arXiv:2602.04267v1 [math.DG] 4 Feb 2026

GURSKY-MALCHIODIQ曲率流的全局收敛

LIUWEI GONG、SANGHOON LEE 和 JUNCHENG WEI

ABSTRACT. 在他们的开创性工作中， [39], Gursky和Malchiodi引入了一种适用于 $n \geq 5$ 维的非局部共形流，以解决常数 Q曲率问题。他们证明，在能量足够小的情况下，对于具有正标量曲率和 Q曲率的初始度量，该流序列收敛。

本文通过沿流建立 Paneitz-Sobolev 商的非局部版本 Lojasiewicz-Simon 不等式，在相同的正性假设下证明了该流对于任意初始能量均全局收敛。

我们构造测试泡并估计其 Paneitz-Sobolev 商。这一策略由 Brendle [12] 在 Yamabe流的背景下通过其著名工作加以实现。我们提出了更具几何性且更系统的证明，以应对 Q曲率和 Paneitz 算子固有的代数与计算复杂性。在此过程中，我们利用 Bahuaud、Guenther、Isenberg 和 Mazzeo [4]近期建立的高阶 Koiso-Bochner 公式，推导出 Paneitz-Sobolev 商的稳定性不等式。

CONTENTS

1. 引言 2 1.1. 背景与主要结果 2 1.2. 方法的创新之处 5 1.3. 本文结构 10 1.4. 记号 11 2. 预备知识 12 2.1. 初等估计 12 2.2. 爆破轮廓 16 3. Q-曲率与 Weyl 张量的变分理论 20 3.1. Q-曲率的变形 20 3.2. 曲率的微分同胚不变性 23 3.3. 高阶 Koiso-Bochner 公式 26 4. 测试泡的构造：$n \geq 8$ 情形 27

Date：2026年2月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：53E40，次分类：53C18、53C21、35J30、35R01。*Key words and phrases.* 总 Q-曲率、非局部几何流、全局收敛、 Łojasiewicz–Simon不等式、高阶 Koiso-Bochner 公式。

4.1. 标准球面上 S_2 的分解 28 4.2. 总 Q-曲率的二阶变分 31 4.3. 辅助估计 35 4.4. Green 函数修正 41 4.5. 定理1.2的证明 43 5. 爆破分析的准备 44 5.1. 维数为 $5 \leq n \leq 7$ 44 时测试泡的估计 5.2. 集中紧性原理 48 6. 爆破分析 50 6.1. 能量的二阶变分 50 6.2. 能量估计 59 7. 定理 1.1 的证明 67 参考文献 71

1. Introduction

1.1. 背景与主要结果。数十年来，共形几何中的几何流一直受到广泛研究，作为解决一致化定理和指定曲率问题等基本问题的有力工具，并在几何学与分析学的发展中发挥了核心作用。从几何角度看，这类流为在给定的共形等价类中选取典范代表提供了一种系统方法。从分析角度看，它们的动力学行为对许多典型偏微分方程的研究产生了广泛影响，包括半线性和非局部热方程。

这类流中最著名的例子是 Yamabe流，由 Hamilton 提出以解决 Yamabe问题。作为归一化总标量曲率的负梯度流，其长期存在性与收敛性已得到广泛研究。在局部共形平坦且具有正里奇曲率的情形下，Chow [25] 证明了全局收敛；对于具有负标量曲率的度量或局部共形平坦情形，Ye [71] 证明了全局收敛；而在低于双泡能量阈值时，Schwetlick 和 Struwe [62] 也证明了全局收敛。随后，Brendle [11, 12]建立了完整的收敛理论。Carlotto、Chodosh 和 Rubinstein [13]之后研究了收敛速率。

除了 Yamabe流之外，人们还提出了多种共形几何流，以处理不同阶数和非线性的曲率指定问题。在分数阶情形下，Jin 和 Xiong [49] 以及 Chan-Sire-Sun [16] 研究了与分数阶共形拉普拉斯算子和分数阶 Q曲率相关的流，用以处理受渐近双曲流形上的散射理论和共形几何所启发的非局部曲率方程。另一方面，全非线性共形流，例如由 Schouten张量的对称函数驱动的流，

已由 Guan 和 Wang [36], 、Sheng-Trudinger- Wang [63], 、Ge 和 Wang [32,33], 以及 Ge-Lin-Wang [31]的一系列工作发展起来，用以处理与全非线性 Yamabe 型方程相关的问题。在各种结构和几何假设下，这些流在存在性、正则性和收敛性方面已取得显著进展。总的来说，这些进展展现了经典 Yamabe 框架之外丰富多样的共形几何流，并推动了对高阶和非局部曲率流的研究。在本文中，我们聚焦于与四阶 Q曲率和 Paneitz 算子相关的共形流。

在共形几何中， n维黎曼流形的 Q曲率（M， g）是一种与四阶共形协变算子相关的曲率，该算子称为 Paneitz 算子 P_g。在 Paneitz [58] 和 Branson [9], 的开创性工作中，它们分别定义为

$$Q_g = -\frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g - \frac{2}{(n-2)^2}|\mathrm{Ric}_g|^2 + \frac{n^2(n-4)+16(n-1)}{8(n-1)^2(n-2)^2}R_g^2,$$

$$P_g\phi = \Delta_g^2\phi - \mathrm{div}_g\left[\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}R_g g - \frac{4}{n-2}\mathrm{Ric}_g\right)d\phi\right] + \frac{n-4}{2}Q_g\phi,$$

对于任意光滑函数 ϕ，在 M 上当 $n \geq 3$时成立。这里， R_g 是标量曲率, Ric$_g$ 是里奇曲率， Δ_g =div$_g\nabla_g$ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子，而 div$_g$ 是外微分 d的伴随算子的负算子。Paneitz 算子和 Q曲率具有如下共形协变性质:

$$Q_{\hat{g}} = e^{-4u}(P_g u + Q_g) \qquad \text{for } n = 4 \text{ and } \hat{g} = e^{2u}g$$

$$Q_{\hat{g}} = \frac{2}{n-4}u^{-\frac{n+4}{n-4}}P_g u \qquad \text{for } n \neq 4 \text{ and } \hat{g} = u^{\frac{4}{n-4}}g.$$

在四维情形下， Q曲率被认为是黎曼曲面高斯曲率的四维类比。事实上，正如高斯曲率出现在二维情形拉普拉斯-贝尔特拉米算子的共形变换律中，并支配高斯-博内公式一样， Q曲率自然地出现在 Paneitz 算子的共形协变性中，并在四维情形下进入陈-高斯-博内公式。特别地，总 Q曲率是一种全局共形不变量，与曲面上总高斯曲率所起的作用相对应。关于 Q曲率在几何与拓扑方面的应用，尤其是其在共形球面定理中的应用，可参见 Gursky [37] 和 Chang-Gursky-Yang [20, 21]。关于其与等周不等式的关系，参见 Chang-Qing-Yang[22] 和 Wang [67]。关于其在研究 Poincar´e-爱因斯坦流形中的近期应用，可参见 Chang-Ge [17,18], Chang-Ge-Qing [19], 以及 Lee-Wang [51], 和其中的参考文献。

关于常数 Q-曲率方程的解的存在性，Chang 和 Yang [23], 最早在维数 $n = 4$ 中进行了研究，研究背景是 Paneitz 算子的行列式的极值度量的存在性以及一条 Moser-Trudinger 不等式，其假设为 ker $P_g = \mathbb{R}$,

P_g 非负，且总 Q-曲率小于 $8\pi^2$，即标准球面的总 Q-曲率。Gursky [37] 随后证明，Yamabe常数和总 Q-曲率非负，足以保证这些假设成立。Djadli 和 Malchiodi [28] 利用 Malchiodi [56]建立的紧致性结果，将存在性定理进一步推广到 $\ker P_g = \mathbb{R}$ 的情形，以及总 Q-曲率不是标准球面总曲率的正整数倍的情形。之后，Li-Li-Liu [52]解决了总 Q-曲率恰好为 $8\pi^2$ 的情形。

关于维数为$n = 3$时常数 Q-曲率方程的存在性结果，请参阅 Hang 和 Yang [42] 及其中的参考文献。在维数为 $n \geq 5$时，第一个存在性定理由 Qing 和 Raske[59] 在局部共形平坦性、正 Yamabe 常数及其他几何条件的假设下证明。随后，Gursky 和 Malchiodi [39]通过流方法，在标量曲率非负且 Q-曲率半正的正性假设下证明了存在性。不久之后，Hang 和 Yang [43]给出了一个变分证明。下面，我们将更详细地介绍 Gursky 和 Malchiodi 的结果。

研究四阶椭圆算子的一大基本难点，是一般情况下缺乏极大值原理。令人惊讶的是，Gursky 和 Malchiodi [39] 在以下假设下为 Paneitz 算子 P_g 证明了强极大值原理： Q_g 半正，即 $Q_g \geq 0$在某处为 $Q_g > 0$ 正，并且标量曲率满足 $R_g \geq 0$。此外，在相同假设下，他们证明了该算子及其格林函数的正性，这意味着下文定义的流 (2) 是良定义的。他们还证明了维数为 $5 \leq n \leq 7$时 Paneitz 算子的正质量定理 P_g。这些结果使他们得以研究非局部流 (2)，该流是 Paneitz-Sobolev 商的负 $W^{2,2}$梯度流

$$\mathcal{F}[u] = \frac{\displaystyle\int_M u P_{g_0} u \, dv_{g_0}}{\displaystyle\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-4}} \, dv_{g_0} \right)^{\frac{n-4}{n}}}. \tag{1}$$

这一非局部流的平稳点对应于具有常数正 Q-曲率的共形度量。Gursky和Malchiodi证明了该流的长时间存在性，并精心构造了满足上述正性条件且初始能量较小的初始数据，从而得以建立该流到平稳点的序列收敛。然而，对于任意初始能量的全局收敛问题一直悬而未决。本文的主要结果解决了这一问题。

定理 1.1. 设(M, g_0) 是一个维数为 $n \geq 5$ 、且不与标准球面共形等价的闭流形 S^n。假设(M, g_0)具有半正的 Q-曲率，且标量曲率非负。那么该

非局部流

$$g_t(p) := u(t,p)^{\frac{4}{n-4}} g_0(p), \qquad p \in M,$$

其中 u 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u + \mu[u]\, P_{g_0}^{-1}\Big(|u|^{\frac{n+4}{n-4}}\Big), \\ u(0,\cdot) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

with

$$\mu[u] = \frac{\displaystyle\int_M u\, P_{g_0} u \; dv_{g_0}}{\displaystyle\int_M |u|^{\frac{2n}{n-4}} \; dv_{g_0}}, \tag{3}$$

对所有时间均存在，并收敛到一个具有常数 Q-曲率的度量。

我们指出，强极大值原理在防止解 u 变为非正方面起着至关重要的作用。若没有这些正性假设，流的长期存在性以及常数 Q-曲率问题的存在性理论仍大多悬而未决。

我们还指出，高阶共形流包括四阶 Q-曲率流，以及更一般地，在偶数维 n 中，_其首项算子为 $(-\Delta_g)^{\frac{n}{2}}$ 的流；Brendle [10] 对这些流进行了研究。他证明，在相关的高阶 Paneitz 算子非负且核平凡，并且总高阶 Q-曲率严格小于标准球面的总曲率这一假设下，全局收敛成立。随后，Bi 和 Li [8] 研究了总高阶 Q-曲率等于标准球面总曲率的临界情形。Malchiodi 和 Struwe [57]，研究了标准球面 S^4 上的 Q-曲率流，而 Xiong [70] 则分析了标准球面 S^n 上的非局部积分流，包括 Q-曲率流。关于进一步的发展，我们也请读者参阅 [24, 26, 45] 及其中的参考文献。

关于四阶 Paneitz 算子和 Q-曲率的解析理论远比此处能够全面综述的内容丰富。关于锐 Sobolev 不等式，参见 Djadli 和 Hebey [27]。Malchiodi [56] 在维数 $n = 4$ 中获得了紧性结果。在更高维数中，Li 和 Xiong [53] 针对 $5 \le n \le 9$ 建立了紧性，而最近 Gong、Kim 和 Wei [35] 针对 $5 \le n \le 24$ 也建立了紧性。相比之下，Wei 和 Zhao [69] 构造了展示 $n \ge 25$ 非紧性的例子。V´etois [66] 和 Case [14]，获得了唯一性结果，而 Bettiol、Piccione 和 Sire [7] 研究了非唯一性现象。关于更多解析进展，另请参见 [1,5,34,38,41,47,48,50,59] 及其中的参考文献。

1.2. 方法的新颖之处。 在 Simon 的开创性工作中，Simon [64] 证明了 Łojasiewicz 不等式的一个无限维版本，并将其应用于

建立解析泛函梯度流的一般收敛定理。然而，在共形几何流的背景下，除非沿流存在一致的正下界，否则相关能量泛函并非先验解析。对于Yamabe流，Brendle [11,12] 的精妙而深刻的工作成功地证明了即使可能出现泡形成，仍成立 Łojasiewicz–Simon不等式。本文证明了沿流成立的 Paneitz–Sobolev 商的 Łojasiewicz–Simon不等式的一个非局部版本。

本文中，函数 u 的 $W^{2,2}(M)$-范数定义为

$$\|u\|_{W^{2,2}(M)} := \left(\int_M u P_{g_0} u \, dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

由于 [39] 中证明的 Paneitz 算子的正性，该范数等价于标准 Sobolev 范数。对于时间切片序列 $t_\nu \to \infty$，我们应用 Hebey 和 Robert [44]，建立的Struwe集中紧性原理 [65]，的四阶版本，将 $u_{t_\nu} = v_{t_\nu} + w_{t_\nu}$ 分解为：其中 v_{t_ν} 近似等于 u_∞ 加上有限个测试泡之和，而 w_{t_ν} 是小误差，在 $W^{1,2}(M)$ 中强收敛到 0。这里，u_∞ 表示 u_{t_ν} 的弱 $W^{2,2}(M)$-极限。我们进一步按照 Brendle [11] 的论证，通过最小化 w_{t_ν} 的 $W^{2,2}(M)$-范数来精细化这一分解。

证明的主要要点有两个。首先，我们为 (1) 中定义的 $\mathcal{F}$ 建立二阶变分的一致下界：

$$c \, \|w_{t_\nu}\|^2_{W^{2,2}(M)} \le D^2 \mathcal{F}_{v_{t_\nu}} \big[w_{t_\nu}, w_{t_\nu} \big], \tag{4}$$

也就是说，这是在 v_{t_ν} 沿 w_{t_ν} 方向对 Paneitz–Sobolev 商的二阶变分的强制性估计。其次，我们以 Łojasiewicz–Simon不等式的形式证明 Paneitz–Sobolev 商的一个一致上界：

$$\mathcal{F}[v_{t_\nu}] - \mathcal{F}_\infty \le C \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t_\nu, \cdot) \right\|^{1+\gamma}_{W^{2,2}(M)}, \tag{5}$$

其中 $0 < \gamma < 1$。将这两个要素与适当的代数不等式相结合，即可得到所需的 Łojasiewicz–Simon不等式。我们指出，估计（5）是非局部的。

在维数 $n \ge 8$ 中，证明估计（5）的几何难点在于构造一族测试泡，使其 Paneitz–Sobolev 商严格小于标准球面的对应商。在 Sobolev商的 Case 中，Brendle [12] 完成了这一工作。在本文中，我们为 Paneitz–Sobolev 商建立如下类似结果：

定理1.2。 设 $n \ge 8$。存在一个小常数 $\delta_0 > 0$，使得对于任意 $p \in M$，$0 < 2\epsilon \le \delta \le \delta_0$，都存在一个正测试函数 $v_{p,\,\epsilon,\,\delta}$，具有以下性质：

(a) 存在一个正常数 C，仅依赖于 (M, g)，使得

$$\begin{aligned}\int_M v_{p,\epsilon,\delta} P_g v_{p,\epsilon,\delta}\, dv_g \leq & Y_4(S^n)\left(\int_M v_{p,\epsilon,\delta}^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}} - \mathcal{I}(p,\delta)\epsilon^{n-4} \\ & - \frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\int_{B_\delta(p)} |W_g(\tilde{p})|^2(\epsilon + d(\tilde{p},p))^{8-2n}\, dv_g \\ & + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{n-4}\log^{-1}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{I}(p,\delta)$ 可见定义 *4.20*。

(b) 存在一个连续函数 $\mathcal{I}\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$，使得

$$\sup_{p\in\mathcal{Z}} |\mathcal{I}(p,\delta) - \mathcal{I}(p)| \to 0 \ \text{as}\ \delta \to 0.$$

[4]*(c)* 若 $p \in \mathcal{Z}$，则流形 $(M \setminus \{p\}, \hat{}g := G_p^{n-4}\, g)$ 具有定义良好的Q-质量 $m(\hat{}g)$，可见定义 *4.24*。此外，

$$m(\hat{g}) = \frac{4(n-1)}{n-4}\mathcal{I}(p).$$

(d) 固定 δ，使得 $0 < \delta \leq \delta_0$。当 $\epsilon \to 0$ 时，函数 $v_{p,\epsilon,\delta}$ 经重标度后在 $\mathbb{R}^n$ 上收敛到一个“标准泡”。更准确地说，

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\frac{n-4}{2}} v_{p,\epsilon,\delta}(\exp_p(\epsilon x)) = \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}.$$

对于任意 $p \in M$ 和 $x \in T_pM$。

这里，我们用 $Y_4(S^n)$ 表示标准球面的 Paneitz–Sobolev 常数，并设 $d = \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$。定义 $\mathcal{Z}$ 为所有满足以下条件的点 $p \in M$的集合

$$\limsup_{\tilde{p}\to p} d(\tilde{p},p)^{2-d}|W_g(\tilde{p})| = 0.$$

定义在 $\mathcal{Z}$ 上的函数 $\mathcal{I}$，可以解释为 Paneitz 算子的质量。在局部共形平坦情形下，其正性由 Humbert和Raulot [46], 证明；对于 $5 \leq n \leq 7$，由 Gursky和Malchiodi [39], 证明；对于 $n \geq 8$，则由 Avalos-Laurain-Lira [3]以此处所需的形式证明。若 $p \notin \mathcal{Z}$，则 Weyl 曲率项提供占主导地位的负贡献。若$p \in \mathcal{Z}$，则正质量项保证 $v_{p,\ \epsilon,\ \delta}$ 的 Paneitz-Sobolev 商严格小于 $Y_4(S^n)$。我们指出，在我们的正性假设下，正质量定理成立，因此无需将其作为额外假设。

通过构造合适的测试函数来获得能量上界这一思路，最早可追溯到 Aubin [2]和 Schoen [61]关于标量曲率问题的研究。对于 Paneitz-Sobolev 商，Esposito和Robert [29] 证明了维数为 $n \geq 8$时非局部共形平坦点处的类似估计；Gursky和Malchiodi [39] 则在情形 $5 \leq n \leq 7$ 下，或当流形局部

共形平坦时证明了类似结果。我们的定理在维数为 $n \geq 8$时给出了完整的几何图景，并充分纳入了背景几何，包括 Weyl 曲率的消失阶数。

在构造测试泡时，我们加入了一个反映边界几何的、满足线性化方程的辅助项，并利用归一化总 Q曲率的二阶变分来估计能量。与 Brendle 的证明 [12] 相比，关键区别在于，由于 Q曲率和 Paneitz 算子的一阶与二阶变分在代数上十分复杂，不可能通过手算追踪各个单独项。为克服这一困难，并进一步揭示Q曲率的几何结构，我们发展出一种更加几何化且系统的方法，现将其详细描述如下。

出发点是 Lin 和 Yuan 的工作 $[54, 55]$, ，他们在那里证明了适当归一化的总Q曲率在爱因斯坦流形处的稳定性结果。事实上，在 [54,55]之前，Gursky 和 Viaclovsky 已经获得了二次曲率泛函的刚性与稳定性结果 [40] 。这些工作拓展了 Fischer 和 Marsden [30]关于总标量曲率的爱因斯坦度量变形理论。粗略地说，归一化总 Q曲率在圆球面处是稳定的，即对度量的任何扰动都会使其在球面邻域内减小。另一方面，当使用标准泡检验 Paneitz-Sobolev 商时，由标准泡诱导的共形变形度量不再充分接近圆球面，并且会出现 Weyl 曲率项。因此，所需不等式仅在低维数 $5 \leq n \leq 7$ 或背景度量为局部共形平坦时成立。这就需要对测试泡进行精细得多的修正。

我们利用 Gong-Kim-Wei 发现的四阶线性化偏微分方程 [35]（见引理 4.2）构造一个修正项，或者等价地说，一个向量场 X；它通过作用于向量场的共形 Killing 算子编码背景几何。我们遇到的首要难点是计算总 Q-曲率的二阶变分。为此，我们以巧妙的方式利用 Q-曲率的微分同胚不变性（见命题 3.9）。由于我们无法像 [55], 那样使用 Ebin 切片定理，因此我们转而推导总 Q-曲率相对于修正后度量的变形的完整公式，以便对误差项进行精确估计。

这些误差项最终通过 Bahuaud-Guenther-Isenberg-Mazzeo 最近的工作中建立的高阶 Koiso-Bochner 公式由 Weyl曲率控制 [4]（见引理 3.11）。Koiso-Bochner 公式曾用于研究爱因斯坦度量处爱因斯坦-希尔伯特作用量的线性稳定性。这类临界度量的稳定性，或更一般地说，其指标，由 Lichnerowicz 拉普拉斯算子的谱性质决定。我们指出，由于正 Q-质量定理要求 Weyl 张量的消失阶数低于正 ADM 质量定理，因此有必要采用高阶 Koiso–Bochner 公式，

以便对作用于对称二阶张量的联络双拉普拉斯算子获得尖锐的强制性估计；见命题 4.11。

更确切地说，设小球 B_δ(0)的共形正规坐标中有度量 g =exp(h)，其半径为 δ。令 H 表示逼近 h的 d 次多项式。则我们可以找到一个向量场 X ，使得

$$H = T + S, \qquad S = \mathcal{L}_X g_e - \frac{2}{n}(\operatorname{div} X)\, g_e,$$

其中， g_e 是标准欧几里得度量， $\mathcal{L}_X$ 是李导数。若¯ ¯通过共形变换 ¯ ¯将这两个对称张量提升到标准球面上的 T 和 S ，则 T 散度为零，而 S 对应于由向量场 X生成的微分同胚所诱导的度量变形，参见定义 4.3 和引理 4.4。根据稳定性¯结果，在计算归一化总Q-曲率的变形时， S 分量不应对小球上的内部积分有所贡献，因此应仅表现为边界项。命题 3.9 的重要意义在于，这些步骤可以以非常几何且简洁的方式完成，尤其是在当前的 Q-曲率情形下，所需计算量是 Brendle [12, 命题 5]的三倍多。通过仔细考察内部项，我们得到命题 4.8 中陈述的稳定性不等式。最后，借助高阶 Koiso-Bochner 公式，我们对内部项获得了尖锐估计。边界项则相对容易估计，因为它们是高阶误差项。

为完成整体误差估计，接下来我们需要仔细分析总 Q-曲率的结构，以证明其一阶与二阶变分确实支配整体量。在这一阶段，我们利用由 Q-曲率与 Paneitz 算子的共形协变性所产生的代数结构。关键观察是，在加入修正项 $w_{\epsilon,\,\delta}$ 后，共形变形后的总 Q-曲率关于 $w_{\epsilon,\,\delta}$ 呈二次依赖。引理 4.16 为精确分离加入修正项$w_{\epsilon,\,\delta}$ 所产生的影响提供了一种系统方法，并为组织和分类整体总 Q-曲率与命题 4.8 中所得二阶近似之间差异的剩余项提供了概念框架。事实证明，这些剩余项属于高阶误差项，其来源包括 $w_{\epsilon,\,\delta}$ 的小量性、Paneitz 算子的变分中的高阶误差，或与共形正规坐标中的体积密度相关的误差。我们强调，对于这些估计，无需计算 Paneitz 算子的二阶变分。

因此，我们充分利用 Q-曲率和 Paneitz 算子的几何结构，以及它们的微分同胚不变性和共形协变性。

最后，证明估计 (4) 时遇到的一个分析上的困难源于该流具有非局部性。特别是，分析中没有一般的极大值

原理可供使用。尽管如此，我们仍能利用这一非局部偏微分方程的结构，推导出若干基本性质。例如，我们证明 $u(t_\nu, \cdot)$ 是一个 Palais–Smale 序列，当 $t_\nu \to \infty$ 时成立，并获得 u 的气泡分量的能量估计；命题 2.7 和引理 6.11 中给出了相关示例。

一个关键观察是如下一个简单但重要的恒等式

$$P_{g_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -P_{g_0}u + \mu[u]\, u^{\frac{n+4}{n-4}},$$

或者等价地，

$$P_{g_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\right) = \mu[u]\, u^{\frac{n+4}{n-4}},$$

它将原演化方程改写为一个表面上是局部的椭圆方程。这种重新表述使我们能够运用与处理局部椭圆方程类似的技巧，推导出所有必要的估计。因此，尽管所得估计是非局部的，获取这些估计所用的方法与处理局部抛物方程的方法并无本质区别。这反映出，我们旨在证明的 Łojasiewicz 不等式在本质上更具椭圆性质，而非依赖于该流的抛物性。

1.3. **本文结构**。 在第 2 节中，我们回顾该流的一些性质——包括长期存在性和单调性——并证明标准泡是唯一可能的爆破解析型。

在第 3 节中，我们给出了爱因斯坦度量下总 Q-曲率的二阶变分，分别考察横向无迹二阶张量方向和李导数方向。此外，我们回顾了高阶 Koiso-Bochner 公式，并用它推导 Weyl 曲率张量的 L^2-范数的二阶变分。

在第 4 节中，对于 $n \geq 8$，我们通过构造合适的测试函数，建立 Paneitz–Sobolev商的上界。这些测试函数是通过利用线性化方程的解和格林函数修正标准泡得到的。

更具体地说，在第 4.1 小节中，我们引入一族单参数度量，它们经过圆球度量；这些度量给出了估计中的主导项。在第 4.2 小节中，我们运用第 3 节中的工具控制主导项，并在第 4.3 小节中估计误差项。在第 4.4 小节中利用格林函数进行修正后，我们在第 4.5 小节中完成定理1.2的证明。

在第 5 节中，当 $n = 5$,6,7 时，我们构造标准测试函数。随后，我们对非局部流中一列发散的时间切片应用 Struwe 分解（集中紧性原理），并将其写成两部分 $u_{t_\nu} = v_{t_\nu} + w_{t_\nu}$，适用于一般维数。

在第 6 节中，我们建立了 Paneitz–Sobolev 商在 v_{t_ν} 沿 w_{t_ν} 方向的二阶变分的强制性估计，该估计由不等式 (4) 给出。结合第 4 节中对 Paneitz–Sobolev 商的估计，我们得到关于 v_{t_ν} 的一致能量估计，见不等式 (5)。

