	6
$\|u_R - u_h^N\|_\infty$	B_3	2.1000e-01	2.3616e-01	2.4758e-01	2.5287e-01
	B_4	2.0998e-01	2.3614e-01	2.4756e-01	2.5285e-01
$\|u_R - u_h^M\|_\infty$	B_3	7.7457e-03	4.0231e-03	1.8178e-03	1.2360e-03
	B_4	7.7340e-03	4.0151e-03	1.8098e-03	1.2210e-03

表2： 例 5.1：区域 I， w_h， u_h^M。

	边界类型 j=3		j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
$\mathcal{R}$对于 u_h^M	B_3	0.82	0.91	0.97	0.99	0.99	1.00
	B_4	0.82	0.91	0.97	0.99	0.99	1.00
$\mathcal{R}$对于 w_h	B_3	0.77	0.76	0.70	0.63	0.57	0.54
	B_4	0.77	0.76	0.70	0.63	0.57	0.54

例 5.2. 我们在区域*II*中重复 例 5.1， 区域*II* $\Omega = [-2,2]^2\backslash\{(x,\ y)|y<0,\ y<x\}$，边界类型为 B_3 和 B_4。初始网格以及细化一次后的网格见 图 5。



(a) 初始网格　　(b) 细化 1 次

图 5：例 5.2：初始网格及细化 1 次后的网格。

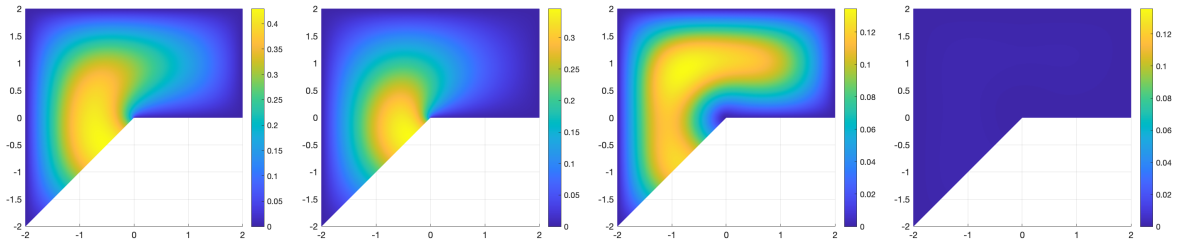
在此情形下，最大内角为$\omega = \frac{5}{4}\pi$，且 $d_\perp = 1$。在一致加密 *8* 次后的网格上计算得到的数值解 u_h^N 和 u_h^M，以及它们与参考解的差值，见图 6。差值的 L^∞ 范数 $|u_R - u_h^N|$，$|u_R - u_h^M|$ 经过3 至6 次细化后的结果见表 3。从这些结果中，我们还观察到，朴素混合有限元解 u_h^N 收敛到错误解，而由算法*3.1*得到的解则收敛到真实解。

表 3：例 5.2：区域II， L^∞ 误差。

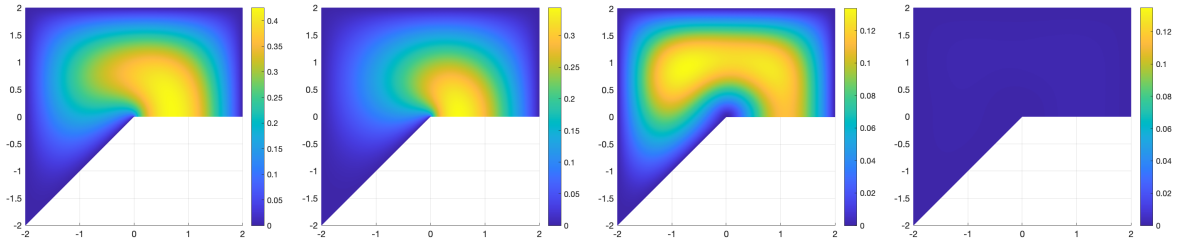
	边界类型	3	4	5	6
$\|u_R - u_h^N\|_\infty$	B_3	2.6724e-01	3.0462e-01	3.2480e-01	3.3618e-01
	B_4	2.6306e-01	3.0116e-01	3.2253e-01	3.3407e-01
$\|u_R - u_h^M\|_\infty$	B_3	8.4341e-03	3.9003e-03	1.6030e-03	1.0728e-03
	B_4	8.1807e-03	3.8357e-03	1.5541e-03	1.0044e-03

w_h 和 u_h^M的收敛率如表4所示。从这些结果可以看出，u_h^M的收敛率为 h^1，而 w_h 的收敛率趋近于 h^α ， 且$\alpha = 0.4$ 在边界类型 B_3 和 B_4下与引理3.3 和定理3.5中的结果一致。

