arXiv:2602.04282v1 [math.PR] 4 Feb 2026

弱纠缠整数格上步进强化与随机 L´evy–Lorentz 模型的标度极限

Jiaming Chen*

纽约大学库朗数学科学研究所

2026年2月5日

摘要

本文介绍由相关纠缠随机介质上的一般长程参考随机游走驱动的随机 L´evy–Lorentz 气体。本文还进一步考察了基础随机游走的随机强化，此时该游走具有记忆。在这两种情况下，均得到了中心极限定理。

目录

1 引言 **1**

2 步长强化与随机 L´evy–Lorentz 气体 3
2.1 随机 L´evy–Lorentz 气体.3 2.2 步长强化 L´evy–Lorentz 气体.4

3 L´evy–Lorentz 气体的正则中心极限定理 6
3.1 离散时间情形.6 3.2 连续时间情形.12 3.3 步长强化情形.14

4 函数 中心极限定理与 Skorokhod 空间 17
4.1 Skorokhod 空间拓扑的扩展.17 4.2 主要结果的证明.18

参考文献 **19**

1 引言

将光照射在一块玻璃上，光粒子的反射会在玻璃中大小不一的微球上进行 L´évy 飞行 [6] 。这种对光运动的诠释源自一种晶体材料 [1]——L´évy 玻璃；在这种材料中，光的折射可由随机散射场的反常扩散来解释。受这项研究 [5], 启发，这类系统被称为*L´évy–Lorentz* 气体，并通过点过程 [10]上的随机游走来建模。在 $\mathbb{Z}$ 上给定一个由点构成的随机阵列，这些点称为靶点，彼此之间的距离相关；粒子以归一化速度在靶点之间运动。这里

*chen.jiaming@cims.nyu.edu

随机游走取值于标记点，而非 $\mathbb{Z}$，这种运动也常被称为随机风景中的随机游走 [34] 。除了从 L´évy 玻璃中的光获得启发之外，L´évy–Lorentz 气体还有其他动机，例如非晶流体中的电子输运 [49] 以及透射N体哈密顿动力学 [2]。即便如此，遗憾的是，这一主题在随机游走领域中的发展仍不如其他主题充分。据我们所知，L´évy–Lorentz 气体只有最简单的形式得到了严格的数学处理：靶点之间的距离独立同分布，且随机游走具有马尔可夫性。在本文中，我们通过允许靶点彼此相关来拓展这项研究的范围，见（2.3）；底层随机游走也将能够具有长期记忆，进而成为强化随机游走。

L´evy–Lorentz 气体框架的起源可追溯至 [5] 关于反常扩散的研究，而对同一主题开展严谨数学研究的起点则是 [11]。此类随机环境中的随机游走研究通常分为两类：淬火过程和退火过程。粒子在淬火随机介质中运动，对应于从粒子视角看无序构型发生变化的情形。淬火过程的运动是马尔可夫的，但相对于平移并不具有不变性。在理论物理学中，这种淬火动力学用于描述某些系统的老化 [7] ，例如 Bouchaud模型 [14]。如果通过积分消除无序介质中的随机性，我们便得到退火过程；该过程具有不变性但非马尔可夫性，通常与分数阶福克-普朗克方程等研究相对应 [43]。在他们的工作中 [11], ，离散时间的 L´evy–Lorentz 气体，即点过程上的随机游走，通常在淬火分布和退火分布下都重新标度为高斯分布。连续时间的 L´evy–Lorentz 气体也在那里通过对每两个碰撞时刻之间的轨迹进行插值而被引入，这保证了连续时间模型的归一化速度。随后， [41], 通过 Skorokhod 空间方法证明，离散时间的 L´evy–Lorentz 气体弱收敛于直线上的维纳过程。在 [57], 中，连续时间 L´evy–Lorentz 气体的大涨落及由此产生的模型输运性质也得到了确立。我们还应提及， [51]以及超扩散区制 [12]中也讨论了弱收敛和有限维边缘分布收敛。持续随机游走与 L´evy–Lorentz 气体之间的相互作用体现在 [3]。此外， [40] 还简明总结了关于 L´evy–Lorentz 气体的近期成果；该总结内容自洽，并以统一的方式撰写。