在第 7 节中，结合上述两项要素，我们得到一个 -Lojasiewicz 型不等式，并完成定理 1.1 的证明。

1.4. 记号。 本文引言及后续部分使用以下记号。

- 流的记号：

$$f = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_\nu = u(t_\nu, \cdot), \quad f_\nu = f(t_\nu, \cdot);$$

$$\mu[u] = \frac{\int u P_{g_0} u \ dv_{g_0}}{\int |u|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0}}, \quad \mu(t) = \mu[u(t, \cdot)];$$

$$\mathcal{F}[u] = \frac{\int u P_{g_0} u \ dv_{g_0}}{\left(\int |u|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0} \right)^{\frac{n-4}{n}}}, \quad \mathcal{F}(t) = \mathcal{F}[u(t, \cdot)];$$

$$\mu_\infty = \lim_{t \to \infty} \mu(t), \quad \mathcal{F}_\infty = \lim_{t \to \infty} \mathcal{F}(t).$$

- g_e 表示欧几里得度量。
- div$_g$、tr$_g$ 表示关于度量 g的迹与散度。对于欧几里得情形，我们简单地将div$_{g_e}$ 记为div，将tr$_{g_e}$ 记为tr。
- $u_\epsilon(x) = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}}$ on $\mathbb{R}^n$ and $g_c = u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}} g_e$.
- 常数 $\mathfrak{c}(n) = (n-4)(n-2)n(n+2)$与 $\tilde{\mathfrak{c}}(n) = \frac{n+4}{n-4}\mathfrak{c}(n)$。——
- 常数 $\alpha_n := -\frac{1}{2(n-1)}$, $\beta_n := -\frac{2}{(n-2)^2}$, $\gamma_n := \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-2)^2(n-1)^2}$ ()()。因此，Q-曲率由下式给出：对于 $n \geq 3$,

$$Q_g = \alpha_n \Delta_g R_g + \beta_n |\mathrm{Ric}_g|_g^2 + \gamma_n R_g^2.$$

- 标准球面的Paneitz–Sobolev常数：

$$Y_4(S^n) = \mathfrak{c}(n) \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\epsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx \right)^{\frac{4}{n}}.$$

- 记 $S_2(M)$为对称二阶张量的空间，并且

$$S_{2,g}^{T,T}(M) := \{ h \in S_2(M) \mid \mathrm{div}_g h = 0, \mathrm{tr}_g h = 0 \}$$

表示横向无迹张量空间。
- 重复指标遵循爱因斯坦求和约定。逗号表示局部坐标下的微分，分号表示协变微分。

- 令 $h, \bar{h} \in S_2(M)$。记叉积 $(h \times_g \bar{h})_{ij} := h_i{}^k \bar{h}_{kj}$，以及 Kulkarni-Nomizu 积：

$$(h \owedge \bar{h})_{ijkl} := h_{il}\bar{h}_{jk} + h_{jk}\bar{h}_{il} - h_{ik}\bar{h}_{jl} - h_{jl}\bar{h}_{ik}.$$

- Schouten张量：$A_g = \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}^g - \frac{1}{2(n-1)}R_g g)$。Weyl 张量：$W_g = \mathrm{Rm}_g - A_g \owedge g$。此外，$\sigma_k(A_g)$ 是 A_g 的特征值的第 k 个对称函数。- 令 $d = \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$，并令 $\mathcal{Z}$ 为所有满足以下条件的点 $p \in M$ 的集合

$$\limsup_{\tilde{p}\to p} d(\tilde{p},p)^{2-d}|W_g(\tilde{p})| = 0.$$

- 设 $h \in S_2(M)$。将 Lichnerowicz 拉普拉斯算子记为

$$(\Delta_L h)_{ij} := h_{ij;k}{}^{k} + 2\mathrm{Rm}_{iklj}h^{kl} - (\mathrm{Ric}\times h)_{ij} - (h\times \mathrm{Ric})_{ij}.$$

- 设 G_p 为以 p为极点的潘尼茨算子的格林函数。我们对格林函数作如下归一化：

$$\lim_{d(\tilde{p},p)\to 0} d(\tilde{p},p)^{4-n}G_p(\tilde{p}) = 1.$$

2. Preliminaries

全文中我们始终假设以下正性条件：

$$\begin{cases} Q_{g_0} \geq 0 \text{ and } Q_{g_0} > 0 \text{ somewhere}, \\ R_{g_0} \geq 0. \end{cases}$$

根据Gursky和Malchiodi [39, 命题B]，，Paneitz 算子 P_{g_0} 是正的；根据 [39, 命题C]，其格林函数也是正的。由一个标准论证可知，Paneitz 算子的正性意味着我们的$W^{2,2}(M)$-范数等价于标准Sobolev范数。

2.1. 初等估计。 在本小节中，我们回顾 [39]中建立的流的若干性质，并证明一些额外的解析性质。

我们定义

$$f := \frac{\partial u}{\partial t} = -u + \mu P_{g_0}^{-1}\big(u^{\frac{n+4}{n-4}}\big). \tag{6}$$

命题 2.1 ([39,命题 3。4])。该流

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u + \mu[u]P_{g_0}^{-1}\big(u^{\frac{n+4}{n-4}}\big), \\ u(0,\cdot) = 1, \end{cases}$$

with

$$\mu[u] = \frac{\int_M uP_{g_0}u\, dv_{g_0}}{\int_M |u|^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_{g_0}}.$$

对所有时间都存在，并且始终保持 $u > 0$。

接下来，我们记录该流的基本不变性和单调性。

引理 2.2 ([39,引理 3.2])。我们有：

$$\frac{d}{dt}\int uP_{g_0}u \ dv_{g_0} = 0. \tag{7}$$

引理 2.3 ([39,引理 3.3])。 共形体积满足

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\int u^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0} = \frac{2n}{n-4}\frac{1}{\mu}\int fP_{g_0}f \ dv_{g_0} \geq 0. \tag{8}$$

特别地，体积沿流递增，而 μ 和 *Paneitz–Sobolev* 商均递减：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mu &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\int uP_{g_0}u \ dv_{g_0}}{V}\Big) \leq 0, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{g_0}[u] &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\int uP_{g_0}u \ dv_{g_0}}{V^{\frac{n-4}{n}}}\Big) \leq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

最后，体积有上界：

$$V \leq C_0(g_0). \tag{10}$$

推论 2.4 ([39,推论 3.3])。 我们有如下时空估计

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|f\|^2_{W^{2,2}} \ dt \leq C_1(g_0), \\ &\int_0^T \Big(\int |f|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0}\Big)^{\frac{n-4}{n}} \ dt \leq C_2(g_0). \end{aligned} \tag{11}$$

我们首先给出以下关于其时间导数的一致估计 u：

引理 2.5。 对于流 u，有以下估计：

(a) 量 $\int fP_{g_0}f \ dv_{g_0}$ 和 $\int |f|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0}$ 在 ~~t~~ 中一致有界。

(b) $|\frac{d\mu}{dt}|$ 在 t 中一致有界。

(c) $\int \frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}(\frac{\partial f}{\partial t}) \ dv_{g_0}$, *and* $\int |\frac{\partial f}{\partial t}|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0}$ *are uniformly bounded in* t.

证明。 对于 (a)，我们计算

$$\begin{aligned} \int fP_{g_0}f &= \int -fP_{g_0}u + \mu\int fu^{\frac{n+4}{n-4}} \\ &\leq \frac{1}{4}\int fP_{g_0}f + \int uP_{g_0}u + \mu\Big(\int |f|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{2n}} \cdot \Big(\int |u|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n+4}{2n}} \end{aligned}$$

利用杨氏不等式。

因此我们有：

$$\begin{aligned} \int fP_{g_0}f &\leq 4\int uP_{g_0}u + 2\mu\Big(\int |f|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{2n}} \cdot \Big(\int |u|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n+4}{2n}} \\ &\leq 4\int uP_{g_0}u + 2C_0\mu\Big(\int fP_{g_0}f\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int |u|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n+4}{2n}} \end{aligned}$$

由索博列夫不等式。由于 μ 与体积均有上界，且 $\int uP_{g_0}u$ 沿流保持不变（引理 2.2），由此得到所需的界。

(b) 可由引理 2.3 和 (a) 直接推出。

对于 (c)，我们利用恒等式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f + \frac{d\mu}{dt}P_{g_0}^{-1}\big(u^{\frac{n+4}{n-4}}\big) + \mu\frac{(n+4)}{(n-4)}P_{g_0}^{-1}\big(u^{\frac{8}{n-4}}f\big)$$

得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}(\frac{\partial f}{\partial t}) \\
=&\int -\frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}f + \frac{d\mu}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}u^{\frac{n+4}{n-4}} + \mu\frac{(n+4)}{(n-4)}\frac{\partial f}{\partial t}u^{\frac{8}{n-4}}f \\
\leq&\int \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}(\frac{\partial f}{\partial t}) + fP_{g_0}f + \big|\frac{d\mu}{dt}\big|\Big(\int |\frac{\partial f}{\partial t}|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{2n}}\cdot\Big(\int |u|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n+4}{2n}} \\
&+\mu\frac{(n+4)}{(n-4)}\Big(\int |\frac{\partial f}{\partial t}|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{2n}}\cdot\Big(\int |u|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{8}{2n}}\cdot\Big(\int |f|^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{2n}}.
\end{aligned}$$

右侧所有涉及 u 和 f 的积分，均由 (a) 和 (b) 一致有界。因此，根据索博列夫不等式，我们得出 $\int \frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}(\frac{\partial f}{\partial t})$ 一致有界，从而完成证明。

□

上述引理的一个直接推论是以下结果，它在证明标准泡是唯一可能的爆破解析型方面发挥着重要作用。

推论 2.6. $\int fP_{g_0}f$ 和 $\int |f|^{\frac{2n}{n-4}} \to 0$ 当 $t \to \infty$ 时。

证明。 我们注意到

$$\big|\frac{d}{dt}\int fP_{g_0}f\big| = \big|\int \frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}f\big| \leq \int fP_{g_0}f + \int \frac{\partial f}{\partial t}P_{g_0}(\frac{\partial f}{\partial t})$$

根据引理 2.5，该式一致有界。类似地，由 Hölder 不等式，$\big|\frac{d}{dt}\int |f|^{\frac{2n}{n-4}}\big|$ 在 t 中一致有界。现在，断言由推论 2.4 得证。

□

以下结果将用于应用 Hebey 和 Robert 的集中紧性定理。

命题 2.7. 我们有

$$\int_M \big|P_{g_0}u - \mu_\infty u^{\frac{n+4}{n-4}}\big|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0} = C(n)\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}\big|Q(t) - \overline{Q}_\infty\big|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0} \to 0$$

or equivalently,

$$\int_M |P_{g_0}f|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0} \to 0$$

如 $t \mapsto \infty$。

证明。 通过直接计算，

$$\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0} = \int_M \big|P_{g_0} u - \mu(t) u^{\frac{n+4}{n-4}}\big|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0}.$$

由于 $\mu(t) \to \mu_\infty$，且 $\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_{g_0}$ 一致有界，只需证明

$$\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0} \to 0.$$

我们计算得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}\, dv_{g_0} \\
=&\frac{2n}{n+4}\int_M |P_{g_0} f|^{-\frac{8}{n+4}} P_{g_0} f\big(-P_{g_0} f + \frac{d\mu}{dt} u^{\frac{n+4}{n-4}} + \mu \frac{n+4}{n-4} u^{\frac{8}{n-4}} f\big) \\
=&-\frac{2n}{n+4}\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}} + \frac{2n}{n+4}\int_M |P_{g_0} f|^{-\frac{8}{n+4}} P_{g_0} f\big(\frac{d\mu}{dt} u^{\frac{n+4}{n-4}} + \mu \frac{n+4}{n-4} u^{\frac{8}{n-4}} f\big) \\
\le&-\frac{2n}{n+4}\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}} + C(n)\Big|\frac{d\mu}{dt}\Big| \int_M |P_{g_0} f|^{\frac{n-4}{n+4}} u^{\frac{n+4}{n-4}} + C(n)\mu \int_M |P_{g_0} f|^{\frac{n-4}{n+4}} u^{\frac{8}{n-4}} |f|.
\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式，我们估计

$$\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{n-4}{n+4}} u^{\frac{n+4}{n-4}} \le \big(\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}\big)^{\frac{n-4}{2n}} \cdot \big(\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}\big)^{\frac{n+4}{2n}},$$

and

$$\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{n-4}{n+4}} u^{\frac{8}{n-4}} |f| \le \big(\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}\big)^{\frac{n-4}{2n}} \cdot \big(\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}\big)^{\frac{8}{2n}} \cdot \big(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-4}}\big)^{\frac{n-4}{2n}}.$$

由推论 2.6 和引理 2.3，对于任意 $\epsilon > 0$，有

$$\frac{d}{dt}\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}} \le -\frac{2n}{n+4}\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}} + \epsilon\big(\int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}\big)^{\frac{n-4}{2n}}$$

对所有充分大的 t。

令 $F(t) = \int_M |P_{g_0} f|^{\frac{2n}{n+4}}$。那么上述不等式可写为

$$F'(t) \le -\frac{2n}{n+4} F(t) + \epsilon F^{\frac{n-4}{2n}}.$$

等价地，

$$\big(e^{\frac{2n}{n+4}t} F\big)' \le \epsilon\big(e^{\frac{2n}{n+4}t} F\big)^{\frac{n-4}{2n}} e^t.$$

对该微分不等式积分，得到

$$e^{\frac{2n}{n+4}t} F(t) \le \epsilon(e^t - e^{t_0}) + e^{\frac{2n}{n+4}t_0} F(t_0)$$

对任意充分大的 t_0。这表明，对于所有充分大的 t，$F(t) < \epsilon$ □

2.2. **爆破轮廓**。 在本小节中，我们证明，如果初始能量足够小，或者不存在体积集中，那么流将全局收敛。为此，我们证明标准泡（即该流的稳态解）是唯一可能的爆破解析型。

我们首先注意到，一致的 C^0 界可为该流导出一致下界和 H¨older 估计。

命题 2.8。 假设 $\|u\|_{L^\infty([0,\infty)\times M)} < \infty$。那么，

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t,\cdot)\|_{C^{5.\alpha}(M)}, \sup_{t\in[0,\infty)} \|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\|_{C^{5.\alpha}(M)} < \infty$$

and

$$\inf_{(t,x)\in[0,\infty)\times M} u(t,x) > 0$$

其中 $\alpha \in (0,1)$ 取决于 n。

证明。 令 $L:= \|u\|_{L^\infty([0,\infty)\times M)}$。由方程可得

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{g_0} u = -P_{g_0} u + \mu u^{\frac{n+4}{n-4}}, \tag{12}$$

我们得到，

$$0 \le \frac{\partial}{\partial t} P_{g_0} u + P_{g_0} u \le \mu L^{\frac{n+4}{n-4}}.$$

对该微分不等式积分可得

$$P_{g_0} u(t,\cdot) = e^{-t} P_{g_0} u(0,\cdot) + \int_0^t e^{s-t} \mu u(s,\cdot)^{\frac{n+4}{n-4}} ds.$$

因此，

$$\|P_{g_0} u(t,\cdot)\|_{L^\infty(M)} \le e^{-t} \|P_{g_0} u(0,\cdot)\|_{L^\infty(M)} + \int_0^t e^{s-t} \mu \|u(s,\cdot)^{\frac{n+4}{n-4}}\|_{L^\infty(M)} ds.$$

类似地，

$$\|P_{g_0} u(t,\cdot)\|_{C^{1,\alpha}(M)} \le e^{-t} \|P_{g_0} u(0,\cdot)\|_{C^{1,\alpha}(M)} + \int_0^t e^{s-t} \mu \|u(s,\cdot)^{\frac{n+4}{n-4}}\|_{C^{1,\alpha}(M)} ds.$$

第一个不等式表明

$$\|P_{g_0} u\|_{L^\infty([0,\infty)\times M)} < \infty.$$

由椭圆正则性可知，$\|u(t,\cdot)\|_{C^3(M)}$ 一致有界。对上述不等式应用标准的自举论证，还可进一步得到，对于某个依赖于维数 n 的$\alpha \in (0,1)$，$\|u(t,\cdot)\|_{C^{5,\alpha}(M)}$ 一致有界。

回忆一下，$f = \frac{\partial u}{\partial t} = -u + \mu P_{g_0}^{-1}\left(u^{\frac{n+4}{n-4}}\right)$。由关于 u 的一致 $C^{5,\alpha}$ 界，我们立即得到 $\|f(t,\cdot)\|_{C^{5,\alpha}(M)}$ 的一致界，这可由以下事实推出：

$$P_{g_0} f = -P_{g_0} u + \mu u^{\frac{n+4}{n-4}} \in L^\infty([0,\infty); C^{1,\alpha}(M)).$$

对于$\frac{\partial f}{\partial t}$，我们计算

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f + \frac{d\mu}{dt} P_{g_0}^{-1}\big(u^{\frac{n+4}{n-4}}\big) + \mu \frac{(n+4)}{(n-4)} P_{g_0}^{-1}\big(u^{\frac{8}{n-4}} f\big) \in L^\infty([0,\infty); C^{4,\alpha}(M)).$$

现在我们证明， u 一致地有一个正常数下界。反设结论不成立。于是存在一个序列（t_i， p_i） $\in [0,\infty)$ $\times M$，使得

$$t_i \to \infty, \qquad p_i \to p \in M, \qquad u(t_i, p_i) \to 0.$$

根据 Arzel`a–Ascoli 定理以及一致的 $C^{5,\ \alpha}$-界，取一个子列后，我们有

$$u(t_i, \cdot) \to u_\infty \quad \text{in } C^{5,\beta}(M), \qquad \beta < \alpha.$$

由此可得 $u_\infty \geq 0$、 $u_\infty(p) = 0$，并且

$$P_{g_0} u_\infty = \mu_\infty u_\infty^{\frac{n+4}{n-4}}.$$

由 Paneitz 算子的强极大值原理 [39,定理 A], 可知， $u_\infty \equiv 0$。这与共形体积沿流单调不减这一事实矛盾。因此， u始终有一个正常数下界。

□

命题 2.9。假设以下条件之一成立

$$\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(1) < Y_4(S^n) \ \text{or} \ \limsup_{r\to 0} \sup_{(t,p)\in[0,\infty)\times M} \int_{B_r(p)} |u(t,x)|^{\frac{2n}{n-4}} \, dv = 0.$$

Then

$$\sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times M} u(t,x) < \infty.$$

证明。 反设存在 (t_i, p_i)，使得 $t_i \to \infty$, $p_i \to p \in M$，且

$$u(t_i, p_i) \to \infty, \qquad u(t_i, p_i) = \sup_{(t,x)\in[0,t_i]\times M} u(t,x).$$

令 $\lambda_i := u(t_i, p_i)$，则 $\lambda_i \to \infty$，并定义重标度函数

$$u_i(t,x) := \lambda_i^{-1} u(t_i + t, x), \qquad (t,x) \in [-t_i, 0] \times M.$$

则在 $[-t_i, 0] \times M$ 上， $u_i(0, p_i) = 1$ 且 $0 < u_i \leq 1$。

令 $g_i := \frac{4}{\lambda_i^{n-4}} g_0$。我们回顾 Paneitz 算子的共形协变性:

$$P_{\lambda^{\frac{4}{n-4}} g_0} \phi = \lambda^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g_0}(\lambda\phi) = \lambda^{-\frac{8}{n-4}} P_{g_0}\phi;$$

$$P_{g_0}^{-1}\phi = \lambda^{-\frac{8}{n-4}} P^{-1}_{\lambda^{\frac{4}{n-4}} g_0}\phi;$$

$$\frac{\partial u_{\lambda_i}}{\partial t} = -u_{\lambda_i} + \mu P_{g_i}^{-1}\big(u_{\lambda_i}^{\frac{n+4}{n-4}}\big).$$

采用此记号，重新缩放后的函数 u_i 满足

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i + \mu(t_i + t)\, P_{g_i}^{-1}\big(u_i^{\frac{n+4}{n-4}}\big) \qquad \text{on } [-t_i, 0] \times M. \tag{13}$$

此外，量 $\int |u|^{\frac{2n}{n-4}}$、$\int u P_{g_0} u$ 和 μ 在上述常数重缩放下保持不变。

固定一个以 p 为中心的小测地球 $B_r(p) \subset (M, g_0)$。在 p 附近的测地[4]法坐标中，在缩放度量 $g_i = \lambda_i^{n-4} g_0$ 下，球$B_r(p)$被映射到

$$B_{\lambda_i^{\frac{2}{n-4}} r}(p) \subset (M, g_i).$$

令 $i \to \infty$，使得 $\lambda_i \to \infty$，我们得到带基点收敛

$$\left(B_{\lambda_i^{\frac{2}{n-4}} r}(p), g_i, p\right) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_e, 0) \quad \text{in the pointed } C^\infty \text{ topology.}$$

我们利用一致界 $\sup_{[-t_i,0]\times M} u_i \le 1$ 来导出时空的紧的子集上的一致 Hölder 估计。固定任意 $L > 0$。对于充分大的 i，函数 u_i 在柱体上是良定义的

$$[-3L, 0] \times B_{3L}(0),$$

并且满足

$$0 \le \frac{\partial}{\partial t} P_{g_i} u_i + P_{g_i} u_i = \mu\, u_i^{\frac{n+4}{n-4}} \le \mu.$$

对上述微分不等式积分可得

$$P_{g_i} u_i(t, \cdot) = e^{-t-t_i} P_{g_i} u_i(-t_i, \cdot) + \int_{-t_i}^{t} e^{s-t} \mu u_i(s, \cdot)^{\frac{n+4}{n-4}} ds.$$

由于 $P_{g_i} u_i(-t_i, \cdot) \to 0$ （因为缩放流形正在扩张），因此可得 $P_{g_i} u_i \ge 0$ 且一致有界。由标准的 L^p-估计可知

$$\|u_i(t, \cdot)\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{5}{2}L}(0))} < C(L).$$

接下来，我们有如下估计

$$\begin{aligned} &\|P_{g_i} u_i(t, \cdot)\|_{C^{1,\alpha}(M)} \\ \le & e^{-t-t_i} \|P_{g_0} u_i(-t_i, \cdot)\|_{C^{1,\alpha}(M)} + \int_{-t_i}^{t} e^{s-t} \mu \|u(s, \cdot)^{\frac{n+4}{n-4}}\|_{C^{1,\alpha}(M)} ds. \end{aligned}$$

由于 u_i 一致有界，上述不等式结合内部 Schauder 估计（以及 P_{g_i} 在紧集上收敛到 $\Delta_{g_e}^2$ 这一事实）可得

$$\|u_i(t, \cdot)\|_{C^{5,\alpha}(B_{2L}(0))} \le C(L).$$

接下来我们估计 f_i。注意，f_i 的尺度变化方式与 u_i相同。因此，根据引理 2.5，这些量

$$\int_M |f_i|^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_{g_i} \qquad \text{and} \qquad \int_M \left|\frac{\partial f_i}{\partial t}\right|^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_{g_i}$$

一致有界。

该方程

$$P_{g_i} f_i = -P_{g_i} u_i + \mu u_i^{\frac{n+4}{n-4}},$$

以及局部 L^p-Schauder 估计

$$\begin{aligned}&\|f_i(t,\cdot)\|_{C^{5,\alpha}(B_L(0))}\\ \leq& C(L)\bigg(\|f_i(t,\cdot)\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(B_{2L}(0))} + \|\big(-P_{g_i}u_i + \mu u_i^{\frac{n+4}{n-4}}\big)(t,\cdot)\|_{C^{1,\alpha}(B_{2L}(0)}\bigg),\end{aligned}$$

表明

$$\|f_i(t,\cdot)\|_{C^{5,\alpha}(B_L(0))} < C(L).$$

现在我们根据方程估计$\frac{\partial f}{\partial t}$

$$P_{g_i}\big(\frac{\partial f}{\partial t}\big) = -P_{g_i} f + \frac{d\mu}{dt} u^{\frac{n+4}{n-4}} + \mu \frac{(n+4)}{(n-4)} u^{\frac{8}{n-4}} f$$

以及引理 2.5。利用局部 L^p-Schauder 估计，我们证明

$$\big\|\frac{\partial f_i}{\partial t}(t,\cdot)\big\|_{C^{4,\alpha}(B_{L/2}(0))} < C(L).$$

总之，我们证明了存在一个函数 w：$(-\infty,\ 0]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得在取一个子列后，

$$u_i(t,\cdot) \longrightarrow w(t,\cdot) \quad \text{in } C^{4,\beta}_{\text{loc}}\big((-\infty,0]\times\mathbb{R}^n\big),$$

and

$$\partial_t u_i(t,\cdot) \longrightarrow \partial_t w(t,\cdot) \quad \text{in } C^{4,\beta}_{\text{loc}}\big((-\infty,0]\times\mathbb{R}^n\big),$$

对某个 $0<\beta<\alpha<1$。

此外，极限函数 w 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta^2 w) = -\Delta^2 w + \mu_\infty\, w^{\frac{n+4}{n-4}}, \qquad \mu_\infty := \lim_{t\to\infty}\mu(t).$$

另一方面，由 Fatou 引理和引理 2.6,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{\partial w}{\partial t}\Big|^{\frac{2n}{n-4}}\, dx \leq \lim_{t\to\infty}\int_M \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^{\frac{2n}{n-4}}\ dv = 0.$$

因此，$\frac{\partial w}{\partial t} \equiv 0$，$w$ 实际上是一个平稳解。于是，

$$\Delta^2 w = \mu_\infty\, w^{\frac{n+4}{n-4}} \qquad \text{on } \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

注意，$w(0)=1$ 且 $w\geq 0$。此外，由于标量曲率的正性在流演化过程中得以保持，可知 $\Delta w \leq 0$。根据强极大值原理，我们得出 $w>0$ 处处成立。

由刘维尔定理 [68] 应用于方程 (14)，极限轮廓w 必须是一个形式如下的标准泡

$$w(x) = C\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2|x|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}.$$

令 $\mathcal{F}_{g_e}$ 表示相对于欧几里得度量的 Paneitz–Sobolev 商。那么

$$\mathcal{F}_{g_e}[w] = \mu_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w|^{\frac{2n}{n-4}}\, dx \right)^{\frac{4}{n}} \leq \mu_\infty V_\infty^{\frac{4}{n}} = \mathcal{F}_\infty \leq \mathcal{F}(0) < Y_4(S^n),$$

其中不等式由 Fatou 引理得出。

这与 $\mathbb{R}^n$ 上的尖锐 Sobolev 不等式矛盾，该不等式表明，任意标准泡都能达到最优常数 $Y_4(S^n)$。因此，假设 u从上方无界是不成立的，且 u 必定一致有上界。

□

命题 2.10 (Łojasiewicz–Simon不等式)。 在假设存在C^0 上界的情况下，并设对于某个极限函数w，有 $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}(w)$ 。若 $\|u(t) - w\|_{C^{4,\alpha}} < \delta$，则对于充分小的 δ，有

$$\Big\| \frac{\partial u}{\partial t} \Big\|_{W^{2,2}(M)} \geq C |\mathcal{F}(u(t)) - \mathcal{F}_\infty|^{1-\theta}$$

对于某个 $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$。

证明。 鉴于该流始终处于 H¨older 空间的开子集中：

$$\Omega := \{ v \in C^{5,\alpha(n)}(M) \mid \|v\|_{C^{5,\alpha(n)}(M)} < C_0, \inf v > 1/C_0 \},$$

