arXiv:2602.04275v1 [math.DS] 4 Feb 2026

曲面微分同胚的势函数强正再现与平衡态的指数混合

Chiyi Luo 和 Dawei Yang*

摘要

本文研究具有正熵的C^∞曲面微分同胚的一大类势函数的强正再现性质。我们建立了相应平衡态的若干统计性质，包括相关性的指数衰减和有效内在遍历性。

目录

1 引言 **2**

1.1 势函数的强正再现 .2 1.2 由平衡态的强正再现导出的性质 .5

2 定理 A 的证明 **6**

2.1 博雷尔同宿类与拓扑同宿类 .7 2.2 平衡态的遍历性 .8 2.3 平衡态李雅普诺夫指数的连续性 .10 2.4 势函数的强正再现 .12 2.5 博雷尔同宿类上的强正再现 .12

3 平衡态的统计性质 **13**

3.1 平衡态的存在性 .13 3.2 强正再现符号动力系统 .16 3.3 平衡态统计性质列表 .19

参考文献 **23**

*D. Yang 部分得到了中国国家重点研发计划（2022YFA1005801）、国家自然科学基金委员会 12325106、ZXL2024386 和江苏特聘教授项目的资助。C. Luo 部分得到了国家自然科学基金委员会 12501244 的资助。

1 引言

1.1 势函数的强正再现

设 $f\colon\ M \to M$ 是定义在紧致无边界C^∞ 黎曼流形 M上的一个微分同胚。令 $\mathscr{M}(f)$ 表示所有f-不变概率测度的集合，并令 $\mathscr{M}_e(f)$ 表示所有遍历f-不变概率测度的集合。对于每个连续函数$\phi\colon\ M \to \mathbb{R}$，根据变分原理，拓扑压力$P(\phi)$由下式给出

$$P(\phi) := P(\phi, f) = \sup\left\{h_\mu(f) + \int \phi \,\mathrm{d}\mu\colon\ \mu \in \mathscr{M}(f)\right\}.$$

对于每个 $\mu \in \mathscr{M}(f)$，我们记 $P_\mu(\phi) := P_\mu(\phi, f) = h_\mu(f) + \int \phi \,\mathrm{d}\mu$为 μ的度量压力。若测度 $\mu \in \mathscr{M}(f)$满足$P_\mu(\phi) = P(\phi)$，则称其为势函数 ϕ相对于f的平衡态。势函数 $\phi \equiv 0$ 的平衡态称为最大熵测度。注意，若 μ 是势函数 ϕ的平衡态，则 μ 几乎处处的遍历分量本身都是 ϕ的遍历平衡态。

如 [20] 和 [24], 所述，平衡测度是不变测度中最重要的类别之一，为理解系统的动力学行为提供了基础信息。研究流的动力学时，对某些重要不变测度的研究也可以转化为对庞加莱映射平衡态的研究。例如，对流的最大熵测度的研究可转化为相对于顶函数的庞加莱映射平衡态的研究。从这一角度看，平衡态的研究应当成为动力系统领域的重要课题。我们认为，本文的主要结果能够对流的最大熵测度研究发挥一定作用。

对于紧流形上的拓扑混合阿诺索夫微分同胚（或更一般地，Axiom A 微分同胚），Sinai [27], Ruelle [19], Bowen [1] 证明，每个赫尔德连续函数都存在唯一的平衡态，且该测度是吉布斯测度，并与某个伯努利方案同构。证明基于构造一个从混合有限型子移位到流形上的编码映射。此外，基于有限型子移位的统计性质，平衡态具有指数混合性[20], ，满足大偏差原理 [11], ，并且有效内在遍历性成立 [12]。

超越一致双曲性后，平衡态不一定存在。例如，Misiurewicz [14] 和 Buzzi [3] 给出了例子，表明对于C^r微分同胚，零势函数的平衡态可能不存在。然而，Newhouse [15], 基于格罗莫夫-约姆丁理论 [9, 29], 的一个结果表明，熵映射 $\mu \mapsto h_\mu(f)$是上半连续的。因此，对于C^∞ 微分同胚，任意连续势函数 ϕ 的平衡态总是存在。

对于C^∞ 曲面微分同胚，尽管已知平衡态的存在性[15], ，并且 Buzzi-Crovisier-Sarig 的杰出成果最近证明了某些势函数类别下平衡态的有限性 [4], ，但它们的统计性质仍大多未知。最近，Buzzi-Crovisier-Sarig 的出色工作 [6] 聚焦于统计性

质，研究曲面微分同胚的最大熵测度。通过为曲面微分同胚的最大熵测度建立强正再现机制（简称 SPR），他们证明了最大熵测度具有相关性的指数衰减以及若干其他重要的统计性质。

本文研究了一大类势函数的强正再现（SPR）性质，这些势函数的表达式与 [4, 推论 1。4] 中所考虑的势函数相似，并为曲面微分同胚建立统计性质。例如，对于赫尔德势函数以及混合非一致双曲曲面微分同胚，我们得到如下关于相关性的指数衰减的结果（ β-范数 $\|\cdot\|_\beta$ 定义见（1））。

定理 1.1。 设 $f\colon\ M \to M$ 是一个拓扑混合的 C^∞ 曲面微分同胚，且具有正的拓扑熵。对于每个赫尔德连续函数 $\phi\colon\ M \to \mathbb{R}$，满足 上确界$\phi$ – 下确界 $\phi < h^{\mathrm{top}}(f)$，记 μ 为 ϕ的唯一平衡态。那么，对于每个 $\beta > 0$，存在 $C > 0$和 $0 < \theta < 1$，使得对于任意 β-赫尔德连续函数 $V_1, V_2\colon\ M \to \mathbb{R}$，均有

$$\left| \int V_1(x) \cdot V_2(f^n(x))\, \mathrm{d}\mu(x) - \int V_1\, \mathrm{d}\mu \cdot \int V_2\, \mathrm{d}\mu \right| \le C \cdot \theta^n \cdot \|V_1\|_\beta \cdot \|V_2\|_\beta,\ \forall n > 0.$$

注意，唯一性由 [4, 推论1。4], 以及 [6, 定理1。1] 建立了最大熵测度的指数混合性，对应于情形 $\phi \equiv 0$。现在我们回顾由 Buzzi-Crovisier-Sarig 引入的势函数强正再现（SPR）定义 [6]。设$f\colon\ M \to M$是紧流形上的$C^{1+\alpha}$ 微分同胚M。我们首先回顾佩辛集的定义。

定义1.2。 对于 $\chi > 0$、 $0 < \varepsilon \ll \chi$ 和 $\ell \ge 1$，记 $\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)$ 为满足下述条件的点 x 的集合：存在一个 Df-不变分裂 $T_{\mathrm{Orb}(x)}M = E^u \oplus E^s$，使得对每个 $k \in \mathbb{Z}$

- $\|D_{f^k(x)} f^{-n}|_{E^u(f^k(x))}\| \le \ell e^{|k|\varepsilon} e^{-(\chi-\varepsilon)n}$, $\|D_{f^k(x)} f^n|_{E^s(f^k(x))}\| \le \ell e^{|k|\varepsilon} e^{-(\chi-\varepsilon)n}$, $\forall n > 0$;
- $\sin \angle(E^u(f^k(x)), E^s(f^k(x))) \ge \ell^{-1} e^{-|k|\varepsilon}$.

根据佩辛理论 [16, 17, 18], , 对于 f的每个遍历双曲测度 μ，如果 μ的所有李雅普诺夫指数都位于区间 $[-\chi, \chi]$之外，则 $\mu(\bigcup_{\ell>0} \mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)) = 1$。对于每个连续函数 $\phi\colon\ M \to \mathbb{R}$, 我们定义

$$\mathrm{Var}(\phi) := \sup\{|\phi(x) - \phi(y)|\colon\ x \in M,\ y \in M\}.$$

定义1.3。 设 $f\colon M \to M$ 是紧致流形 M 上的一个微分同胚，且 $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。对于每个 $\chi > 0$，若对任意 $\varepsilon > 0$以及任意满足 $P\mu_n(\phi) \to P(\phi)$的遍历测度序列$\{\mu_n\}_{n>0}$，都有

$$\lim_{\ell\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)) = 1.$$

定理 A。设 $f\colon M \to M$ 是一个 C^∞曲面微分同胚，且 $h^{\mathrm{top}}(f) > 0$。对于每个赫尔德连续函数 $\phi\colon M \to \mathbb{R}$，若 $\mathrm{Var}(\phi) < h^{\mathrm{top}}(f)$，则存在 $\chi > 0$，使得 f 对于 ϕ具有χ-强正再现性质。

注意，在 [6, 定理 G], 中证明了，如果 Var(ϕ) 足够小，那么 f 对于 χ 具有 - 强正再现性质 ϕ （另见注 3.9 ）。然而，文中并未给出 var(ϕ) 必须小到何种程度的明确界限。定理 A 给出了更精确的定量界限。为了在技术层面与 [6, 定理 A] 进行比较，我们采用另一种途径，为一类平衡态证明 SPR 性质：

- 为了证明定理 A，我们分三步进行。首先，我们通过几何论证[1]证明，任何度量压力收敛到拓扑压力的遍历测度序列，其极限本身也是遍历的。其次，根据 [5]，我们得到李雅普诺夫指数的连续性。最后，通过应用 [6], 的结果，我们证明该势函数具有 SPR 性质。

- 在 [6], 中，他们首先利用李雅普诺夫指数的连续性，证明了最大熵测度具有强正再现性质；这里考虑的是度量熵收敛到拓扑熵的任意遍历测度序列。其次，他们将所有度量熵接近拓扑熵的测度提升到有限多个强正再现可数马尔可夫移位上。最后，利用这些马尔可夫移位的强正再现性质，他们证明，任何度量熵收敛到拓扑熵的遍历测度序列，其极限必定也是遍历的。

然而，我们认为，深入理解他们的论证后， [6] 中的第一步在我们的情形下同样成立。此外，它也可以应用于C^r 熵较大的情形（见定理2.9）。

回顾奥塞莱德茨定理，对于每个f-不变测度 μ，李雅普诺夫指数

$$\lambda_1(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|D_x f^n\|,\ \lambda_2(x) := \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log\|D_x f^{-n}\|,$$

对于 μ-几乎处处的x都有定义，我们记 $\lambda^+(\mu) := \int \lambda_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$。下一个定理是我们第一步的对应结果。

定理 B. 设 $f: M \to M$ 是一个满足 $h^{\mathrm{top}}(f) > 0$ 的 C^∞ 曲面微分同胚。假设ϕ 是一个赫尔德连续函数，且 $\mathrm{Var}(\phi) < h^{\mathrm{top}}(f)$。那么，对于任意满足 $P^{\mu_n}(\phi) \to P(\phi)$ 且 $\mu_n \to \mu$ 的遍历测度序列$\{\mu_n\}_{n>0}$，都有 μ 是遍历的。此外，我们有 $\lambda^+(\mu_n) \to \lambda^+(\mu)$。

根据 [4, 定理 A] 以及极限测度的遍历性，李雅普诺夫指数的连续性可直接得到。本部分将在第 2.2 节和第 2.3节讨论，而定理 2.9 将给出这一结果的 C^r 版本。

[1]我们将研究拓扑同宿类和四边形，尤其会运用动力系统萨德引理。不过，这里不会展示四边形论证本身，因为所需结果可以直接引用 Buzzi-Crovisier-Sarig 的结论 [4]。

1.2 强正再现推出的平衡态性质

在本小节中，我们始终假设$f\colon M \to M$是一个$C^{1+\alpha}$曲面微分同胚，并且 $\phi : M \to \mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数，满足存在 $\chi > 0$，使得f对于 ϕ 是 χ-强正再现的。那么， ϕ的遍历平衡态存在且有限：

定理 C. 假设对于赫尔德连续函数 ϕ，f 是 χ-强正再现的。那么， ϕ至多存在有限个遍历平衡态 $\mu_1,\ldots,\mu_n$。对于每个 $i = 1,\cdots,n$， μ_i 的所有李雅普诺夫指数都在$(-\chi,\chi)$之外。此外，对于每个满足 $P\nu_n(\phi) \to P(\phi)$ 且 $\nu_n \to \mu$ 的遍历测度序列$\{\nu_n\}_{n>0}$，我们有 μ 是 ϕ 的遍历平衡态，并且 $\lambda^+(\nu_n) \to \lambda^+(\mu)$。