例5.3. 考虑 *L*形区域 *III*，$\Omega = [-2,2]^2\backslash\{(x,\ y)|x>0,\ y<0\}$；初始网格及经过1 次细化后的网格见图7。该区域包含一个内角为 $\frac{3}{2}\pi$的角；我们考察边界类型 B_1， B_2， B_3和 B_4，其中 $d_\perp = 1$ 对所有情况均成立。对于这四种情况，



(a) B_3, u_h^N (b) B_3, $|u_R - u_h^N|$ (c) B_3, u_h^M (d) B_3, $|u_R - u_h^M|$

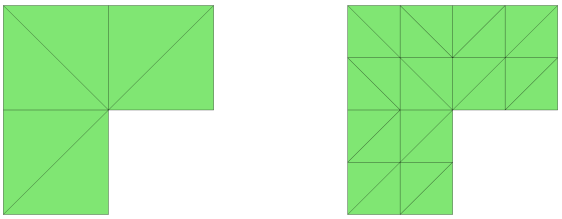


(e) B_4, u_h^N (f) B_4, $|u_R - u_h^N|$ (g) B_4, u_h^M (h) B_4, $|u_R - u_h^M|$

图6：例 5.2：区域II；边界类型： B_3， B_4； u_h^N， u_h^M及其与 u_R的差。

表 4：例 5.2：区域II， w_h、 u_h^M的收敛率。

	边界类型 j=3		j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
$\mathcal{R}$对于 u_h^M	B_3	0.83	0.91	0.97	0.99	0.99	1.00
	B_4	0.83	0.91	0.97	0.99	0.99	1.00
$\mathcal{R}$对于 w_h	B_3	0.72	0.67	0.58	0.50	0.45	0.42
	B_4	0.73	0.66	0.57	0.49	0.45	0.42