能量，即经体积归一化的总 Q-曲率，是定义在该区域 Ω 上的解析泛函。Simon 关于流的极限唯一性的一般定理应当意味着我们的流收敛到唯一极限。由于更一般情形下的 Łojasiewicz–Simon不等式将在后续章节中证明，这里略去证明。

□

鉴于 Łojasiewicz–Simon不等式成立，证明该流全局收敛是标准的。

3. Variational theories for Q-curvature and Weyl tensor

本节计算 Q-曲率的一阶和二阶变分，并建立一个四阶 Bochner 恒等式，该恒等式在下一节的稳定性不等式中起着关键作用。

3.1. Q-曲率的变形。

定义 3.1. 对于依赖于度量 g 的任意几何量或算子 F_g （例如里奇曲率、体积密度、*Paneitz* 算子等），以及 $h \in S_2(M)$，我们定义

$$DF_g[h] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_{g+th},$$
$$D^2F_g[h,h] = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F_{g+th}.$$

对于 $h_1, h_2 \in S_2(M)$，我们进一步定义

$$D^2F_g[h_1,h_2]=\frac{1}{2}\Big(D^2F_g[h_1+h_2,h_1+h_2]-D^2F_g[h_1,h_1]-D^2F_g[h_2,h_2]\Big).$$

根据 [30], 另见 [60], ，我们有以下引理。

引理 3.2. 设 $h \in S_2(M)$，则

$$DR_g[h]=\mathrm{div}^2h-\Delta(\mathrm{tr}h)-\langle h,\mathrm{Ric}\rangle.$$

此外，若 $h \in S^{T,\,2}_{T,\,g}(M)$，则有

$$\begin{aligned}D\mathrm{Ric}_g[h]=&-\frac{1}{2}\Delta_L h,\\ D^2R_g[h,h]=&-2DR_g[h\times h]-\Delta(|h|^2)-\frac{1}{2}|\nabla h|^2+\nabla_i h_{jk}\nabla^j h^{ik},\end{aligned}$$

若无歧义，我们将简写为 $D\mathrm{Ric}$、 $D^2\mathrm{Ric}$、 DR，而不写 D^2R和 g ，以及 h。

根据 [35],，我们有以下引理。

引理 3.3。 设 ϕ 为一个函数且 $\mathrm{tr}h=0$。存在仅依赖于 n 的正常数C ，使得

$$\begin{aligned}(P_{\exp(h)}-\Delta^2)\phi\leq& C\left(\sum_{\substack{0\leq\alpha,\beta\leq 4\\ \alpha+\beta=4}}|\partial^\alpha h||\partial^\beta\phi|\right),\\ (P_{\exp(h)}-\Delta^2-DP_{g_e}[h])\phi\leq& C\left(\sum_{\substack{0\leq\alpha_1,\alpha_2,\beta\leq 4\\ \alpha_1+\alpha_2+\beta=4}}|\partial^{\alpha_1}h||\partial^{\alpha_2}h||\partial^\beta\phi|\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\left(P_{\exp(h)}-\Delta^2-DP_{g_e}[h]-\frac{1}{2}D^2P_{g_e}[h,h]-\frac{1}{2}DP_{g_e}[h\times h]\right)\phi\\ \leq& C\left(\sum_{\substack{0\leq\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\leq 4\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta=4}}|\partial^{\alpha_1}h||\partial^{\alpha_2}h||\partial^{\alpha_3}h||\partial^\beta\phi|\right),\end{aligned}$$

其中，欧几里得度量下 *Paneitz* 算子的线性化为

$$\begin{aligned}DP_{g_e}[h]\phi=&-\Delta(\partial_i(h_{ij}\partial_j\phi))-\partial_i(h_{ij}\partial_j\Delta\phi)+\frac{4}{n-2}D\mathrm{Ric}[h]_{ij}\partial^2_{ij}\phi\\ &-\alpha^1_nDR[h]\Delta\phi-\alpha^2_n\partial_k(DR[h])\partial_k\phi-\frac{n-4}{4(n-1)}\Delta(DR[h])\phi,\end{aligned}$$

这里， $\alpha^1_n=\frac{4+(n-2)^2()()}{2(n-2)(n-1)}$ 以及 $\alpha^2_n=\frac{n-6}{2(n-1)()}$。

注。 $D^2P_{g_e}[h,h]$ 的显式公式见 [35]。然而，我们的证明并不需要它。我们的主要贡献之一是使用 $D^2Q_{g_c}$ 而非 $D^2P_{g_e}$，从而简化二阶变分的计算。

引理 3.4。 设 g 是满足$\mathrm{Ric}_g = \lambda g$的爱因斯坦流形。设 $c(n) = \frac{2}{\alpha_n}(\beta_n + n\gamma_n) = -\frac{n^2-4}{2}\frac{2}{n-1}()$。则，

$$DQ_g[h] = \alpha_n(\Delta + c(n)\lambda)DR_g[h]. \tag{15}$$

此外，若 $h \in S^{T,\ 2}{}^{T,\ g}(M)$，则线性化为零

$$DQ_g[h] = DR_g[h] = 0,$$

且二阶变分为

$$\begin{aligned} D^2Q_g[h,h] =& \alpha_n(\Delta + c(n)\lambda)D^2R \\ &+2\beta_n(\lambda^2|h|^2 - 2\lambda\langle D\mathrm{Ric}, h\rangle + |D\mathrm{Ric}|^2). \end{aligned} \tag{16}$$

证明。 利用 $R_g = \mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}_g$，可得

$$DR = \mathrm{tr}D\mathrm{Ric} - \langle \mathrm{Ric}, h\rangle, \tag{17}$$

$$D^2R = \mathrm{tr}D^2\mathrm{Ric} - 2\langle D\mathrm{Ric}, h\rangle + 2\langle \mathrm{Ric}, h\times h\rangle. \tag{18}$$

根据 [54, 命题 3.3]，， Q-曲率的线性化为

$$\begin{aligned} DQ_g[h] =& \alpha_n\left(\Delta DR - \left\langle h, \nabla^2 R\right\rangle - \langle B[h], dR\rangle\right) \\ &+ 2\beta_n\langle \mathrm{Ric}, D\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}\times h\rangle + 2\gamma_n RDR, \end{aligned}$$

其中 $B[h]_i := \mathrm{div}_g h - \frac{1}{2}d\mathrm{tr}_g h$。结合 $\mathrm{Ric} = \lambda g$ 和 (17)，可得 (15)。

根据 [54, 引理 5.2]，， Q-曲率的二阶变分为

$$\begin{aligned} D^2Q[h,h] =& \alpha_n\Big[\Delta D^2R - 2\left\langle h, \nabla^2 DR\right\rangle - 2\langle B[h], d(DR)\rangle + 2\left\langle h\times h, \nabla^2 R\right\rangle \\ &+ h^{ij}(2h_{lj;i} - h_{ij;l})g^{lk}R_{,k} + h^{ij}(2h_{ik;l} - h_{kl;i})g^{lk}R_{,j}\Big] \\ &+ 2\beta_n\Big[\left\langle \mathrm{Ric}, D^2\mathrm{Ric}\right\rangle + \langle D\mathrm{Ric}, D\mathrm{Ric} - 4\mathrm{Ric}\times h\rangle + |\mathrm{Ric}\times h|^2 \\ &+ 2\langle \mathrm{Ric}\times \mathrm{Ric}, h\times h\rangle\Big] + 2\gamma_n[RD^2R + (DR)^2]. \end{aligned}$$

结合 $\mathrm{Ric} = \lambda g$、(18) 以及 $h \in S^{T,\ 2}{}^{T,\ g}(M)$，可得 (16)。 □

命题 3.5. 设 g 是满足 $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$ 的爱因斯坦流形，且 $h \in S^{T,\ 2}{}^{T,\ g}(M)$。设 $U \subset M$ 是一个具有光滑边界的区域，并设 $\hat{n}$ 表示沿 ∂U 的外单位法向量场。那么

$$\begin{aligned} \int_U D^2Q_g[h,h]\, dv_g =& \frac{n^2-4}{4(n-1)^2}\lambda\int_U -\frac{1}{2}|\nabla h|^2 + \lambda|h|^2 + \mathrm{Rm}_{iklj}h^{kl}h^{ij}\, dv_g \\ &- \frac{1}{(n-2)^2}\int_U |\Delta_L h + 2\lambda h|^2\, dv_g + \mathrm{BT}, \end{aligned}$$

其中边界项BT 由下式给出

$$\mathrm{BT} = -\frac{1}{2(n-1)}\int_{\partial U}\partial_{\hat{n}}D^2R_g[h,h]dS_g$$

$$+\frac{n^2-4}{4(n-1)^2}\lambda\int_{\partial U}\partial_{\hat{n}}|h|^2-\mathrm{div}(h\times h)(\hat{n})dS_g.$$

证明。由于 g 是爱因斯坦的，且 $h\in S^{T,2}{}^{T}{}_{,g}(M)$，因此我们有

$$DR[h]=0,\quad \text{and } D\mathrm{Ric}[h]=-\frac{1}{2}\Delta_L h.$$

结合引理 3.4，我们得到

$$D^2Q_g[h,h]=\alpha_n(\Delta+c(n)\lambda)D^2R[h,h]+\frac{1}{2}\beta_n|\Delta_L h+2\lambda h|^2.$$

此外，由引理 3.2,

$$D^2R_g[h,h]=-2\mathrm{div}^2(h\times h)+\Delta(|h|^2)+2\lambda|h|^2-\frac{1}{2}|\nabla h|^2+\nabla_i h_{jk}\nabla^j h^{ik}.$$

利用散度定理、Ricci恒等式和 $\mathrm{div}h=0$，可得

$$\begin{aligned}\int_U D^2R[h,h]\,dv_g=&\int_U-\frac{1}{2}|\nabla h|^2+\lambda|h|^2+\mathrm{Rm}_{iklj}h^{kl}h^{ij}\,dv_g\\&+\int_{\partial U}-\mathrm{div}(h\times h)(\hat{n})+\partial_{\hat{n}}|h|^2dS_g.\end{aligned}$$

此外,

$$\int_U\Delta D^2R[h,h]\,dv_g=\int_{\partial U}\partial_{\hat{n}}D^2R[h,h]dS_g.$$

结合上述两个分部积分公式以及对 $D^2Q_g[h,h]$ 的计算，我们即可证明本命题。□

3.2. 曲率的微分同胚不变性。 设 X 是 M 上的一个向量场，令 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为由 X 生成的相应单参数微分同胚族。

由曲率的微分同胚不变性可知,

$$Q_g(\phi_t(x))=Q_{\phi_t^*g}(x).$$

在 $t=0$ 处求导，得到

$$DQ_g[\mathcal{L}_X g]=\mathcal{L}_X Q_g=\nabla_X Q.$$

更一般地，对于任意依赖度量的几何量或算子 F_g，若令 $g(t)=\phi_t^*g$，则

$$\frac{d}{dt}F_{g(t)}\Big|_{t=0}=DF_g[g'(0)],$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}F_{g(t)}=D^2F_g[g'(0),g'(0)]+DF_g[g''(0)].$$

特别地，由于 $g'(0)=\mathcal{L}_X g$ 且 $g''(0)=\mathcal{L}_X^2 g$，我们得到

$$\mathcal{L}_X^2F_g=D^2F_g[\mathcal{L}_X g,\mathcal{L}_X g]+DF_g[\mathcal{L}_X^2 g].$$

引理 3.6. 设 $g(t)$ 是一个单参数度量族，满足 $g(0)=g$且 $g'(0)=h$。则:

(a) $D\ dv_g[h] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g h\ dv_g$; *(b)* $D^2\ dv_g[h,h] = \left(\frac{1}{4}(\mathrm{tr}_g h)^2 - \frac{1}{2}|h|_g^2\right)\ dv_g$; *(c)* $\left(d v_{g(t)}\right)''(0) = \left(\frac{1}{4}(\mathrm{tr}_g h)^2 - \frac{1}{2}|h|_g^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g g''(0)\right)\ dv_g$.

引理 3.7. 设 X 为一个向量场。则度量的李导数满足:

(a) $(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$;
(b) $(\mathcal{L}_X^2 g)_{ij} = X^k\nabla_k(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) + \nabla_i X^k(\nabla_k X_j + \nabla_j X_k) + \nabla_j X^k(\nabla_k X_i + \nabla_i X_k)$;
(c) $\mathrm{tr}_g(\mathcal{L}_X^2 g) = 2X(\mathrm{div}X) + |\mathcal{L}_X g|^2$.

证明。 我们对任意 $(0,2)$-张量 T 使用一般恒等式,

$$(\mathcal{L}_X T)_{ij} = X^k\nabla_k T_{ij} + \nabla_i X^k T_{jk} + \nabla_j X^k T_{ik}.$$

□

引理 3.8. 我们有关于导数或体积密度的如下公式:

(a) $D\ dv_g[\mathcal{L}_X g] = \mathcal{L}_X(\ dv_g) = (\text{散度}X)\ dv_g$; *(b)* $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X\ dv_g) = X(\text{散度}X)\ dv_g + (\text{散度}X)^2\ dv_g$.

证明。 证明是标准的。 □

命题 3.9. 设 X 是闭流形 M 上的一个向量场，且 $U \subset M$ 是一个边界光滑的区域。设 $\hat{n}$ 是沿着 ∂U 的外单位法向量场。假设 g 是爱因斯坦的，且 $\mathrm{Ric}_g = 4(n-1)\ g$。

(a) 对于 Q-曲率的一阶微分，我们有

$$\int_U DQ_g[\mathcal{L}_X g]\ dv_g = 0.$$

(b) 对于 Q-曲率的二阶微分，我们有

$$\int_U D^2Q_g[\mathcal{L}_X g, \mathcal{L}_X g]\ dv_g = 4(n^2-4)\int_U -2(\mathrm{div}X)^2 + |\mathcal{L}_X g|^2\ dv_g + \mathrm{BT}$$

其中 BT（边界项）为

$$\begin{aligned}\mathrm{BT} =& \frac{n^2-4}{(n-1)^2}\int_{\partial U}\partial_{\hat{n}}\mathrm{tr}(\mathcal{L}_X^2 g) - \mathrm{div}(\mathcal{L}_X^2 g)(\hat{n})dS_g \\ &+ \frac{1}{2(n-1)}\int_{\partial U}\partial_{\hat{n}} DR_g[\mathcal{L}_X^2 g]dS_g + 8(n^2-4)\int_{\partial U}\mathrm{div}X\ \langle X,\hat{n}\rangle\ dS_g.\end{aligned}$$

(c) 若 $h \in S^{T,2}{}^T{}_{,g}(M)$，则有

$$\int_U D^2Q_g[\mathcal{L}_X g, h]\ dv_g = 0$$

（*d*）如果 g 是共形平坦的，那么

$$DW_g[\mathcal{L}_X g] = \mathcal{L}_X W_g = 0.$$

证明。对于（a），我们有

$$\int_U DQ_g[\mathcal{L}_X g]\, dv_g = \int_U X \cdot \nabla Q_g\, dv_g = 0.$$

接下来，对于 (b)，我们计算

$$\begin{aligned}
&\int_U D^2 Q_g[\mathcal{L}_X g, \mathcal{L}_X g]\, dv_g \\
=&\int_U \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X Q_g) - DQ_g[\mathcal{L}_X^2 g]\, dv_g \\
=&4(n^2-4)\int_U tr_g(\mathcal{L}_X^2 g)\, dv_g + \frac{1}{2(n-1)}\int_{\partial U} \partial_{\hat{n}} DR_g[\mathcal{L}_X^2 g] dS_g \\
&+ \frac{n^2-4}{(n-1)^2}\int_{\partial U} \partial_{\hat{n}} \mathrm{tr}(\mathcal{L}_X^2 g) - \mathrm{div}(\mathcal{L}_X^2 g)(\hat{n}) dS_g.
\end{aligned}$$

此外，根据引理 3.7，

$$\begin{aligned}
\int_U tr(\mathcal{L}_X^2 g)\, dv_g &= \int_U 2X(\mathrm{div}X) + |\mathcal{L}_X g|^2\, dv_g \\
&= \int_U -2(\mathrm{div}X)^2 + |\mathcal{L}_X g|^2\, dv_g + 2\int_{\partial U} \mathrm{div}X\, \langle X, \hat{n}\rangle\, dS_g.
\end{aligned}$$

结合这两个恒等式即可得到 (b)。

现在证明 (c)。设 $g(s)$ 是一个单参数度量族，满足$g(0) = g$ 且 $g'(0) = h$。由恒等式

$$Q_{\phi_t^* g(s)}(x) = Q_{g(s)}(\phi_t(x))$$

我们得到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q_{\phi_t^* g(s)}(x) = \mathcal{L}_X Q_{g(s)}(x)$$

因此，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q_{\phi_t^* g(s)}(x) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mathcal{L}_X Q_{g(s)}(x) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} dQ_{g(s)}(X) = d\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} Q_{g(s)}\right)(X) \\
&= \nabla_X(DQ_g[h])
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\int_U D^2 Q_g[\mathcal{L}_X g, h]\, dv_g &= \int_U \nabla_X(DQ_g[h])\, dv_g \\
= -\int_U \mathrm{div}X(DQ_g[h])\, dv_g &+ \int_{\partial U} X \cdot \hat{n}(DQ_g[h]) dS_g = 0
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 3.4 得出。

□

3.3. **高阶 Koiso-Bochner 公式**。如 [4], 我们定义

$$\begin{aligned}(\nabla^K h)_{ijk} :=& h_{ij;k} - h_{kj;i},\\ \mathcal{A}[h]_{ijkl} :=& \nabla_l(\nabla^K h)_{ijk} = h_{ij;kl} - h_{kj;il}.\end{aligned}$$

下面的引理对专家而言是众所周知的，例如参见 Besse 的著作 [6,第 1.K 章]。

引理 3.10. 黎曼曲率张量的线性化为

$$D\mathrm{Rm}_g[h]_{ijkl} = \frac{1}{2}(h_{ki;lj} + h_{lj;ki} - h_{li;kj} - h_{kj;li} + \mathrm{Rm}_{ijk}{}^p h_{pl} + \mathrm{Rm}_{ijl}{}^p h_{pk}).$$

此外，若 $h \in S^{T,2^T,g}(M)$ 且 g 具有常截面曲率，即$(\mathrm{Rm}g)_{ijkl} = c(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$，则有

$$\begin{aligned}DA_g[h] =& -\frac{1}{2(n-2)}(\Delta - cn)h,\\ DW_g[h]_{ijkl} =& \frac{1}{2}(\mathcal{A}[h]_{kilj} + \mathcal{A}[h]_{ljki}) + \frac{1}{2(n-2)}((\Delta - cn)h \owedge g)_{ijkl}. \quad (19)\end{aligned}$$

给定一个 k-张量 h，其分量为 h_α ，其中 α 是带有$|\alpha| = k$的多重指标。我们记开区域 $U \subset M$上的 L^2-范数为:

$$\|h\|_U^2 := \int_U h_\alpha h^\alpha \, dv_g.$$

此外，我们定义三类边界积分:

$$\begin{aligned}\mathrm{BT}_1 :=& \int_{\partial U} \mathrm{contr}(g^{-1}\otimes g^{-1}\otimes \nabla h \otimes h \otimes \hat{n}) dS_g\\ \mathrm{BT}_2 :=& \int_{\partial U} \mathrm{contr}(g^{-1}\otimes g^{-1}\otimes g^{-1}\otimes \nabla^2 h \otimes \nabla h \otimes \hat{n}) dS_g\\ \mathrm{BT}_3 :=& \int_{\partial U} \mathrm{contr}(g^{-1}\otimes g^{-1}\otimes g^{-1}\otimes \nabla^3 h \otimes h \otimes \hat{n}) dS_g,\end{aligned}$$

其中， $\otimes$表示张量积，contr 表示全张量缩并。于是，Koiso-Bochner 公式及其高阶版本可写成如下形式。

引理 3.11 ([4, 引理 4.3、4.4])。设 $h \in S^{T,2^T,g}(M)$ 和 g 具有常截面曲率。则，

$$\frac{1}{2}\|\nabla^K h\|_U = \|\nabla h\|_U^2 + cn\|h\|_U^2 + \mathrm{BT}_1, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}\|\mathcal{A}[h]\|_U^2 = \|\Delta h\|_U^2 + 3c\|\nabla h\|_U^2 - c^2 n(n-3)\|h\|_U^2 + \sum_{i=1}^3 \mathrm{BT}_i. \quad (21)$$

于是，我们可以研究 $|W_g|^2$的二阶变分，它是在 [15]中定义的一类共形变分黎曼不变量（共形变分不变量）。

命题 3.12. 设 $h \in S^{T,\,2}{}^{T}{}_{,\,g}\ (M)$ 与 g 具有常数截面曲率。则，

$$\|DW_g[h]\|_U^2 = \frac{n-3}{n-2}\left(\|\Delta h\|_U^2 + c(n+2)\|\nabla h\|_U^2 + 2c^2 n\|h\|_U^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{BT}_i.$$

证明。为简化记号，我们省略下标 U，并在本证明中将 $\|\cdot\| := \|\cdot\|_U$ 记为。根据（19），有

$$\begin{aligned}\|DW_g[h]\|^2 =& \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{4(n-2)^2}\|(\Delta - cn)h \owedge g\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_U \mathcal{A}_{kilj}\mathcal{A}^{ljki}\,dv_g + \frac{1}{n-2}\int_U \mathcal{A}_{kilj}((\Delta - cn)h \owedge g)^{ijkl}\,dv_g \\ :=& \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.\end{aligned}$$

对于项 I，我们可以直接使用方程（21）。对于项 II，我们只需利用 Kulkarni-Nomizu 积的定义进行计算：

$$\|(\Delta - cn)h \owedge g\|^2 = 4(n-2)(\|\Delta h\|^2 + 2cn\|\nabla h\|^2 + c^2n^2\|h\|^2) + \mathrm{BT}_1.$$

利用 Ricci恒等式，我们可以处理项 IV。

$$\int_U \mathcal{A}[h]_{kilj}((\Delta - cn)h \owedge g)^{ijkl}\,dv_g = -2(\|\Delta h\|^2 + 2cn\|\nabla h\|^2 + c^2n^2\|h\|^2) + \mathrm{BT}_1.$$

两次应用 Ricci恒等式，可得

$$h_{ik;jl}{}^{k} = c(n+1)h_{ij;l} + cnh_{il;j}.$$

结合（20）与上面的方程，我们可以处理项 III：

$$\int_U \mathcal{A}[h]_{kilj}\mathcal{A}[h]^{ljki}\,dv_g = 2cn\|\nabla h\|^2 + 2c^2n^2\|h\|^2 + \mathrm{BT}_1 + \mathrm{BT}_2.$$

将这四项合并起来，我们得到

$$\|DW_g[h]\|^2 = \frac{n-3}{n-2}\left(\|\Delta h\|^2 + c(n+2)\|\nabla h\|^2 + 2c^2n\|h\|^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{BT}_i.$$

□

4. Construction of test bubbles: $n \geq 8$ case

考虑小正规邻域 $B_\delta(p)$内的度量 $g = \exp(h)$，其中 h 是一个对称二阶张量，满足 $\mathrm{tr}h = O(|x|^{2d+2})$，且 $x_i h_{ij}(x) = 0$，对任意 x, j。

定义正函数 u_ϵ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 由 $u_\epsilon(x) = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-}{}2}$ 给出。显然，

$$\Delta^2 u_\epsilon = \mathfrak{c}(n)u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}}, \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

给定 $k = 2, \ldots d$，多重指标 α，我们定义

$$H_{ij}^{(k)}(x) = \sum_{|\alpha|=k} h_{ij,\alpha} x_\alpha, \quad H_{ij}(x) = \sum_{k=2}^{d} H_{ij}^{(k)}(x),$$

and

$$|H^{(k)}|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |h_{ij,\alpha}|^2,$$

于是，

$$h_{ij}(x) = H_{ij}(x) + O(|x|^{d+1}),$$

以及 $H_{ij}(x) = H_{ji}(x)$、 $H_{ij}(x)x_j = 0$ 和 $H_{ii} = 0$。

取一个非负光滑函数 χ，使得

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & \text{when } s \le \frac{4}{3} \\ 0, & \text{when } s \ge \frac{5}{3}. \end{cases}$$

记 $\chi_\delta(x) = \chi(|x|/\delta)$。

4.1. 标准球面上 S_2 的分解。 Brendle 的分解可概括为如下引理。

引理 4.1 ([12,推论 22, 24])。 给定任意 $\delta > 0$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上紧支集为 $\mathrm{supp}(\chi_\delta H) \subseteq B_{2\delta}$ 的无迹对称二阶张量 $\chi_\delta H$ ，存在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场 $X = X_{\epsilon,\,\delta}$ ，使得 $\chi_\delta H = T + S$ 且

$$\mathrm{tr}T = 0, \ and \ \mathrm{div}(u_\epsilon^{\frac{2n}{n-4}} T) = 0,$$
$$\mathrm{tr}S = 0, \ and \ S = \mathcal{L}_X g_e - \frac{2}{n}\mathrm{div}X g_e.$$

此外，对每个多重指标 α，存在正常数 $C = C(n, |\alpha|)$，使得

$$|\partial^\alpha X_{\epsilon,\delta}|(x) \le C \sum_{k=2}^{d} |H^{(k)}|(\epsilon + |x|)^{k+1-|\alpha|} \ for \ all \ x \in \mathbb{R}^n.$$

根据 [35], ，我们有如下引理。

引理 4.2. 给定 $S = \mathcal{L}_X g_e - \frac{2}{n}\mathrm{div}X g_e$，线性化方程

$$\Delta^2 w_{\epsilon,\delta}[S] - \tilde{\mathfrak{c}}(n) u_\epsilon^{\frac{8}{n-4}} w_{\epsilon,\delta}[S] = -DP_{g_e}[S]u_\epsilon, \quad in \ \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

具有如下形式的解

$$w_{\epsilon,\delta}[S] = X_i \partial_i u_\epsilon + \frac{n-4}{2n}\mathrm{div}X u_\epsilon. \tag{24}$$

我们简单地记作 $w[S] = w_{\epsilon,\,\delta}[S]$。

4记球面度量为 $g_c := u_\epsilon^{n-4} g_e$ ，联络为 $\bar{\nabla} := \nabla^{g_c}$。那么，曲率为

$$\begin{aligned}(\mathrm{Rm}_{g_c})_{ijkl} &= 4(g_c)_{il}(g_c)_{jk} - 4(g_c)_{ik}(g_c)_{jl},\\ \mathrm{Ric}_{g_c} &= 4(n-1)g_c,\\ Q_{g_c} &= 2n(n-2)(n+2).\end{aligned}$$

回顾度量 $g = \exp(h)$，其中 $h_{ij}(x) = H_{ij}(x) + O(|x|^{d+1})$。研究近似度量 $\exp(\chi_\delta H)$ 与欧几里得度量 g_e 之间的插值是很自然的。然而，关于 g_e 的计算十分冗长。因此，我们选择定义修正度量与球面度量 g_c 之间的插值。这正是下面定义的动机。