定理 C 最初在 [6, 定理 B、定理 C] 中借助马尔可夫编码的 SPR 性质得到了证明。这里我们基于同宿关系给出另一种证明（见定理 3.1），该证明不依赖于强正再现可数马尔可夫移位。（不过，为了说明不同的遍历平衡态对应不同的博雷尔同宿类，我们仍然隐式地使用了不可约马尔可夫移位的性质。）

在定理 C的设定下。对于每个遍历平衡态 μ，有 μ是双曲的，并且根据 [4, 推论 3.3] 存在$p := p_\mu \in \mathbb{N}^+$，使得相对于$f_p$， μ的每个遍历分量 ν 都是混合的，且 (f_p, ν) 与一个伯努利方案同构。对于 ϕ的每个遍历平衡态 μ，我们称整数$p \geq 1$ 为 μ的混合阶数 。

作为强正再现的推论，我们得到遍历平衡态的以下统计性质。对于 $0 < \beta < 1$ 以及连续函数$V\colon M \to \mathbb{R}$，我们定义

$$\|V\|_\beta := \sup_{x\in M} |V(x)| + \sup\left\{\frac{|V(x)-V(y)|}{d(x,y)^\beta},\ x \neq y,\ x,y \in M\right\}. \tag{1}$$

如果 $\|V\|_\beta < +\infty$，则称函数V是 β-赫尔德连续的。

定理 D （指数混合）。 假设对于赫尔德连续函数ϕ，f 是 χ-强正再现的。设 μ 是 ϕ 的一个遍历平衡态，混合阶数为 $p \geq 1$。那么，对每个 $\beta > 0$，存在 $C > 0$ 和 $\theta \in (0,1)$，使得对于任意 β-赫尔德连续函数 $V_1, V_2 : M \to \mathbb{R}$ 以及相对于 f^p 的 μ 的每个遍历分量 ν，都有

$$\left|\int V_1(x)\cdot V_2(f^{pn}(x))\,\mathrm{d}\nu(x) - \int V_1\,\mathrm{d}\nu\cdot\int V_2\,\mathrm{d}\nu\right| \leq C\cdot\theta^n\cdot\|V_1\|_\beta\cdot\|V_2\|_\beta,\ \forall n > 0.$$

下述定理对同宿类上支撑的遍历测度与相应平衡态之间的距离给出了定量上界。

定理 E。 假设对于赫尔德连续函数 ϕ，f 是 χ-强正再现。对于每个 $\beta \in (0,1)$，存在 $C > 0$，使得对于每个 β-赫尔德连续函数 $V : M \to \mathbb{R}$ 以及每个不变测度 ν，都存在一个平衡态 μ，使得（如果测度 ν是遍历的，那么测度 μ 也是遍历平衡态）

$$\left|\int V(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int V(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right| \leq C\cdot\|V\|_\beta\cdot\sqrt{P_\mu(\phi) - P_\nu(\phi)}.$$

此外，我们还有 $\left|\lambda^+(\mu)-\lambda^+(\nu)\right| \le C\sqrt{P_\mu(\phi)-P_\nu(\phi)}$。

以下推论1.4 改进了定理B。

推论 1.4 (有效内在遍历性)。设 $f: M \to M$ 是一个具有正拓扑熵的 C^∞ 传递曲面微分同胚。假设 $\phi: M \to \mathbb{R}$ 是赫尔德连续的，且变差$(\phi) < h^{\mathrm{top}}(f)$。设 μ 是 ϕ唯一的平衡态。那么，对每个 $\beta>0$，存在 $C>0$，使得对每个不变测度 ν 及每个 β-赫尔德连续函数 $V: M \to \mathbb{R}$，均有

$$\left|\int V(x)\,\mathrm{d}\mu(x)-\int V(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right| \le C\cdot\|V\|_\beta\cdot\sqrt{P_\mu(\phi)-P_\nu(\phi)}$$

并且 $\left|\lambda^+(\mu)-\lambda^+(\nu)\right| \le C\sqrt{P_\mu(\phi)-P_\nu(\phi)}$,

定理D、定理1.1 将在第3.3.1节证明；定理E 和推论1.4将在第3.3.2节证明。

定理 F (稳定性)。假设 f 对赫尔德连续函数 ϕ 是 χ-强正再现的。那么，存在 $\varepsilon>0$，使得对于任意满足 上确界$|\psi|<\varepsilon$ 的赫尔德连续函数 ψ，f 对 $\phi+\psi$ 是 χ-强正再现的。此外，映射 $t \to P(\phi+t\psi)$ 在 $(-1,1)$ 上实解析。

定理 G (指数尾)。假设 f 对赫尔德连续函数 ϕ 是 χ-强正再现的。那么，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\ell>0, C>0$ 和 $\theta\in(0,1)$，使得对于每个遍历平衡态 μ （对应于 ϕ ）以及每个 $n>0$,

$$\mu\Big(M-\bigcup_{j=0}^{n-1} f^j(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))\Big) \le C\cdot\theta^n.$$

注 1.5。 注意，定理 F 和定理 G 对每个 C^∞ 曲面微分同胚 f满足 $h^{\mathrm{top}}(f)>0$以及每个满足 ϕ 变差$(\phi) < h^{\mathrm{top}}(f)$ 的赫尔德连续函数都成立，因为在这种情况下，根据定理 A，存在 $\chi>0$ 使得 f对 ϕ是 -强正再现的。

正如 [6, 定理 G], 所述，稳定性、指数尾、渐近方差（见 [6, 第11节4]）、中心极限定理（见 [6, 第11节5]）和大偏差（见 [6, 第11节6]）可以类似地建立，方法是利用可数马尔可夫移位的 SPR 性质，并结合第3.3.1节和第3.3.2节中的类似论证。强正再现可数马尔可夫移位的这些性质分别详述于 [6, 定理 B20] （稳定性）、 [6, 推论78]（指数尾）、 [6, B节5] （渐近方差）、 [6, C节1] （函数中心极限定理）以及 [6, B节6] （大偏差）。

2 定理的证明A

在本小节中，我们始终假设$f: M \to M$是一个C^r，$r \in (1,+\infty]$曲面微分同胚，且$h^{\mathrm{top}}(f)>0$，并且 $\phi: M \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。我们记

$$\lambda_{\min}(f) := \min\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{x\in M}\|D_x f^n\|, \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{x\in M}\|D_x f^{-n}\|\right\}.$$

2.1 博雷尔同宿类与拓扑同宿类 s

令 NUH#(f) 表示所有满足以下条件的点 x 的集合：存在 $\chi > 0, 0 < \varepsilon \ll \chi, \ell > 0$ 以及 $\{n_k\}, \{m_k\} \subset \mathbb{N}$，使得 f n^k(x), f $^{-}m^k$(x) ∈属于 $\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}$(f)，且当 k → +∞时，f n^k(x) →趋于 x，f m^k(x) →趋于 x。根据佩辛理论和庞加莱回归定理，对于每个遍历双曲测度 μ，都有 μ(NUH#(f)) = 1。对于每个 x ∈NUH#(f)，其稳定流形和不稳定流形

$$W^s(x) := \left\{ z : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(z)) < 0 \right\}$$
$$W^u(x) := \left\{ z : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}(x), f^{-n}(z)) < 0 \right\}$$

是浸入的C^r-子流形。

对于两个遍历双曲测度 μ_1 和 μ_2，如果存在 Λ_1和 Λ_2 使得 $\mu_1(\Lambda_1) > 0$、 $\mu_2(\Lambda_2) > 0$，并且对任意x ∈ Λ_1 和y ∈ Λ_2，W ^{u}(x)与W s(y)横截相交，则称 $\mu_1 \preceq \mu_2$。如果 μ_1与 μ_2(μ_1h ~ μ_2)同宿相关，则称 $\mu_1 \preceq \mu_2$和 $\mu_2 \preceq \mu_1$。由 [4, 命题2.11], 可知，同宿关系对于遍历双曲测度而言是一个等价关系。

假设 $\mathcal{O}$ 是一个双曲周期轨道， $\mu_{\mathcal{O}}$ 是支撑在 $\mathcal{O}$上的遍历测度。如果遍历双曲测度 μ 与 $\mathcal{O}$(μ $\overset{h}{\sim}$ $\mathcal{O}$)同宿相关，即 μ与 $\mu_{\mathcal{O}}$同宿相关，则称之为此情形。此时，对于 μ-几乎处处的x， $W^u(x)$与$W^s(\mathcal{O})$横截相交，并且$W^s(x)$与$W^u(\mathcal{O})$横截相交。根据Katok的阴影引理 [10], ，可知对于每个遍历双曲测度 μ，都存在一个与 μ同宿相关的双曲周期轨道 $\mathcal{O}$。

设 μ 是 f 的遍历双曲测度， $\mathcal{O}$ 是满足 $\mu \overset{h}{\sim} \mathcal{O}$ 的双曲周期轨道。我们将 μ 的博雷尔同宿类 定义为

$$\mathrm{BH}(\mu) := \mathrm{BH}(\mathcal{O}) = \{ y \in \mathrm{NUH}^{\#}(f) : W^u(y) \pitchfork W^s(\mathcal{O}) \neq \emptyset,\ W^s(y) \pitchfork W^u(\mathcal{O}) \neq \emptyset \};$$

并定义 μ 的拓扑同宿类

$$\mathrm{TH}(\mu) := \mathrm{TH}(\mathcal{O}) = \overline{W^u(\mathcal{O}) \pitchfork W^s(\mathcal{O})}.$$

根据定义，BH(μ) 是一个可测的f-不变集，TH(μ) 是一个紧致的f-不变集，且 TH(μ) =BH(μ)。关于拓扑同宿类和博雷尔同宿类，我们有如下结果（记 $(\lambda_{\min}(f)/\infty) := 0$）。

引理 2.1。 设 $f : M \to M$ 是一个具有正拓扑熵的 $C^r, r \in (1, +\infty]$ 曲面微分同胚，且 μ 是 f 的遍历双曲测度。对于每个遍历双曲测度 ν,

(1) $\nu(\mathrm{BH}(\mu)) = 1$ 当且仅当 $\mu \overset{h}{\sim} \nu$;

(2) 若 $h_\mu(f) > \underline{\lambda_{\min}(f)} r$ 且 $h_\nu(f) > \underline{\lambda_{\min}(f)} r$，则 $\nu(\mathrm{TH}(\mu)) = 1$ 当且仅当 $\mu \overset{h}{\sim} \nu$。

证明。 设 $\mathcal{O}$ 是与 μ 同宿相关的双曲周期轨道。假设 ν 是一个遍历双曲测度。若 $\nu(\mathrm{BH}(\mu))=1$，则对 ν-几乎处处的x，有

$$W^u(x)\pitchfork W^s(\mathcal{O})\neq\emptyset,\ W^s(x)\pitchfork W^u(\mathcal{O})\neq\emptyset,$$

这意味着 $\nu \overset{h}{\sim} \mathcal{O}$，因此 $\nu \overset{h}{\sim} \mu$。这就证明了第 (1) 项。

第 (2) 项由 [4,推论 6.7] 得出。由于 $h_\nu(f)>\lambda^{\min}(f)$，$h_\mu(f)>\lambda^{\min}(f)$且 $\mu \overset{h}{\sim} \mathcal{O}$， [4,推论 6.7] 表明， $\nu(\mathrm{TH}(\mu))=1$ 当且仅当 $\nu \overset{h}{\sim} \mathcal{O}$，进而当且仅当 $\mu \overset{h}{\sim} \nu$。 □

Buzzi-Crovisier-Sarig [4, 定理 5.2] 证明了具有大熵的C^r曲面微分同胚的遍历测度对应的博雷尔同宿类数量有限:

定理 2.2。 设 $f:M\to M$ 是一个 C^r，$r\in(1,+\infty]$ 曲面微分同胚。那么，对于任意 $\delta>0$,

$$\#\left\{\mathrm{BH}(\mu):\mu \textit{ is an ergodic measure of } f \textit{ with } h_\mu(f)>\delta+\frac{\lambda^{\min}(f)}{r}\right\}<+\infty.$$