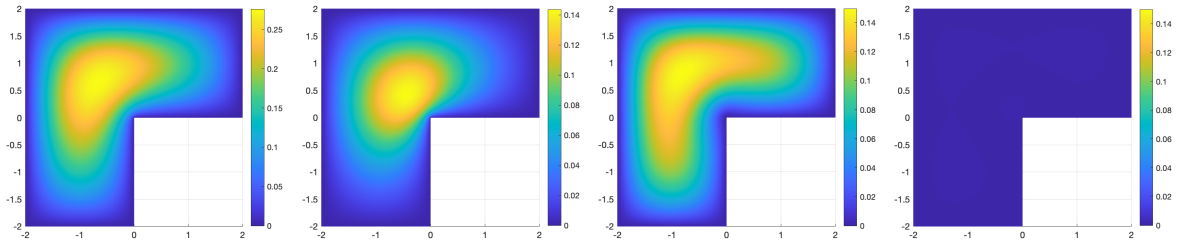


(a) 初始网格 (b) 细化 1 次

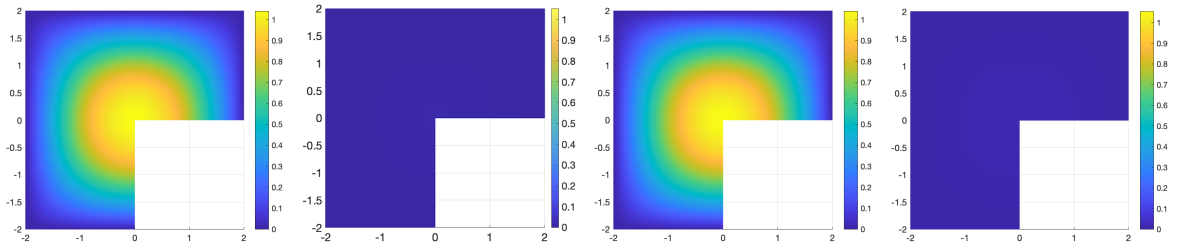
图 7： 例5.3：初始网格及细化 1 次后的网格。

我们计算有限元解 u_h^N和 u_h^M，参考解 u_R 使用罚参数为 $\sigma = 32$ 的C^0-*IPDG* 方法得到，罚参数分别为 *160*、*50*、*50*。边界类型为 B_1 和 B_2时，经过八次一致加密后的网格上计算得到的数值解 u_h^N和 u_h^M及其与参考解的差值见图*8*；边界类型为 B_3和 B_4时，见图*9*。表*5*列出了网格细化 *3* 至 *6* 次后，$|u_R - u_h^N|$、 $|u_R - u_h^M|$的 L^∞范数。从这些结果中还可以观察到，除边界类型为 B_2外，所有情况下朴素混合有限元解u_h^N都收敛到错误的解，而由算法 *3.1* 得到的解收敛到真实解。

表明 w_h 和 u_h^M的收敛率见 表 6。从这些结果可以看出， u_h^M的收敛阶为 h^1，而 w_h 的收敛率趋近于 h^α，其中边界类型为 $\alpha = 2/3$ 时 B_1 和 B_2，而边界类型为 $\alpha = 1/3$ 时 B_3 和 B_4。这些观察结果与 引理 3.3 和 定理 3.5中的结果一致。

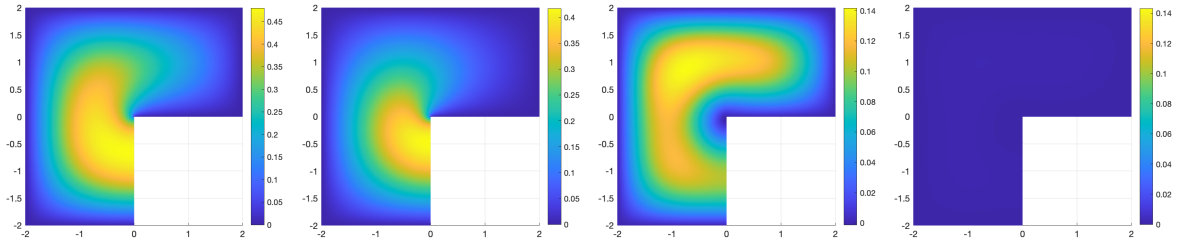


(a) B_1, u_h^N (b) B_1, $|u_R - u_h^N|$ (c) B_1, u_h^M (d) B_1, $|u_R - u_h^M|$

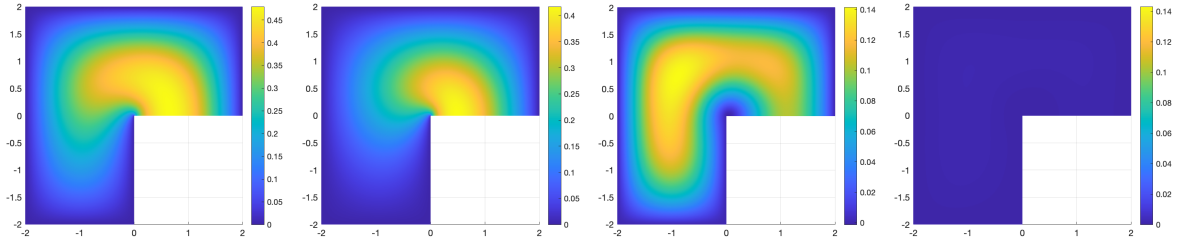


(e) B_2, u_h^N (f) B_2, $|u_R - u_h^N|$ (g) B_2, u_h^M (h) B_2, $|u_R - u_h^M|$

图8： 例5.3：区域III；边界类型： B_1， B_2； u_h^N， u_h^M及其与 u_R的差异。



(a) B_3, u_h^N (b) B_3, $|u_R - u_h^N|$ (c) B_3, u_h^M (d) B_3, $|u_R - u_h^M|$



(e) B_4, u_h^N (f) B_4, $|u_R - u_h^N|$ (g) B_4, u_h^M (h) B_4, $|u_R - u_h^M|$

图9： 例5.3：区域III；边界类型： B_3， B_4； u_h^N， u_h^M及其与 u_R。

表6： 例5.3：区域III， w_h， u_h^M。

	边界类型 j=3		j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
$\mathcal{R}$对于 u_h^M	B_1	0.84	0.92	0.97	0.99	0.99	1.00
	B_2	0.86	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00
	B_3	0.83	0.92	0.97	0.99	1.00	1.00
	B_4	0.83	0.92	0.97	0.99	1.00	1.00
$\mathcal{R}$对于 w_h	B_1	0.83	0.88	0.87	0.84	0.80	0.77
	B_2	0.86	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00
	B_3	0.69	0.62	0.51	0.43	0.38	0.36
	B_4	0.69	0.62	0.51	0.43	0.38	0.36