定义 4.3。 回顾分解 $\chi_\delta H = T + S$。考虑定义在 $\mathbb{R}^n$上的度量族：

$$\bar{g}(t) := (u_\epsilon + tw[S])^{\frac{4}{n-4}} \exp(t\chi_\delta H),$$

以及局部化的总 Q-曲率

$$I_{\epsilon,\delta}(t) := \int_{B_\delta} Q_{\bar{g}(t)}\, dv_{\bar{g}(t)}.$$

直接可得

$$\begin{aligned}\bar{g}(0) =& g_c,\\ \bar{g}'(0) =& u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}} T + u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}} S + \frac{4}{n-4} u_\epsilon^{\frac{8-n}{n-4}} w[S] g_e.\end{aligned}$$

引理 4.4。 定义

$$\begin{aligned}\bar{T} :=& u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}} T,\\ \bar{S} :=& u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}} S + \frac{4}{n-4} u_\epsilon^{\frac{8-n}{n-4}} w[S] g_e.\end{aligned}$$

然后， $\bar{g}'(0) = T + S$。此外，

$$\bar{T} \in S^{T,T}_{2,g_c} \ and\ \bar{S} = \mathcal{L}_X g_c.$$

因此，

$$DP_{g_e}[T] u_\epsilon = DQ_{g_c}[\bar{T}] = 0.$$

证明。 在此证明中，我们将 $u = u_\epsilon$ 简记为。

首先，我们将证明 $S = \mathcal{L}_X g_c$。结合引理 4.1 和 (24)，可得

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ij} =& u^{\frac{4}{n-4}} \left(X_{i,j} + X_{j,i} - \frac{2}{n} \mathrm{div} X (g_e)_{ij} \right)\\ &+ \frac{4}{n-4} u^{\frac{8-n}{n-4}} \left(X_l \partial_l u + \frac{n-4}{2n} \mathrm{div} X u \right) (g_e)_{ij}\\ =& u^{\frac{4}{n-4}} (X_{i,j} + X_{j,i}) + X_l \partial_l (u^{\frac{4}{n-4}} (g_e)_{ij})\end{aligned}$$

$$=\bar{\nabla}_i X_j + \bar{\nabla}_j X_i = (\mathcal{L}_X g_c)_{ij}.$$

其次，我们将证明 $\bar{T} \in S^{T,\ 2^T,\ g_c}$。显然，$\mathrm{tr}_{g_c}\bar{T} = 0$。接下来，我们只需计算散度 $\mathrm{div}_{g_c}T$。直接计算可得

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_k \bar{T}_{ij} = u^{\frac{8-n}{n-4}}\Big(&uT_{ij,k} - \frac{2}{n-4}u_{,j}T_{ik} + \frac{2}{n-4}u_{,l}T_{il}(g_e)_{jk}\\ &- \frac{2}{n-4}u_{,i}T_{jk} + \frac{2}{n-4}u_{,l}T_{jl}(g_e)_{ik}\Big).\end{aligned} \tag{25}$$

因此，$\mathrm{div}_{g_c}\bar{T} = u^{-\frac{2n}{n-4}}(u^{\frac{2n}{n-4}}T_{ij})j$，由引理 4.1 可知其为零。

第三，我们将证明 $DP_{g_e}[T]u = 0$。考虑度量族$g(t)$，满足 $g(0) = g_e$ 且 $g'(0) = T$。进行共形变换后，我们有

$$Q_{u^{\frac{4}{n-4}}g(t)} = \frac{2}{n-4}u^{-\frac{n+4}{n-4}}P_{g(t)}u.$$

将 $\partial_t|_{t=0}$ 应用于其中，我们得到

$$DQ_{g_c}[\bar{T}] = \frac{2}{n-4}u^{-\frac{n+4}{n-4}}DP_{g_e}[T]u.$$

由于 $\bar{T} \in S^{T,\ 2^T,\ g_c}$ 以及引理 3.4，$DQ_{g_c}[\bar{T}] = 0$。结合上面的方程，我们可以得出这个引理。□

为研究局部化的总 Q-曲率，我们也可以进行共形变换。

$$I_{\epsilon,\delta}(t) = \frac{2}{n-4}\int_{B_\delta}(u_\epsilon + tw[S])P_{\exp(tH)}(u_\epsilon + tw[S])dx.$$

显然，我们可以分别在欧几里得坐标和球面坐标中计算 $I_{\epsilon,\ \delta}(0)$。

$$\begin{aligned}I_{\epsilon,\delta}(0) &= \frac{2}{n-4}\int_{B_\delta} u_\epsilon \Delta^2 u_\epsilon = \frac{2\mathfrak{c}(n)}{n-4}\int_{B_\delta} u_\epsilon^{\frac{2n}{n-4}}\\ &= Q_{g_c}\int_{B_\delta} dv_{g_c} = \frac{2\mathfrak{c}(n)}{n-4}\int_{B_\delta} dv_{g_c}.\end{aligned}$$

命题 4.5。我们有

$$\bar{g}''(0) = u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}\left(\chi_\delta H \times H + \frac{8}{n-4}\frac{w[S]}{u_\epsilon}\chi_\delta H - \frac{4(n-8)}{(n-4)^2}\frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}g_e\right), \tag{26}$$

$$\mathrm{div}_{g_c}X = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{g_c}\bar{S} = \frac{2n}{n-4}\frac{w[S]}{u_\epsilon}. \tag{27}$$

证明。 证明是直接的。 □

此外，我们可以分别在欧几里得坐标和球面坐标中计算 $I'_{\epsilon,\ \delta}(0)$。对于欧几里得坐标情形，我们需要使用方程 (22) 和 (23)。对于球面坐标情形，我们需要使用引理 3.4 、命题 3.9 和 4.5。

$I'_{\epsilon,\ \delta}(0)$

$$=\frac{2}{n-4}\int_{B_\delta} u_\epsilon DP_{g_e}[S]u_\epsilon + u_\epsilon\Delta^2 w[S] + w[S]\Delta^2 u_\epsilon = \frac{4n\mathfrak{c}(n)}{(n-4)^2}\int_{B_\delta} w[S]u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}}$$

$$=\int_{B_\delta} DQ_{g_c}[\bar{T}+\bar{S}] + \frac{1}{2}Q_{g_c}\mathrm{tr}_{g_c}(\bar{T}+\bar{S})\,dv_{g_c} = \frac{1}{2}Q_{g_c}\int_{B_\delta}\mathrm{tr}_{g_c}(\bar{S})\,dv_{g_c}.$$

4.2. 总 Q-曲率的二阶变分。 由于 $D^2P_{g_e}[H,H]$ 的复杂性，在欧几里得坐标中计算 $I''_{\epsilon,\delta}(0)$ 要困难得多。本小节将使用球面坐标计算二阶导数 $I''_{\epsilon,\delta}(0)$。

有两个直接的分部积分公式。

引理 4.6. 令 $\hat{\bar{n}}$ 为相对于 g_c 的单位法向量。

$$\int_{B_\delta}\mathrm{tr}_{g_c}(\bar{S})\,dv_{g_c} = 2\int_{B_\delta}\mathrm{div}_{g_c}X\,dv_{g_c} = 2\int_{\partial B_\delta}\left\langle X,\hat{\bar{n}}\right\rangle_{g_c} dS_{g_c}, \tag{28}$$

$$\int_{B_\delta}\left\langle\bar{T},\bar{S}\right\rangle_{g_c} dv_{g_c} = 2\int_{B_\delta}\left\langle\bar{T},\bar{\nabla}X\right\rangle_{g_c} dv_{g_c} = 2\int_{\partial B_\delta}\bar{T}(X,\hat{\bar{n}})dS_{g_c}. \tag{29}$$

引理 4.7. 我们有

$$\begin{aligned} I''_{\epsilon,\delta}(0) = &\int_{B_\delta} D^2Q_{g_c}[\bar{T},\bar{T}] + D^2Q_{g_c}[\bar{S},\bar{S}]\,dv_{g_c} \\ &- 4(n^2-4)\int_{B_\delta}|\bar{T}+\bar{S}|^2_{g_c} - \frac{4n}{n-4}\frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}\,dv_{g_c} \\ &+ \frac{4n\tilde{\mathfrak{c}}(n)}{(n-4)^2}\int_{B_\delta}\frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}\,dv_{g_c} + \mathrm{BT} \end{aligned}$$

其中BT（边界项）为

$$\begin{aligned} \mathrm{BT} = &-\frac{1}{2(n-1)}\int_{\partial B_\delta}\partial_{\hat{\bar{n}}}DR_{g_c}[\bar{g}''(0)]dS_{g_c} \\ &-\frac{n^2-4}{(n-1)^2}\int_{\partial B_\delta}\partial_{\hat{\bar{n}}}\mathrm{tr}_{g_c}\bar{g}''(0) - \mathrm{div}_{g_c}\bar{g}''(0)(\hat{n})dS_{g_c}. \end{aligned}$$

证明。 直接计算可得

$$\begin{aligned} I''_{\epsilon,\delta}(0) = &\int_{B_\delta} D^2Q_{g_c}[g'(0),g'(0)] + DQ_{g_c}[g''(0)] + DQ_{g_c}[g'(0)]\mathrm{tr}_{g_c}g'(0)\,dv_{g_c} \\ &+\frac{1}{4}Q_{g_c}\int_{B_\delta}(\mathrm{tr}_{g_c}g'(0))^2 - 2|g'(0)|^2_{g_c} + 2\mathrm{tr}_{g_c}g''(0)\,dv_{g_c}. \end{aligned}$$

$\bar{\ }$ $\bar{\ }$由引理 3.4 和命题 3.9， $DQ_{g_c}[T] = DQ_{g_c}[S] = 0$。将 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$与 $g'(0) = T+S$结合起来，我们得到

$$\begin{aligned} I''_{\epsilon,\delta}(0) = &\int_{B_\delta} D^2Q_{g_c}[\bar{T}+\bar{S},\bar{T}+\bar{S}] + DQ_{g_c}[g''(0)]\,dv_{g_c} \\ &+\frac{1}{4}Q_{g_c}\int_{B_\delta}(\mathrm{tr}_{g_c}\bar{S})^2 - 2|\bar{T}+\bar{S}|^2_{g_c} + 2\mathrm{tr}_{g_c}g''(0)\,dv_{g_c}. \end{aligned}$$

由引理 3.2 和方程 (15)，我们可以进行分部积分，

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} DQ_{g_c}[g''(0)]\, dv_{g_c} &= \int_{B_\delta} \alpha_n(\Delta + c(n)\lambda) DR_{g_c}[g''(0)]\, dv_{g_c} \\ &= -4(n^2-4)\int_{B_\delta} \mathrm{tr}_{g_c} g''(0)\, dv_{g_c} + \mathrm{BT},\end{aligned}$$

其中，边界项即为本引理陈述中的边界项。

此外，对方程 (26) 取迹 tr_{g_c}，可得

$$\mathrm{tr}_{g_c} g''(0) = |\bar{T} + \bar{S}|^2_{g_c} - \frac{4n}{n-4}\frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}.$$

结合上述三个方程和 (27)，即可得到结论。 □

命题 4.8. 我们有

$$\begin{aligned}I''_{\epsilon,\delta} \le &-\int_{B_\delta} \frac{n^2-4}{2(n-1)}(|\bar{\nabla}\bar{T}|^2_{g_c} + 8|\bar{T}|^2_{g_c}) + \frac{1}{(n-2)^2}|\Delta_{g_c}\bar{T} - 8\bar{T}|^2_{g_c}\, dv_{g_c} \\ &+ \frac{4\tilde{\mathfrak{c}}(n)}{n-4}\int_{B_\delta} \frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}\, dv_{g_c} + C\sum_{k=2}^{d} |H^{(k)}|^2 \delta^{-n+2k+4}\epsilon^{n-4}.\end{aligned}$$

证明。 综合命题 3.5、3.9、公式 (29) 和引理 4.7，我们得到

$$\begin{aligned}I''(0) = &-\int_{B_\delta} \frac{n^2-4}{2(n-1)}(|\bar{\nabla}\bar{T}|^2_{g_c} + 8|\bar{T}|^2_{g_c}) + \frac{1}{(n-2)^2}|\Delta_{g_c}\bar{T} - 8\bar{T}|^2_{g_c}\, dv_{g_c} \\ &+ \frac{4\tilde{\mathfrak{c}}(n)}{n-4}\int_{B_\delta} \frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}\, dv_{g_c} + \mathrm{BT},\end{aligned}$$

其中边界项为

$$\begin{aligned}\mathrm{BT} = &-\frac{1}{2(n-1)}\int_{\partial B_\delta} \partial_{\hat{\bar{n}}}(D^2 R_{g_c}[\bar{T},\bar{T}] - DR_{g_c}[\mathcal{L}^2_X g_c] + DR_{g_c}[\bar{g}''(0)])dS_{g_c} \\ &+ \frac{n^2-4}{n-1}\int_{\partial B_\delta} \partial_{\hat{\bar{n}}}(\mathrm{tr}_{g_c}(\bar{T}\times_{g_c}\bar{T} + \mathcal{L}^2_X g_c + \bar{g}''(0)))dS_{g_c} \\ &- \frac{n^2-4}{n-1}\int_{\partial B_\delta} \mathrm{div}_{g_c}(\bar{T}\times_{g_c}\bar{T} + \mathcal{L}^2_X g_c + \bar{g}''(0))(\hat{\bar{n}})dS_{g_c} \\ &+ 8(n^2-4)\int_{\partial B_\delta} \mathrm{div}_{g_c} X\left\langle X, \hat{\bar{n}}\right\rangle_{g_c} - 2\bar{T}(X,\hat{\bar{n}})dS_{g_c} \\ :=&\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.\end{aligned}$$

接下来，我们将逐一估计边界项。回忆一下共形变换 conformal changes $\bar{T} = \overline{u_\epsilon^{n-4}}T$, $dS_{g_c} = u_\epsilon^{n-4}\, dS$ and $\hat{\bar{n}} = \bar{u_\epsilon}^{n-4}\hat{n}$。通过直接计算，我们得到

$$|\mathrm{IV}| \le C\epsilon^n \sum_{k=2}^{d} |H^{(k)}|^2 \delta^{-n+2k}.$$

根据引理 4.1、3.7 以及方程 (26)，我们可以得到以下估计，

$$|(\bar{T}\times_{g_c}\bar{T})_{ij}|+|(\mathcal{L}_X^2 g_c)_{ij}|+|\bar{g}''(0)_{ij}|\leq Cu_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{2k}.$$

因此，存在

$$|\mathrm{II}|+|\mathrm{III}|\leq C\epsilon^{n-2}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\delta^{-n+2k+2}.$$

我们需要使用引理 3.2 来处理 I 项。新项可由如下新估计处理

$$|\Delta_{g_c}(|\bar{T}|^2_{g_c})|+|\bar{\nabla}\bar{T}|^2_{g_c}+|\bar{\nabla}_i\bar{T}_{jk}\bar{\nabla}^j\bar{T}^{ik}|\leq Cu_\epsilon^{-\frac{4}{n-4}}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{2k-2}.$$

因此，我们可以得到

$$|\mathrm{I}|\leq C\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\delta^{-n+2k+4}.$$

结合边界估计与内部计算，我们可以得到该结论。□

结合命题 3.12，我们可以得到一个关键推论。

推论 4.9。我们有

$$\begin{aligned}I''_{\epsilon,\delta}(0)\leq&-\frac{1}{(n-2)(n-3)}\int_{B_\delta}|DW_{g_c}[\bar{T}]|^2_{g_c}\,dv_{g_c}\\&-\frac{(n-4)(n^2+2n-4)}{2(n-1)(n-2)}\int_{B_\delta}|\bar{\nabla}\bar{T}|^2_{g_c}+8|\bar{T}|^2_{g_c}\,dv_{g_c}\\&+\frac{4\tilde{\mathfrak{c}}(n)}{n-4}\int_{B_\delta}\frac{w^2[S]}{u_\epsilon^2}\,dv_{g_c}+C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\delta^{-n+2k+4}\epsilon^{n-4}.\end{aligned}$$

注。 该推论确立了标准球面处以下两个总二次曲率的二阶变分之间的关系：

$$\int_{B_\delta}Q_g\,dv_g\ \text{and}\ \int_{B_\delta}|W_g|^2\,dv_g.$$

引理 4.10 ([12, 命题 8, 14])。 我们有

$$\int_{B_{5r/3}\setminus B_{4r/3}}|DW_{g_e}[H]|^2dx\geq\frac{1}{C}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2r^{2k+n-4},\ \textit{for all}\ r>0,\qquad(30)$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{B_\delta}\left(u_\epsilon^2+\frac{n+4}{n-4}w^2[S]\right)^{\frac{n}{n-4}}dx\\ \le&\int_{B_\delta}(u_\epsilon+w[S])^{\frac{2n}{n-4}}\,dx+C\epsilon^{n-2}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^3\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+3k+4}dx\\ &+C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k}\epsilon^n.\end{aligned}\tag{31}$$

命题 4.11. 我们有

$$\int_{B_{2r}\setminus B_r}|DW_{g_c}[\bar{T}]|^2_{g_c}\,dv_{g_c}\ge\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2r^{-n+2k+4},\ \textit{for all } r>\epsilon.\tag{32}$$

因此，对于所有的 $\delta\ge 2\epsilon$，我们得到

$$\int_{B_\delta}|DW_{g_c}[\bar{T}]|^2_{g_c}\,dv_{g_c}\ge\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx.$$

注。 利用 [12, 命题 9] 和方程（25）中的论证，我们可以得到

$$\int_{B_\delta}|\bar{\nabla}\bar{T}|^2_{g_c}\,dv_{g_c}\ge\frac{1}{C}\epsilon^{n-2}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+2}dx.$$

这不足以作为二分论证的有力起点（无论 $p\in\mathcal{Z}$ 是否成立）。这就是我们使用高阶 Koiso-Bochner 公式的原因。

证明。 首先，我们将找出 $DW_{g_c}[T]$ 与 $DW_{g_e}[H]$之间的关系。根据分解 $H=T+S$，我们有

$$DW_{g_e}[H]=DW_{g_e}[T]+DW_{g_e}[S].$$

在 T 方向上，考虑一族度量 $g(t)$，其中 $g(0)=g_e$ 且 $g'(0)=T$。根据 $W_{u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}g(t)}=u_\epsilon^{n-4}W_{g(t)}$，我们有

$$DW_{g_c}[\bar{T}]=u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}DW_{g_e}[T].$$

在 S 方向上，考虑 $g(t)$，其中 $g(0)=g_e$ 且 $g'(0)=S$。根据 $W_{(u_\epsilon+tw[S])^{\frac{4}{n-4}}g(t)}=(u_\epsilon+tw[S])^{\frac{4}{n-4}}W_{g(t)}$ 和 $W_{g_e}=0$，我们有

$$DW_{g_c}[\bar{S}]=u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}DW_{g_e}[S].$$

另一方面，根据命题 3.9 和 $W_{g_c}=0$，我们得到

$$DW_{g_c}[\bar{S}]=DW_{g_c}[\mathcal{L}_Xg_c]=0.$$

结合上述四个方程，我们可以得到

$$DW_{g_c}[\bar{T}] = u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}} DW_{g_e}[H]. \tag{33}$$

然后，我们可以结合 (30) 和 (33) 得到方程 (32)。 □

命题 4.12. 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{n-4}{2}\left(I_{\epsilon,\delta}(0) + I'_{\epsilon,\delta}(0) + \frac{1}{2}I''_{\epsilon,\delta}(0)\right)\\
\leq& Y_4(S^n)\left(\int_{B_\delta}(u_\epsilon + w[S])^{\frac{2n}{n-4}}\,dx\right)^{\frac{n-4}{n}}\\
&-\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx + C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4}.
\end{aligned}$$

证明。 我们可以利用 (28) 将$I'_{\epsilon,\delta}(0)$ 写成一个边界项。因此，

$$I'_{\epsilon,\delta}(0) \leq C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4}.$$

结合推论 4.9 和命题 4.11，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{n-4}{2}\left(I_{\epsilon,\delta}(0) + I'_{\epsilon,\delta}(0) + \frac{1}{2}I''_{\epsilon,\delta}(0)\right)\\
\leq& \mathfrak{c}(n)\int_{B_\delta}\left(u_\epsilon^2 + \frac{n+4}{n-4}w^2[S]\right)u_\epsilon^{\frac{8}{n-4}}dx\\
&-\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx + C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4}.
\end{aligned}$$

根据 H¨older 不等式，有

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta}\left(u_\epsilon^2 + \frac{n+4}{n-4}w^2[S]\right)u_\epsilon^{\frac{8}{n-4}}dx\\
\leq&\left(\int_{B_\delta}\left(u_\epsilon^2 + \frac{n+4}{n-4}w^2[S]\right)^{\frac{n}{n-4}}dx\right)^{\frac{n-4}{n}}\left(\int_{B_\delta}u_\epsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx\right)^{\frac{4}{n}}.
\end{aligned}$$

利用 $Y_4(S^n) = \mathfrak{c}(n)\left(\int_{\mathbb{R}^n}u_\epsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx\right)^{\frac{4}{n}}$和 (31)，我们可以得到该结论。

□

4.3. **辅助估计**。 在本小节中，我们证明关于曲率逼近与椭圆估计 X 的基本估计。我们固定背景度量 $g = \exp(h)$，使其在点$p \in M$处为共形正规坐标。在本小节中，我们将$w = w_{\epsilon,\delta}[S]$简记。

引理 4.13. 对于 $x \in B_\delta$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|w\big(P_{\exp h}-\Delta^2-DP_{g_e}[H]\big)u_\epsilon\right|+\left|u_\epsilon\big(P_{\exp h}-\Delta^2-DP_{g_e}[H]\big)w\right|\\&\quad\le\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}+C\epsilon^{n-4}\delta^{-2n+2d+6}.\end{aligned}$$

证明。 根据引理 3.3， $h=O(|x|^2)$ 和 $h=H+O(|x|^{d+1})$,

$$\begin{aligned}&(P_{\exp(h)}-\Delta^2-DP_{g_e}[h])u_\epsilon\\\le&C\left(\sum_{\substack{0\le\alpha_1,\alpha_2,\beta\le4\\\alpha_1+\alpha_2+\beta=4}}|\partial^{\alpha_1}h||\partial^{\alpha_2}h||\partial^\beta u_\epsilon|\right)\\\le&C\left(\sum_{\substack{0\le\alpha_1,\alpha_2,\beta\le4\\\alpha_1+\alpha_2+\beta=4}}|x|^{2-\alpha_1}(|\partial^{\alpha_2}H|+|x|^{d+1-\alpha_2})|\partial^\beta u_\epsilon|\right).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left|\big(P_{\exp h}-\Delta^2-DP_{g_e}[h]\big)u_\epsilon\right|\le C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|(\epsilon+|x|)^{-n+k+2}+C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}(\epsilon+|x|)^{-n+3+d}.$$

接下来，注意到 $d\ge2$，我们有

$$DP_{g_e}[h-H]=\sum_{k=0}^{4}O(|\partial^{4-k}(h-H)|)\partial^k=\sum_{k=0}^{4}O(|x|^{\max\{0,d+k-3\}})\partial^k.$$

从而

$$\left|DP_{g_e}[h-H]u_\epsilon\right|\le C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}(\epsilon+|x|)^{-n+d+1}.$$

因此，我们有

$$\left|\big(P_{\exp h}-\Delta^2-DP_{g_e}[H]\big)u_\epsilon\right|\le C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|(\epsilon+|x|)^{-n+k+2}+C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}(\epsilon+|x|)^{-n+1+d}.$$

最后，结合引理 4.1 和杨氏不等式，我们得到估计

$$\begin{aligned}&\left|w\big(P_{\exp h}-\Delta^2-DP_{g_e}[H]\big)u_\epsilon\right|\\\le&C\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}\left(|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+6}+|H^{(k)}|(\epsilon+|x|)^{-2n+k+d+5}\right)\\\le&\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}+C\epsilon^{n-4}\delta^{-2n+2d+6}.\end{aligned}$$

类似的逻辑也适用于 $\left|u_\epsilon\big(P_{\exp h}-\Delta^2-DP_{g_e}[H]\big)w_\epsilon\right|$。 □

引理 4.14. 对于 $x \in B_\delta$，我们有

$$\left|u_\epsilon\left(P_{\exp(h)} - \Delta^2 - DP_{g_e}[h] - \frac{1}{2}D^2P_{g_e}[H,H] - \frac{1}{2}DP_{g_e}[H\times H]\right)u_\epsilon\right|$$
$$\leq \frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4} + C\epsilon^{n-4}\delta^{-2n+2d+6}.$$

证明。 根据引理 3.3， $h = O(|x|^2)$ 和 $h = H + O(|x|^{d+1})$,

$$\left(P_{\exp(h)} - \Delta^2 - DP_{g_e}[h] - \frac{1}{2}D^2P_{g_e}[h,h] - \frac{1}{2}DP_{g_e}[h\times h]\right)u_\epsilon$$
$$\leq C\left(\sum_{\substack{0\leq\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\leq 4\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta=4}} |x|^{2-\alpha_1}(|\partial^{\alpha_2}H| + |x|^{d+1-\alpha_2})(|\partial^{\alpha_3}H| + |x|^{d+1-\alpha_3})|\partial^\beta u_\epsilon|\right).$$

因此，我们有

$$\left|u_\epsilon\left(P_{\exp(h)} - \Delta^2 - DP_{g_e}[h] - \frac{1}{2}D^2P_{g_e}[h,h] - \frac{1}{2}DP_{g_e}[h\times h]\right)u_\epsilon\right|$$
$$\leq C\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+6} + C\epsilon^{n-4}\delta^{-2n+2d+8}.$$

接下来，利用代数估计

$$D^2P_{g_e}[h,h] - D^2P_{g_e}[H,H] + DP_{g_e}[h\times h - H\times H]$$
$$= \sum_{k=0}^{4} O(|x|^{d+k-3}|H| + |x|^{2d+k-2})\partial^k$$

以及杨氏不等式，我们有

$$\left|u_\epsilon\left(D^2P_{g_e}[h,h] - D^2P_{g_e}[H,H] + DP_{g_e}[h\times h - H\times H]\right)u_\epsilon\right|$$
$$\leq C\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|(\epsilon+|x|)^{-2n+d+k+5} + C\epsilon^{n-4}\delta^{-2n+2d+6}$$
$$\leq \frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4} + C\epsilon^{n-4}\delta^{-2n+2d+6}.$$

这就证明了该断言。 □

引理 4.15. 我们有

$$\int_{B_\delta} u_\epsilon DP_{g_e}[h]u_\epsilon, \ \int_{B_\delta} u_\epsilon DP_{g_e}[H]u_\epsilon \leq C\epsilon^{n-4}\delta^{2d+6-n}. \tag{34}$$

证明。 由 $x_i h_{ij} = 0$，我们观察到 $-\Delta(\partial_i(h_{ij}\partial_j u_\epsilon)) - \partial_i(h_{ij}\partial_j\Delta u_\epsilon) = 0$。
结合引理 3.3 和 $\mathrm{tr}h = O(|x|^{2d+2})$，可得

$$u_\epsilon DP_{g_e}[h]u_\epsilon$$

$$
\begin{aligned}
=&u_\epsilon\bigg[\frac{4}{n-2}D(\mathrm{Ric}_{g_e})_{ij}[h]\partial^2_{ij}u_\epsilon-\alpha_n^1 DR_{g_e}[h]\Delta u_\epsilon-\alpha_n^2\partial_k DR_{g_e}[h]\partial_k u_\epsilon\\
&-\frac{n-4}{4(n-1)}\Delta(DR_{g_e}[h])u_\epsilon\bigg]+C\epsilon^{n-4}O((\epsilon+|x|)^{-2n+2d+6}),
\end{aligned}
$$