本文旨在将先前关于依分布收敛的研究拓展到这样一种情形：L´évy–Lorentz 气体中任意两个散射体之间的随机距离可以相互依赖。事实上，先前研究中的独立同分布假设过于理想化，而格点上的相互作用在自然界中普遍存在：电荷的量子耗散 [56]、费米子局域化 [54] 以及光学材料中的玻色子关联[55] 。在高温 [47] 自旋玻璃系统的背景下出现的吉布斯粒子系综所构成的随机阵列具有足够的普适性，且特别值得关注；它满足 Dobrushin–Shlosman 关联条件 [27, p。 378], 另请参见 [42] 以了解更多参考文献，并参见 [25] 了解相关工作。这类整数格 $\mathbb{Z}$ 纠缠的一个重要特征是，随着间隔长度增大，远处区域的距离阵列所产生的影响会呈指数衰减。研究此类纠缠格点阵列的方法通常是在观察 L´évy–Lorentz 气体随机演化时采用粒子的视角，正如 [11]中所采取的做法。事实上，我们将重构或赋予整个轨迹的依分布收敛以明确含义。因此，本文与 Feynman 的这句话的精神完全相通：“从新的视角认出旧事物，是一种乐趣”， [29]。基于这一认识，我们还将通过考察具有长时记忆的粒子来进一步拓展知识的边界；此前，随机 L´évy–Lorentz 气体相关文献尚未讨论过这一问题。

致谢。我衷心感谢我的博士导师 Alejandro Ram´ırez 教授，他教会了我解决相关随机介质问题的关键技巧。我也非常感谢我的博士导师 Pierre Tarr`es 教授指导我认识强化随机游走这一概念。此外，我感谢匿名审稿人评审我们的稿件，并提出宝贵的意见和建议，这些意见和建议对大幅改进论文确实帮助良多。我还要感谢 NYU-ECNU 研究院提供的经费支持。

数学科学。**利益冲突声明**。作者声明不存在利益冲突。**数据可用性声明**。本文未使用任何数据。

2 步骤强化与随机 L´évy–Lorentz 气体

随机 Lévy–Lorentz 气体通过其底层随机游走来描述。本节介绍这类 Lévy–Lorentz 气体模型的标度极限，其底层随机游走可以是马尔可夫的，也可以具有长期记忆，即强化。晶格散射体排列在无序介质 $\mathbb{Z}$中，这意味着它们允许彼此相互作用。

2.1 随机 L´évy–Lorentz 气体。 一维 Lévy–Lorentz 气体可描述如下。设 $\omega = (\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 是按升序由整数格 $\mathbb{Z}$ 索引的一列散射体。一个硬核粒子沿直线运动，以离散时间或连续时间运动的方式依次与这些散射体碰撞。随机散射体 $(\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 的分布将在下文中说明。

遵循 [11, 57], 中的前述框架，我们假设 V_1, V_2, ...是 $\mathbb{Z}$ 上服从分布 $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 的独立同分布跳跃，满足 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$ 且在 L^1 中有界，即 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|p_k < \infty$。第 n 次碰撞发生在标记为 $S_n := \sum_{k=1}^{n} V_k$ 的散射点处，对所有 $n \geq 0$ 均如此。因此，$(S_n)_{n\geq 0}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上允许长程跳跃的马尔可夫随机游走，其分布记作 P_0^S 和 $E_0^S := E_{P_0^S}$。

粒子在散射体上穿行的运动由点过程上的随机游走 $(X_n)_{n\geq 0}$ 描述，即:

$$X_n := \omega_{S_n}, \qquad \forall\, n \geq 0. \tag{2.1}$$

该过程 $(X_n)_{n\geq 0}$ 执行与 $(S_n)_{n\geq 0}$ 相同的跳跃，但跳跃发生在 $(\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$的点上，这被称为离散时间 </style}随机 L´évy–Lorentz 气体。一旦固定离散时间动力学的实现，我们就可以用 $(T_n^\omega)_{n\geq 0}$ 表示碰撞时刻序列 $T_0^\omega = 0$，并且

$$T_n^\omega := \sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}| = \sum_{k=1}^{n} |\omega_{S_k} - \omega_{S_{k-1}}|, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

粗略地说，离散时间随机 L´evy–Lorentz 气体的第 n 次跳跃长度为$|\omega_{S_k} - \omega_{S_{k-1}}|$，因此 T_n^ω表示截至时间 n 的轨迹总长度。

连续时间随机 L´evy–Lorentz 气体的运动是通过对序列 $(X_n,\ T_n^\omega)_{n\geq 0}$ 进行分段插值来定义的，其形式为

$$\widetilde{X}_t := \omega_{S_{n-1}} + \operatorname{sgn}(V_n)(t - T_{n-1}^\omega), \qquad \text{when} \quad T_{n-1}^\omega \leq t < T_n^\omega, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.2}$$