证明。 假设结论不成立。则由引理 2.1 存在遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$ 使得 μ_n 不同宿相关于 μ_m 对每个 $n\neq m$，并且$h_{\mu_k}(f)>\lambda^{\min}(f)+\delta$对每个 $k>0$。然而，由 [4,定理 5.2]

$$\limsup_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(f)\le\frac{\lambda^{\min}(f)}{r},$$

这与 $h_{\mu_n}(f)>\lambda^{\min}(f)+\delta$对所有 $n>0$ 相矛盾。这一矛盾即得证明。 □

由于 $\mathrm{TH}(\mu)=\overline{\mathrm{BH}(\mu)}$，我们立即得到如下推论。

推论 2.3. 设 $f:M\to M$ 为 C^r，$r\in(1,+\infty]$ 曲面微分同胚。则对任意 $\delta>0$,

$$\#\left\{\mathrm{TH}(\mu):\mu \textit{ is an ergodic measure of } f \textit{ with } h_\mu(f)>\delta+\frac{\lambda^{\min}(f)}{r}\right\}<+\infty.$$

2.2 平衡态的遍历性

设 $\phi\colon M\to\mathbb{R}$ 为一个连续函数。回顾 ϕ 的方差定义为 $\mathrm{变差}(\phi):=\sup\{|\phi(x)-\phi(y)|:x\in M,y\in M\}$并且 $P_\mu(\phi):=h_\mu(f)+\int\phi\,\mathrm{d}\mu$。

定理 2.4。 设 $f:M\to M$ 是一个 C^∞曲面微分同胚，且 $h^{\mathrm{top}}(f)>0$。假设ϕ 是赫尔德连续函数，且 $\mathrm{Var}(\phi)<h^{\mathrm{top}}(f)$。那么，对于任意满足 $P_{\mu_n}(\phi)\to P(\phi)$ 且 $\mu_n\to\mu$ 的遍历测度序列$\{\mu_n\}_{n>0}$，有 μ 是遍历的。

注意，在定理 2.4的情形下，由于熵映射的上半连续性，我们知道 μ 是 ϕ的平衡态。

引理 2.5。 设 $f:M\to M$ 是一个 C^r，$r\in(1,+\infty]$ 曲面微分同胚，且 $h^{\mathrm{top}}(f)>\lambda^{\min}(f)r$。假设 ϕ 是一个连续函数，且 $\mathrm{变差}(\phi)<h^{\mathrm{top}}(f)-\lambda^{\min}(f)r$。那么，存在 $\delta>0$，使得对于 ϕ 的每个平衡态 μ，都有 $h_\mu(f)>\delta+\lambda^{\min}(f)r$。

证明。设 μ 是 ϕ 的一个平衡态。对于满足 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\left(h^{\text{top}}(f) - {}^{\lambda_{\min}}(f)\, r^{-}\text{变差}(\phi)\right)\right)$ 的情形，取一个f-不变测度 ν，使得 $h_\nu(f) \geq h^{\text{top}}(f) - \varepsilon$。于是，我们有

$$\begin{aligned} h_\mu(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu &\geq h_\nu(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\nu \\ &\geq h_{\text{top}}(f) - \varepsilon + \int \phi \, \mathrm{d}\nu. \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} h_\mu(f) &\geq h_{\text{top}}(f) - \varepsilon - \left(\int \phi \, \mathrm{d}\mu - \int \phi \, \mathrm{d}\nu\right) \\ &\geq h_{\text{top}}(f) - \varepsilon - \text{Var}(\phi) \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}(f)}{r} + \frac{1}{2}\left(h_{\text{top}}(f) - \frac{\lambda_{\min}(f)}{r} - \text{Var}(\phi)\right) \\ &:= \frac{\lambda_{\min}(f)}{r} + \delta > 0. \end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

下面的引理说明，支撑在博雷尔同宿类上的双曲遍历平衡态是唯一的。

引理 2.6 ([4], 推论 3.3)。设 $f: M \to M$ 是一个 $C^r, r > 1$ 曲面微分同胚。假设 ϕ 是一个赫尔德连续函数，且 μ 是 ϕ 的一个遍历双曲平衡态。那么，对于 ϕ 的任意遍历双曲平衡态 ν，$\nu(\text{BH}(\mu)) = 1$ 当且仅当 $\nu = \mu$。

推论 2.7 → ∈ 1 +∞] top >..

~~设 $f: M$ M 是一个 C^r, r (, 曲面微分同胚，且 $h(f)(f)r$。假设 ϕ 是一个赫尔德连续函数，且 变差~~ $(\phi) < h^{\text{top}}(f) - {}^{\lambda_{\min}}(f)r$。那么，遍历平衡态至多有有限多个。

推论2.7 可由定理2.2、引理2.5 和引理2.6 立即推出。现在我们给出定理2.4的证明。

定理2.4的证明。设 $\{\mu_n\}_{n>0}$ 是一个遍历测度序列，满足 $P^{\mu_n}(\phi) \to P(\phi)$ 且 $\mu_n \to \mu$。我们断言 $\lim_{n\to+\infty} h^{\mu_n}(f) = h^{\mu}(f)$。事实上，由 ϕ 的连续性可知 $\lim_{n\to+\infty} \int \phi \, \mathrm{d}\mu_n = \int \phi \, \mathrm{d}\mu$；根据假设，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu_n = h_\mu(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

因此断言成立。由引理2.5，存在 $\delta > 0$ 使得 $h^{\mu}(f) > \delta$。因此，当 n 充分大时，也有 $h^{\mu_n}(f) > \delta$。由推论2.3，可得

$$\#\left\{\text{TH}(\mu) : \mu \text{ is an ergodic measure of } f \text{ with } h_\mu(f) > \delta\right\} < +\infty.$$

不失一般性，经过取子列，我们可以假设对每个 $n > 0$，都有 $h^{\mu_n}(f) > \delta$，且 $\text{TH}(\mu_n) = \text{TH}(\mu_1)$。由于 $\text{TH}(\mu_1)$ 是一个f-不变的紧致集，并且对每个 $n > 0$，都有 $\mu_n(\text{TH}(\mu_1)) = 1$，因此 $\mu(\text{TH}(\mu_1)) = 1$。

假设 ν 是 μ 的一个遍历分量，该分量支撑在 TH(μ_1) 上，并且是 ϕ 的一个遍历平衡态。现在我们证明， μ 的几乎所有遍历分量都与 ν 重合，因此 $\mu=\nu$ 是 ϕ 的一个遍历平衡态。

注意到，几乎每个遍历分量 ν' of μ都支撑在 TH(μ_1) 上，并且是 ϕ的遍历平衡态。此外，由引理 2.5 可得 $h_{\nu'}(f)>\delta$。由引理 2.1，由于 $h_\nu(f)>0$、$h_{\nu'}(f)>0$、 $\nu(\mathrm{TH}(\mu_1))=1$ 以及 $\nu'(\mathrm{TH}(\mu_1))=1$，可推出 $\nu' h\sim\nu$。因此，根据引理 2.6，有 $\nu=\nu'$。综上，我们证明了 μ的几乎每个遍历分量都等于 ν。这就完成了定理 2.4 的证明。

□

2.3 平衡态的李雅普诺夫指数的连续性

设 f 是一个 C^∞ 曲面微分同胚，根据 [5, 定理 A], , 如果遍历测度序列 $\{\mu_n\}$ 满足 $\mu_n\to\mu$, 其中 μ是一个遍历测度，且 $h_{\mu_n}(f)\to h_\mu(f)>0$，那么有 $\lambda^+(\mu_n)\to\lambda^+(\mu)$。作为推论，我们得到定理 2.4 的以下推论，从而完成定理 B 的证明。

推论 2.8。 在定理 *2.4*的条件下，对于每个遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$满足 $P_{\mu_n}(\phi)\to P(\phi)$ 且 $\mu_n\to\mu$，有 μ是 ϕ关于 f 的遍历平衡态，并且$\lambda^+(\mu_n)\to\lambda^+(\mu)$。

本节讨论定理 C^r的情形。我们将证明以下定理：B。

定理 *2.9*。设 $f: M\to M$ 是一个 C^r（$r>1$）曲面微分同胚，满足 $h_{\mathrm{top}}(f)>\lambda_{\min}(f)$ r。假设 ϕ 是一个赫尔德连续函数，且 $Var(\phi)<h_{\mathrm{top}}(f)-\lambda_{\min}(f)$ r。那么，对于任意遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$，满足 $P_{\mu_n}(\phi)\to P(\phi)$ 且 $\mu_n\to\mu$，有 μ是 ϕ 关于 f 的平衡态； μ 是遍历的，并且 $\lambda^+(\mu_n)\to\lambda^+(\mu)$ 。

证明。 不失一般性，我们可以假设

$$\lambda_{\min}(f)=\lambda^+(f):=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{x\in M}\|D_xf^n\|,$$

否则，只需考虑 f^{-1}。设 $\{\mu_n\}_{n>0}$ 是一个遍历测度序列，且满足 $P_{\mu_n}(\phi)\to P(\phi)$ 且 $\mu_n\to\mu$, 我们首先证明 μ是 ϕ的一个平衡态。与引理 2.5的证明相同，存在 $\delta>0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}h_{\mu_n}(f)=P(\phi)-\int\phi\,\mathrm{d}\mu\geq h_{\mathrm{top}}(f)-\mathrm{Var}(\phi)>\frac{\lambda^+(f)}{r}+\delta>0.$$

因此，根据鲁埃勒不等式，我们可以假设，对每个 $n>0$， μ_n 都是遍历双曲测度。对于每个 $n>0$, 记 $\hat{}\mu_n^+:=\int\delta_{(x,E^u(x))}\,\mathrm{d}\mu_n(x)$ 为 μ_n 在 $\mathbb{P}TM$ 上的提升，其支撑在不稳定丛上。注意， $\lambda^+(\mu_n)=\int\log\|Dxf|_E\|\,\mathrm{d}\,\hat{}\mu_n^+(x,E$集合)。

取 $\lambda^+(f)r\leq C<\lambda^+(f)r+\delta$，由 [2, 主定理], 存在 $\beta\in[0,1]$ 使得 t

$$\hat{\mu}_n^+\to\hat{\mu}=\beta\hat{\nu}_1^+ +(1-\beta)\hat{\nu}_0,\text{ and }\lim_{n\to\infty}h_{\mu_n}(f)\leq\beta h_{\nu_1}(f)+(1-\beta)\cdot C,$$

其中 ν_1 是 $\hat{\nu}_1^+$ 的投影， ν_0 是 $\hat{\nu}_0$ 的投影，且 $\lambda^+(\nu_1) = \int \log \|Df|_E\| \, \mathrm{d}\hat{\nu}_1^+(x, E\text{集合})$。因此，我们有

$$P(\phi) = \lim_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu \le \beta\big(h_{\nu_1}(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_1\big) + (1-\beta)\Big(\int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 + C\Big). \tag{2}$$

注意，对于每个 f-不变测度 m，都有

$$\begin{aligned} P(\phi) &\ge h_m(f) + \int \phi \, \mathrm{d}m \\ &= h_m(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 + \int \phi \, \mathrm{d}m - \int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 \\ &\ge h_m(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 - \mathrm{Var}(\phi). \end{aligned}$$

因此，由变分原理可得

$$P(\phi) \ge h_{\mathrm{top}}(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 - \mathrm{Var}(\phi) > \frac{\lambda^+(f)}{r} + \delta + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 > C + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_0.$$

由 $P(\phi) \ge h_{\nu_1}(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\nu_1$ 和（2），可得

$$P(\phi) \le \beta \cdot P(\phi) + (1-\beta)\Big(\int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 + C\Big), \text{ and } \Big(\int \phi \, \mathrm{d}\nu_0 + C\Big) < P(\phi).$$

于是必有 $\beta = 1$、 $\mu = \nu_1$ 以及 $P(\phi) = h_\mu(f) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu$。这证明了 μ 是一个平衡态，并且

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^+(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} \int \log \|Df|_E\| \, \mathrm{d}\hat{\mu}_n^+(x, E) = \int \log \|Df|_E\| \, \mathrm{d}\hat{\nu}_1^+(x, E) = \lambda^+(\nu_1) = \lambda^+(\mu).$$