其中曲率的线性化为

$$
\begin{aligned}
u_\epsilon D(\mathrm{Ric}_{g_e})_{ij}\partial^2_{ij}u_\epsilon =&u_\epsilon\big[h_{jk,ik}-\frac{1}{2}h_{ij,kk}+O(|x|^{2d})\big]\partial^2_{ij}u_\epsilon,\\
DR_{g_e}[h] =&h_{ij,ij}+O(|x|^{2d}).
\end{aligned}
$$

此外，我们需要以下恒等式，它们可以通过对恒等式 $x_i h_{ij}=0$ 求导得到：

$$
\begin{aligned}
h_{ij,k}x_i&=-h_{jk},\\
h_{ij,kk}x_ix_j=2h_{kk},\quad h_{ik,jk}x_ix_j&=h_{kk}-x_ih_{kk,i},\\
h_{ij,ikk}x_j&=-h_{ii,jj}-2h_{ij,ij}.
\end{aligned}
$$

此外，我们可以计算

$$
\int_{B_r}h_{ij,ij}=\frac{1}{r}\int_{\partial B_r}h_{ij,i}x_j=-\frac{1}{r}\int_{\partial B_r}h_{ii}=O(r^{n+2d}),\tag{35}
$$

and

$$
\int_{\partial B_r}h_{ij,ij}=O(r^{n+2d-1}).\tag{36}
$$

于是，通过应用分部积分即可得到该断言。例如，由 (35) 和 (36),

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_\delta}u_\epsilon\Delta(DR_{g_e}[h])u_\epsilon\\
=&\int_{B_\delta}h_{ij,ijkk}u_\epsilon^2+O(|x|^{2d-2})u_\epsilon^2\\
\le&\int_{B_\delta}-h_{ij,ikk}\partial_j u_\epsilon^2+\int_{\partial B_\delta}h_{ij,ikk}\frac{x_j}{\delta}u_\epsilon^2+C\epsilon^{n-4}\delta^{2d+6-n}\\
\le&2(-n+4)\epsilon^{n-4}\int_{B_\delta}h_{ij,ij}(\epsilon^2+|x|^2)^{-n+3}-\frac{2}{\delta}\int_{\partial B_\delta}h_{ij,ij}u_\epsilon^2+C\epsilon^{n-4}\delta^{2d+6-n}\\
=&C\epsilon^{n-4}\delta^{2d+6-n}.
\end{aligned}
$$

同样的方法适用于 H，由此证明了该断言。 □

回顾一下，当 $x\in B_\delta$ 时，我们定义 $\bar g(t)=(u_\epsilon+tw)^{\frac{4}{n-4}}\exp(tH)$，而我们的背景度量为 $g=\exp(h)$。因此，在本小节的其余部分，我们将估计高阶项产生的误差，以及将 H 改变为 h 所造成的误差。棘手之处在于，下面插值中的三次项很难进行追踪。

$$
(u_\epsilon+tw)^{\frac{4}{n-4}}\exp(th)
$$

$$=g_c+t\left[\frac{4}{n-4}\frac{w}{u_\epsilon}+u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}h\right]+\frac{1}{2}t^2u_\epsilon^{\frac{4}{n-4}}\left[h^2+\frac{2(-n+8)}{(n-4)^2}\frac{w^2}{u_\epsilon^2}+\frac{8}{n-4}\frac{w}{u_\epsilon}h\right]$$
$$+O(\text{cubic order of } w \text{ and } h).$$

因此，我们还需要利用总 Q-曲率的另一项性质。对于定义在集合 B_δ 上的任意度量 $\hat{}g$，定义

$$E_\delta[\hat{g}]=\int_{B_\delta}Q_{\hat{g}}\,dv_{\hat{g}}.$$

注意， $E_\delta[(u_\epsilon+sw)^{\frac{4}{n-4}}\exp(tH)]$ 关于 sw 是二次的。因此，我们定义一个二参数度量族的总 Q-曲率:

$$\begin{aligned}I_{\epsilon,\delta}(s,t):=&E_\delta[(u_\epsilon+sw)^{\frac{4}{n-4}}\exp(tH)]\\=&\frac{2}{n-4}\int_{B_\delta}(u_\epsilon+sw)P_{\exp(tH)}(u_\epsilon+sw)\,dv_{\exp(tH)}.\end{aligned}$$

这里有一个基本的代数引理。

引理 4.16. 设 $F(s,t)$ 是关于两个变量的光滑函数，且关于 s 变量是二次的，即

$$F(s,t)=F(0,t)+s\partial_sF(0,t)+\frac{1}{2}s^2\partial_s^2F(0,t).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&F(1,1)-F(0,0)-\frac{d}{dt}F(t,t)\Big|_{t=0}-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}F(t,t)\Big|_{t=0}\\=&\Big(F(0,1)-F(0,0)-\partial_tF(0,0)-\frac{1}{2}\partial_t^2F(0,0)\Big)\\&+\Big(\partial_sF(0,1)-\partial_sF(0,0)-\partial_t\partial_sF(0,0)\Big)\\&+\frac{1}{2}\Big(\partial_s^2F(0,1)-\partial_s^2F(0,0)\Big).\end{aligned}$$

根据这个引理，我们有:

$$\frac{2}{n-4}\int_{B_\delta}(u_\epsilon+w_{\epsilon,\delta})P_g(u_\epsilon+w_{\epsilon,\delta})\,dv_g-I_{\epsilon,\delta}(0)-I'_{\epsilon,\delta}(0)-\frac{1}{2}I''_{\epsilon,\delta}(0)=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},\tag{37}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{I}:=&\frac{1}{2}\Big(\partial_s^2I_{\epsilon,\delta}(0,1)-\partial_s^2I_{\epsilon,\delta}(0,0)\Big)\\&+\frac{2}{n-4}\left(\int_{B_\delta}wP_{\exp(h)}w\,dv_{\exp(h)}-\int_{B_\delta}wP_{\exp(H)}w\,dv_{\exp(H)}\right),\\\mathrm{II}:=&\partial_sI_{\epsilon,\delta}(0,1)-\partial_sI_{\epsilon,\delta}(0,0)-\partial_t\partial_sI_{\epsilon,\delta}(0,0)\\&+\frac{2}{n-4}\Big(\int_{B_\delta}wP_{\exp(h)}u_\epsilon\,dv_{\exp(h)}+\int_{B_\delta}u_\epsilon P_{\exp(h)}w\,dv_{\exp(h)}\end{aligned}$$

$$- \int_{B_\delta} wP_{\exp(H)}u_\epsilon \, dv_{\exp(H)} - \int_{B_\delta} u_\epsilon P_{\exp(H)} w \, dv_{\exp(H)} \Big),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III} :=& I_{\epsilon,\delta}(0,1) - I_{\epsilon,\delta}(0,0) - \partial_t I_{\epsilon,\delta}(0,0) - \frac{1}{2}\partial_t^2 I_{\epsilon,\delta}(0,0) \\ &+ \frac{2}{n-4}\Big(\int_{B_\delta} u_\epsilon P_{\exp(h)} u_\epsilon \, dv_{\exp(h)} - \int_{B_\delta} u_\epsilon P_{\exp(H)} u_\epsilon \, dv_{\exp(H)} \Big).\end{aligned}$$

引理 4.17。我们有

$$|\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| + |\mathrm{III}| \leq \frac{1}{C}\epsilon^{n-4} \sum_{k=2}^{d} |H^{(k)}|^2 \int_{B_\delta} (\epsilon + |x|)^{-2n+2k+4} dx + C\epsilon^{n-4}\delta^{2d+6-n}.$$

证明。 根据引理 3.3、4.1 和 $h = O(|x|^2)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I} =& \int_{B_\delta} wP_{\exp(h)} w \, dv_{\exp(h)} - \int_{B_\delta} w\Delta^2 w \, dv_{g_e} \\ \leq& C\epsilon^{n-4} \int_{B_\delta} \sum_{k=2}^{d} (\epsilon + |x|)^{-2n+2k+6} |H^{(k)}|^2 dx.\end{aligned}$$

令 δ 足够小，我们可以得到项 I 的估计。

对于项 II，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{II} =& \int_{B_\delta} u_\epsilon P_{\exp(h)} w(\, dv_{\exp(h)} - dx) + \int_{B_\delta} u_\epsilon \Big(P_{\exp(h)} - \Delta^2 - DP_{g_e}[H] \Big) w dx \\ &+ \int_{B_\delta} wP_{\exp(h)} u_\epsilon(\, dv_{\exp(h)} - dx) + \int_{B_\delta} w \Big(P_{\exp(h)} - \Delta^2 - DP_{g_e}[H] \Big) u_\epsilon dx.\end{aligned}$$

结合引理 4.13 和 $\mathrm{tr}h = O(|x|^{2d+2})$，我们可以得出项 II 的结论。

最后，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{III} =& \int_{B_\delta} u_\epsilon P_{\exp(h)} u_\epsilon(\, dv_{\exp(h)} - dx) \\ &+ \int_{B_\delta} u_\epsilon \Big(P_{\exp(h)} - \Delta^2 - DP_{g_e}[H] - \frac{1}{2} D^2 P_{g_e}[H,H] - \frac{1}{2} DP_{g_e}[H \times H] \Big) u_\epsilon dx.\end{aligned}$$

结合引理 4.14、(34) 和 $\mathrm{tr}h = O(|x|^{2d+2})$，我们可以得到项 III 的估计。

这证明了该断言。 □

最后，结合引理 4.17、命题 4.12 和方程 (37)，我们可以得到以下局部化估计。

命题 4.18。我们有

$$\int_{B_\delta} (u_\epsilon + w_{\epsilon,\delta}) P_g (u_\epsilon + w_{\epsilon,\delta}) \, dv_g$$

$$\leq Y_4(S^n)\left(\int_{B_\delta}(u_\epsilon+w_{\epsilon,\delta})^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}}-\frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx$$

$$+C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4}+C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4}.$$

4.4. 格林函数的修改。我们给出这些修改的定义 -
正测试泡以及格林函数的边界积分。

定义4.19 （修正测试泡）。

$$v_{p,\epsilon,\delta}:=\chi_\delta(u_\epsilon+w_{\epsilon,\delta})+(1-\chi_\delta)\epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p. \tag{38}$$

定义4.20。

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(p,\delta):=&-\int_{\partial B_\delta}|x|^{4-n}\partial_{\hat{n}}\Delta G_p(x)-\partial_{\hat{n}}(|x|^{4-n})\Delta G_p(x)dS\\&-\int_{\partial B_\delta}\Delta(|x|^{4-n})\partial_{\hat{n}}G_p(x)-\partial_{\hat{n}}\Delta(|x|^{4-n})G_p(x)dS.\end{aligned}$$

˜显然，当 $\delta>\delta>0$ 时，存在

$$\mathcal{I}(p,\delta)-\mathcal{I}(p,\tilde{\delta})=-\int_{B_\delta\setminus B_{\tilde{\delta}}}|x|^{4-n}\Delta^2G_p(x)dx.$$

˜**引理4.21**。 存在一个正的常数 C，使得对于 $\delta>\delta>0$,

$$\sup_{p\in\mathcal{Z}}|\mathcal{I}(p,\delta)-\mathcal{I}(p,\tilde{\delta})|\leq C\delta^{2d+6-n}.$$

因此，存在一个连续函数 $\mathcal{I}$： $\mathcal{Z}\to\mathbb{R}$ 使得

$$\sup_{p\in\mathcal{Z}}|\mathcal{I}(p,\delta)-\mathcal{I}(p)|\to 0\ \ as\ \delta\to 0.$$

证明。根据定义 4.20，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(p,\delta)-\mathcal{I}(p,\tilde{\delta})\\=&\int_{B_\delta\setminus B_{\tilde{\delta}}}|x|^{4-n}(P_g-\Delta^2-DP_{g_e}[h])G_p(x)-|x|^{4-n}DP_{g_e}[h]G_p(x)dx.\end{aligned}$$

由于 $p\in\mathcal{Z}$，存在 $G_p(x)=|x|^{4-n}+O(|x|^{d+5-n})$。结合引理 3.3，我们可以得到

$$\left|\int_{B_\delta\setminus B_{\tilde{\delta}}}|x|^{4-n}(P_g-\Delta^2-DP_{g_e}[h])G_p(x)dx\right|\leq C\delta^{2d+6-n}.$$

采用与方程 (34) 相同的证明，我们可知

$$\left|\int_{B_\delta\setminus B_{\tilde{\delta}}}|x|^{4-n}DP_{g_e}[h]G_p(x)dx\right|\leq C\delta^{2d+6-n}.$$

结合上述三个方程，我们可以得出结论。 □

现在，我们可以进行整体分析了。

命题 4.22。我们有

$$\int_{M\setminus B_\delta} v_{p,\epsilon,\delta} P_g v_{p,\epsilon,\delta}\, dv_g \leq -\epsilon^{n-4}\mathcal{I}(p,\delta) + C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{n-2}.$$

证明。为简便起见，在本证明中我们记 $v_p = v_{p,\ \epsilon,\ \delta}$。由于 $v_p = \epsilon^{\frac{n-4}{2}} G_p$和 $P_g G_p \equiv 0$ 属于 $M \setminus B_{2\delta}$，我们只需估计环域中的积分。我们将其分为四部分。

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} v_p P_g v_p\, dv_g \\
=&\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} (v_p - \epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p) P_g v_p\, dv_g + \int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} \epsilon^{\frac{n-4}{2}}(G_p\Delta^2 v_p - v_p\Delta^2 G_p)\, dv_g \\
&+\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} \epsilon^{\frac{n-4}{2}} G_p(P_g-\Delta^2)(v_p - \epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p)\, dv_g \\
&+\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} \epsilon^{\frac{n-4}{2}}(v_p - \epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p)(\Delta^2 - P_g)G_p\, dv_g \\
:=&\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.
\end{aligned}$$

一般而言，存在 $dv_g = (1 + O(|x|^{d+1}))dx$ 和

$$|G_p(x) - |x|^{4-n}| \leq C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}||x|^{4-n+k} + C|x|^{d+5-n}.$$

对于 $x \in M \setminus B_\delta$，有

$$\begin{aligned}
&|v_p(x) - \epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p(x)| + \delta^4|P_g v_p(x)| \\
\leq& C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{4-n+k}\epsilon^{\frac{n-4}{2}} + C\delta^{d+5-n}\epsilon^{\frac{n-4}{2}} + C\delta^{2-n}\epsilon^{\frac{n}{2}}. \qquad (39)
\end{aligned}$$

因此，我们可以处理项 I 和项 II。

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}| \leq& C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\delta^{4-n+2k}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\delta^{-n}\epsilon^n, \\
|\mathrm{II} + \epsilon^{n-4}\mathcal{I}(p,\delta)| \leq& C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{4-n+k}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2-n}\epsilon^{n-2}.
\end{aligned}$$

结合引理 3.3 和（39），可得

$$|\mathrm{III}| + |\mathrm{IV}| \leq C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\delta^{4-n+2k}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2-n}\epsilon^{n-2}.$$

将这四项相加，即可得到结论。 □

推论4.23。我们有

$$\begin{aligned}\int_M v_{p,\epsilon,\delta} P_g v_{p,\epsilon,\delta}\, dv_g \leq & Y_4(S^n)\left(\int_M v_{p,\epsilon,\delta}^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}} - \epsilon^{n-4}\mathcal{I}(p,\delta)\\ & - \frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\int_{B_\delta} |W_g(x)|^2(\epsilon+|x|)^{8-2n}dx\\ & + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{n-4}\log^{-1}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right).\end{aligned}$$

证明。 结合命题4.18和4.22，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\int_M v_{p,\epsilon,\delta} P_g v_{p,\epsilon,\delta}\, dv_g\\ \leq & Y_4(S^n)\left(\int_M v_{p,\epsilon,\delta}^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}} - \epsilon^{n-4}\mathcal{I}(p,\delta)\\ & - \frac{1}{C}\epsilon^{n-4}\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx\\ & + C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4} + C\delta^{2d+6-n}\epsilon^{n-4} + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

根据估计 $|W_g(x)| \leq \sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}||x|^{k-2} + C|x|^{d-1}$，有

$$\begin{aligned}&\int_{B_\delta}|W_g(x)|^2(\epsilon+|x|)^{8-2n}dx\\ \leq & C\sum_{k=2}^{d}|H^{(k)}|^2\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx + C\delta^{2d+6-n}.\end{aligned}$$

若$k = \frac{n-4}{2}$，则设 $\theta_k = 1$；否则设 $\theta_k = 0$。由杨氏不等式，对于 $2 \leq k \leq d$，有

$$\begin{aligned}C|H^{(k)}|\delta^{-n+k+4}\epsilon^{n-4} \leq & \frac{1}{C}|H^{(k)}|^2\epsilon^{n-4}\int_{B_\delta}(\epsilon+|x|)^{-2n+2k+4}dx\\ & + C\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{2n-8-2k}\log^{-\theta_k}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right).\end{aligned}$$

结合上述三个估计，我们可以得到结论。 □

4.5. **定理1.2的证明**。 在证明定理1.2之前，我们先回顾 Q-质量的定义以及相应的正质量定理。

定义4.24. 定义衰减率为 $\tau > 0$ 的渐近平坦流形$(M^n, \hat{g})$ 为 $M = M_0 \cup M_\infty$，其中 M_0 是紧的，且 M_∞与$\mathbb{R}^n \setminus B_1$ 微分同胚，使得$\hat{g}_{ij}(y) - \delta_{ij} = O^{(4)}(|y|^{-\tau})$ 当 $|y| \to \infty$时成立。此外，若 $\tau > \frac{n-4}{2}$ 且$Q_{\hat{g}} \in L^1(M, \hat{g})$，我们可以定义 Q-质量为

$$m(\hat{g}) := \lim_{r\to\infty}\int_{\partial B_r}(\hat{g}_{ii,jjk} - \hat{g}_{ij,ijk})(y)\frac{y_k}{|y|}dS.$$

命题4.25 ([3, 定理 A]). 假设$(M^n, \hat{g})$ 是一个衰减率为$\tau > \frac{n-4}{2}$ 且满足以下条件的渐近平坦流形

(a) $n \geq 5$*;*

(b) $Y_{\hat{g}} > 0$*,* $Q_{\hat{g}} \in L^1(M, \hat{g})$*, and* $Q_{\hat{g}} \geq 0$*.*

那么，四阶质量 $m(\hat{g})$ 非负。此外， $m(\hat{g}) = 0$ 当且仅当$(M,\hat{g})$ 与欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$等距。

根据 [35, 命题 8.3] 以及 $\mathcal{I}(p, \delta)$ 的定义（定义 4.20），我们可以得到 Q-质量与边界积分极限之间的关系。

命题4.26。 设 $n \geq 5$ 和(M^n, g) 为闭流形，且[4]核 $P_g = 0$。假设 $p \in \mathcal{Z} \subset M$。那么，$(M \setminus \{p\}, \hat{g} := G_g^{n-4} g)$ 是一个衰减率为 $\tau > \frac{n-4}{2}$ 的渐近平坦流形，使得 $Q_{\hat{g}} = 0$。此外，

$$m(\hat{g}) = \frac{4(n-1)}{n-4} \mathcal{I}(p).$$

定理*1.2*的证明。 (a) 来自推论4.23。

(b) 来自引理4.21。(c) 来自命题4.26。(d) 来自定义4.19、引理 4.1 和方程 (24)。

□

5. Setup for the blow-up analysis

本节为下一节所进行的爆破分析准备框架。

5.1. 维数为 $5 \leq n \leq 7$ 的测试泡估计。

在本小节中，我们假设 $5 \leq n \leq 7$，并且选择度量 $g \in [g_0]$ ，使其在点 $p \in M$ 处诱导出共形正规坐标。在这些坐标中，度量满足

$$\det(g) = 1 + O(r^N),$$

其中 r 表示从 p 出发的距离函数， N 是一个充分大的正整数。

本例中构造的测试泡定义为

$$v_{p,\epsilon}(y) = \Big(\frac{\mathfrak{c}(n)}{\mu_\infty}\Big)^{\frac{n-4}{8}} \epsilon^{\frac{n-4}{2}} \Big(\chi_\delta(\epsilon^2 + r^2)^{-\frac{n-4}{2}} + (1 - \chi_\delta) G_p \Big) \tag{40}$$

其中 $\mathfrak{c}(n) = n(n^2-4)(n-4)$， $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个截断函数，满足$\chi = 1$ 在 $[0,1]$ 上，且 $\chi = 0$ 在 $[2, \infty$上)，而 $\chi_\delta(r) = \chi(r/\delta)$。这里 G_p 表示 Paneitz 算子的格林函数，其极点位于 p，并且 $\delta > 0$ 的选取使得 $\epsilon \ll \delta$。

我们回顾格林函数的以下性质：对于 $0 \leq k \leq 3$,

$$\big|\nabla_g^k \big(G_p - r^{4-n} - A_p\big)\big| \leq C r^{1-k},$$

如 [39, 命题 2.5] 所示。常数 A_p 连续依赖于p，特别是，它在 p 中一致地具有正下界。

我们还定义

$$u_\epsilon := \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + r^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}.$$

引理 5.1. 在共形正规坐标中，对于任意径向函数 $f = f(r)$，有

$$P_g f = \Delta^2 f + O(r^2)\, f'' + O(r)\, f' + O(|Q_g|)\, f.$$

此外，对于这些坐标下的度量 g，

$$Q_g(p) = C(n)\, |W_g(p)|^2.$$

证明. 我们回顾 [39, 引理 4.2]，对于径向函数 f,

$$\Delta_g f = \Delta f + O(r^{N-1})\, f',$$

$$\Delta_g^2 f = \Delta^2 f + O(r^{N-1})\, f''' + O(r^{N-2})\, f'' + O(r^{N-3})\, f',$$

并且曲率量满足

$$\mathrm{Ric}_g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = O(r^2), \qquad |R_g| = O(r^2), \qquad |\nabla_g R_g| = O(r).$$

□

引理 5.2. 在 $B_{2\delta}(p)$中，我们有

$$P_g u_\epsilon - \mathfrak{c}(n) u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} = O(1)\, u_\epsilon.$$

证明。 在欧几里得空间中，标准泡满足

$$\Delta^2 u_\epsilon - \mathfrak{c}(n) u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} = 0.$$

由 [39, 引理 4.2], 我们得到展开式

$$P_g u_\epsilon - \mathfrak{c}(n) u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} = O\big(\epsilon^{-4} r^{N-2} (\epsilon^2 + r^2)^3\big)\, u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} + O(1)\, u_\epsilon.$$

注意到

$$\epsilon^{-4} r^{N-2} (\epsilon^2 + r^2)^3\, u_\epsilon^{\frac{8}{n-4}} = r^{N-2} (\epsilon^2 + r^2)^{-1} \le C,$$

在 $B_{2\delta}(p)$中一致成立，只要 δ 取得足够小。因此,

$$P_g u_\epsilon - \mathfrak{c}(n) u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} = O(1)\, u_\epsilon,$$

如所断言。 □

引理 5.3. 在 $B_{2\delta}(p) \setminus B_\delta(p)$中，我们有

$$\begin{aligned} &P_g\big(\chi_\delta (u_\epsilon - \epsilon^{\frac{n-4}{2}} G_p)\big) + \epsilon^{\frac{n-4}{2}} A_p P_g \chi_\delta \\ =&\mathfrak{c}(n) \chi_\delta u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} + O(1) u_\epsilon + O(\epsilon^{\frac{n}{2}} \delta^{-n-2}) + O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta^{-3}). \end{aligned}$$

证明. 令 $U_\epsilon = u_\epsilon - \epsilon^{\frac{n-4}{2}} G_{\bar{p}}$。在 $B_{2\delta}(x) \setminus B_\delta(x)$ 上，我们计算得

$$\begin{aligned} P_g\big(\chi_\delta U_\epsilon\big)(y) =& \chi_\delta (P_g - P_g 1) u_\epsilon + U_\epsilon P_g \chi_\delta \\ &+ \sum_{i=1}^{3} O(|\nabla^{4-i}\chi_\delta \cdot \nabla^i U_\epsilon|) + O(|\nabla \chi_\delta \cdot \nabla U_\epsilon|). \end{aligned}$$

利用 $|\nabla^i \chi_\delta| = O(\delta^{-i})$ 和 $\epsilon \ll \delta$，我们注意到

$$\begin{aligned} U_\epsilon =& \epsilon^{\frac{n-4}{2}} (r^2+\epsilon^2)^{-\frac{n-4}{2}} - \epsilon^{\frac{n-4}{2}} \big(r^{4-n} + A_p + O(r)\big) \\ =& O(\epsilon^{\frac{n}{2}} \delta^{2-n}) - A_p \epsilon^{\frac{n-4}{2}} + O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta); \\ |\nabla^i (u_\epsilon - \epsilon^{\frac{n-4}{2}} r^{4-n})| \le& C\epsilon^{\frac{n}{2}} \delta^{2-n-i} + C\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta^{1-i} \text{ for } i \le 4; \\ & P_g \chi_\delta = O(\delta^{-4}). \end{aligned}$$

汇总这些估计可得

$$\begin{aligned} & P_g\big(\chi_\delta U_\epsilon\big) + \epsilon^{\frac{n-4}{2}} A_p P_g \chi_\delta \\ =& \chi_\delta P_g U_\epsilon + O(\epsilon^{\frac{n}{2}} \delta^{-n-2}) + O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta^{-3}) \\ =& \mathfrak{c}(n) \chi_\delta u_\epsilon^{\frac{n+4}{n-4}} + O(1) u_\epsilon + O(\epsilon^{\frac{n}{2}} \delta^{-n-2}) + O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta^{-3}). \end{aligned}$$

□

命题 5.4。我们有

$$\begin{aligned} & \left| P_g v_{p,\epsilon} - \mu_\infty v_{p,\epsilon}^{\frac{n+4}{n-4}} + \left(\frac{\mathfrak{c}(n)}{\mu_\infty}\right)^{\frac{n-4}{8}} \epsilon^{\frac{n-4}{2}} A_p \cdot P_g \chi_\delta \right| \\ \le& C\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \mathbb{1}_{\{r\le 2\delta\}} + C\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta^{-3} \mathbb{1}_{\{\delta \le r \le 2\delta\}} + C\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\right)^{\frac{n+4}{2}} \mathbb{1}_{\{r\ge\delta\}}. \end{aligned}$$