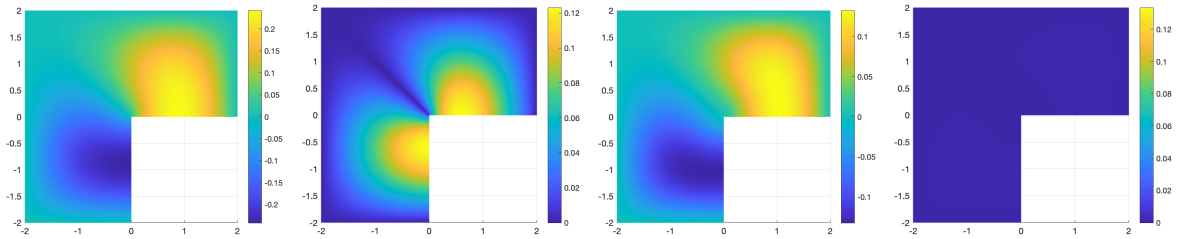
表5： 例5.3：区域III， L^∞ 误差。

	边界类型	3	4	5	6
$\|u_R - u_h^N\|_\infty$	B_1	1.2837e-01	1.3782e-01	1.4183e-01	1.4305e-01
	B_2	1.4597e-02	4.5660e-03	2.1383e-03	1.8196e-03
	B_3	3.0181e-01	3.5064e-01	3.8071e-01	3.9915e-01
	B_4	3.0180e-01	3.5063e-01	3.8071e-01	3.9914e-01
$\|u_R - u_h^M\|_\infty$	B_1	5.8104e-03	3.4371e-03	1.6673e-03	9.4410e-04
	B_2	1.4597e-02	4.5660e-03	2.1383e-03	1.8196e-03
	B_3	1.0371e-02	4.7030e-03	1.9051e-03	1.0291e-03
	B_4	1.0368e-02	4.7012e-03	1.9053e-03	1.0273e-03

从 图 8中，我们观察到 $|u_R - u_h^N| \to 0$ 随着边界类型 B_2的网格细化而 $f \equiv C$ (其中 C 为某个常数)，这表明带有$w \in \mathcal{S}$的泊松问题存在弱解。因此，我们考虑一个新的源项 $f \in L^2(\Omega)$ 定义如下：

$$f = \begin{cases} 1, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & x < 0,\ y \geq 0, \\ -1, & y < 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

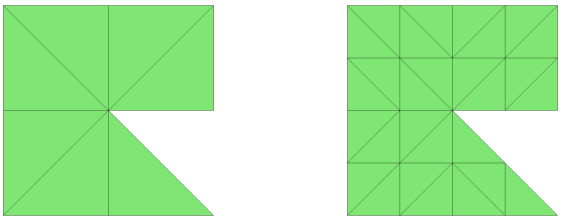
我们重复该数值试验，并在 图 10中报告解。从中可以观察到，朴素混合有限元解 u_h^N 收敛到一个错误解，而算法 *3.1* 得到的解收敛到真实解。



(a) B_2， u_h^N (b) B_2， $|u_R - u_h^N|$ (c) B_2， u_h^M (d) B_2， $|u_R - u_h^M|$

图10： 例5.3：区域III；边界类型： B_2； f 满足（5.1）； u_h^N， u_h^M及差异。

例5.4。考虑区域*IV*，$\Omega = [-2,2]^2 \backslash \{(x,\ y)\ |\ -x < y < 0\}$，初始网格以及细化1 次后的网格见图 11。边界条件指定为 B_3 和 B_4。