为了完成定理的证明，还需证明 μ 是一个遍历测度。这一讨论与定理 2.4 的证明类似。由推论 2.3，有

$$\#\left\{\mathrm{TH}(\mu) : \mu \text{ is an ergodic measure of } f \text{ with } h_\mu(f) > \frac{\lambda_{\min}(f)}{r} + \delta\right\} < +\infty.$$

不失一般性，取一个子序列后，不妨设 $h_{\mu_n}(f) > \delta + \lambda_{\min}(f)/r$ 且对于每个 $n > 0$， $\mathrm{TH}(\mu_n) = \sout{\mathrm{TH}(\mu_1)}$。因此，有 $\mu(\mathrm{TH}(\mu_1)) = 1$。假设 ν 是 μ 的一个遍历分量，其支集包含于 $\mathrm{TH}(\mu_1)$，并且是 ϕ 的遍历平衡态。由引理 2.5，有 $h_\nu(f) > \delta + \lambda_{\min}(f)/r$。

由于几乎每个遍历分量 ν' 都 μ 支撑在 $\mathrm{TH}(\mu_1)$ 上，并且再次由引理 2.5可知， ν' 是 ϕ 的遍历平衡态，且 $h_{\nu'}(f) > \delta + \lambda_{\min}(f)/r$。因此，由引理 2.1 和引理 2.5，结~~合引理~~ 2.1 和引理 2.5 可得， μ 的几乎每个遍历分量都等于 ν。因此， μ 是 f 的遍历测度。

□

2.4 势函数的强正再现

对于连续函数 $\phi: M \to \mathbb{R}$ 和 $\chi > 0$，回顾一下，若对任意 $\varepsilon > 0$ 以及满足 $P_{\mu_n}(\phi) \to P(\phi)$ 的遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$，都有以下性质，则称 f 对于 ϕ 是 χ- 强正再现（ SPR ）的:

$$\lim_{\ell\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)) = 1.$$

注意，这一定义等价于 [6, 定义 4。14]:

$$\forall \tau \in (0,1),\ \exists \ell > 0,\ \exists P_0 \in (0, P(\phi)) \text{ s.t. } \forall \mu \in \mathcal{M}_e(f),\ P_\mu(\phi) > P_0 \Rightarrow \mu(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)) > \tau.$$

在本小节中，我们将证明某一类势函数具有强正再现（SPR）性质。

定理 2.10。设 $f: M \to M$ 是一个 $C^r, r \in (1, +\infty]$ 曲面微分同胚，且其熵满足 $h^{\mathrm{top}}(f) > \frac{1}{r} \cdot \lambda_{\min}(f)$。假设 ϕ 是一个赫尔德连续函数，且 变差$(\phi) < h^{\mathrm{top}}(f) - \frac{1}{r} \cdot \lambda_{\min}(f)$。那么，存在 $\chi > 0$，使得对于 ϕ，f 是 χ-强正再现的。

证明。由引理 2.5 和定理 2.9，存在 $\chi > 0$，使得对于每个满足 $\mu_n \to \mu$ 且 $P_{\mu_n}(\phi) \to P(\phi)$ 的遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$，我们有 $\lambda^+(\mu_n) \to \lambda^+(\mu)$。此外，由于 μ 是遍历的且 $h_\mu(f) > \chi$，因此对 μ-几乎处处的 x，有 $\lambda^+(x) > \chi > -\chi > \lambda^-(x)$，其中 $\lambda^+(x)$ 和 $\lambda^-(x)$ 分别是 x 的正、负李雅普诺夫指数。

根据以上确立的事实，定理2.10 的证明基本上与定理 [6, 3.1]的证明相同；另请参见 [6, 注释 3.5]。 □

由于定理A 对应于定理*2.10* $= \infty$ 的情形，因此定理2.10的证明至此完成。A。

2.5 博雷尔同宿类上的强正再现

现在我们引入同宿类上强正再现（SPR）的概念，该概念定义于 [6,第 2 节。2]回忆第 2.1 节中 $BH(\mathcal{O})$ 和 $TH(\mathcal{O})$ 的定义。设 $\phi: M \to \mathbb{R}$是一个赫尔德连续函数。对于每个f-不变可测集X，我们将拓扑压力定义为 ϕ在X 上的

$$P_X(\phi) := P_X(\phi, f) = \sup\left\{h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}(f) \text{ and } \mu(X) = 1\right\},$$

并记 $h_X(f) := P_X(0)$。显然，我们有 $P_M(\phi) = P(\phi)$，且 $h_M(f) := h^{\mathrm{top}}(f)$。如果测度 $\mu \in \mathcal{M}(f)$ 满足 $\mu(X) = 1$ 且 $P_\mu(\phi) = P_X(\phi)$，则称其为 ϕ 在 X 上的平衡态。对于$\chi > 0$，如果对每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个满足 $\mu_n(X) = 1 (\forall n > 0)$ 且 $P_{\mu_n}(\phi) \to P_X(\phi)$ 的遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$，都有

$$\lim_{\ell\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)) = 1.$$

当我们说f对于 ϕ 是 χ-SPR，而未作进一步说明时，意指f 在M上对于 ϕ 是χ-SPR。

定理 2.11。 设 $f:M \to M$ 是一个 $C^r, r \in (1,+\infty]$ 曲面微分同胚。对于任意满足 $h_X(f) > {}^1r \cdot \lambda_{\min}(f)$ 的博雷尔同宿类 X，若 $\phi:M \to \mathbb{R}$ 是赫尔德连续函数，且变差$(\phi|_X) < h_X(f) - {}^1r \cdot \lambda_{\min}(f)$，那么，存在 $\chi > 0$ 使得 f 在 X 上对于 ϕ 是 χ-*SPR*。

证明。 设 $\mathcal{O}$ 是双曲周期轨道，满足 $\mathrm{BH}(\mathcal{O}) = X$。回顾 $\mathrm{TH}(\mathcal{O}) = \mathrm{BH}(\mathcal{O})$。

我们首先证明 $\mathrm{h}_X(\mathrm{f}) := \sup\{\mathrm{h}_\mu(\mathrm{f}) : \mu(\mathrm{TH}(\mathcal{O})) = 1\}$。由于每个满足 $\mu(\mathrm{X}) = 1$ 的 μ 也满足 $\mu(\mathrm{TH}(\mathcal{O})) = 1$，因此不等式“≤”显然成立。另一方面，由于 $\mathrm{h}_X(\mathrm{f}) > {}^1\mathrm{r} \cdot \lambda_{\min}(\mathrm{f})$，存在一个遍历测度 μ_0，满足 $\mathrm{h}_{\mu_0}(\mathrm{f}) > {}^1\mathrm{r} \cdot \lambda_{\min}(\mathrm{f})$ 且 $\mu_0 \mathrm{h}\sim \mathcal{O}$。对于任意满足 $\nu(\mathrm{TH}(\mathcal{O})) = 1$ 且 $\mathrm{h}_\nu(\mathrm{f}) > {}^1\mathrm{r} \cdot \lambda_{\min}(\mathrm{f})$ 的测度 ν，引理 2.1 蕴含 $\mu_0 \mathrm{h}\sim \nu$，故$\nu(\mathrm{X}) = 1$。这就证明了不等式“≥”。

现在，设 $\{\mu_n\}_{n>0}$ 是 X 上的遍历测度序列，满足 $\mu_n \to \mu$ 且 $\mathrm{P}_{\mu_n}(\phi) \to \mathrm{P}_X(\phi)$。仿照定理 2.9 的论证可得 $\mathrm{h}_\mu(\mathrm{f}) > {}^1\mathrm{r} \cdot \lambda_{\min}(\mathrm{f})$、 $\lambda^+(\mu_n) \to \lambda^+(\mu)$，并且 μ 是遍历的，且 $\mu(\mathrm{X}) = 1$，因为对于某个满足 $\nu(\mathrm{X}) = 1$ 且 $\mathrm{h}_\nu(\mathrm{f}) > {}^1\mathrm{r} \cdot \lambda_{\min}(\mathrm{f})$ 的 ν，有 $\mu \mathrm{h}\sim \nu$。因此，SPR 性质得证。 □

3 平衡态的统计性质

本节中，我们始终假设 $f: M \to M$ 是一个具有正熵的 $C^{1+\alpha}$ 曲面微分同胚，且 $\phi: M \to \mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数。我们列举 SPR 条件所蕴含的统计性质；关于最大熵测度的类似结果已在 [6]中得到。

3.1 平衡态的存在性

回顾第 2.5 节中同宿类上 SPR 的定义。以下定理最初由 [6], 证明，展示了平衡态的存在性。这里，我们给出一个基于同宿关系的替代证明，不依赖马尔可夫编码的 SPR 性质。请注意，在定理陈述中，集合 X 不假设为紧致。

定理 3.1。 假设 $X \subset M$ 是一个博雷尔同宿类，且 f 在 ϕ 上是 χ-强正再现的。于是，对于任意支撑在 X 上、满足 $P_{\mu_n}(\phi) \to P_X(\phi)$ 且 $\mu_n \to \mu$ 的遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$，我们有 μ 是遍历的，$\mu(X) = 1$，并且 $P_\mu(\phi) = P_X(\phi)$。

我们将分三步证明这一结论。第一步，我们证明 $\lambda^+(\mu_n) \to \lambda^+(\mu)$，由此根据 [13, 推论 C]，我们得到 $P_\mu(\phi) \geq P_X(\phi)$。第二步，我们证明几乎每个遍历分量都在 X 上赋予满测度，因此 $\mu(X) = 1$且 $P_\mu(\phi) = P_X(\phi)$。最后一步，我们证明 μ 是遍历的。

命题 3.2. 假设 $X \subset M$ 是一个博雷尔同宿类，且 f 在 ϕ 上是 χ-强正再现（*SPR*）的。对于每个满足 $\mu_n(X) = 1, \forall n > 0, P_{\mu_n}(\phi) \to P_X(\phi)$ 且$\mu_n \to \mu$ 当 $n \to \infty$时的遍历测度序列 $\{\mu_n\}_{n>0}$，我们有 $\lambda^+(\mu_n) \to \lambda^+(\mu)$ 当 $n \to \infty$时。

证明。对于 对于每个 $\tau>0$，根据 χ-SPR 性质，存在 $\chi>0$、$0<\varepsilon\ll\chi$、$\ell>0$ 和 $N>0$，使得 at

$$\mu_n(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))>1-\tau,\ \forall n>N.$$

由于集合 $\mathrm{PES}_\ell^{\chi\ \varepsilon}$，$(f)$ 是紧致的，因此有 $\mu(\mathrm{PES}_\ell^{\chi\ \varepsilon},(f))>1-\tau$。由于 $\tau>0$ 是任意的，我们有 $\mu(\bigcup_{\ell>0}\mathrm{PES}_\ell^{\chi\ \varepsilon},(f))=1$，这意味着 μ 是 $(\chi-\varepsilon)$-双曲的。

注意，几何势 $\mathrm{J}^u(\mathrm{x}):=\log\|\mathrm{D}_x\mathrm{f}|_{E^u}(\mathrm{x})\|$ 在 $\mathrm{PES}_\ell^{\chi\ \varepsilon}$，$(\mathrm{f})$ 上连续。因此，我们可以选择一个连续函数 $\hat{}\mathrm{J}:\mathrm{M}\ \to\mathbb{R}$，使得 $\|\hat{}\mathrm{J}\|_{C^0}\le\log\|\mathrm{D}\ \mathrm{f}\ \|_{\sup}$，并且对每个 $\mathrm{x}\ \in\mathrm{PES}_\ell^{\chi\ \varepsilon}$，$(\mathrm{X})$，都有 $\hat{}\mathrm{J}(\mathrm{x})=\mathrm{J}\ \mathrm{u}(\mathrm{x})$，其中 $\|\mathrm{D}\ \mathrm{f}\ \|_{\sup}:=\sup_{x\in M}\|\mathrm{D}_x\mathrm{f}\ \|$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}|\lambda^+(\mu_n)-\lambda^+(\mu)|&=\limsup_{n\to\infty}\left|\int J^u(x)\mathrm{d}\mu_n(x)-\int J^u(x)\mathrm{d}\mu(x)\right|\\&\le\lim_{n\to\infty}\left|\int\hat{J}\,\mathrm{d}\mu_n-\int\hat{J}\,\mathrm{d}\mu\right|+4\tau\cdot\log\|Df\|_{\sup}=4\tau\cdot\log\|Df\|_{\sup}.\end{aligned}$$