证明。令 $U_1 = \big(\frac{\mathfrak{c}(n)}{\mu_\infty}\big)^{\frac{n-4}{8}} \epsilon^{\frac{n-4}{2}} \chi_\delta (\epsilon^2+r^2)^{-\frac{n-4}{2}}$。在区域 $\{r \le \delta\}$ 上，该估计可直接由引理 5.2 得到。在环域 $\{\delta \le r \le 2\delta\}$ 上，由引理 5.3 可得

$$\begin{aligned} & P_g v_{p,\epsilon} - \mu_\infty v_{p,\epsilon}^{\frac{n+4}{n-4}} + \left(\frac{\mathfrak{c}(n)}{\mu_\infty}\right)^{\frac{n-4}{8}} \epsilon^{\frac{n-4}{2}} A_p \cdot P_g \chi_\delta \\ =& \mu_\infty \chi_\delta^{-\frac{8}{n-4}} U_1^{\frac{n+4}{n-4}} - \mu_\infty v_{p,\epsilon}^{\frac{n+4}{n-4}} + O(1)\epsilon^{\frac{n-4}{2}} u_\epsilon + O(\epsilon^{\frac{n}{2}} \delta^{-n-2}) + O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}} \delta^{-3}). \end{aligned}$$

由于

$$\mu_\infty \chi_\delta^{-\frac{8}{n-4}} U_1^{\frac{n+4}{n-4}} - \mu_\infty v_{p,\epsilon}^{\frac{n+4}{n-4}} = O\left(\big(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\big)^{\frac{n+4}{2}}\right),$$

在该区域内，所需的界即可得出。

最后，在区域 $\{r \ge 2\delta\}$ 上，我们使用基本估计

$$\epsilon^{\frac{n-4}{2}} G_p \le C\big(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\big)^{\frac{n-4}{2}} \text{ on the set } \{r \ge \delta\}\ .$$

从而立即得到所述不等式。

□

命题 5.5。 如果 δ 足够小，则测试函数 $v_{p,\ \epsilon}$ 的 *Paneitz–Sobolev* 商满足

$$\mathcal{F}[v_{p,\epsilon}] \leq Y_4(S^n) - c\epsilon^{n-4} + C\delta\epsilon^{n-4} + C\delta^{-n+2}\epsilon^{n-2}$$

其中某个常数 $c > 0$ 与 ϵ 和 δ无关。

证明。 利用估计

$$\int_{\{r\leq 2\delta\}} \big(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\big)^{\frac{n-4}{2}} \leq C\delta^4\epsilon^{\frac{n}{2}-2},\ \int_{\{r\leq 2\delta\}} \big(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\big)^{n-4} \leq C\delta^{8-n}\epsilon^{n-4},$$

and

$$\int_{\{r\geq \delta\}} \big(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}\big)^{n} \leq C\delta^{-n}\epsilon^{n},$$

结合命题 5.4，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_M v_{p,\epsilon}\big(P_g v_{p,\epsilon} - \mu_\infty v_{p,\epsilon}^{\frac{n+4}{n-4}}\big)dv_g \\
\leq& -CA_p\int_M \epsilon^{\frac{n-4}{2}} v_{p,\epsilon}P_g\chi_\delta + C(\delta+\delta^{-n+8})\epsilon^{n-4} + C\delta^{-n+2}\epsilon^{n-2}.
\end{aligned}$$

现在我们估计主项:

$$\begin{aligned}
&\int_M \epsilon^{\frac{n-4}{2}} v_{p,\epsilon}P_g\chi_\delta dv_g \\
=&C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}\int_M \big(\chi_\delta(u_\epsilon - \epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p) + \epsilon^{\frac{n-4}{2}}G_p\big)P_g\chi_\delta \\
=&C\epsilon^{n-4}\left[C(n) + \int_M\left(\big(\frac{1}{\epsilon^2+r^2}\big)^{\frac{n-4}{2}} - \frac{1}{r^{n-4}} - A_p + O(\delta)\right)P_g\chi_\delta\right] \\
=&C(n)\epsilon^{n-4} + O(\delta^{n-4}\epsilon^{n-4}) + O(\delta^{-2}\epsilon^{n-2}),
\end{aligned}$$

其中 $C(n) > 0$ 是一个维数常数。

因此,

$$\int_M v_{p,\epsilon}\big(P_g v_{p,\epsilon} - \mu_\infty v_{p,\epsilon}^{\frac{n+4}{n-4}}\big) \leq (-CA_p + C\delta)\epsilon^{n-4} + C\delta^{-n+2}\epsilon^{n-2}. \tag{41}$$

接下来，我们估计分母:

$$\begin{aligned}
\int_M v_{p,\epsilon}^{\frac{2n}{n-4}}dv_g \leq& \left(\frac{\mathfrak{c}(n)}{\mu_\infty}\right)^{\frac{n}{4}}\left[\int_{\{r\leq\delta\}}\epsilon^n(\epsilon^2+r^2)^{-n} + C\int_{\{r\geq\delta\}}\epsilon^n(\epsilon^2+r^2)^{-n}\right] \\
\leq& \left(\frac{Y_4(S^n)}{\mu_\infty}\right)^{\frac{n}{4}} + C\delta^{-n}\epsilon^n.
\end{aligned}$$

将此估计与（41）结合，即得到所需的不等式。

□

5.2. **集中紧性原理**。

定义 5.6 (测试泡)。 设 ϕ_p 为在点 $p \in M$处生成共形正规坐标的共形因子。我们定义

$$\bar{u}_{(p,\epsilon)} := \begin{cases} \phi_p \, v_{p,\epsilon}, & \text{if } 5 \le n \le 7, \text{ where } v_{p,\epsilon} \text{ is defined in } (40), \\ \phi_p \, v_{p,\epsilon,\delta}, & \text{if } n \ge 8, \text{ where } v_{p,\epsilon,\delta} \text{ is defined in } (38). \end{cases}$$

注意， ϕ_p 可以选取得满足一致的正下界和上界，且这些界与 p 无关。

现在我们验证 Struwe 分解适用于我们的非局部流。给定一个时间序列 $t_\nu \to \infty$，我们写作

$$u_\nu := u(t_\nu), \qquad g_\nu := u_\nu^{\frac{4}{n-4}} g_0.$$

命题 5.7 ([44])**.** 设 $t_\nu \to \infty$ 是一个时间序列。取一个子列后，存在一个非负整数 m、一个非负光滑函数 u_∞，以及一个由 m 元组组成的序列

$$(p_{k,\nu}^*, \epsilon_{k,\nu}^*)_{1 \le k \le m}$$

具有以下性质:

(*a*) 函数 u_∞ 满足方程

$$-u_\infty + \mu_\infty P_{g_0}^{-1}\left(u_\infty^{\frac{n+4}{n-4}}\right) = 0.$$

(*b*) 对于所有 $i \neq j$，我们有

$$\frac{\epsilon_{i,\nu}^*}{\epsilon_{j,\nu}^*} + \frac{\epsilon_{j,\nu}^*}{\epsilon_{i,\nu}^*} + \frac{d(p_{i,\nu}^*, p_{j,\nu}^*)^2}{\epsilon_{i,\nu}^* \epsilon_{j,\nu}^*} \longrightarrow \infty.$$

(*c*) 我们有

$$\left\| u_\nu - u_\infty - \sum_{k=1}^{m} \bar{u}_{(p_{k,\nu}^*, \epsilon_{k,\nu}^*)} \right\|_{W^{2,2}(M)} \longrightarrow 0.$$

(*d*) 在 M 上处处有 $u_\infty \equiv 0$ 或 $u_\infty > 0$ 。

(*e*) 此外,

$$\mathcal{F}_\infty = \left(\mathcal{F}[u_\infty]^{\frac{n}{4}} + m \, Y_4(S^n)^{\frac{n}{4}} \right)^{\frac{4}{n}}.$$

证明。 对于我们的流，量 $\int_M u P_{g_0} u \; dv_{g_0}$ 沿流保持为常数，而 $\int_M u^{\frac{2n}{n-4}} \; dv_{g_0}$ 始终一致有界。此外，由命题 2.7,

$$\int_M \left| P_{g_0} u_\nu - \mu_\infty u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}} \right|^{\frac{2n}{n+4}} \; dv_{g_0} \longrightarrow 0.$$

因此， $\{u_\nu\}$ 是一个 Palais–Smale 序列，且 [44]的集中紧性结果适用。

性质 (d) 由[39]中所建立的强极大值原理得出。

为验证 (e)，我们使用下面的引理 5.9 并计算

$$\begin{aligned} V_\infty &= \lim_{\nu\to\infty}\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\ dv_{g_0} \\ &= \lim_{\nu\to\infty}\left(\int_M u_\infty^{\frac{2n}{n-4}}\ dv_{g_0} + \sum_{k=1}^m \int_M \bar{u}_{(p_{k,\nu}^*,\epsilon_{k,\nu}^*)}^{\frac{2n}{n-4}}\ dv_{g_0}\right) \\ &= \Big(\frac{\mathcal{F}[u_\infty]}{\mu_\infty}\Big)^{\frac{n}{4}} + m\Big(\frac{Y_4(S^n)}{\mu_\infty}\Big)^{\frac{n}{4}}. \end{aligned}$$

□

下文中，我们用 $d(p,\ \cdot)$ 表示相对于度量 g_0，从点 p 出发的距离函数。

引理 5.8。 当 ϵ 充分小时，有

$$\begin{aligned} &\left|P_{g_0}\bar{u}_{(p,\epsilon)} - \mu_\infty \bar{u}_{(p,\epsilon)}^{\frac{n+4}{n-4}}\right| \\ \le& C\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+d(p,\cdot)^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \mathbb{1}_{\{d(p,\cdot)\le 2\delta\}} + C\epsilon^{\frac{n-4}{2}}\delta^{-4}\mathbb{1}_{\{\delta\le d(p,\cdot)\le 2\delta\}} \\ &+ C\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+d(p,\cdot)^2}\right)^{\frac{n+4}{2}} \mathbb{1}_{\{d(p,\cdot)\ge\delta\}}. \end{aligned}$$

证明。 对于情形 $5\le n\le 7$，此估计可直接由命题 5.4 得出。情形 $n\ge 8$ 可由引理 4.1 和 4.2 轻易得出。 □

引理 5.9。 我们有如下估计：

$$\int_M \bar{u}_{(p_i,\epsilon_i)}\bar{u}_{(p_j,\epsilon_j)}^{\frac{n+4}{n-4}}\ dv_{g_0} \le C\left(\frac{\epsilon_j^2+d(p_i,p_j)^2}{\epsilon_i\epsilon_j}\right)^{-\frac{n-4}{2}}.$$

证明。 证明是标准的；参见 [11,引理 B.4]。 □

引理 5.10。 我们有如下估计

$$\begin{aligned} &\int_M \bar{u}_{(p_i,\epsilon_i)}\left|P_{g_0}\bar{u}_{(p_j,\epsilon_j)} - \mu_\infty\bar{u}_{(p_j,\epsilon_j)}^{\frac{n+4}{n-4}}\right| \\ \le& C\left(\delta^4+\delta^{n-4}+\frac{\epsilon_j^4}{\delta^4}\right)\left(\frac{\epsilon_j^2+d(p_i,p_j)^2}{\epsilon_i\epsilon_j}\right)^{-\frac{n-4}{2}}. \end{aligned}$$

证明。 我们只需考虑情形 $5\le n\le 7$。由引理 5.8 可得

$$\begin{aligned} \left|P_{g_0}\bar{u}_{(p_j,\epsilon_j)} - \mu_\infty\bar{u}_{(p_j,\epsilon_j)}^{\frac{n+4}{n-4}}\right|(y) \le& C(1+\delta^{n-8})\left(\frac{\epsilon_j}{\epsilon_j^2+d(p_j,y)^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}\mathbb{1}_{\{d(p_j,y)\le 4\delta\}} \\ &+ C\left(\frac{\epsilon_j}{\epsilon_j^2+d(p_j,y)^2}\right)^{\frac{n+4}{2}}\mathbb{1}_{\{d(p_j,y)\ge\frac{\delta}{2}\}}. \end{aligned}$$

在集合 $\{y \mid 2d(p_i,y) \le \epsilon_j + d(p_i,p_j)\} \cap \{d(y,p_j) \le 4\delta\}$ 上，我们有

$$\epsilon_j + d(y,p_j) \ge \epsilon_j + d(p_i,p_j) - d(p_i,y) \ge \frac{1}{2}(\epsilon_j + d(p_i,p_j)).$$

因此，

$$d(p_i,y) \le \frac{1}{2}(\epsilon_j + d(p_i,p_j)) \le \epsilon_j + d(y,p_j) \le 8\delta.$$

利用这一观察，我们估计

$$\begin{aligned}
&\int_{\{d(y,p_j)\le 4\delta\}} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_i^2 + d(p_i,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{\epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_j,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}}\, dv_{g_0} \\
\le &\int_{\{y \mid 2d(p_i,y)\le \epsilon_j + d(p_i,p_j)\} \cap \{d(y,p_j)\le 4\delta\}} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_i^2 + d(p_i,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{\epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_j,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
&+ \int_{\{y \mid 2d(p_i,y)\ge \epsilon_j + d(p_i,p_j)\} \cap \{d(y,p_j)\le 4\delta\}} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_i^2 + d(p_i,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{\epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_j,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
\le &C \int_{\{d(p_i,y)\le 8\delta\}} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_i^2 + d(p_i,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{\epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_i,p_j)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
&+ C \int_{\{d(y,p_j)\le 4\delta\}} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_i^2 + d(p_i,p_j)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{\epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_j,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
\le &C\delta^4 \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}} \epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_i,p_j)^2)^{\frac{n-4}{2}}}.
\end{aligned}$$

On the set $\{y \mid 2d(p_i,y) \le \epsilon_j + d(p_i,p_j)\} \cap \{d(y,p_j) \ge \frac{\delta}{2}\}$, we again have

$$\epsilon_j + d(y,p_j) \ge \epsilon_j + d(p_i,p_j) - d(p_i,y) \ge \frac{1}{2}(\epsilon_j + d(p_i,p_j)),$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\{d(y,p_j)\le 4\delta\}} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_i^2 + d(p_i,y)^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{\epsilon_j^{\frac{n+4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_j,y)^2)^{\frac{n+4}{2}}}\, dv_{g_0} \\
\le &C \frac{\epsilon_j^4}{\delta^4} \frac{\epsilon_i^{\frac{n-4}{2}} \epsilon_j^{\frac{n-4}{2}}}{(\epsilon_j^2 + d(p_i,p_j)^2)^{\frac{n-4}{2}}}.
\end{aligned}$$

结合以上估计，证明得证。 □

6. Blow-up analysis

6.1. 能量的二阶变分。 在本小节中，我们将建立沿流的 Paneitz–Sobolev 商二阶变分的一致估计。

我们首先回顾一些基本的谱性质。

命题 6.1. 假设 $u_\infty \not\equiv 0$。那么存在一个光滑函数序列 $\{\psi_a\}_{a\in\mathbb{N}}$ 和一个正实数序列 $\{\lambda_a\}_{a\in\mathbb{N}}$，具有以下性质：

(a) 对每个 $a \in \mathbb{N}$，函数 ψ_a 满足

$$P_{g_0}\psi_a - \lambda_a\, u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a = 0.$$

(b) 对所有 a、$b \in \mathbb{N}$，有正交归一关系

$$\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\psi_b\ dv = \delta_{ab}.$$

(c) $\{\psi_a \mid a \in \mathbb{N}\}$ 的线性张成在 $L^2(M)$中稠密。

(d) 特征值满足 $\lambda_a \to \infty$，当 $a \to \infty$时。

证明。 考虑线性算子

$$\phi \longmapsto u_\infty^{-\frac{8}{n-4}}\, P_{g_0}\phi.$$

该算子关于加权内积是对称的

$$(\phi_1, \phi_2) \longmapsto \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi_1\phi_2\ dv.$$

根据关于自伴算子的标准谱理论，结论随即得到。□

令 $A \subset \mathbb{N}$ 为由下式定义的有限集

$$A := \Big\{a \in \mathbb{N} \,:\, \lambda_a \le \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty\Big\}.$$

我们定义投影算子 Π为

$$\Pi\phi := \sum_{a\notin A}\bigg(\int_M \psi_a\phi\ dv\bigg)u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a = \phi - \sum_{a\in A}\bigg(\int_M \psi_a\phi\ dv\bigg)u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a.$$

引理 6.2。 假设 $u_\infty \not\equiv 0$。对于每个 $1 \le p < \infty$，存在一个常数 $C > 0$（仅取决于 p），使得

$$\|\phi\|_{L^p(M)} \le C\left\|P_{g_0}\phi - \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi\right\|_{L^p(M)} + C\sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\phi\ dv\right|.$$

证明。 我们证明该命题在 Case $p = 1$ 下成立；一般情形可类似得到。

假设结论不成立，则存在一个序列 $\{\phi_i\}$，使得

$$\|\phi_i\|_{L^1(M)} = 1,$$

and

$$\left\|P_{g_0}\phi_i - \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi_i\right\|_{L^1(M)} + \sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\phi_i\ dv\right| \longrightarrow 0.$$

由 Radon 测度的紧性，存在一个带符号 Radon 测度Φ，使得

$$\phi_i \rightharpoonup \Phi \qquad \text{and} \qquad \|\Phi\| = 1.$$

（这里我们将$\phi_i = \phi_i^+ - \phi_i^-$分解，并对每一部分应用紧性。）对于每个 $a \in \mathbb{N}$，我们计算

$$\begin{aligned}\left(\lambda_a - \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty\right)\Phi\left(u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\right) &= \lim_{i\to\infty}\int_M \phi_i\left(P_{g_0} - \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\right)\psi_a\ dv \\ &= 0.\end{aligned}$$

若 $a \notin A$，则 $\lambda_a - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty > 0$，因此

$$\Phi\left(u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\right) = 0.$$

对于 $a \in A$，根据假设，投影项消失，因此可得相同的结论。因此，

$$\Phi\left(u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\right) = 0 \qquad \text{for all } a \in \mathbb{N}.$$

由于特征函数 $\{\psi_a\}$ 的有限线性组合在$C^0(M)$中稠密，这意味着 $\Phi = 0$，这与 $\|\Phi\| = 1$矛盾。此矛盾完成了证明。

□

引理6.3。 假设 $u_\infty \not\equiv 0$。

(a) 存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)} \le C&\left\|\Pi\left(P_{g_0}\phi - \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi\right)\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)} \\ &+ C\sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\phi\ dv\right|.\end{aligned}$$

(b) 存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^1(M)} \le C&\left\|\Pi\left(P_{g_0}\phi - \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi\right)\right\|_{L^1(M)} \\ &+ C\sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\phi\ dv\right|.\end{aligned}$$

证明。 这由引理 6.2、椭圆算子的标准 L^p 估计以及该恒等式得出

$$\begin{aligned}&\left\|P_{g_0}\phi - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi\right\|_{L^p(M)} \\ =&\left\|\Pi\left(P_{g_0}\phi - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi\right) - \sum_{a\in A}\left(\lambda_a - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty\right)\left(\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\phi\right)u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\right\|_{L^p(M)}\end{aligned}$$

$$\leq \left\| \Pi\left(P_{g_0}\phi - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\phi \right) \right\|_{L^p(M)} + C \sup_{a\in A} \left| \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \psi_a \phi \right|$$

这由三角不等式成立。 □

引理 6.4。 假设 $u_\infty \not\equiv 0$。那么存在一个正常数$\zeta > 0$，使得对于满足 $|z| \leq \zeta$ 的每个向量 $z = (z_a)_{a\in A} \in \mathbb{R}^A$，都存在一个光滑函数 $\bar{u}_z$，使得

$$\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \left(\bar{u}_z - u_\infty\right) \psi_a \, dv = z_a \qquad for\ all\ a \in A,$$

and

$$\Pi\left(P_{g_0}\bar{u}_z - \mu_\infty \bar{u}_z^{\frac{n+4}{n-4}} \right) = 0.$$

此外，映射 $z \mapsto \bar{u}_z$ 是实解析的。

证明。 在 u_∞ 附近，Paneitz–Sobolev 泛函是实解析的，结论可由隐函数定理直接得到。 □

现在我们对 Struwe 分解作进一步细化。在 $u_\infty \not\equiv 0$ 的情形下，我们按如下方式进行。

对于每个 $\nu \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{A}_\nu$ 表示所有元组组成的集合

$$\left(z, (p_k, \epsilon_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq m}\right) \in \mathbb{R}^A \times (M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)^m$$

使得

$$|z| \leq \zeta$$

并且，对于每个 $1 \leq k \leq m$,

$$d(p_k, p_{k,\nu}^*) \leq \epsilon_{k,\nu}^*, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k,\nu}^*} \leq 2, \qquad \frac{1}{2} \leq \alpha_k \leq 2.$$

那么存在一个元组

$$\left(z_\nu, (p_{k,\nu}, \epsilon_{k,\nu}, \alpha_{k,\nu})_{1\leq k\leq m}\right) \in \mathcal{A}_\nu$$

使得

$$\left\| u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} - \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}\, \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right\|_{W^{2,2}(M)}$$

$$\leq \left\| u_\nu - \bar{u}_z - \sum_{k=1}^m \alpha_k\, \bar{u}_{(p_k,\epsilon_k)} \right\|_{W^{2,2}(M)} \tag{42}$$

对于所有 $\left(z, (p_k, \epsilon_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq m}\right) \in \mathcal{A}_\nu$。

在这种情形下 $u_\infty \equiv 0$，这可以看作上述构造的一个特例，其中 $z_\nu \equiv 0$ 和 $\bar{u}_{z_\nu} \equiv 0$。更确切地说，我们按如下方式进行。

对于每个 $\nu \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{A}_\nu$ 表示所有满足条件的 m 元组集合

$$(p_k, \epsilon_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq m} \in (M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)^m$$

使得

$$d(p_k, p^*_{k,\nu}) \le \epsilon^*_{k,\nu}, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{\epsilon_k}{\epsilon^*_{k,\nu}} \le 2, \qquad \frac{1}{2} \le \alpha_k \le 2, \tag{43}$$

对所有 $1 \le k \le m$。由于 $\mathcal{A}_\nu$ 是紧的，存在一个 m 元组

$$(p_{k,\nu}, \epsilon_{k,\nu}, \alpha_{k,\nu})_{1\le k\le m} \in \mathcal{A}_\nu$$

使得

$$\left\| u_\nu - \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}\, \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right\|_{W^{2,2}(M)} \le \left\| u_\nu - \sum_{k=1}^m \alpha_k\, \bar{u}_{(p_k,\epsilon_k)} \right\|_{W^{2,2}(M)}$$

对所有 $(p_k,\ \epsilon_k,\ \alpha_k)_{1\le k\le m} \in \mathcal{A}_\nu$。

不失一般性，我们假设当 $i \le j$ 时，$\epsilon_{i,\ \nu} \le \epsilon_{j,\ \nu}$。

命题 6.5. *(a)* 对所有 $i \ne j$，我们有

$$\frac{\epsilon_{i,\nu}}{\epsilon_{j,\nu}} + \frac{\epsilon_{j,\nu}}{\epsilon_{i,\nu}} + \frac{d(p_{i,\nu}, p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}} \longrightarrow \infty \qquad as\ \nu \to \infty.$$

(b) 我们有

$$\left\| u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} - \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}\, \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right\|_{W^{2,2}(M)} \longrightarrow 0 \qquad as\ \nu \to \infty.$$

证明. 第 (a) 部分直接由 (43) 得出。第 (b) 部分由极小化性质 (42) 以及命题 5.7 得出。□

命题 6.6. 我们有

$$|z_\nu| = o(1),$$

and

$$d(p_{k,\nu}, p^*_{k,\nu}) \le o(1)\, \epsilon^*_{k,\nu}, \qquad \frac{\epsilon_{k,\nu}}{\epsilon^*_{k,\nu}} = 1 + o(1), \qquad \alpha_{k,\nu} = 1 + o(1),$$

对所有 $1 \le k \le m$。特别地，该元组

$$(p_{k,\nu}, \epsilon_{k,\nu}, \alpha_{k,\nu})_{1\le k\le m}$$

对所有充分大的 ν，是 $\mathcal{A}_\nu$ 的一个内点。

证明。结论由该估计得出

$$\left\| \bar{u}_{z_\nu} + \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu} \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} - u_\infty - \sum_{k=1}^m \bar{u}_{(p^*_{k,\nu},\epsilon^*_{k,\nu})} \right\|_{W^{2,2}(M)}$$

$$\le \left\| u_\nu - u_\infty - \sum_{k=1}^m \bar{u}_{(p^*_{k,\nu},\epsilon^*_{k,\nu})} \right\|_{W^{2,2}(M)} + \left\| u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} - \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu} \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right\|_{W^{2,2}(M)}$$

$$= o(1),$$

以及引理 5.9。 □

我们将 u_ν 分解为

$$u_\nu = v_\nu + w_\nu,$$

其中

$$v_\nu := \bar{u}_{z_\nu} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,\nu}\, \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})},$$

and

$$w_\nu := u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,\nu}\, \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}.$$

根据命题 6.5，我们有 $\|w_\nu\|_{W^{2,\ 2}(M)} = o(1)$。

我们还指出，情形 $u_\infty \equiv 0$ 可以通过取 $\bar{u}_{z_\nu} \equiv 0$，视为上述分解的一个特例。

命题 6.7。我们有：

(a) 对于每个 $a \in A$，我们有

$$\left| \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \psi_a\, w_\nu \ dv_{g_0} \right| \leq o(1) \int_M |w_\nu| \ dv_{g_0}.$$

(b) 对每个 $1 \leq k \leq m$，有

$$\left| \int_M \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}} w_\nu \ dv_{g_0} \right| \leq o(1) \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0} \right)^{\frac{n-4}{2n}}.$$

(c) 对每个 $1 \leq k \leq m$，有

$$\left| \int_M \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}} \frac{\epsilon_{k,\nu}^2 - d(p_{k,\nu},x)^2}{\epsilon_{k,\nu}^2 + d(p_{k,\nu},x)^2} w_v \ dv_{g_0} \right|$$
$$\leq o(1) \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0} \right)^{\frac{n-4}{2n}}.$$

(d) 对每个 $1 \leq k \leq m$，有

$$\left| \int_M \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}} \frac{\epsilon_{k,\nu} \exp_{p_{k,\nu}}^{-1}(x)}{\epsilon_{k,\nu}^2 + d(p_{k,\nu},x)^2} w_v \ dv_{g_0} \right|$$
$$\leq o(1) \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0} \right)^{\frac{n-4}{2n}}.$$

证明。令 $\tilde{\psi}_{a,z} := \frac{\partial}{\partial z_a} \bar{u}_{z\circ}$ 对 z_a 求变分，得到

$$\int_M w_\nu\, P_{g_0} \tilde{\psi}_{a,z} \ dv_{g_0} = 0.$$

由此可得

$$\lambda_a \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \psi_a\, w_\nu \ dv_{g_0} = \int_M w_\nu\, P_{g_0} \psi_a \ dv_{g_0}$$
$$= \int_M w_\nu\, P_{g_0} \left(\psi_a - \tilde{\psi}_{a,z} \right) \ dv_{g_0}.$$

由于 $\lambda_a > 0$，这就证明了第 (a) 部分。

由极小化性质 (42)，对$\alpha_{k,\ \nu}$ 取变分可得

$$\int_M w_\nu \, P_{g_0} \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \ dv_{g_0} = 0.$$

利用引理 5.8，我们得到

$$\left\| P_{g_0} \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} - \mu_\infty \bar{u}^{\frac{n+4}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)} = o(1).$$