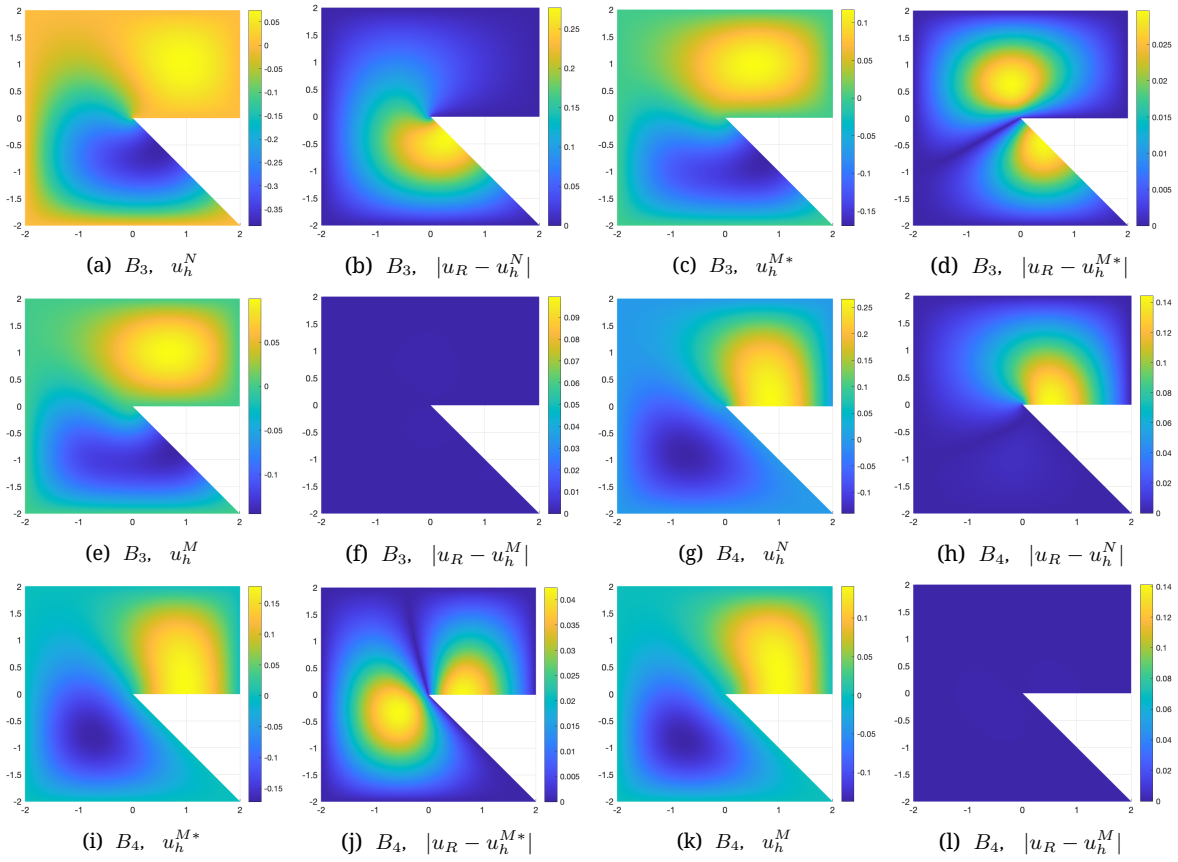


(a) 初始网格 (b) 1 次细化

图 11： 例 5.4：初始网格和经过 1 次细化后的网格。

最大内角为$\frac{7}{4}\pi$，且 $d_\perp = 2$。我们考虑 f，其由(5.1)给出。我们计算朴素混合有限元解 u_n^N； 由算法 u_h^{M*}*3.1*在 $d_\perp = 1$下得到的修正混合有限元解 u_h^M； 以及由算法*3.1* 在 $d_\perp = 2$下得到的修正混合有限元解。参考解采用 C^0-*IPDG* 方法获得，罚参数为 $\sigma = 68$。

数值解 u_h^N、 u_h^{M*}和 u_h^M是在网格经过八次一致加密后计算得到的，其与参考解之间的差异一并展示于图12中。网格经过 *3* 至 *6* 次细化后，差异的 L^∞ 范数列于表7中。由这些结果可见，有限元解 u_h^N和 u_h^{M*}收敛于错误的解，而采用算法*3.1* 并取 $d_\perp = 2$ 得到的解收敛于真实解，从而证实了在修正公式中正确考虑正交补的维数的必要性。



(a) B_3, u_h^N (b) B_3, $|u_R - u_h^N|$ (c) B_3, u_h^{M*} (d) B_3, $|u_R - u_h^{M*}|$