由于 $\tau>0$ 是任意的，我们有 $\lambda^+(\mu_n)\ \to\lambda^+(\mu)$。 □

定理 *3.1* 的证明。步骤 *1*。 由 ϕ的连续性，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int\phi\,\mathrm{d}\mu_n=\int\phi\,\mathrm{d}\mu.$$

为了证明 $P^\mu(\phi)\ge P_X(\phi)$，还需证明熵的上半连续性。根据 [13, 推论 C], , 若 $\lambda^+(\mu_n)\to\lambda^+(\mu)$，则有

$$\limsup_{n\to+\infty}h_{\mu_n}(f)\le h_\mu(f).$$

由于命题 3.2 保证 $\lambda^+(\mu_n)\ \to\lambda^+(\mu)$，所需的不等式 $P^\mu(\phi)\ \ge\ P_X(\phi)$ 即得证。

步骤 *2*。 令 $\mathcal{O}$为一个双曲周期轨道，使得 $\mathrm{BH}(\mathcal{O})=X$。由第一步可知，$\mu$是一个双曲测度。现在证明，$\mu$ 的几乎每个遍历分量ν 都满足 $\nu\ h\sim\mathcal{O}$。考虑 $\mu=\int\mu_x\,\mathrm{d}\mu(x)$ 的遍历分解，其中当极限存在时，$\mu_x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f_j(x)}$。令

–

$$E:=\{x:\mu_x\text{ is well defined and }\mu_x(\mathrm{BH}(\mathcal{O}))=0\}.$$

只需证明 $\mu(E\text{集合})=0$。反设 $\mu(E\text{集合}\ )=\tau>0$。由于E集合 是f-不变可测子集，因此我们可以分解为 $\mu=\tau\mu_*+(1-\tau)\mu_0$，其中 $\mu_*:=\frac{1}{\tau}\int_{E\text{集合}}\mu_x\,\mathrm{d}\mu(x)$ 是一个f-不变概率测度。根据 χ-强正再现性质，存在 $\ell>0$ 和$N\ >0$，使得

$$\mu_n(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))>1-\frac{\tau^2}{4},\ \forall n>N.$$

由此可得 $\mu(\text{周期遍历集}_\ell^{\chi\ \varepsilon},(f))\ >1-\frac{\tau^2}{3}$。因此，我们有

$$\mu_*(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))>\frac{1}{\tau}\left(\mu(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))-(1-\tau)\mu_0(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))\right)>\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{\tau^2}{3}-1+\tau\right)=1-\frac{\tau}{3}.$$

取 $\delta_\ell>0$，使得对于每个满足 d $(x_1,x_2)\le 2\delta_\ell$ 的 $x_1,x_2\in$周期遍历集$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)，都有 W u loc$(x_1)\pitchfork$W s loc$(x_2)\neq\emptyset$，且 W s loc$(x_1)\pitchfork$W u loc$(x_2)\neq\emptyset$。选取一个有限集 $\{z_1,\cdots,z_k\}\subset$周期遍历集$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)，使得

$$\mu_*\Big(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)-\bigcup_{j=1}^{k}B(z_j,\delta_\ell)\Big)=0 \text{ and } \mu_*\big(B(z_i,\delta_\ell)\cap\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)\big)>0,\ \forall 1\le i\le k.$$

于是，我们有

$$\mu\big(\bigcup_{j=1}^{k}B(z_j,\delta_\ell)\big)\ge\tau\cdot\mu_*(\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f))>\tau-\frac{\tau^2}{3}>\frac{2\tau}{3}.$$

如有必要，增大$N>0$，我们可以假设

$$\mu_n\big(\bigcup_{j=1}^{k}B(z_j,\delta_\ell)\big)>\frac{\tau}{2},\ \forall n>N.$$

固定某个$n>N$。那么，$\mu_n\big(\bigcup^k{}_{j=1}B(z_j,\delta_\ell)\cap$周期遍历集$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)$\big)>0$，因此存在$i\in\{1,\cdots,k\}$使得

$$\mu_n\big(B(z_i,\delta_\ell)\cap\mathrm{PES}_\ell^{\chi,\varepsilon}(f)\big)>0.$$

由于 μ_*(B $(z_i,\delta_\ell)\cap$周期遍历集$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)) >0，存在x $\in$E集合使得 μ_x(周期遍历集$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f) $\cap$B (z_i,δ_ℓ)) >0。现在，对于每个点 $y_1,y_2\in$B $(z_i,\delta_\ell)\cap$ 周期遍历集 $_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)，我们有 W u loc$(y_1)\pitchfork$ 局部稳定流形$(y_2)\neq\emptyset$且W s loc$(y_1)\pitchfork$局部不稳定流形$(y_2)\neq\emptyset$。这意味着 μ_nh~ μ_x，进而 μ_xh~ $\mathscr{O}$。然而，这与如下假设矛盾：对于每个x $\in$E集合，都有 μ_x(BH($\mathscr{O}$)) $=0$。因此，我们必须有 μ(E集合) $=0$。

由于 $\mu(E$集合 $)=0$，由此可知，对 μ-几乎处处的x，有 μ_x(BH($\mathscr{O}$)) $=1$。因此，$\mu(X)=1$。根据$P_X(\phi)$的定义，有$P^\mu(\phi)\le P_X(\phi)$。结合第一步的结论，这对 μ-几乎处处的x给出$P^\mu(\phi)=P_X(\phi)$以及$P^{\mu_x}(\phi)=P_X(\phi)$。

第*3*步。由 [4, 第3节。5], 若 ν 是 ϕ 在 X上的遍历双曲平衡态，则每一个遍历双曲平衡态 ν' 对于 ϕ 在 X上都与 ν重合。由第一步和第二步可知，μ 是 ϕ 在 X上的双曲不变平衡态，并且 μ 的几乎每一个遍历分量都是 ϕ 在 X上的遍历双曲平衡态。由此可知，μ的几乎所有遍历分量彼此重合。因此，μ 本身是 ϕ的遍历双曲平衡态。

□

定理 C 的证明。现在假设 f : M $\to$ M 是一个 $C^{1+\alpha}$ 曲面微分同胚，并且 ϕ : M $\to\mathbb{R}$ 是赫尔德连续函数，存在 $\chi>0$ 使得对于 ϕ，f 是 χ-强正再现的。那么，存在 $\tau>0$、$\ell>0$和 $P_0\in$(0, P (ϕ))，使得对于每个遍历测度μ，若 $P^\mu(\phi)>P_0$,，则 μ(周期遍历集$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)) $>\tau$。取 $\delta_\ell>0$，使得对于任意 $x_1,x_2\in\mathrm{PES}_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)，若 d $(x_1,x_2)\le 2\delta_\ell$，则 W u loc$(x_i)\pitchfork$W s loc(x j) $\neq\emptyset$，i, j $=1,2$。选取有限个点 $\{z_1,\cdots,z_k\}\subset$PES$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)，使得 $\cup^k$i$=1$B $(z_i,\delta_\ell)\supset$ PES$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)。设 z $\in$M，若两个遍历双曲测度μ_1和 μ_2满足 $\mu_i\big($B $(z,\delta)\cap$PES$_\ell^{\chi\,\varepsilon}$, (f)$\big)>0$，i $=1,2$，则 μ_1h~ μ_2。因此，

$$\#\{\mathrm{BH}(\mu):\mu \text{ is ergodic hyperbolic and } P_\mu(\phi)>P_0\}\le k<+\infty. \tag{3}$$

因此，遍历平衡态的数量至多是有限的。设 $\{\mu_n\}_{n>0}$ 是一列遍历测度，满足 $P^{\mu_n}(\phi)\to P(\phi)$ 且 $\mu_n\to\mu$。取一个子列后

不妨设 $\mu_n(\mathrm{BH}(\mu_1)) = 1$ 对每个 $n > 0$均成立。由于 f 是 χ-强正再现的，对于 ϕ，有 f 是 χ-强正再现的，对于 ϕ 在 $\mathrm{BH}(\mu_1)$ 上成立。于是，根据定理 3.1， μ是一个遍历平衡态，并且李雅普诺夫指数连续变化。 □

以下推论直接由定理C 以及博雷尔同宿类上的 SPR 性质定义得到。

推论 3.3。 假设 $f: M \to M$ 是一个 $C^{1+\alpha}$ 曲面微分同胚，且 $\phi: M \to \mathbb{R}$是一个赫尔德连续函数，使得存在 $\chi > 0$，对于该函数，f 对 ϕ是 χ-*SPR* 的。那么，对于 ϕ的每个遍历平衡态 μ，在 $\mathrm{BH}(\mu)$ 上，f 对 ϕ是 χ-*SPR* 的。

3.2 强正再现符号动力系统

设 $\mathcal{G}$ 是一个有向图，其顶点集合 $\mathcal{V}$ 为有限集或可数集。不失一般性地，假设对于任意 $a \in \mathcal{V}$，$\#\{b \in \mathcal{V}: b \to a\} > 0$，且 $\#\{b \in \mathcal{V}: a \to b\} > 0$。令

$$\Sigma := \Sigma(\mathcal{G}) := \{\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{Z}} : x_n \to x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

我们在 Σ 上定义度量如下:

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := \exp\left(-\min\{|n| : x_n \neq y_n\}\right) \text{ and } d((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = 0.$$

注意， Σ 是局部紧的，当且仅当 $\mathcal{G}$ 是局部有限的：对于任意 $a \in \mathcal{V}$，$\#\{b \in \mathcal{V}: b \to a\} < \infty$，且 $\#\{b \in \mathcal{V}: a \to b\} < \infty$。在本节中，我们始终假设 Σ 是局部紧的。

定义左移映射 $\sigma: \Sigma \to \Sigma$, $\sigma(\bar{x}) = \bar{y}$，其中 $y_n = x_{n+1}$对任意 $n \in \mathbb{N}$均成立。对于每个 $a, b \in \mathcal{V}$，若存在 $\{c_1, \cdots, c_{n-1}\} \in \mathcal{V}$使得 $a \to c_1 \to \cdots \to c_{n-1} \to b$，则称 a $n \to b$。于是，σ 是拓扑传递的，当且仅当 Σ 是不可约的：对于每个 $a, b \in \mathcal{V}$，都存在 $n > 0$ 使得 a $n \to b$。假设 Σ 是不可约的，则 $p := \gcd\{n : a\ n \to a\}$ 不依赖于 a 的选择，我们称 p 为 Σ的周期。若 $p = 1$，则称 Σ 是非周期的。注意， σ 是拓扑混合的，当且仅当 Σ是不可约且非周期的。下面的谱分解定理是众所周知的，证明可见于 [6, 引理 6.4]。

引理 3.4。 设 Σ 是周期为 $p \geq 1$的不可约马尔可夫移位。那么，存在两两不相交的闭子集 $\Sigma_0, \cdots, \Sigma_{p-1} \subset \Sigma$，使得 $\Sigma = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Sigma_i$, $\sigma(\Sigma_i) = \Sigma_{(i+1) \bmod p}$，且对每个 $i = 0, \cdots, p-1$，$\sigma^p: \Sigma_i \to \Sigma_i$都与一个拓扑混合的马尔可夫移位拓扑共轭。

设 $V: \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。对于 $\beta > 0$，我们定义

$$\|V\|_\beta := \sup_{\bar{x}\in\Sigma} |V(\bar{x})| + \sup\left\{\frac{|V(\bar{x}) - V(\bar{y})|}{d(\bar{x}, \bar{y})^\beta},\ \bar{x} \neq \bar{y},\ \bar{x}, \bar{y} \in \Sigma\right\}.$$

并且我们称V是 β-赫尔德连续的，如果 $\|V\|_\beta < \infty$。注意， Σ 上的所有赫尔德连续函数都是有界的。设 $\phi: \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个 β-赫尔德连续函数。对于每个$a \in \mathcal{V}$，我们定义

$$Z_n(\phi, a) := \sum\{S_n\phi(\bar{x}) : \bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma,\ \sigma^n(\bar{x}) = \bar{x},\ x_0 = x_n = a\},$$
$$Z_n^*(\phi, a) := \sum\{S_n\phi(\bar{x}) : \bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma,\ \sigma^n(\bar{x}) = \bar{x},\ x_0 = x_n = a,\ x_i \neq a,\ 1 \leq i \leq n-1\},$$