因此，

$$\begin{aligned} \left| \int_M \bar{u}^{\frac{n+4}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} w_\nu \ dv_{g_0} \right| &= \left| \int_M \left(\bar{u}^{\frac{n+4}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} - \frac{1}{\mu_\infty} P_{g_0} \bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right) w_\nu \ dv_{g_0} \right| \\ &\le o(1) \left\| w_\nu \right\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M)} \end{aligned}$$

由 H¨older 不等式。这证明了 (b) 部分。

(c) 和 (d) 部分的证明类似，采用关于尺度和平移参数的相应变分即可得到同样的结论。□

现在我们证明，在 v_ν 处，Paneitz–Sobolev 商的二次变分算子满足一致估计。

命题 6.8. 当 ν 充分大时，有

$$\frac{n+4}{n-4} \mu_\infty \int_M \left(u_\infty^{\frac{8}{n-4}} + \sum_{k=1}^m \bar{u}^{\frac{8}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right) w_\nu^2 \ dv_{g_0} \le (1-c) \left\| w_\nu \right\|^2_{W^{2,2}(M)},$$

其中常数 $c > 0$ 与 ν 无关。

证明. 我们先考虑情形 $u_\infty \not\equiv 0$，并用反证法进行论证。

经过重标度后，我们得到一个函数序列 $\{\tilde{w}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$，使得$\|\tilde{w}_\nu\|_{W^{2,2}(M)} = 1$ 并且

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{n+4}{n-4} \mu_\infty \int_M \left(u_\infty^{\frac{8}{n-4}} + \sum_{k=1}^m \bar{u}^{\frac{8}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \right) \tilde{w}_\nu^2 \ dv_{g_0} \ge 1.$$

此外，

$$\int_M |\tilde{w}_\nu|^{\frac{2n}{n-4}} \ dv_{g_0} \le Y_4(M, g_0)^{-\frac{n}{n-4}}.$$

我们选择一个序列 $\{N_\nu\}$，使得 $N_\nu \to \infty$、 $N_\nu \epsilon_{j,\ \nu} \to 0$ 对所有 j 均成立，并且

$$\frac{1}{N_\nu} \frac{\epsilon_{j,\nu} + d(p_{i,\nu}, p_{j,\nu})}{\epsilon_{i,\nu}} \longrightarrow \infty$$

对所有 $i < j$ 均成立。例如，可以取

$$N_\nu := \min_{i<j} \left\{ \left(\frac{\epsilon_{j,\nu} + d(p_{i,\nu}, p_{j,\nu})}{\epsilon_{i,\nu}} \right)^{1/2}, \ \epsilon_{j,\nu}^{-1/2} \right\}.$$

定义

$$\Omega_{j,\nu} := B_{N_\nu \epsilon_{j,\nu}}(p_{j,\nu}) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_{N_\nu \epsilon_{i,\nu}}(p_{i,\nu}).$$

情形 1. 存在一个整数 $1 \le j \le m$ 使得

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_M \bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{8}{n-4}} \tilde{w}_\nu^2 \, dv_{g_0} > 0,$$

and

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega_{j,\nu}} \Big((\Delta_{g_0}\tilde{w}_\nu)^2 - \big(4A_{g_0} - (n-2)\sigma_1(A_{g_0})\big)(\nabla\tilde{w}_\nu, \nabla\tilde{w}_\nu) + \frac{n-4}{2} Q_{g_0}\tilde{w}_\nu^2 \Big) \, dv_{g_0}$$
$$\le \lim_{\nu\to\infty} \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty \int_M \bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{8}{n-4}} \tilde{w}_\nu^2 \, dv_{g_0}.$$

现在定义函数序列 $\hat{w}_\nu : T_{p_{j,\nu}}M \to \mathbb{R}$，其定义为

$$\hat{w}_\nu(\xi) := \epsilon_{j,\nu}^{\frac{n-4}{2}} \, \tilde{w}_\nu\big(\exp_{p_{j,\nu}}(\epsilon_{j,\nu}\xi)\big), \qquad \xi \in T_{p_{j,\nu}}M.$$

根据尺度性质和Sobolev不等式，我们有

$$\limsup_{\nu\to\infty} \int_{\{\xi\in T_{p_{j,\nu}}M : |\xi|\le N_\nu\}} |\hat{w}_\nu(\xi)|^{\frac{2n}{n-4}} \, d\xi \le Y_4(M,g_0)^{-\frac{n}{n-4}}, \tag{44}$$

$$\limsup_{\nu\to\infty} \int_{\{\xi\in T_{p_{j,\nu}}M : |\xi|\le N_\nu\}} |\nabla_{g_e}\hat{w}_\nu(\xi)|^{\frac{2n}{n-2}} \, d\xi \le C(M,g_0). \tag{45}$$

注意，量 $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{g_e}\hat{w}_\nu(\xi)|^{\frac{2n}{n-2}} \, d\xi$ 也是尺度不变的。因此，估计 **(44)** 和 **(45)** 意味着，对于每个 $L > 0$，范数 $\|\hat{w}_\nu\|_{W^{1,2}(B_L(0))}$ 对所有充分大的 ν 均一致有界。

将此与 $\|\tilde{w}_\nu\|_{W^{2,2}(M)} = 1$ 结合，并利用 $W^{2,2}$-范数的尺度不变性，我们可以抽取一个子列，并找到 $\hat{w} \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\hat{w}_\nu \rightharpoonup \hat{w} \qquad \text{weakly in } W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

（这里利用 Bochner恒等式，通过有界区域上的拉普拉斯算子 L^2 范数来控制 Hessian矩阵 L^2 范数。）此外，以下结论成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^4 \hat{w}(\xi)^2 \, d\xi > 0, \tag{46}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_{g_e}\hat{w})^2 \, d\xi \le n(n+4) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^4 \hat{w}(\xi)^2 \, d\xi. \tag{47}$$

此外，根据命题 6.7，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^{\frac{n+4}{2}} \hat{w}(\xi) \, d\xi = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^{\frac{n+4}{2}} \frac{1-|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \, \hat{w}(\xi) \, d\xi = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^{\frac{n+4}{2}} \frac{\xi}{1+|\xi|^2}\, \hat{w}(\xi)\, d\xi = 0. \tag{48}$$

通过从北极进行立体投影，我们也可以在单位球面 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上进行研究。在这一对应关系下，定义

$$\hat{v}(\xi) := \left(\frac{2}{1+|\xi|^2}\right)^{-\frac{n-4}{2}} \hat{w}(\xi).$$

注意到

$$g_{\mathbb{S}^n} = \left(\frac{2}{1+|\xi|^2}\right)^2 |d\xi|^2.$$

此外，由于 $P_{g_{\mathbb{S}^n}}$ 是 $\Delta_{g_{\mathbb{S}^n}}$的多项式，其特征函数与 $\Delta_{g_{\mathbb{S}^n}}$的特征函数相同。

利用 Paneitz 算子的共形协变性，不等式 (47)等价于

$$\int_{\mathbb{S}^n} \hat{v}\, P_{g_{\mathbb{S}^n}} \hat{v}\ dv_{g_{\mathbb{S}^n}} \le \frac{n(n^2-4)(n+4)}{16} \int_{\mathbb{S}^n} \hat{v}^2\ dv_{g_{\mathbb{S}^n}}.$$

恒等式 (48)表明，$\hat{v}$ 相对于 $L^2(\mathbb{S}^n)$与常数函数 1 以及 $\mathbb{R}^{n+1}$上的坐标函数 x_1、.....、x_{n+1} 正交，它们对应于 $P_{g_{\mathbb{S}^n}}$的第一和第二特征空间。众所周知，

$$P_{g_{\mathbb{S}^n}} = \Delta_{g_{\mathbb{S}^n}}^2 - \frac{n^2-2n-4}{2}\Delta_{g_{\mathbb{S}^n}} + \frac{n(n^2-4)(n-4)}{16},$$

并且 $\Delta_{g_{\mathbb{S}^n}}$ 在0和 n 之后的下一个特征值为2($n+1$)。于是，直接计算表明，在正交条件(48)下，

$$\int_{\mathbb{S}^n} \hat{v}\, P_{g_{\mathbb{S}^n}} \hat{v}\ dv_{g_{\mathbb{S}^n}} > \frac{n(n^2-4)(n+4)}{16} \int_{\mathbb{S}^n} \hat{v}^2\ dv_{g_{\mathbb{S}^n}},$$

除非$\hat{v} \equiv 0$。这与前面的不等式矛盾，从而完成了论证。

Case 2. 假设

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \tilde{w}_\nu^2\ dv_{g_0} > 0,$$

并且

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{M\setminus\bigcup_{j=1}^m \Omega_{j,\nu}} \Big((\Delta_{g_0}\tilde{w}_\nu)^2 - \big(4A_{g_0} - (n-2)\sigma_1(A_{g_0})\big)(\nabla\tilde{w}_\nu, \nabla\tilde{w}_\nu) + \frac{n-4}{2} Q_{g_0}\tilde{w}_\nu^2\Big)$$
$$\le \lim_{\nu\to\infty} \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \tilde{w}_\nu^2\ dv_{g_0}.$$

令 $\tilde{w}$ 表示序列 $\{\tilde{w}_\nu\}$的弱极限。则

$$\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}} \tilde{w}^2\ dv_{g_0} > 0,$$

and

$$\int_M \tilde{w}\, P_{g_0}\tilde{w}\ dv_{g_0} \le \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\tilde{w}^2\ dv_{g_0}.$$

根据控制收敛定理。等价地，

$$\sum_a \lambda_a \Big(\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\tilde{w}\ dv_{g_0}\Big)^2 \le \frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty \int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\tilde{w}^2\ dv_{g_0}.$$

然而，根据命题 6.7，我们有

$$\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\tilde{w}\ dv_{g_0} = 0 \qquad \text{for all } a \in A.$$

由此可得 $\tilde{w} \equiv 0$，这与 $\int_M u_\infty^{n-4}\tilde{w}^2\ dv_{g_0} > 0$. 矛盾

最后，我们注意到，**情形 1** 中的论证可原样应用于情形 $u_\infty \equiv 0$，因此也完成了该情形下的证明。

□

推论 *6.9. </style}*当 ν 充分大时，我们有

$$\frac{n+4}{n-4}\,\mu_\infty \int_M v_\nu^{\frac{8}{n-4}} w_\nu^2\ dv_{g_0} \le (1-c)\,\|w_\nu\|^2_{W^{2,2}(M)},$$

其中某个常数 $c > 0$ 与 ν 无关。

证明。 根据 v_ν 的定义和引理 5.9，我们有

$$\int_M \Big| v_\nu^{\frac{8}{n-4}} - u_\infty^{\frac{8}{n-4}} - \sum_{j=1}^m \bar{u}^{\frac{8}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\Big|^{\frac{n}{4}}\ dv_{g_0} = o(1).$$

由命题 6.8 和 Paneitz–Sobolev 不等式可得断言：

$$\begin{aligned}
&\frac{n+4}{n-4}\mu_\infty \int_M v_\nu^{\frac{8}{n-4}} w_\nu^2 \\
\le &\frac{n+4}{n-4}\mu_\infty \int_M \Big| v_\nu^{\frac{8}{n-4}} - \sum_{j=1}^m \bar{u}^{\frac{8}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\Big| w_\nu^2 + (1-c)\|w_\nu\|_{W^{2,2}(M)} \\
\le &\left| \int_M \Big| v_\nu^{\frac{8}{n-4}} - \sum_{j=1}^m \bar{u}^{\frac{8}{n-4}}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\Big|^{\frac{n}{4}} \right|^{\frac{4}{n}} \cdot \|w_\nu\|^2_{W^{2,2}(M)} + (1-c)\|w_\nu\|^2_{W^{2,2}(M)}.
\end{aligned}$$

□

6.2. **能量估计**。 本小节中，我们为 v_ν 建立能量估计。我们先给出一个有限维的 Łojasiewicz–Simon 不等式。

引理 6.10。 假设 $u_\infty \not\equiv 0$。那么存在实数 $0 < \gamma < 1$，使得

$$\mathcal{F}[\bar{u}_z] - \mathcal{F}[u_\infty] \le C \sup_{a\in A} \left| \int_M \psi_a \big(P_{g_0}\bar{u}_z - \mu_\infty \bar{u}_z^{\frac{n+4}{n-4}} \big) \right|^{1+\gamma}$$

前提是 z 足够小。

证明。 在 u_∞的一个邻域内，Paneitz–Sobolev 商是实解析的。因此， Łojasiewicz 不等式适用于限制在由 $\bar{u}_z$张成的有限维空间上的 Paneitz–Sobolev 商，从而得到所需的估计。 □

现在我们估计差值 $u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}$。 关键点在于，估计 $u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} + f_\nu$ 比估计 $u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}$ 更为方便。

引理 6.11。 我们有如下恒等式:

$$\begin{aligned}
&\Pi\bigg(P_{g_0}(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} + f_\nu) - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} + f_\nu)\bigg)\\
=&\Pi\bigg(-\frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}} f_\nu - (\mu_\infty - \mu(t_\nu))u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\\
&+\frac{n+4}{n-4}\mu_\infty(\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}} - u_\infty^{\frac{8}{n-4}})(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu})\\
&-\mu_\infty\big(\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}} + \frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}) - u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\big)\bigg).
\end{aligned}$$

证明。 利用恒等式

$$-P_{g_0}u_\nu + \mu_\infty u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}} = P_{g_0}f_\nu + (\mu_\infty - \mu(t_\nu))u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}$$

and

$$\Pi\big(P_{g_0}\bar{u}_{z_\nu} - \mu_\infty \bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\big) = 0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\Pi\bigg(P_{g_0}(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}) - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu})\bigg)\\
=&\Pi\bigg(-P_{g_0}f - (\mu_\infty - \mu(t_\nu))u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}} + \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty(\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}} - u_\infty^{\frac{8}{n-4}})(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu})\\
&-\mu_\infty\big(\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}} + \frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}) - u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\big)\bigg).
\end{aligned}$$

[8]在两边同时加上 $\Pi\big(P_{g_0}f_\nu - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty u_\infty^{n-4} f_\nu\big)$，即可得到所述恒等式。 □

引理 6.12。 差值 $u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}$ 满足以下估计

$$\|u_\nu - \bar{u}_{z_\nu}\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}^{\frac{n+4}{n-4}} \le C\bigg(\|f_\nu\|_{W^{2,2}(M)}^{\frac{n+4}{n-4}} + (\mu(t_\nu) - \mu_\infty)^{\frac{n+4}{n-4}} + \sum_{k=1}^{m}\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}\bigg).$$

证明。 由引理6.11和引理6.3，我们得到估计

$$\begin{aligned}
&\|u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} + f_\nu\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}\\
\le& C\sup_{a\in A}\bigg|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a(u_\nu - \bar{u}_{z_\nu} + f_\nu)\,dv_{g_0}\bigg|\\
&+C\|u_\infty^{\frac{8}{n-4}} f_\nu\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)} + C\|(\mu_\infty - \mu(t_\nu))u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\|(\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}-u_\infty^{\frac{8}{n-4}})(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}\\
&+C\left\|\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}+\frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})-u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}\\
\leq& C\sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})\,dv_{g_0}\right|+C\|f_\nu\|_{W^{2,2}(M)}+C(\mu(t_\nu)-\mu_\infty)\\
&+C\left\|\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}+\frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})-u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}
\end{aligned}
$$

这里我们用到了 $^{n}(\frac{n+4}{n^2+16}<\frac{n+4}{n-4})$ 以及 $\|\bar{u}_{z_\nu}-u_\infty\|_{C^\infty(M)}$ 很小这一点。利用逐点估计

$$
\begin{aligned}
&\left|\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}+\frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})-u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\right|\\
\leq& C\bar{u}_{z_\nu}^{\max\{0,\frac{8}{n-4}-1\}}|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\min\{\frac{n+4}{n-4},2\}}+C|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{n+4}{n-4}},
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}+\frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})-u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}\\
\leq& C\left\||u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\min\{\frac{n+4}{n-4},2\}}+|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}\\
\leq& C\left\||u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\min\{\frac{n+4}{n-4},2\}}+|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(\cup_{k=1}^m B_{N\epsilon_{k,\nu}}(p_{k,\nu}))}\\
&+C\left\||u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\min\{\frac{n+4}{n-4},2\}}+|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M\setminus\cup_{k=1}^m B_{N\epsilon_{k,\nu}}(p_{k,\nu}))}\\
&\leq C\sum_{k=1}^m(N\epsilon_{k,\nu})^{\frac{(n-4)^2}{2(n+4)}}\left\||u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\min\{\frac{n+4}{n-4},2\}}+|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)}\\
&+C\left\||u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\min\{\frac{8}{n-4},1\}}+|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{8}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n}{4}}(M\setminus\cup_{k=1}^m B_{N\epsilon_{k,\nu}}(p_{k,\nu}))}\\
&\cdot\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M\setminus\cup_{k=1}^m B_{N\epsilon_{k,\nu}}(p_{k,\nu}))}
\end{aligned}
$$

由 H¨older 不等式可得。由于

$$
\begin{aligned}
&\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M\setminus\cup_{k=1}^m B_{N\epsilon_{k,\nu}}(p_{k,\nu}))}\\
\leq&\sum_{k=1}^m\alpha_{k,\nu}\|\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M\setminus\cup_{k=1}^m B_{N\epsilon_{k,\nu}}(p_{k,\nu}))}+\|w_\nu\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M)}\\
\leq& CN^{-\frac{n-4}{2}}+o(1),
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}&\left\|\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}+\frac{n+4}{n-4}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})-u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\right\|_{L^{\frac{n(n+4)}{n^2+16}}(M)}\\ \leq& C\sum_{k=1}^m(N\epsilon_{k,\nu})^{\frac{(n-4)^2}{2(n+4)}}+(CN^{-2}+o(1))\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}.\end{aligned}$$

最后，我们估计

$$\begin{aligned}&\sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a(u_\nu-\bar{u}_{z_\nu})\,dv_{g_0}\right|\\ =&\sup_{a\in A}\left|\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a\left(\sum_{k=1}^m\alpha_{k,\nu}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}+w_\nu\right)dv_{g_0}\right|\\ \leq& C\sum_{k=1}^m\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}+o(1)\|w_\nu\|_{L^1(M)}\\ \leq& C\sum_{k=1}^m\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}+o(1)\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}-\sum_{k=1}^m\alpha_{k,\nu}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\|_{L^1(M)}\\ \leq& C\sum_{k=1}^m\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}+o(1)\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^1(M)}.\end{aligned}$$

综合上述估计，我们得出

$$\begin{aligned}&\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}+f\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}\\ \leq& C\|f_\nu\|_{W^{2,2}(M)}+C(\mu(t_\nu)-\mu_\infty)+C\sum_{k=1}^m\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}\\ &+C\sum_{k=1}^m(N\epsilon_{k,\nu})^{\frac{(n-4)^2}{2(n+4)}}+(CN^{-2}+o(1))\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}.\end{aligned}$$

选取足够大的 N 并应用三角不等式，我们便得到所需的估计。事实上，

$$\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}\leq\|u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}+f\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}+\|f\|_{W^{2,2}(M)}.$$

□

引理 6.13. 差 $u_\nu-\bar{u}_{z_\nu}$ 满足估计

$$\|u_z-\bar{u}_{z_\nu}\|_{L^1(M)}\leq C(\|f\|_{W^{2,2}(M)}+\mu(t_\nu)-\mu_\infty)+C\sum_{k=1}^m\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}$$

对所有充分大的 ν。

证明。 证明与引理 6.12 的证明类似。

□

引理 6.14。 当 ν 充分大时，我们有

$$\sup_{a\in A}\left|\int_M \psi_a\big(P_{g_0}\bar{u}_{z_\nu}-\mu_\infty \bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\big)\,dv_{g_0}\right| \le C(\|f\|_{W^{2,2}(M)}+\mu(t_\nu)-\mu_\infty)+C\sum_{k=1}^m \epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}.$$

证明。 通过分部积分，

$$\begin{aligned}
&\int_M \psi_a\big(P_{g_0}\bar{u}_{z_\nu}-\mu_\infty \bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\big)\\
=&\int_M \psi_a\big(P_{g_0}u_\nu-\mu_\infty u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\big)+\lambda_a\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a(\bar{u}_{z_\nu}-u_\nu)\\
&+\mu_\infty\int_M \psi_a(u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}-\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}})\\
=&\int_M \psi_a\big(-P_{g_0}f-(\mu_\infty-\mu(t_\nu))u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\big)+\lambda_a\int_M u_\infty^{\frac{8}{n-4}}\psi_a(\bar{u}_{z_\nu}-u_\nu)\\
&+\mu_\infty\int_M \psi_a(u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}-\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}).
\end{aligned}$$

利用逐点估计

$$|u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}-\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}|\le C\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{8}{n-4}}|u_z-\bar{u}_{z_\nu}|+C|u_z-\bar{u}_{z_\nu}|^{\frac{n+4}{n-4}},$$

我们证明

$$\begin{aligned}
&\left|\int_M \psi_a\big(P_{g_0}\bar{u}_{z_\nu}-\mu_\infty \bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\big)\right|\\
\le& C\bigg(\|f\|_{W^{2,2}(M)}+(\mu(t_\nu)-\mu_\infty)+\|\bar{u}_{z_\nu}-u_z\|_{L^1(M)}+\|\bar{u}_{z_\nu}-u_z\|_{L^{\frac{n+4}{n-4}}(M)}^{\frac{n+4}{n-4}}\bigg).
\end{aligned}$$

所求估计现在由引理 6.12 和 6.13 得出。

□

命题 6.15。 当 ν 充分大时，$\bar{u}_{z_\nu}$ 的 *Paneitz–Sobolev* 商满足

$$\mathcal{F}[\bar{u}_{z_\nu}]-\mathcal{F}[u_\infty]\le C\bigg(\|f_\nu\|_{W^{2,2}(M)}^{1+\gamma}+(\mu(t_\nu)-\mu_\infty)^{1+\gamma}+\sum_{k=1}^m \epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}(1+\gamma)}\bigg).$$

证明。 这是引理 6.10 和引理 6.14 的直接推论。 □

命题 6.16。 v_ν 的 *Paneitz–Sobolev* 商满足如下估计

$$\mathcal{F}[v_\nu]\le\left(\mathcal{F}[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}+\sum_{k=1}^m \mathcal{F}[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{n}}-c\sum_{k=1}^m \epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}$$

对所有充分大的 ν 均成立。

证明。 直接计算可得

$$\mathcal{F}[v_\nu]\bigg(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\bigg)^{\frac{n}{n-4}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M \mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \int_M \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}^2 \mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}} \\
&\quad + 2\int_M \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}\bar{u}_{z_\nu} P_{g_0}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} + 2\int_M \sum_{i<j} \alpha_{i,\nu}\alpha_{j,\nu}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})} P_{g_0}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}.
\end{aligned}
$$

此外,

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{F}[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}} + \sum_{k=1}^m \mathcal{F}[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{n}} \left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}} \\
=&\left(\int_M \left(\mu[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \sum_{k=1}^m \mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right) dv_{g_0}\right)^{\frac{4}{n}} \cdot \left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\, dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}} \\
\geq& \int_M \left(\mu[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \sum_{k=1}^m \mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}} v_\nu^2\, dv_{g_0} \\
\geq& \int_M \mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}^2\mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}} \\
&+ 2\int_M \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu}\left(\mu[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}} \bar{u}_{z_\nu}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \\
&+ 2\int_M \sum_{i<j} \alpha_{i,\nu}\alpha_{j,\nu}\left(\mu[\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}} + \mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}} \bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}
\end{aligned}
$$

其中我们使用了 H¨older 不等式。

固定 $1 \leq k \leq m$。利用不等式

$$
\begin{aligned}
&\left(\mu[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}} \bar{u}_{z_\nu}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \\
&\geq \mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} + c\epsilon_{k,\nu}^{-\frac{n+4}{2}}\mathbb{1}_{\{d(p_{k,\nu},x)\leq\epsilon_{k,\nu}\}},
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_M \left(\mu[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}} + \mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}} \bar{u}_{z_\nu}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})} \\
&\geq \int_M \mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\, dv_{g_0} + c\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}
\end{aligned}
$$

当 ν 充分大时。

考虑一对 $i < j$。我们可以找到正数常数 c 和 C，它们与 ν无关，使得

$$
\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}(x)^{\frac{n+4}{n-4}}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}(x) \geq c\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2 + d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}\epsilon_{i,\nu}^{-n}
$$

and

$$\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}(x)\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}(x)^{\frac{n+4}{n-4}} \le C\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2+d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}\epsilon_{i,\nu}^{-n}$$

只要 $d(p_{i,\nu},x)\le\epsilon_{i,\nu}$ 且 ν 足够大。由此可得

$$\begin{aligned}&\left(\mu[\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}+\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}\\ \ge&\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}+c\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2+d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}\epsilon_{i,\nu}^{-n}\mathbb{1}_{\{d(p_{i\nu},x)\le\epsilon_{i,\nu}\}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_M\left(\mu[\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}+\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{4}{n}}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}\\ \ge&\int_M\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}\,dv_{g_0}+c\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2+d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}\end{aligned}$$

当 ν 充分大时。

将上述不等式相加，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{F}[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}+\sum_{k=1}^m\mathcal{F}[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{n}}\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}}\\ \ge&\int_M\left(\mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{2n}{n-4}}+\sum_{k=1}^m\alpha_{k,\nu}^2\mu[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}^{\frac{2n}{n-4}}+2\alpha_{k,\nu}\mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\right.\\ &\left.+2\sum_{i<j}\alpha_{i,\nu}\alpha_{j,\nu}\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}\right)dv_{g_0}\\ &+c\sum_{k=1}^m\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}+c\sum_{i<j}\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2+d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[v_\nu]\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n}{n-4}}\\ \le&\left(\mathcal{F}[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}}+\sum_{k=1}^m\mathcal{F}[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{n}}\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}}\\ &+2\int_M\sum_{k=1}^m\alpha_{k,\nu}\left(P_{g_0}\bar{u}_{z_\nu}-\mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\right)\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\\ &+2\int_M\sum_{i<j}\alpha_{i,\nu}\alpha_{j,\nu}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\left(P_{g_0}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}-\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}\right)dv_{g_0}\end{aligned}$$

$$- c\sum_{k=1}^{m}\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}} - c\sum_{i<j}\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2 + d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}.$$

我们注意到

$$\int_M \left|P_{g_0}\bar{u}_{z_\nu} - \mu[\bar{u}_{z_\nu}]\bar{u}_{z_\nu}^{\frac{n+4}{n-4}}\right|\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}\,dv_{g_0} \le o(1)\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}.$$

由于 $\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}] = \mu_\infty + o(1)$，由引理 5.10 可知

$$\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i<j}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\left|P_{g_0}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})} - \mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}]\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}\right| dv_{g_0}\\
\le&\int_M \sum_{i<j}\bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\left|P_{g_0}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})} - \mu_\infty\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}\right| dv_{g_0}\\
&+\left|\mu[\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}] - \mu_\infty\right|\int_m \bar{u}_{(p_{i,\nu},\epsilon_{i,\nu})}\bar{u}_{(p_{j,\nu},\epsilon_{j,\nu})}^{\frac{n+4}{n-4}}\,dv_{g_0}\\
\le&C\left(\delta^4 + \delta^{n-4} + \frac{\epsilon_{j,\nu}^4}{\delta^4}\right)\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2 + d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}} + o(1)\left(\frac{\epsilon_{j,\nu}^2 + d(p_{i,\nu},p_{j,\nu})^2}{\epsilon_{i,\nu}\epsilon_{j,\nu}}\right)^{-\frac{n-4}{2}}
\end{aligned}$$