~显然，连续时间随机 L´evy–Lorentz 气体 $(X_t)_{t\geq 0}$ 对离散时间过程 $(X_n)_{n\geq 0}$的速度进行了归一化。值得注意的是，位移 X_t 对所有 $t > 0$都有定义，因为根据下文的引理 3.5，$\lim_{n\to\infty} T_n^\omega = \infty$。

与以往关于随机 L´evy–Lorentz 气体 [5, 57], 的研究截然不同，我们不需要假设距离 $\zeta_r := \omega_r - \omega_{r-1}$, $\omega_0 = 0$, $r \in \mathbb{Z}$ 构成双边独立同分布序列。相反，我们考虑散射体 $(\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 之间的**相互作用**，并认为距离 $(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 服从平稳分布，但允许它们以下述意义相互纠缠，

$$\frac{d\mathbb{P}((\zeta_r)_{r\in\Delta} \in \cdot\,|\eta)}{d\mathbb{P}((\zeta_r)_{r\in\Delta} \in \cdot\,|\eta')} \leq \exp\left(C \sum_{r\in\Delta, u\in A} e^{-g|r-u|}\right), \qquad \exists\, C, g > 0, \tag{2.3}$$

对所有满足在 $V^c \backslash A$ 上几乎处处一致的构型对 $\eta, \eta' \in \Omega$ 同时成立。这里我们用 $(\mathbb{P}, \mathscr{F}_\Omega)$ 和 $\mathbb{E} := E_{\mathbb{P}}$ 表示 $(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 的分布。并且 Δ, A 是 $\mathbb{Z}$ 的任意有限子集，满足 $\Delta \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}$, $d_1(\Delta, V^c) \geq 1$ 和 $A \subseteq V^c$。此外，我们要求正则性条件 $\mathbb{E}[\exp(\mathfrak{p}\zeta_1)] < \infty$ 对某个 $\mathfrak{p} \geq 2$ 成立，

该条件用于引理 3.4 的式 (3.7)。请注意，纠缠条件 (2.3) 自然源于伊辛模型等相互作用统计力学，并且从量子计算理论的角度来看，还可以追溯到量子海森堡模型的自旋链 [33, 48] [16, 44]。总之，我们对非独立同分布散射体 $(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 所施加的正则性条件是：$(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上具有平移不变的遍历分布，满足纠缠条件 (2.3)，且具有有限指数矩 $\mathbb{E}[\exp(\mathfrak{p}\zeta_1)] < \infty$，其中 $\mathfrak{p} \geq 2$。

本文的目的有两方面：首先，我们证明离散时间随机 L´evy–Lorentz 气体 $(X_n)_{n\geq 0}$ 及其连续时间插值 $(X_t)_{t\geq 0}$ 在淬火情形下均满足中心极限定理（中心极限定理），即在散射体的某一固定实现 $(\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 中。

定理 2.1. 我们有如下依分布收敛，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\big(X_n - \ell E[S_1]n\big) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \ell^2 E[S_1^2])$$

其中正的确定性的 $\ell := \lim_{n\to\infty} n^{-1}\omega_n$, $\mathbb{P}$-几乎必然，以及连续时间随机 L´evy–Lorentz 气体的极限恒等式，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\big(\widetilde{X}_t - \ell E[S_1]t\big) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \ell E[S_1^2]/E[|V_1|]),$$

其中一般而言，$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 表示方差为 $\sigma^2 > 0$ 的中心高斯变量。

其次，我们将上述极限定理推广到更抽象的、 $[0,\infty)$ 上 c`adl`ag 过程的 Skorokhod 空间 $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_+)$，从而对离散时间与连续时间随机L´evy–Lorentz 气体均得到函数型中心极限定理，即标度极限。

定理 2.2. 我们有如下收敛

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\big(X_{nt} - \ell E[S_1]nt\big),\ t \geq 0\right) \Longrightarrow \Big(W_t,\ t \geq 0\Big),$$

其中 $(W_t)_{t\geq 0}$ 是对所有 $0 \leq s,t < \infty$ 具有协方差 $E[W_sW_t] = \ell^2 E[S_1^2](s\wedge t)$ 的连续实值中心化维纳过程，且该收敛是关于 c`adl`ag 过程的 Skorokhod 空间$\mathfrak{D}(\mathbb{R}_+)$ 的弱拓扑。我们同样得到连续时间模型的泛函极限

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\big(\widetilde{X}_{ts} - \ell E[S_1]ts\big),\ s \geq 0\right) \Longrightarrow \Big(\widetilde{W}_s,\ s \geq 0\Big),$$