其中 $S_n\phi = \phi + \phi\circ\sigma + \cdots + \phi\circ\sigma^{n-1}$。设

$$P_\Sigma(\phi) := \sup\left\{h_\mu(\sigma) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu : \mu \text{ is an invariant probability measure of } \sigma\right\},$$

并令 $P_\Sigma(\mu,\phi) := h^\mu(\sigma) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu$，其中 μ 是一个 σ-不变概率测度。

定理 3.5。设 Σ 是周期为 $p \geq 1$ 的不可约马尔可夫移位，且 $\phi: \Sigma \to \mathbb{R}$ 是赫尔德连续函数。假设 $P_\Sigma(\phi) < \infty$。那么，

- 对每个 $a \in \mathcal{V}$，$P_\Sigma(\phi)$ = 上极限 ^1n 对数 $Z_{\underline{n}}(\phi, a)$; $n\to\infty$

- 如果存在一个 σ-不变测度 μ，使得 $P_\Sigma(\mu,\phi) = P_\Sigma(\phi)$，那么它是唯一的，并且$(\Sigma,\sigma,\mu)$在测度论意义下同构于一个伯努利方案与 p 个点的循环置换的乘积。

现在我们说明定理 3.5 的由来。若一个 σ-不变测度 μ满足 $\mathrm{P}_\Sigma(\mu,\phi) = \mathrm{P}_\Sigma(\phi)$，则称其为 Σ上的 ϕ 的平衡态。定理 3.5 的第一项，即古列维奇压力的变分原理，已在 [22, 定理 3]中证明。尽管该结论要求 (Σ,σ) 是拓扑混合的，但根据谱分解定理，当 (Σ,σ) 是拓扑传递的时，该结论同样成立。ϕ 在 Σ 上的平衡态的唯一性已在 [7,定理 1.1]中证明。平衡态的伯努利性质已在 [25, 定理 3.1、引理 4.1] 或 [8, 定理 1.1]中确立。

平衡态的存 在等价于正再返性。

定义 3.6（正再现）。设 Σ 是一个不可约马尔可夫移位，且 $\phi: \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数。假设 $P_\Sigma(\phi) < \infty$。如果对于某个 $a \in \mathcal{V}$（对于所有 $a \in \mathcal{V}$）成立，我们称 Σ 对于 ϕ 是正再现的。

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\cdot P_\Sigma(\phi)} Z_n(\phi, a) = \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\cdot P_\Sigma(\phi)} \cdot n \cdot Z_n^*(\phi, a) < \infty.$$

在假设 (Σ,σ) 拓扑混合的条件下，以下定理已在 [22, 定理 8] 中证明；根据谱分解定理，当 (Σ,σ) 拓扑传递时，该定理同样成立。此外，[22] 对此情形下的平衡态作了更详细的描述，包括其吉布斯性质和初始分布。

定理 3.7。设 Σ 是一个不可约马尔可夫移位，且 $\phi: \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数。假设 $P_\Sigma(\phi) < \infty$。那么，ϕ 存在平衡态，当且仅当 Σ 对于 ϕ 是正再现的。

现在回顾强正再现的概念，它为平衡态带来一系列统计性质。

定义 3.8（强正再现）。设 Σ 是一个不可约马尔可夫移位，$\phi: \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数。假设 $P_\Sigma(\phi) < \infty$。若存在某个 $a \in \mathcal{V}$（对所有 $a \in \mathcal{V}$），我们称 Σ 对 ϕ 具有强正再现性。

$$\Delta(\phi) = \Delta(\phi, a) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\phi, a) - \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log Z_n^*(\phi, a) > 0$$

备注 3.9。 根据 $\Delta(\phi)$ 的定义，若 ϕ 满足 *SPR* 性质，则对于任何满足 $\mathrm{Var}(\psi-\phi)<\Delta(\phi)$ 的赫尔德势 ψ，*SPR* 性质也自动成立。因此，对于一个 C^∞ 曲面微分同胚 f，若 $\mathrm{Var}(\psi)<\Delta(0)$，则 f 对 ψ 具有 *SPR* 性质。一般而言，我们只知道 $\Delta(0)$ 为正，但不知道任何明确的下界。感谢 *O. Sarig* 指出这一结论。

由 [28] 或 [6, 引理 7。2], 在 $\phi\equiv 0$的情形下，强正再现意味着正再现 ϕ: $\Sigma\to\mathbb{R}$；对于每个赫尔德连续函数，也可以类似地证明强正再现意味着正再现 ϕ: $\Sigma\to\mathbb{R}$；另见 [23]。

回顾第 2.5 节中给出的曲面微分同胚在博雷尔同宿类上的强正再现定义。

定理 3.10。 设 f: $M\to M$ 是一个 $C^{1+\alpha}$ 曲面微分同胚，且 ϕ: $M\to\mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数。假设 $X\subset M$ 是一个博雷尔同宿类。那么，对于每个 $\chi_0>0$，存在一个局部紧不可约马尔可夫移位 Σ 以及一个赫尔德连续映射 π: $\Sigma\to M$，使得

(a) $\pi\circ\sigma=f\circ\pi$ 和 $\pi:\Sigma^{\#}\to M$ 是有限到一的，其中 $\Sigma^{\#}$ 表示 Σ的正则部分，由所有满足以下条件的 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Sigma$ 组成：对这两者 $(x_i)_{i\geq 0}$、$(x_i)_{i\leq 0}$ 而言，均具有常数子序列；*(b)* 对于 Σ上的每个遍历 σ-不变测度 $\hat{\mu}$，投影 $\mu:=\pi_*\hat{\mu}$ 是一个遍历的 f-不变测度，并且满足 $\mu(X)=1$ 以及 $h_\mu(f)=h_{\hat{\mu}}(\sigma)$；*(c)* 对于每个满足 $\mu(X)=1$的遍历 χ_0-双曲测度 μ，存在 Σ 上的遍历 σ-不变测度 $\hat{\mu}$，使得 $\mu=\pi_*\hat{\mu}$；*(d)* 存在 $\chi_1>0$，使得对于每个 $\bar{x}\in\Sigma$，都有一个分裂 $T_{\pi(\bar{x})}M:=E^u(\bar{x})\oplus E^s(\bar{x})$，且 $\bar{x}\mapsto E^u/s(\bar{x})$ 是赫尔德连续的，并且 $\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|D_{\pi(\bar{x})}f^n|_{E^s}(\bar{x})\|<-\chi_1$，$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|D_{\pi(\bar{x})}f^{-n}|_{E^u}(\bar{x})\|<-\chi_1$；*(e)* 如果 f 对于 ϕ 是 χ_2-强正再现的，且 $\chi_2>\chi_0$，那么 Σ 对于 $\hat{\phi}$ 是强正再现的：$=\phi\circ\pi$，$P_X(\phi)=P_\Sigma(\hat{\phi})$，并且存在 $P_0<P_X(\phi)$，使得对于 X 上满足 $P_\mu(\phi)>P_0$，的每个遍历测度 μ，都有 $\mu(\pi(\Sigma^{\#}))=1$。

现在我们解释定理 3.10 的由来。SPR 编码定理在 [6,定理 10。5]对于曲面微分同胚，Sarig [26] 构造了非一致双曲集到可数拓扑马尔可夫移位的符号编码；Buzzi-Crovisier-Sarig [4] 构造了博雷尔同宿类到可数拓扑不可约马尔可夫移位的符号编码；最近，他们还 [6] 证明了，如果一个微分同胚在某个同宿类上具有强正再现性，那么它存在一个由 SPR 马尔可夫移位给出的符号编码。

3.3 平衡态统计性质一览

本节回顾由 SPR 编码导出的微分同胚平衡态的一系列统计性质。这些统计性质最初针对 [6] 最大熵测度进行了陈述。为同时处理赫尔德连续势函数和几何势函数 $J^u(x) := \log |\det(D_x f|_{E^u}(x))|$，我们采用准赫尔德连续函数这一记法，其定义见 [6, 第 11]节。

对于闭曲面 M，我们用 $\mathbb{P}TM$表示TM的射影丛。设X是一个博雷尔同宿类。若存在一个β-赫尔德连续函数 $\Phi\colon \mathbb{P}TM \to \mathbb{R}$，使得对于所有$x \in X$，都有 $\Phi(x, E^u(x)) = \phi(x)$，则称函数 $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ 是 β- 准赫尔德连续的，并记作

$$|\phi|_\beta := \inf\{\|\Phi\|_\beta : \Phi(x, E^u(x)) = \phi(x),\ \forall x \in X\}.$$

若 $\phi : M \to \mathbb{R}$ 是 β-赫尔德连续的，则 $\phi|_X$ 是 β-准赫尔德连续的，且 $|\phi|_X|_\beta \le |\phi|_\beta$。若$f\colon M \to M$是一个$C^{1+\alpha}$曲面微分同胚，则$x \to J^u(x)$是 α-准赫尔德连续的（见 [6, 第 11.1] 节）。

设$f\colon M \to M$是一个$C^{1+\alpha}$曲面微分同胚，并设X是一个博雷尔同宿类。定义在X上的每个准赫尔德连续函数都是可测且有界的（见 [6, 引理 11。5]）。考虑定理 π 3.10中的不可约马尔可夫编码 $\Sigma \to$: M 。以下引理已在 [6,引理 12。1]中证明。

^ ^ 引理 *3.11.* 对任意 $\beta > 0$，存在 $C = C(\Sigma, \pi, \beta)$ 和 $\beta = \beta(\Sigma, \pi, \beta)$，使得对于每个$\beta$-准赫尔德连续函数 $V : X \to \mathbb{R}$，都存在一个 ^ β-赫尔德连续函数 $\hat{V} :\Sigma \to \mathbb{R}$，使得对每个 $\bar{x} \in \pi^{-1}(X)$，均有 $\hat{V}(\bar{x}) = V \circ \pi(\bar{x})$，且 $\|\hat{V}\|_{\hat{\beta}} \le C \cdot |V|_\beta$。

3.3.1 指数混合

对于周期为 $p \ge 1$ 的 SPR 马尔可夫移位，Buzzi-Crovisier-Sarig [6，定理 B.12] 证明了，相对于 σ^p 的唯一平衡态的每个遍历分量都具有相关性的指数衰减：

定理 3.12. 设 Σ 是一个周期为 $p \ge 1$ 的不可约马尔可夫移位，且 $\phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个赫尔德连续函数。假设 $P_\Sigma(\phi) < \infty$，并且 Σ 对于 ϕ 是强正再现的。设 ^μ 为 ϕ 的唯一平衡态。那么，对每个 ^ $\beta > 0$，存在 ^$C > 0$ 和 ^$\theta \in (0,1)$，使得对于任意 ^ β-赫尔德连续函数 ^$V_1, \hat{V}_2 : \Sigma \to \mathbb{R}$，以及 ^$\nu$ 的任一关于 σ^p 的遍历分量 ^μ，均有

$$\left| \int \hat{V}_1(x) \cdot \hat{V}_2(\sigma^{pn}(x))\, \mathrm{d}\hat{\nu}(x) - \int \hat{V}_1\, \mathrm{d}\hat{\nu} \cdot \int \hat{V}_2\, \mathrm{d}\hat{\nu} \right| \le \hat{C} \cdot \hat{\theta}^n \cdot \|\hat{V}_1\|_{\hat{\beta}} \cdot \|\hat{V}_2\|_{\hat{\beta}},\ \forall n > 0.$$

现在我们给出定理D的一个更强版本的证明：函数V_1, V_2 可以假设是 β-准赫尔德连续的，而不只是 β-赫尔德连续的。

定理*D*的证明。证明过程与 [6, 第 12 节1]类似。设 μ是 ϕ 的混合阶数为$p \ge 1$的一个遍历平衡态，并令$X = \mathrm{BH}(\mu)$。假设 $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ 是赫尔德连续的，且f是 χ相对于 ϕ的 -SPR。固定 $\chi_0 < \chi$。由定理3.10，存在一个编码映射 $\pi : \Sigma \to X$,