(e) B_3, u_h^M (f) B_3, $|u_R - u_h^M|$ (g) B_4, u_h^N (h) B_4, $|u_R - u_h^N|$

(i) B_4, u_h^{M*} (j) B_4, $|u_R - u_h^{M*}|$ (k) B_4, u_h^M (l) B_4, $|u_R - u_h^M|$

图 12： 例 5.4：区域IV；边界类型： B_3， B_4； u_h^N， u_h^{M*}， u_h^M及差值。

表 7： 例 5.4：区域IV， L^∞ 误差。

	边界类型	3	4	5	6
$\|u_R - u_h^N\|_\infty$	B_3	1.9797e-01	2.3068e-01	2.5019e-01	2.6279e-01
	B_4	1.0727e-01	1.2388e-01	1.3283e-01	1.3816e-01
$\|u_R - u_h^{M*}\|_\infty$	B_3	2.8418e-02	2.9444e-02	2.9573e-02	2.9527e-02
	B_4	3.8119e-02	4.1158e-02	4.1791e-02	4.2073e-02
$\|u_R - u_h^M\|_\infty$	B_3	6.4356e-03	3.1130e-03	1.2959e-03	7.3513e-04
	B_4	6.9425e-03	2.2060e-03	9.6986e-04	7.5067e-04

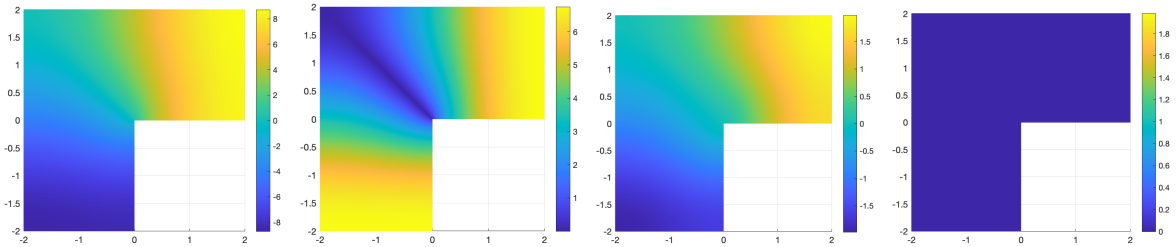
.....的收敛率 w_h 和 u_h^M如表8所示。从这些结果可以看出，u_h^M的收敛率阶为 h^1，而 w_h 的收敛率趋近于 h^α ， 当$\alpha = 2/7$ 采用边界类型 B_3 和 B_4时。

表 8: 例 5.4: 区域IV， w_h， u_h^M。

	边界类型 j=3		j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
$\mathcal{R}$对于 u_h^M	B_3	0.83	0.92	0.97	0.99	1.00	1.00
	B_4	0.83	0.92	0.97	0.99	1.00	1.00
$\mathcal{R}$对于 w_h	B_3	0.67	0.58	0.47	0.38	0.33	0.31
	B_4	0.67	0.57	0.46	0.38	0.33	0.31

5.2 诺伊曼边界条件 我们考虑第4节讨论的诺伊曼边界条件。

例*5.5*。考虑区域*III*，$\Omega = [-2,2]^2 \backslash \{(x,y)|x>0, y<0\}$，其边界类型为 B_5。我们取 f 为 *(5.1)*，它满足相容条件 $\int_\Omega f\, dx = 0$。对于参考解，网格相关问题要求 V_h 中的函数在原点处为零。内部罚参数设为 $\sigma = 39$。三角剖分及细化 *1* 次后的网格与例*5.3*中的相同。对于这个多边形区域，存在一个大小为 $\frac{3}{2}\pi$的内角，且 $d_\perp = 1$。图*13*展示了经过八次一致加密后的网格上计算得到的数值解 u_h^N 和 u_h^M，以及它们与参考解的差异。表*9*列出了细化 *3* 至 *6* 次后，差异的 L^∞ 范数$|u_R - u_h^N|$，$|u_R - u_h^M|$。从这些结果可以看出，朴素混合有限元解 u_h^N收敛到错误的解，而将 *(4.9)* 中的 V_h 替换为 V_h 后，通过算法 *3.1* 得到的解¯收敛到真实解。