对于 $i<j$。取足够小的 δ，并注意到常数 c 与 δ无关，我们便得到所需的估计。□

推论 6.17. 当 ν 充分大时，v_ν 的 *Paneitz–Sobolev* 常数满足

$$\mathcal{F}[v_\nu] \le \left(\mathcal{F}[u_\infty]^{\frac{n}{4}} + mY_4(S^n)^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{n}} + C\left(\|f_\nu\|_{W^{2,2}(M)}^{1+\gamma} + (\mu(t_\nu)-\mu_\infty)^{1+\gamma}\right).$$

证明. 由命题 6.15 和 6.16 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[v_\nu] \le&\left(\mathcal{F}[\bar{u}_{z_\nu}]^{\frac{n}{4}} + \sum_{k=1}^{m}\mathcal{F}[\bar{u}_{(p_{k,\nu},\epsilon_{k,\nu})}]^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{n}} - c\sum_{k=1}^{m}\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}\\
\le&\left[\left(\mathcal{F}[u_\infty] + C\big(\|f_\nu\|_{W^{2,2}(M)}^{1+\gamma} + (\mu(t_\nu)-\mu_\infty)^{1+\gamma} + \sum_{k=1}^{m}\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}(1+\gamma)}\big)\right)^{\frac{n}{4}}\right.\\
&\left.+ mY_4(S^n)^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}} - c\sum_{k=1}^{m}\epsilon_{k,\nu}^{\frac{n-4}{2}}.
\end{aligned}$$

利用基本代数不等式

$$(x+y)^{\frac{n}{4}} \le x^{\frac{n}{4}} + Cyx^{\frac{n}{4}-1}, \quad (x+y)^{\frac{4}{n}} \le x^{\frac{4}{n}} + Cyx^{\frac{4}{n}-1}$$

对 $0<y\ll x$ 成立，我们得到所需的估计。

我们还指出，在情形 $u_\infty \equiv 0$下，同样的论证可得出更强的不等式

$$\mathcal{F}[v_\nu] \le \big(mY_4(S^n)^{\frac{n}{4}}\big)^{\frac{4}{n}}.$$

□

7. Proof of Theorem 1.1

引理 7.1. 设 $x \geq y > 0$ 为实数，则以下不等式成立：

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \leq \frac{n}{n-4}\left(\frac{1}{y^{\frac{n}{n-4}}} - \frac{1}{x^{\frac{n}{n-4}}}\right) y^{-\frac{4}{n}}, \tag{49}$$

$$x^{\frac{4}{n}} - y^{\frac{4}{n}} \leq \frac{4}{n-4}\left(\frac{1}{y^{\frac{n}{n-4}}} - \frac{1}{x^{\frac{n}{n-4}}}\right) x. \tag{50}$$

证明。(49) 等价于

$$x - y \leq \frac{n}{n-4}\left(x^{\frac{n-4}{n}} - y^{\frac{n-4}{n}}\right) x^{\frac{4}{n}}.$$

令 $y = 1$, $x = 1 + \alpha$ 对不等式进行归一化后，该不等式等价于

$$(1+\alpha)^{\frac{4}{n}} \leq 1 + \frac{4}{n}\alpha,$$

这由伯努利不等式得出。(50) 的证明同理。□

命题 7.2。 设 $\{t_\nu\}$ 是一个满足 $t_\nu \to \infty$ 的序列。那么存在一个数 $0 < \gamma < 1$ 和一个常数 $C > 0$，使得取一个子列后，我们有

$$\mathcal{F}(t_\nu) - \mathcal{F}_\infty \leq C\left(\int_M f(t_\nu)\, P_{g_0} f(t_\nu)\ dv_{g_0}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}. \tag{51}$$

证明。 我们计算：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(t_\nu)\left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}} \\
=&\int_M v_\nu P_{g_0} v_\nu + 2w_\nu P_{g_0} u_\nu - w_\nu P_{g_0} w_\nu \\
=&\int_M v_\nu P_{g_0} v_\nu + 2w_\nu\big(-P_{g_0} f(t_\nu) + \mu(t_\nu) u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}\big) - w_\nu P_{g_0} w_\nu \\
=&\mathcal{F}[v_\nu]\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}} + 2\int_M \mu(t_\nu) u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}} w_\nu - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty v_\nu^{\frac{8}{n-4}} w_\nu^2 \\
&- 2\int_M w_\nu P_{g_0} f(t_\nu) - \int_M w_\nu\left(P_{g_0} w_\nu - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty v_\nu^{\frac{8}{n-4}} w_\nu\right).
\end{aligned}$$

接下来，我们进行估计

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[v_\nu]\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}} + 2\int_M \mu(t_\nu) u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}} w_\nu - \frac{n+4}{n-4}\mu_\infty v_\nu^{\frac{8}{n-4}} w_\nu^2 \\
=&\mathcal{F}_\infty\left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}} + 2(\mu(t_\nu) - \mu_\infty)\int_M u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}} w_\nu
\end{aligned}$$

$$+\mu_\infty\int_M 2u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}w_\nu-\frac{n+4}{n-4}v_\nu^{\frac{8}{n-4}}w_\nu^2+\frac{n-4}{n}v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}-\frac{n-4}{n}u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}$$
$$+\left[\mathcal{F}[v_\nu]-\frac{n-4}{n}\mu_\infty\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{4}{n}}\right]\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}-\frac{4}{n}\mu_\infty\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}$$
$$-\left[\mathcal{F}_\infty-\mu_\infty\Big(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{4}{n}}\right]\Big(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}.$$

回顾一下，$\int_M uP_{g_0}u$ 在流下保持不变，由引理 7.1 可得

$$\begin{aligned}(\mu(t_\nu)-\mu_\infty)\int_M u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}w_\nu&=o(1)\Big(\frac{1}{V(t_\nu)}-\frac{1}{V_\infty}\Big)\int_M uP_{g_0}u\\&\le o(1)\Big(\frac{1}{V(t_\nu)^{\frac{n-4}{n}}}-\frac{1}{V_\infty^{\frac{n-4}{n}}}\Big)\int_M uP_{g_0}u\\&=o(1)(\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty).\end{aligned}$$

此外，根据杨氏不等式，

$$\begin{aligned}&\left[\mathcal{F}[v_\nu]-\frac{n-4}{n}\mu_\infty\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{4}{n}}\right]\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}-\frac{4}{n}\mu_\infty\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\\=&(\mathcal{F}[v_\nu]-\mathcal{F}_\infty)\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}-\mu_\infty\left[\int_M\frac{4}{n}u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}+\frac{n-4}{n}v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}-V_\infty^{\frac{4}{n}}\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}\right]\\\le&(\mathcal{F}[v_\nu]-\mathcal{F}_\infty)\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}+\mu_\infty(V_\infty^{\frac{4}{n}}-V(t_\nu)^{\frac{4}{n}})\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}.\end{aligned}$$

然后，再次根据引理 7.1，我们估计

$$\begin{aligned}&\mu_\infty(V_\infty^{\frac{4}{n}}-V(t_\nu)^{\frac{4}{n}})\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}-\left[\mathcal{F}_\infty-\mu_\infty\Big(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{4}{n}}\right]\Big(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}\\=&\mu_\infty(V_\infty^{\frac{4}{n}}-V(t_\nu)^{\frac{4}{n}})\left[\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}-\Big(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)^{\frac{n-4}{n}}\right]\\\le&C(\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty)\cdot\left|\Big(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)-\Big(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\Big)\right|\cdot\min\left\{\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}},\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right\}^{-\frac{4}{n}}\\\le&C(\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty)\cdot\left|\int_M w_\nu v_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}+w_\nu^2v_\nu^{\frac{8}{n-4}}+|w_\nu|^{\frac{2n}{n-4}}\right|\cdot\min\left\{\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}},\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right\}^{-\frac{4}{n}}\\=&o(1)(\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty).\end{aligned}$$

利用一个纯代数不等式（可视为关于 w_ν 的泰勒展开），

$$\begin{aligned}&\left|2(v_\nu+w_\nu)^{\frac{n+4}{n-4}}w_\nu-\frac{n+4}{n-4}v_\nu^{\frac{8}{n-4}}w_\nu^2+\frac{n-4}{n}v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}-\frac{n-4}{n}(v_\nu+w_\nu)^{\frac{2n}{n-4}}\right|\\\le&Cv_\nu^{\max\{0,\frac{8}{n-4}-1\}}|w_\nu|^{\min\{\frac{2n}{n-4},3\}}+C|w_\nu|^{\frac{2n}{n-4}},\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\mu[v_\nu]\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)+\int_M\frac{2n}{n-4}\mu(t_\nu)u_\nu^{\frac{n+4}{n-4}}w_\nu-\frac{n(n+4)}{(n-4)^2}\mu_\infty v_\nu^{\frac{8}{n-4}}w_\nu^2\\
&\quad\le C\left(\int_M|w_\nu|^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}\min\{\frac{n}{n-4},\frac{3}{2}\}}\\
&\quad\le o(1)\int_M w_\nu P_{g_0}w_\nu.
\end{aligned}$$

应用推论 6.9 并汇总上述估计，我们得出

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(t_\nu)\left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}}\\
\le&\mathcal{F}_\infty\left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}}+C(\mathcal{F}[v_\nu]-\mathcal{F}_\infty)\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}}\\
&-C\int_M w_\nu P_{g_0}w_\nu+C\left(\int_M f(t_\nu)P_{g_0}f(t_\nu)\right)^{\frac12}\left(\int_M w_\nu P_{g_0}w_\nu\right)^{\frac12}\\
\le&\mathcal{F}_\infty\left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}}+C(\mathcal{F}[v_\nu]-\mathcal{F}_\infty)\left(\int_M v_\nu^{\frac{2n}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n}}\\
&+C\int_M f(t_\nu)P_{g_0}f(t_\nu).
\end{aligned}$$

最后，由推论 6.17 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty\le&C\|f_\nu\|^{1+\gamma}_{W^{2,2}(M)}+C(\mu(t_\nu)-\mu_\infty)^{1+\gamma}+C\|f_\nu\|^2_{W^{2,2}(M)}\\
\le&C\|f_\nu\|^{1+\gamma}_{W^{2,2}(M)}+C(\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty)^{1+\gamma}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 7.3. 存在实数 $0<\gamma<1$ 和 $t_0>0$，使得

$$\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}_\infty\le\|f(t)\|^{1+\gamma}_{W^{2,2}(M)}$$

对所有 $t\ge t_0$ 均成立。

证明。 反设该命题不成立。那么存在一列时刻 $\{t_\nu\}$，满足 $t_\nu\ge\nu$，使得

$$\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty\ge\|f(t_\nu)\|^{1+\frac1\nu}_{W^{2,2}(M)}.$$

将命题 7.2 应用于此序列，我们得到一个无限子集 $I\subset\mathbb{N}$、一个实数 $0<\gamma<1$ 和一个常数 $C>0$，使得

$$\mathcal{F}(t_\nu)-\mathcal{F}_\infty\le C\|f(t_\nu)\|^{1+\gamma}_{W^{2,2}(M)}$$

对所有 $\nu\in I$ 均成立。因此，

$$1\le C\|f(t_\nu)\|^{\gamma-\frac1\nu}_{W^{2,2}(M)}.$$

另一方面，这与以下事实矛盾： $\|f(t)\|_{W^{2,\ 2}(M)} \to\ 0$ 当$t \to \infty$时。□

命题 7.4. 我们有

$$\int_0^\infty \|f(t,\cdot)\|_{W^{2,2}(M)}\, dt < \infty.$$

证明。 令 $\theta = \frac{\gamma}{1+\gamma} \in \big(0,\ \frac{1}{2}\big)$。由引理 2.3 和命题 2.10，我们计算得

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\big(\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}_\infty\big)^\theta &= -\theta\big(\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}_\infty\big)^{\theta-1}\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} \\ &\geq -C\big\|f(t)\big\|_{W^{2,2}(M)}^{-1}\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} \\ &\geq C\big\|f(t)\big\|_{W^{2,2}(M)}, \end{aligned}$$

其中 C 表示一个与 t无关的常数。

对该不等式积分，得到

$$C\int_{T_0}^\infty \|f\|_{W^{2,2}(M)}\, dt \leq \big(\mathcal{F}(T_0)-\mathcal{F}_\infty\big)^\theta < \infty$$

当 T_0充分大时。 □

命题 7.5. 给定任意 $\eta_0 > 0$，存在实数 $r > 0$ 使得

$$\int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-4}} \leq \eta_0$$

对于所有 $x \in M$ 和所有 $t \geq 0$。

证明。 我们注意到

$$\frac{\partial u^{\frac{2n}{n-4}}}{\partial t} = \frac{2n}{n-4} f u^{\frac{n+4}{n-4}} = \frac{2n}{n-4} f\big(\frac{P_{g_0} f + P_{g_0} u}{\mu(t)}\big)$$

这意味着，对于 $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} &\int_{B_r(x)} u(T)^{\frac{2n}{n-4}} - \int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-4}} \\ =&C(n)\int_t^T \left[\int_{B_r(x)} \frac{1}{\mu(t)} f(P_{g_0} f + P_{g_0} u)\right] dt \\ \leq&\frac{C(n)}{\mu_\infty}\int_t^\infty \left[\int_M |f P_{g_0} f| + |f||P_{g_0} u|\right] dt \\ \leq&C\int_t^\infty \left[\|P_{g_0} f\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)} \|f\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M)} + \|f\|_{W^{2,2}(M)} \|P_{g_0} u\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)}\right] dt. \end{aligned}$$

由三角不等式，我们得到估计

$$\|P_{g_0} u\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)} \leq \|P_{g_0} f\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)} + C\|u^{\frac{n+4}{n-4}}\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)}$$

$$= \|P_{g_0} f\|_{L^{\frac{2n}{n+4}}(M)} + C\|u\|^{\frac{n+4}{n-4}}_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M)}$$

根据引理 2.3 和命题 2.7，该式一致有界。

因此，我们得到

$$\int_{B_r(x)} u(T)^{\frac{2n}{n-4}} \leq \int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-4}} + C\int_t^\infty \|f\|_{W^{2,2}(M)} dt.$$

由命题 7.4，$\int_t^\infty \|f\|_{W^{2,2}} dt$ 对所有充分大的 t都可以任意小。证明至此完成。

□

定理 *1.1* 的证明。 由命题 7.5 与 2.9，我们得到

$$\sup_{[0,\infty)\times M} u < \infty.$$

于是，由命题 2.8，$\|u(t)\|_{C^{5,\alpha}(M)}$ 与 $\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|_{C^{5,\alpha}(M)}$ 均一致有界。由此，对任意时间序列，都存在一个收敛到光滑正极限的子列。命题 7.4 保证了该极限的唯一性。因此，该流收敛到唯一极限，该极限求解常数 Q-曲率方程。

□

致谢。J. Wei 部分获得题为“临界与超临界 Fujita 方程”的 GRF资助。

L. Gong 感谢 Seunghyeok Kim 和 Jingang Xiong 对本研究的关注与鼓励。作者感谢 Mingx- iang Li 提供了许多富有见地的讨论，并让我们注意到 Lin 和 Yuan 的论文 $[54, 55]$ 。

References

[1] S. Alarc´ón、J. Petean 和 C. Rey。常数 Q曲率共形度量的重数结果。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，63 146，30，2024 6( ):论文编号。[2] T. Aubin。´关于标量曲率与 Yamabe 问题的非线性微分´方程。´。`。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，55(3):269–296，1976年。[3] R. Avalos、P. Laurain 和 J. H. Lira。四阶引力的正能量定理。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，61(2):论文编号 48，33，2022年。[4] E. Bahuaud、C. Guenther、J. Isenberg 和 R. Mazzeo。Bach流的线性与非线性稳定性，I。预印本，2025年。[5] P. Baird、A. Fardoun 和 R. Regbaoui。

Q 4 *Calc. Var.* 曲率流 *Partial Differential Equations* 27 1 75 104, 2006 在-流形上。，( ): – 。[6] A. L. Besse。

Einstein manifolds 10 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer* ，卷。*Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]* 施普林格出版社，柏林，1987。[7] R. G. Bettiol、P. Piccione 和 Y. Sire。常数 Q曲率共形度量的非唯一性。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(9):6967–6992，2021。[8] Y. Bi 和 J. Li。临界情形下任意偶数维的指定 Q曲率流。 *Adv. Math.*，438:论文编号 109478，47，2024年。

[9] T. P. Branson。与共形结构典范相关的微分算子。*Math. Scand.*，57(2):293–345，1985年。[10] S. Brendle。共形几何中高阶流的整体存在性与收敛性。 *Ann. of Math. (2)*，158(1):323–343，2003年。[11] S. Brendle。任意初始能量下 Yamabe流的收敛性。

J. Differential , ( ): *Geom.* 69 2 217 278, 2005

– 。[12] S. Brendle。6 维及更高维中 Yamabe 流的收敛性。 *Invent. Math.*，170 3 541 576，2007 ( ): – 。[13] A. Carlotto、O. Chodosh 和 Y. A. Rubinstein。缓慢收敛的 Yamabe流。*Geom. Topol.*，19(3):1523–1568，2015年。[14] J. S. Case。Obata-V´etois论证及其应用。 *J. Reine Angew. Math.*，815 23: –40，2024年。[15] J. S. Case、Y.-J. Lin 和 W. Yuan。共形变分黎曼不变量。*Trans. Amer. Math. Soc.*，371(11):8217–8254，2019年。[16] H. Chan、Y. Sire 和 L. Sun。一类初始数据下分数阶Yamabe流的收敛性。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*，21:1703–1740，2020年。[17] S.-Y. A. Chang 和 Y. Ge。4维共形紧致爱因斯坦流形的紧性。 *Adv. Math.*，340:588–652，2018年。[18] S.-Y. A. Chang 和 Y. Ge。关于4维中以庞加莱-爱因斯坦度量填充的问题。预印本，2025年。´S.-Y. A. Chang、Y. Ge 和 J. Qing。共形紧致爱因斯坦四维流形的紧性 II。[19] , 373:107325，33，2020年。 *Adv. Math.*S.-Y. A. Chang、M. J. Gursky 和 P. C. Yang。共形几何中的 Monge-Amp[20] ère 型方程及具有正里奇曲率的四维流形。`，( ): – 。

Ann. of Math. (2) 155 3 709 787, 2002

S.-Y. A. Chang、M. J. Gursky 和 P. C. Yang。四维中的共形不变球面定理。[21] , (98):105–143，2003年。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*S.-Y. A. Chang、J. Qing 和 P. C. Yang。关于 R[22] 上共形度量的陈-高斯-博内积分。^{4}，103(3):523–544，2000年。 *Duke Math. J.*S.-Y. A. Chang 和 P. C. Yang。四维流形上ζ函数行列式的极值度量。[23] , 142(1):171–212，1995年。 *Ann. of Math. (2)*X. Chen 和 X. Xu。[24] 偶数维标准球面上的曲率流。 , ( ): – 。

Q *J.* B. *Funct. Anal.* 261 4 934 980, 2011

Chow。具有正里奇曲率的局部共形平坦流形上的 Yamabe流。[25] , 45(8):1003–1014，1992年。 *Comm. Pure Appl. Math.*L. Cui、C. Gui、H. Yan 和 W. Yang。闭偶数维流形上变号函数对应的临界指定[26] 曲率流。 *Q*，289 11( ):论文编号 111133，71，2025年。 *J. Funct. Anal.*Z. Djadli、E. Hebey 和 M. Ledoux。Paneitz型算子及其应用。[27] *Duke* ( ): – 。*Math. J.* 104 1 129 169, 2000

Z. Djadli 和 A. Malchiodi。常数[28] 曲率共形度量的存在性。 *Q*，168(3):813–858，2008年。 *Ann. of Math. (2)*P. Esposito 和 F. Robert。Paneitz-Branson算子的山路型临界点。[29] , 15(4):493–517，2002年。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*A. E. Fischer 和 J. E. Marsden。标量曲率的变形。[30] , ( ): – 。

Duke Math. Y. *J.* 42 3 519 547, 1975

Ge、C.-S. Lin 和 G. Wang。关于[31] 标量曲率。 σ_2，84 1 45 86，2010 ( ): – 。 *J. Differential Geom.*Y. Ge 和 G. Wang。关于全非线性Yamabe问题。[32] , ( ): – 。

Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 39 4 569 598, 2006

Y. Ge 和 G. Wang。关于共形商方程。[33] , (6):文章编号 rnm019，32，2007年。

[34] Y. Ge与X. Xu. 闭4维黎曼流形上零情形的指定 Q曲率问题. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 31(4):549–555, 2008年. [35] L. Gong、S. Kim与J. Wei. 四阶与六阶常数 Q曲率问题的紧性与非紧性定理. 预印本, 2025年. [36] P. Guan与G. Wang. 局部共形平坦流形上的全非线性共形流. *J. Reine Angew. Math.*, 557:219–238, 2003年. [37] M. J. Gursky. 共形不变微分算子的主特征值及其在半线性椭圆型偏微分方程中的一个应用. *Comm. Math. Phys.*, 207 143, 1999年 1 131( ): – .[38] M. J. Gursky、F. Hang与Y.-J. Lin. 具有正Yamabe不变量和Paneitz 算子的黎曼流形. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (5):1348–1367, 2016年. [39] M. J. Gursky与A. Malchiodi. Paneitz 算子的强极大值原理以及 Q曲率的非局部流. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(9):2137– 2173, 2015年. [40] M. J. Gursky与J. A. Viaclovsky. 二次曲率泛函的爱因斯坦度量的刚性与稳定性. *J. Reine Angew. Math.*, 700:37–91, 2015年. [41] F. Hang与P. C. Yang. Paneitz 算子格林函数的符号与 Q 曲率. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):9775–9791, 2015年. [42] F. Hang与P. C. Yang. 一类-流形上的 Q 3 *Comm. Pure Appl.* 曲率. , *Math.* 69 4 734 744, 2016 ( ): – . [43] F. Hang与P. C. Yang. 一类维数至少为5的流形上的 Q曲率. *Comm. Pure Appl. Math.*, 69(8):1452–1491, 2016 年 . [44] E. Hebey 与 F. Robert. 常系数 Paneitz 型算子的强制性与 Struwe紧性. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 13(4):491– 517, 2001年. [45] P. T. Ho 与S. Lee. Q *J. Differential Equa-* 曲率流的 *tions* 453 113917, 25, 2026 收敛速率. , :论文编号 . [46] E. Humbert与S. Raulot. Paneitz-Branson算子的正质量定理. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 36(4):525–531, 2009年. [47] A. Hyder与Y. Sire. 常数 Q *J.* 曲率问题 *Funct. Anal.* 280 3 108819, 39, 2021 的奇异解. , ( ):论文编号 . [48] T. Jin、Y. Li与J. Xiong. Nirenberg问题及其推广：一种统一方法. *Math. Ann.*, 369(1-2):109–151, 2017年. [49] T. Jin与J. Xiong. 分数阶Yamabe流及其若干应用. *J. Reine Angew.* , : – . [50] *Math.* 696 187 223, 2014 S. Lee. 关于四阶共形曲率的若干单值化问题. *J.* , ( ):论文 *Funct. Anal.* 288 5 110791, 34, 2025 编号 . [51] S. Lee与F. Wang. 具有平坦欧氏共形无穷远的Poincar´e-爱因斯坦流形的刚性. 预印本, 2025 年 . [52] J. Li 、 Y. Li 与 P. Liu. 满足 $\int_M Q dV_g = 8\pi^2$ 的 4 维黎曼流形 (M, g) 上的 Q 曲率 . *Adv. Math.*, 231(3-4):2194–2223, 2012 年 . [53] Y. Li 与 J. Xiong. 具有常数 Q 曲率的共形度量的紧性. I. *Adv. Math.*, 345:116–160, 2019年. [54] Y.-J. Lin与W. Yuan. Q曲率变形 I. *Calc. Var. Partial Differential* , ( ):文献 . *Equations* 55 4 101, 29, 2016 [55] Y.-J. Lin 与 W. Yuan. Q *Calc. Var. Partial Differen-* 曲率变形 *tial Equations* 61 2 74, 28, 2022 II. , ( ): 论文编号 . [56] A. Malchiodi. 若干几何四阶方程解的紧性 . *J.* , : – . [57] *Reine Angew. Math.* 594 137 174, 2006 A. Malchiodi与M. Struwe. S^4上的 Q曲率流. *J. Differential Geom.*, 73(1):1– 44, 2006年. [58] S. M. Paneitz. 任意伪黎曼流形上的四次共形协变微分算子. 预印本, 1983年.

[59] J. Qing 和 D. Raske. 局部共形平坦流形上具有常数 Q 曲率的共形度量的紧性。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 26 3 343 356, 2006年 ( ): – . [60] J. Qing 和 W. Yuan. 真空静态空间的标量曲率刚性。

Math. , (-): *Ann.* 365 3 4 1257 1277, 2016 – . [61] R. Schoen. 将黎曼度量共形变形为常标量曲率度量。 *J. Differential Geom.*, 20(2):479–495, 1984. [62] H. Schwetlick 和 M. Struwe. “大”能量下 Yamabe流的收敛性。 *J. Reine Angew. Math.*, 562:59–100, 2003年. [63] L. Sheng、N. S. Trudinger 和 X.-J. Wang. 高阶曲率的 Yamabe问题。 *J. Differential Geom.*, 77(3):515–553, 2007年. [64] L. Simon. 一类非线性演化方程的渐近行为及其在几何问题中的应用。 *Ann. of Math. (2)*, 118(3):525–571, 1983. [65] M. Struwe. 涉及临界非线性的椭圆边值问题的全局紧致性结果。 *Math. Z.*, 187(4):511–517, 1984. [66] J. V´etois. 闭 Einstein 流形上具有常 Q 曲率的共形度量的唯一性。 *Potential Anal.*, 61(3):485–500, 2024年. [67] Y. Wang. 等周不等式与 Q 281 823 844, 曲率。 2015 *Adv. Math.*, : – .[68] J. Wei 和 X. Xu. 高阶共形不变方程解的分类。 *Math. Ann.*, 313(2):207–228, 1999. [69] J. Wei 和 C. Zhao. 高维中预设 Q曲率问题的非紧性。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 46(1-2):123–164, 2013. [70] J. Xiong. 对偶 Yamabe流及相关积分流。

Chinese Ann. Math. Ser. , ( ): – *B* 45 3 319 348, 2024 . [71] R. Ye. Yamabe 流的整体存在性与收敛性。 *J. Differential Geom.*, 39 1 35( ): –50, 1994. (Liuwei Gong) Department of Mathematics, Chinese University of Hong Kong,Shatin, NT, Hong Kong*Email address*: lwgong@math.cuhk.edu.hk (Sanghoon Lee) Department of Mathematics, Chinese University of HongKong, Shatin, NT, Hong Kong*Email address*: sanghoonlee@cuhk.edu.hk (Juncheng Wei) Department of Mathematics, Chinese University of HongKong, Shatin, NT, Hong Kong*Email address*: wei@math.cuhk.edu.hk