其中 Σ 是周期为q（q 可能不等于p）的不可约马尔可夫移位。对于函数 ϕ，记其为 $\hat{\phi} = \phi \circ \pi$。由于 π 是赫尔德连续的，$\hat{\phi}$ 也赫尔德连续。根据假设，f 是 χ 相对于 X 和 ϕ 的 -SPR，因此根据定理 Σ3.10 （e），$\hat{}$是$\hat{}$的唯一平衡态。

断言。 数值 $p,q \in \mathbb{N}$ 满足 $(q/p) \in \mathbb{N}$；测度 $\hat{\mu}$ 满足 $\pi_*(\hat{\mu}) = \mu$；并且对于相对于 f^p 的每个遍历分量 ν *of* μ，都存在相对于 σ^q 的 $\hat{\nu}$ $\hat{\mu}$ 遍历分量，使得 $\nu = \pi_*\hat{\nu}$。

证明。证明过程与 [6, 引理 12.2, 12.3] 类似。由定理 3.10 (b) 和 (e)，可得 $P_\Sigma(\hat{\phi}) = P_X(\phi)$。因此，$P_{\hat{\mu}}(\hat{\phi}) = P_X(\phi)$ 且 $\pi_*(\hat{\mu}) = \mu$。由于 μ 的混合阶数为 p，存在一个指标函数 $C : X \to \{0, \cdots, p-1\}$，使得 $C(f^n(x)) = C(x) + (n \bmod p)$。令 $\hat{C} = C \circ \pi$。则 $\hat{C} \circ \sigma^q(\bar{x}) = \hat{C}(\bar{x}) + (q \bmod p)$。对于相对于 σ^q 的每个 $\hat{\nu}$ μ 遍历分量，由于根据定理 3.5，$(\Sigma, \sigma^q, \hat{\nu})$ 是伯努利系统，因此 $\hat{\nu}$ 对 $\sigma^{p\cdot q}$ 是遍历的。此外，$\hat{C} \circ \sigma^{p\cdot q}(\bar{x}) = \hat{C}(\bar{x})$，所以 $\hat{C}(\bar{x})$ 对 $\hat{\nu}$-几乎处处为常数。因此，对于 $\hat{\nu}$-几乎所有的 $\bar{x}$，都有 $\hat{C}(\bar{x}) = \hat{C}(\bar{x}) + (q \bmod p)$，这意味着 $(q \bmod p) = 0$，从而 $(q/p) \in \mathbb{N}$。

考虑 $\hat{\mu} = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \sigma^i_*(\hat{\nu}')$ 关于 σ^q 的遍历分解，以及 $\mu = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f^j_*(\nu)$ 关于 f^p 的遍历分解。对每个 $0 \le j < p$，由于 $(X, f^p, f^j_*(\nu))$ 是伯努利系统，因此 $(X, f^p, f^j_*(\nu))$ 关于 $f^{p\cdot q}$ 是遍历的。类似地，对每个 $0 \le i < q$，$(\Sigma, \sigma^q, \sigma^i_*(\hat{\nu}'))$ 关于 $\sigma^{p\cdot q}$ 是遍历的。注意，$\mu = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f^j_*(\nu)$ 和 $\mu = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \pi_* \circ \sigma^i_*(\hat{\nu}')$ 是 μ 关于 $f^{p\cdot q}$ 的两个遍历分解。因此，存在 $i \in \{0, \cdots q-1\}$，使得 $\hat{\nu} = \pi_*(\sigma^i_*(\hat{\nu}'))$，其中 $\hat{\nu} := \sigma^i_*(\hat{\nu}')$ 是 $\hat{\mu}$ 关于 σ^q 的一个遍历分量。

□

$\hat{}$ 对于每个 $\beta > 0$，引理 3.11 给出 $C_\beta > 0$ 和 $\beta > 0$，使得对于任意 β-准 Hölder 连续函数 $V : X \to \mathbb{R}$，都存在一个 $\hat{}$ β-Hölder 连续函数 $\hat{V} : \Sigma \to \mathbb{R}$，满足对于每个 $\bar{x} \in \pi^{-1}(X)$，$\hat{V}(\bar{x}) = V \circ \pi(\bar{x})$，且 $\|\hat{V}\|_{\hat{\beta}} \le C^\beta \cdot |V|_\beta$。令 ν 为相对于 f^p 的 μ 的一个遍历分量。于是，根据断言，存在一个相对于 σ^q 的 $\hat{\mu}$ 的遍历分量 $\hat{\nu}$，使得 $\nu = \pi_*\hat{\nu}$。由于 $\mu(\pi(\Sigma)) = 1$，对 ν 也同样成立。因此，根据定理 3.12，存在 $\hat{C}_{\hat{\nu}} > 0$ 和 $\hat{}$ $\theta_{\hat{\nu}} \in (0, 1)$，使得对于任意一对 β-准 Hölder 连续函数 $V_1, V_2 : X \to \mathbb{R}$ 以及任意 $n > 0$，有

$$\begin{aligned}
&\left| \int V_1(x) \cdot V_2(f^{qn}(x))\, d\nu(x) - \int V_1\, d\nu \cdot \int V_2\, d\nu \right| \\
&= \left| \int \hat{V}_1(x) \cdot \hat{V}_2(\sigma^{qn}(x))\, d\hat{\nu}(x) - \int \hat{V}_1\, d\hat{\nu} \cdot \int \hat{V}_2\, d\hat{\nu} \right| \\
&\le \hat{C}_{\hat{\nu}} \cdot \hat{\theta}^n_{\hat{\nu}} \cdot \|\hat{V}_1\|_{\hat{\beta}} \cdot \|\hat{V}_2\|_{\hat{\beta}} \\
&\le C^2_\beta \cdot \hat{C}_{\hat{\nu}} \cdot \hat{\theta}^n_{\hat{\nu}} \cdot |V_1|_\beta \cdot |V_2|_\beta.
\end{aligned}$$

于是，对每个$n > 0$，写作$pn = qk_n + m$，其中 $0 \le r_n < q$ 且 $(m/p) \in \mathbb{N}$（由 $(q/p) \in \mathbb{N}$ 得出）。注意，ν 是f_p遍历的，因此我们有 $\int V_2\, d\nu = \int (V_2 \circ f^{r_n})(x)\, d\nu(x)$，并且

$$|V_2 \circ f^{r_n}(x)|_\beta \le (\sup_{x\in M} \|D_x f^r_n\|)^\beta \cdot |V_2|_\beta \le (\sup_{x\in M} \|D_x f\|)^{q\cdot\beta} \cdot |V_2|_\beta.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int V_1(x)\cdot V_2(f^{pn}(x))\,\mathrm{d}\nu(x)-\int V_1(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\cdot\int V_2(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right|\\
\le&\left|\int V_1(x)\cdot(V_2\circ f^{r_n})(f^{qk_n}(x))\,\mathrm{d}\nu(x)-\int V_1(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\cdot\int V_2\circ f^{r_n}(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right|,\\
\le& C_\beta^2\cdot\hat{C}_{\hat{\nu}}\cdot\hat{\theta}_{\hat{\nu}}^{(p/q)\cdot n}\cdot|V_1|_\beta\cdot|V_2\circ f^{r_n}(x)|_\beta\\
\le& C_\beta^2\cdot\hat{C}_{\hat{\nu}}\cdot(\sup_{x\in M}\|D_x f\|)^{q\beta}\cdot\hat{\theta}_{\hat{\nu}}^{(p/q)\cdot n}\cdot|V_1|_\beta\cdot|V_2|_\beta.
\end{aligned}$$

对每个 i $=1,2$，若 $V_i\colon M\to\mathbb{R}$ 是赫尔德连续的，则有 $|V_i|_\beta\le\|V_i\|_\beta$。由于 $\hat{}\mu$ 只有有限个遍历分量，只需令 C 大于所有 $C_\beta^2\cdot\hat{}C_{\hat{}\nu}\cdot(\sup\|D_x f\|)^{q\beta}$，并令 θ 大于所有 $\hat{}\theta^{(p/q)}\hat{}\nu$，即可完成定理 D 的证明。 □

定理 1.1 的证明。设 $f\colon M\to M$ 是一个具有正熵的拓扑混合 C^∞ 曲面微分同胚。假设 $\phi\colon M\to\mathbb{R}$ 是赫尔德连续的，且 $\mathrm{Var}(\phi)<h^{top}(f)$。由于 $f\colon M\to M$ 是拓扑混合的，根据 [4, 定理 6.12]，至多存在一个能够支撑具有正熵遍历测度的博雷尔同宿类，且该同宿类的周期为 1。根据引理 2.5，存在 $\delta>0$，使得 ϕ 的每个遍历平衡态 μ 都满足 $h_\mu(f)>\delta$。于是，根据引理 2.6，f 存在唯一的 ϕ 平衡态 μ。此外，根据 [4，推论 3.3]，，该平衡态的混合阶数为 1。结合定理 A 和定理 D，即完成定理 1.1 的证明。

□

3.3.2 有效内在遍历性

Rühr-Sarig [21, 定理 7.1 和第 9] 证明了 SPR 马尔可夫移位的有效内在遍历性。

定理 *3.13.* 设 Σ 是一个周期为 $p\ge1$ 的不可约马尔可夫移位，且 $\phi\colon\Sigma\to\mathbb{R}$ 是一个 $\hat{}\alpha$-赫尔德连续函数。假设 $P_\Sigma(\phi)<\infty$，并且 Σ 对 ϕ 是 *SPR*。设 $\hat{}\mu$ 是 ϕ 的唯一平衡态。那么，对于每个 $\hat{}\beta\in(\hat{}\alpha,1)$，存在 $\hat{}C:=\hat{}C(\hat{}\alpha,\hat{}\beta)>0$，使得对于任意 $\hat{}\beta$-赫尔德连续函数 $\hat{}V:\Sigma\to\mathbb{R}$ 以及 σ 上的任意 σ-不变测度 $\hat{}\nu$，都有

$$\left|\int\hat{V}(x)\,\mathrm{d}\hat{\nu}(x)-\int\hat{V}(x)\,\mathrm{d}\hat{\mu}(x)\right|\le\hat{C}\cdot\|\hat{V}\|_{\hat{\beta}}\cdot\sqrt{P_\Sigma(\phi)-P_\nu(\phi)}.$$

现在我们给出 SPR 博雷尔同宿类上有效内在遍历性的证明。

定理 3.14。 假设 f 对于赫尔德连续函数 ϕ 在一个博雷尔同宿类 X 上是 χ-强正再现的。令 μ 为 X 上唯一的平衡态。对于每个 $\beta\in(0,1)$，存在 $C>0$，使得对于每个 β- 准赫尔德连续函数 $V\colon M\to\mathbb{R}$ 以及满足 $\nu(X)=1$ 的每个不变测度 ν，

$$\left|\int V(x)\,\mathrm{d}\mu(x)-\int V(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right|\le C\cdot|V|_\beta\cdot\sqrt{P_\mu(\phi)-P_\nu(\phi)}.$$

此外，我们还有$\left|\lambda^+(\mu)-\lambda^+(\nu)\right|\le C\sqrt{P_\mu(\phi)-P_\nu(\phi)}$。

证明。假设 $\phi: M \to \mathbb{R}$ 是 α_0-赫尔德连续的，且f关于 ϕ 在X上是 χ-强正再现。固定 $\chi_0 < \chi$。根据定理 3.10，存在编码映射 $\pi: \Sigma \to X$，其中 Σ 是周期为p的不可约马尔可夫移位。于是，存在$\hat{}\alpha_1 \in (0,1)$，使得$\hat{}\phi = \phi \circ \pi$是$\hat{}\alpha_1$-拟赫尔德连续的。对每个 $\beta > 0$，引理 3.11给出C $_\beta \geq 1$ 与 $\beta > 0$，使得对每个 β-拟赫尔德连续的V: X $\to \mathbb{R}$，存在$\hat{}$ β-赫尔德连续函数$\hat{}$V: $\Sigma \to \mathbb{R}$，满足对每个 $\bar{}x \in \pi^{-1}(X)$有$\hat{}V(\bar{}x) = V \circ \pi(\bar{}x)$，并且 $\|\hat{}V\|_{\hat{\beta}} \leq C_\beta |V|_\beta$。取 $0 < \hat{}\alpha < \min\{\hat{}\alpha_1, \hat{}\beta\}$，则$\hat{}\phi = \phi \circ \pi$也是$\hat{}\alpha$-拟赫尔德连续的。