$\sim$ $\sim\ \sim$其中 $(W_t)_{t\geq 0}$ 是对所有 $0 \leq s,t < \infty$ 由 $E[W_sW_t] = \ell E[S_1^2](s\wedge t)/E[|V_1|]$ 指定协方差的连续实值中心化维纳过程，且该收敛是关于有限维边缘分布的分布的弱拓扑。

通过有限维边缘分布研究标度极限的见解也已在 [12] 中针对独立同分布散射体进行了讨论。由于粒子 $(S_n)_{n\geq 0}$ 取负值，Skorokhod 拓扑应适当地扩展到 $\mathbb{R}$。类似的 Skorokhod 空间扩展已在 [35] 和 [41] 中被考虑，其中散射体 $(\zeta)_{r\in\mathbb{Z}}$ 被假定为独立同分布。相比之下，我们在更一般的相互作用散射体情形下，对具有任意马尔可夫随机游走 $(S_n)_{n\geq 0}$的离散时间与连续时间气体给出了标度极限。

2.2 步骤强化型 L´évy–Lorentz 气体。 </style}受到对具有记忆的材料的研究启发，我们创新性地考虑了粒子在纠缠散射体之间穿行时所具有的记忆。鉴于这种长期记忆效应，底层随机游走不再是马尔可夫的，现在将

记作 $(S_n^{(p)})_{n\ge 0}$，其记忆强度为 $0 \le p \le 1$。随机游走 $(S_n^{(p)})_{n\ge 0}$ 的分布 $P_{(p)}$ 0 </style>和 $E_0^{(p)} := E_{P_0^{(p)}}$ 按照以下方式定义。

对于第一步 $V_{(p)\,1}$，强化随机游走以相等概率在 $\mathbb{Z}_2 := \{-1, +1\}$ 中取值。后续各步的表现取决于它们对先前步骤的记忆。对于第 $(n+1)$ 步，在先前时刻 $\{1, \dots, n\}$ 中均匀选取 k，然后该游走以概率 p 沿与时刻 k 相同的方向移动，或以概率 $1-p$ 沿相反方向移动。即，对所有 $n \ge 1$,

$$S_{n+1}^{(p)} = S_n^{(p)} + V_{n+1}^{(p)}, \qquad V_{n+1}^{(p)} = \begin{cases} +V_k^{(p)} & \text{with probability } p, \\ -V_k^{(p)} & \text{with probability } 1-p, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $k \sim \mathcal{U}\{1, \dots, n\}$。因此 $(S_n^{(p)})_{n\ge 0}$ 被称为步强化随机游走。

具有记忆的粒子是对能够记住其过去构型的分子的自然刻画[45, 58]。在同样的弱纠缠散射体 $(\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 中，我们可以类似地定义步强化 L´evy–Lorentz 气体

$$X_n^{(p)} := \omega_{S_n^{(p)}}, \qquad \widetilde{X}_t^{(p)} := \omega_{S_{n-1}^{(p)}} + V_n^{(p)}(t - T_{n-1}^{(p)}), \qquad \text{when} \quad T_{n-1}^{(p)} \le t < T_n^{(p)}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，步强化碰撞时刻序列为 $T_n^{(p)} := \sum_{k=1}^{n} |X_k^{(p)} - X_{k-1}^{(p)}|$。注意，连续时间步强化 L´évy–Lorentz 气体 $(\widetilde{X}_t^{(p)})_{t\ge 0}$ 在 $[0, \infty)$ 上定义良好，因为 $T_n^{(p)} \to \infty$，如式 (3.23) 所示。

注意，当 $p = 1/2$ 时，步强化随机游走 $(S_n^{(1/2)})_{n\ge 0}$ 退化为 $\mathbb{Z}$ 上的最近邻对称随机游走，因此强化增量 $(V_n^{(1/2)})_{n\ge 1}$ 可视为 $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ 上的独立同分布跳跃序列，符合第 2.1 节中的无记忆模型。考虑记忆效应，当 $0 \le p \le 3/4$ 时，我们得到以下极限结果。

定理 2.3。当 $0 \le p < 3/4$ 时，我们有以下依分布收敛,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} X_n^{(p)} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \ell^2 (3-4p)^{-1})$$

对于正的确定性 $\ell := \lim_{n\to\infty} n^{-1}\omega_n$, $\mathbb{P}$-几乎处处成立，并且对于阶梯强化连续时间随机 L´évy–Lorentz 气体，有以下极限恒等式,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \widetilde{X}_t^{(p)} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \ell (3-4p)^{-1}),$$

其中，一般而言，$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 表示方差为 $\sigma^2 > 0$ 的中心高斯变量。