(a) B_5， u_h^N (b) B_5， $|u_R - u_h^N|$ (c) B_5， u_h^M (d) B_5， $|u_R - u_h^M|$

图13： E xample 5.5：区域III；边界类型： B_5； f 满足（5.1）； u_h^N， u_h^M及差异。

表9：例5.5：区域III， L^∞ 误差。

	边界类型	3	4	5	6
$\|u_R - u_h^N\|_\infty$	B_5	6.5195e+00	6.6456e+00	6.6964e+00	6.7209e+00
$\|u_R - u_h^M\|_\infty$	B_5	3.8229e-02	1.7219e-02	8.0944e-03	6.4859e-03

.....的收敛率 w_h 和 u_h^M见 表 10。从这些结果可以看出，u_h^M呈现出 h^1阶的收敛率，而 w_h 的收敛率趋近于 h^α ，当$\alpha = 2/3$ 在边界类型 B_5下，这与定理 4.3中的结果一致。

表 10：例5.5：区域III 中 w_h、 u_h^M的收敛率。

	边界类型 j=3		j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
$\mathcal{R}$对于 u_h^M	B_5	0.85	0.96	0.96	0.98	0.99	0.99
$\mathcal{R}$对于 w_h	B_5	0.73	0.73	0.72	0.70	0.69	0.68

致谢 H. Li的部分研究得到美国国家科学基金会项目DMS-2208321以及日本学术振兴会研究资助的支持。N. Yi得到国家重点研发计划（2024YFA1012600）和国家自然科学基金委员会（12431014）的资助。P. Yin的研究得到德克萨斯大学埃尔帕索分校启动基金的支持。

参考文献

[1] Babuška, I., Osborn and Pitkäranta *Math-*, J., , J. *ematics of Computation 35* 152 1980 1039 1062 使用网格相关范数的混合方法分析。, ( ), – . [2] Brenner, S. C. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer, 2008年。

[3] Brenner, S. C. C^0 内部惩罚方法。载于 *Frontiers in Numerical Analysis-Durham 2010*。Springer, 2011年, 第79–147页。

[4] Brenner, S. C., Monk, P. and Sun, J. C^0 双调和特征值问题的内部惩罚Galerkin方法。载于 *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2014: Selected papers from the ICOSAHOM conference June 23-27 2014 Salt Lake City Utah USA* 2015 3 15 , , , , , ( ), Springer, 第–页。

[5] Cao, H., Huang, Y., Yi, N., and Yin, P. 带集中载荷的四阶椭圆问题的后验误差估计子。 *Journal of Scientific Computing 105*, 2（2025）, 1–41。[6] Cheng, X.-l., Han and Huang *Journal*, W., , H.-c. 双调和方程的若干 *of computational and applied mathematics 126* 1 2 2000 91 109 混合有限元方法。, - ( ), – . [7] Ciarlet, P., and Glowinski, R. 求解双调和方程有限元近似的对偶迭代技术。 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 5*, 3（1975）, 277–295。[8] Ciarlet, P. G. *The finite element method for elliptic problems*。SIAM, 2002年。[9] Ciarlet, P. G., and Raviart *Mathematical*, P.-A. 双调和方程的一种混合 *aspects of finite elements in partial differential equations* 1974, 125 145 有限元方法。载于。Elsevier, 第–页。[10] Ciarlet Jr, P., and He 2 *Comptes Rendus Mathe-*, J. d标量问题的奇异补方法。, *matique 336* 4 2003 353 358 ( ), – . [11] Courant, R., and Hilbert, D. *Methods of mathematical physics, volume 1*, 第1卷。John Wiley & Sons, 2008年。

[12] De Coster, C., Nicaise, S., and Sweers, G. 带角点的铰支Kirchhoff板变分方法比较。 *Mathematische Nachrichten 292*, 12（2019）, 2574–2601。[13] Destuynder, P., and Salaun 24 *Mathématiques &*, *Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]* 1996 M. *Mathematical Analysis of Thin Plate Models*, 第 卷。Springer-Verlag, 柏林, 。[14] Destuynder, P., and Salaun, M. *Mathematical analysis of thin plate models*, 第24卷。Springer Science & Business Media, 2013年。[15] Falk, R. S. 用混合有限元 *SIAM Journal on* 方法逼近双调和方程。*Numerical Analysis 15* 3 1978 556 567 , ( ), – .