根据定理 3.10 (e) 和 (c)，存在 $P_0 < P_X(\phi)$，使得对于每个满足 $\nu(X) = 1$ 且 $P_\nu(\phi) > P_0$，的遍历测度 ν，都存在定义在 Σ 上的遍历 σ-不变测度 $\hat{}\nu$，使得 $\pi_*(\hat{}\nu) = \nu$。因此，根据定理 3.13，存在 $\hat{}C = \hat{}C(\hat{}\alpha, \hat{}\beta) > 0$，使得对于每个 β-准 Hölder 连续函数 $V: X \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left|\int V\,d\nu - \int V\,d\mu\right| &= \left|\int \hat{V}\,d\hat{\nu} - \int \hat{V}\,d\hat{\mu}\right| \\ &\leq \hat{C}\cdot\|\hat{V}\|_{\hat{\beta}}\cdot\sqrt{P_\Sigma(\hat{\phi}) - P_{\hat{\nu}}(\hat{\phi})} \\ &\leq \hat{C}\cdot C_\beta\cdot|V|_\beta\cdot\sqrt{P_\mu(\phi) - P_\nu(\phi)}.\end{aligned}$$

如果 $P_\nu(\phi) \leq P_0,$，则有

$$\left|\int V\,d\nu - \int V\,d\mu\right| \leq 2|V|_\beta \leq 2(P(\phi) - P_0)^{-1/2}\cdot|V|_\beta\cdot\sqrt{P_\mu(\phi) - P_\nu(\phi)}.$$

令$C := \max\{\hat{}C\cdot C\beta, 2(P(\phi) - P_0)^{-1/2}\}$，则对于每个满足 $\nu(X) = 1$ 的遍历测度 ν，有 e

$$\left|\int V\,d\nu - \int V\,d\mu\right| \leq C\cdot|V|_\beta\cdot\sqrt{P_\mu(\phi) - P_\nu(\phi)}.$$

如果 ν 不是遍历的，那么根据遍历分解，上述不等式同样成立。由于J^μ 是 α-准 holder 连续的，我们可以取足够大的 C，使得对于 X 上的每个不变测度，都有 $|\lambda^+(\mu) - \lambda^+(\nu)| \leq C\sqrt{P^\mu(\phi) - P_\nu(\phi)}$。证明完毕。 □

定理*E*集合的证明。 假设 $\phi: M \to \mathbb{R}$ 是赫尔德连续的，且f是 χ-强正再现的，适用于 ϕ 在上。

断言。 对于每个遍历测度序列$\{\mu_n\}$，满足 $P_{\mu_n}(\phi) \to P(\phi)$，存在 $N > 0$，使得对于每个 $n > N$，都存在一个 ϕ 的遍历平衡态 ϕ，使得 $\mu_n \hbar\sim \nu_n$。

断言的证明。 反设存在一个遍历测度序列 $\{\mu_n\}$，满足 $P_{\mu_n}(\phi) \to P(\phi)$，且对于每个 $n > 0$，μ_n均不与 ϕ 的任何遍历平衡态同宿相关。根据定理 C 证明中的论证，存在一个子序列 $\{\mu_{n_k}\}_{k>0}$，使得对于每个 $k_1, k_2 > 0$，$\mu_{n_{k_1}} \hbar\sim \mu_{n_{k_2}}$，且当 $k \to \infty$ 时，$\mu_{n_k} \to \mu$。因此，根据定理 3.1，我们有 μ 是 ϕ 的一个遍历平衡态，并且对于每个 $k > 0$，$\mu \hbar\sim \mu_{n_k}$。这就产生了矛盾。

□

$\{\mu_1, \cdots, \mu_N\}$ 是 ϕ 的所有遍历平衡态的集合。根据该断言，存在 $P_1 \in (0, P(\phi))$，使得对于每个满足 $P_\nu(\phi) > P_1$，的遍历测度 ν，都存在一个遍历平衡态 μ_j，使得 $\mu_j h\sim \nu$，因此 $\nu(BH(\mu_j)) = 1$。根据定理 3.14，对于每个 $\beta \in (0, 1)$，存在 $C_j > 0$，使得对于每个 β-拟 Hölder 连续函数 $V : M \to \mathbb{R}$，均有

$$\left| \int V \, d\mu_j - \int V \, d\nu \right| \leq C_j \cdot |V|_\beta \cdot \sqrt{P_{\mu_j}(\phi) - P_\nu(\phi)}.$$

取 $C' = \max\{C_1, \cdots, C_N\}$，定理 E 对每个满足 $P_\nu(\phi) > P_1$ 的遍历测度 ν 均成立。对于每个满足 $P_\nu(\phi) \leq P_1$，的遍历测度 ν，固定一个遍历平衡态 $\mu_0 \in \{\mu_1, \cdots, \mu_N\}$。于是，

$$\left| \int V \, d\mu_0 - \int V \, d\nu \right| \leq 2|V|_\beta \leq 2(P(\phi) - P_1)^{-1/2} \cdot |V|_\beta \cdot \sqrt{P_{\mu_0}(\phi) - P_\nu(\phi)}.$$

Take $C > \max\{C_\prime, 2(P(\phi) - P_1)^{-1/2}\}$，则定理 E集合 对每个遍历测度 ν .

现在假设 ν 是不变测度（不一定是遍历测度），并考虑其遍历分解 $\nu = \int \nu_x d\nu(x)$。设 $E_0 := \{x : P_{\nu_x}(\phi) \leq P_1\}$，且 $E_j := \{x : P_{\nu_x}(\phi) > P1, \nu_x h\sim \mu_j\}$，$1 \leq j \leq N$。令 $\mu = \sum^N j=0 \nu(E_j) \cdot \mu_j$。于是，$\mu$ 是 ϕ 的平衡态。此外，对于每个 β-准 Hölder 连续函数 $V : X \to \mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned}
\left| \int V \, d\mu - \int V \, d\nu \right| &\leq \sum_{j=0}^{N} \int \chi_{E_j}(x) \cdot \left| \int V \, d\nu_x - \int V \, d\mu_j \right| d\nu(x) \\
&\leq C \cdot |V|_\beta \cdot \left(\int \sum_{j=0}^{N} \sqrt{P_{\mu_j}(\phi) - P_{\nu_x}(\phi)} \cdot \chi_{E_j}(x) \, d\nu(x) \right) \\
&\leq C \cdot |V|_\beta \cdot \left(\int \sum_{j=0}^{N} \left(P_{\mu_j}(\phi) - P_{\nu_x}(\phi) \right) \cdot \chi_{E_j}(x) \, d\nu(x) \right)^{1/2} \\
&\leq C \cdot |V|_\beta \cdot \sqrt{P_\mu(\phi) - P_\nu(\phi)}.
\end{aligned}$$

若 $V : M \to \mathbb{R}$ 是 β-赫尔德连续的，那么我们有 $|(V|_X)|_\beta \leq \|V\|_\beta$。这就完成了定理E集合的证明。

□

推论 *1.4* 的证明。 根据定理 E集合，只需证明 ϕ 存在唯一的平衡态。由于 $f : M \to M$ 是拓扑传递的，根据 [4, 定理 6。12], 至多存在一个博雷尔同宿类，能够支撑具有正熵的遍历测度。根据引理 2.5，存在 $\delta > 0$，使得 ϕ 的每个遍历平衡态的度量熵都大于 δ。因此，根据定理 2.2，遍历平衡态是唯一的。

□

致谢

我们谨向 J. Buzzi 和 O. Sarig 表示诚挚的感谢，感谢他们与我们分享宝贵见解，并为我们的工作提供新的视角。我们还感谢东北天元数学中心给予的支持。

参考文献

[1] R. Bowen, 《Anosov 微分同胚的平衡态与遍历理论》。数学讲义，470。Springer-Verlag，2007。2[2] D. Burguet，具有大熵的 $\mathscr{C}^r$曲面微分同胚的最大测度与李雅普诺夫指数的熵连续性，《亨利·庞加莱年刊》，25（2024），1485-1510。10[3] J. Buzzi，具有无最大熵测度的 C^r曲面微分同胚，《遍历理论与动力系统》，34（2014），1770–1793。2[4] J. Buzzi、S. Crovisier 和 O. Sarig，曲面微分同胚的熵最大化测度的有限性，《数学年刊》，195（2022），421–508。2，3，4，5，7，8，9，15，18，21，23[5] J. Buzzi、S. Crovisier 和 O. Sarig，曲面微分同胚的李雅普诺夫指数的连续性，《数学发明》，230（2022），767-849。4，10[6] J. Buzzi、S. Crovisier 和 O. Sarig，微分同胚的强正再现与指数混合，预印本，2025。arXiv：2501.07455 2，3，4，5，6，12，13，16，18，19，20[7] J. Buzzi 和 O. Sarig，可数马尔可夫移位与多维分段扩张映射的平衡测度唯一性。《遍历理论与动力系统》，23（2003），1383–1400。17[8] Y. Daon。可数马尔可夫移位上平衡测度的伯努利性。《离散与连续动力系统》，33（2013），4003-4015。17[9] M. Gromov，熵、同调与半代数几何，布尔巴基研讨班，第 1985/86 卷，第 663 号报告，《星丛》，145–146（1987），225–240。2[10] A. Katok，微分同胚的李雅普诺夫指数、熵与周期轨道，《高等科学研究院数学出版物》，51（1980），137–173。7[11] Y. Kifer，动力系统与随机过程中的大偏差，《美国数学学会汇刊》，321（1990），502-524。2[12] S. Kadyrov。遍历理论中帕里测度与例外集的有效唯一性，《数学月刊》，178（2015），237–249。2[13] C. Luo 和 D. Yang，$\mathscr{C}^1$，$^\alpha$ 微分同胚的度量熵上半连续性，arXiv 2504.07746，（2025），1-34。13，14[14] M. Misiurewicz，没有任何最大熵测度的微分同胚，《波兰科学院公报：数学、天文学与物理学辑》，21（1973），903–910。2

[15] S. Newhouse, 《熵的连续性性质》, 《数学年刊》129(1989), 215–235. 2[16] Y. Pesin, 《对应于非零特征指数的不变流形族》, 《苏联科学院学报》40(1976), 1332-1379. 3[17] Y. Pesin, 《特征李雅普诺夫指数与光滑遍历理论》, 《俄罗斯数学调查》32(1977), 55-114. 3[18] Y. Pesin, 《无焦点闭黎曼流形上的测地流》, 《苏联科学院学报》11(1977), 1252–1288. 3[19] D. Ruelle, 《与 Axiom A 吸引子相关的测度》, 《美国数学杂志》98(1976), 619- 654. 2[20] D. Ruelle, 《热力学形式》, 《数学及其应用百科全书》5, Addison-Wesley 出版公司, 1978. 2[21] R. Rühr 和 O. Sarig, 《可数状态拓扑马尔可夫移位的有效内在遍历性》, 《以色列数学杂志》251(2022), 679–735. 21[22] O. Sarig, 《可数马尔可夫移位的热力学形式》, Ergodic Theory Dynam. Systems 19(1999), 1565–1593. 17[23] O. Sarig, 《可数马尔可夫移位的相变》, 《数学物理通讯》217(2001), 555–577. 18[24] O. Sarig, 《拓扑马尔可夫移位热力学形式讲义》, https://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/lecture-notes, 2009. 2[25] O. Sarig, 《曲面微分同胚的伯努利平衡态》, 《现代动力学杂志》5(2011), 593–608. 17[26] O. Sarig, 《具有正熵的曲面微分同胚的符号动力系统》, 《美国数学会杂志》26(2013), 341–426. 18[27] Y. Sinai, 《遍历理论中的吉布斯测度》, 《俄罗斯数学调查》27(1972), 21-69. 2[28] D. Vere-Jones, 《可数马尔可夫链的几何遍历性》, 《数学季刊》, 牛津, 13 (1962), 7–28. 18[29] Y. Yomdin, 《体积增长与熵》, 《以色列数学杂志》57(1987), 285–300. 2

Chiyi Luo

江西师范大学数学与统计学院，中华人民共和国南昌市 330022。电子邮件：
luochiyi98@gmail.com

Dawei Yang

苏州大学数学科学学院，中华人民共和国苏州市 215006。电子邮件：
yangdw@suda.edu.cn