[16] Gallistl, D. 借助广义Stokes系统实现多调和算子的稳定分裂。 *Mathematics of Computation 86* 308 2017 2555 2577 , ( ), – . [17] Georgoulis, E. H., and Houston *IMA journal*, P. 双调和问题的间断 *of numerical analysis 29* 3 2009 573 594 Galerkin方法。, ( ), – . [18] Gerasimov, T., Stylianou, A., and Sweers, G. 将四阶方程解耦为二阶系统时，角点会带来问题。 *SIAM Journal on Numerical Analysis 50*, 3（2012）, 1604–1623。[19] Grisvard, P. *Singularities in Boundary Value Problems*。关于math´ematiques appliqu´ees的研究。Masson, 1992年。[20] Hu, J., Ma, R., and Zhang, M. 三角形网格与四面体网格上双调和方程的一类混合有限元。 *Science China Mathematics 64*, 12（2021）, 2793–2816。[21] Li, H., Wickramasinghe, C. D., and Yin, P. 带Dirichlet边界条件的双调和问题的c 0有限元方法分析。 *Numerical Algorithms*（2025）, DOI:https://doi.org/10.1007/s11075–025– 02062–4。[22] Li, H., and Yang *Journal of*, Y. 双调和特征值问题的 *Inequalities and Applications 2018* 1 2018 55 自适应Morley元算法。, ( ), . [23] Li, H., and Yin, P. 带简支边界条件的六阶问题的一种 C^0 有限元算法。 *Numerical Methods for Partial Differential Equations 41*, 6（2025）, e70048。[24] Li, H., Yin, P., and Zhang, Z. 多边形区域中带Navier边界条件的双调和问题的一种 C^0 有限元方法。 *IMA Journal of Numerical Analysis 43*, 3（2023）, 1779–1801。[25] Mardanov, R., and Zaripov, S. 利用双调和方程表述与多重二次曲面方法求解Stokes流动问题。 *Lobachevskii Journal of Mathematics 37*（2016）, 268–273。[26] Matevossian, H., Nikabadze and Ulukhanyan *Global*, M., , A. ‘双调和问题及其应用。, *J. Eng. Sci. Res 6* 3 2019 263 272 ( ), – . [27] Meyers, N. G. poincar´e *Archive for Rational Mechanics and Analysis* e型与维尔廷格型积分不等式。, *68* 2 1978 113 120 ( ), – . [28] Monk, P. 双调和方程的一种混合有限元方法。 *SIAM Journal on Numerical Analysis 24* 4 1987 737 749 , ( ), – . [29] Nazarov, S., and Plamenevsky, B. A. 具有分片光滑边界的区域中的椭圆问题，1994年。[30] Nazarov, S., and Svirs, G. K. 带棱边的三维区域中双调和方程与迭代拉普拉斯算子的边值问题。 *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 336* 37 2006 153 198, 276 277 , Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. ( ), – – . [31] Nazarov, S., and Sweers, G. 带棱边的三维区域中双调和方程与迭代拉普拉斯算子的边值问题。 *Journal of Mathematical Sciences 143*（2007）, 2936–2960。[32] Rachh, M., and Serkh *Communications on*, K. 带角区域上Stokes方程的 *Pure and Applied Mathematics 73* 11 2020 2295 2369 求解。, ( ), – . [33] Rafetseder, K., and Zulehner, W. Kirchhoff板弯曲问题的分解结果与一种新的离散化方法。 *SIAM Journal on Numerical Analysis 56*, 3（2018）, 1961–1986。

[34] Sokolnikoff, I. S. 弹性力学数学理论。[35] Sweers, G. 双调和方程边界条件综述。 *Complex Var. Elliptic Equ. 54*, 2 (2009 年), 79–93。[36] TAIBAOUI, M. *A C^1 finite element method for the biharmonic problem*。博士论文，卡斯迪·梅尔巴赫瓦尔格拉大学。[37] Timoshenko, S. 板壳理论。 *McGRAWC HILL* (1959年)。[38] Ugural, A. C. *Stresses in beams, plates, and shells*。CRC出版社，2009年。[39] Zhang, S., and Zhang, Z. 将非凸多边形上的双调和方程解耦为两个泊松方程的无效性。 *Int. J. Numer. Anal. Model 5*, 1 (2008年), 73–76。