另一方面，与由马尔可夫的随机游走驱动的随机 L´évy–Lorentz 气体类似，阶梯强化模型也具有类似的标度极限，即以下意义下的函数型中心极限定理。

定理 2.4。当 $0 \le p < 3/4$ 时，我们有以下依分布收敛

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_{nt}^{(p)},\ t \ge 0 \right) \Longrightarrow \left(W_t^{(p)},\ t \ge 0 \right),$$

其中 $(W_{(p)\,t})_{t\ge 0}$ 是一个连续实值中心化维纳过程，其协方差为 $E[W_{(p)s}\ \ W_{(t}{}^{p}\,] = \ell^2)\,(3-4p)^{-1}(s \wedge t)$（对所有 $0 \le s, t < \infty$），且该收敛是在 c`adl`ag 过程的 Skorokhod 空间 $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_+)$ 的弱拓扑下理解的。我们同样得到强化连续时间模型的泛函极限

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \widetilde{X}_{ts}^{(p)},\ s \ge 0 \right) \Longrightarrow \left(\widetilde{W}_s^{(p)},\ s \ge 0 \right),$$

其中 $(\widetilde{W}_t^{(p)})_{t\geq 0}$ 是一个连续实值中心化维纳过程，其协方差由 $E[\widetilde{W}_s^{(p)}\widetilde{W}_t^{(p)}] = \ell^{(3-4p)^{-1}}(s\wedge t)$（对所有 $0 \leq s,t < \infty$）给出，且该收敛是在有限维边缘分布的分布上的弱拓扑下理解的。

注记 2.5. 目前已经陈述了扩散区间内步强化 L´évy–Lorentz 气体的中心极限定理$0 \leq p < 3/4$。在临界阈值 $p = 3/4$ 处， [9, 定理 3.6] 表明，$\sqrt{n}^{-1}\log n\, S_n^{(3/4)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ 按 $n\to\infty$ 分布收敛,~~因此，~~ L´évy–Lorentz 气体 $(X_n^{(3/4)})_{n\in\mathbb{N}}$ 相应的中心极限定理也应采用不同的缩放因子 $\sqrt{n}\log n$，而非 $\sqrt{n}$。对于超扩散区制 $3/4 < p \leq 1$，我们只知道$\widetilde{S}_n^{(p)}/n^{2p-1}$ 在 $L^4(P_0^{(p)})$-范数下收敛于一个记作 $\mathcal{L}$ 的非退化随机变量，这一点见 [9, 定理 3.7]。因此，我们需要新的技术来研究超扩散区制下步强化 L´évy–Lorentz 气体的中心极限定理，而这超出了本文的范围。

注记 2.6。 这里强调，定理 2.1、2.2、2.3、2.4 中所述的收敛，关于底层环境均以概率 1 对过程的淬火律成立。此外，值 $\ell = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\omega_n$ 除了定义为一个几乎处处的极限外，也可以写成关于间距 ζ_r's 的某个函数的显式平均。一个有趣的观察是，根据大数定律，对于独立同分布散射体， ℓ 化简为 $\mathbb{E}[\zeta_r], \forall\, r\in\mathbb{Z}$ 。

在随机 L´evy–Lorentz 气体研究中考虑增强粒子这一新颖做法，有助于揭示此类模型其他微妙的极限结构，例如涨落 [57] 和大偏差[17, 18]。第 3.3 节将通过鞅方法研究记忆效应。该数学框架初读时并不容易理解，但其中的论证大致可以归纳为两种技巧。对于相关坐标散射体（ζ_r）$_{r\in\mathbb{Z}}$，我们采用辅助随机游走，手动将混合信息与纠缠的整数格分离，并使其极限分布与原始底层随机游走具有相同的大数定律。其次，从大数定律推导中心极限定理，对于非强化 L´evy–Lorentz 气体，需要使用 Portemanteau 型论证；对于逐步强化模型，则需要采用鞅方法来剥离过去的记忆。这些技巧构成了本文后续各节中的技术论证。近年来，其他技术工具，如不动点方法 [30]和 P´olya urn 嵌入 [38]，也可能有助于揭示逐步强化 L´evy–Lorentz 气体的其他统计性质。

3 莱维–洛伦兹气体的正则中心极限定理

在本节中，　　我们将在离散时间和连续时间模型中证明中心极限定理，即定理 2.1。

3.1 离散时间情形。 我们需要以下技术引理。回顾分解 $\bar{}$ $\tilde{}$ $\bar{}$ $\tilde{}$ $\bar{}$ $\tilde{}$ 表示：若 X, X 是分布为 P, P 且满足 $\|P-P\|_{FV}\leq a<1$ 的随机变量，则在扩大的 $\tilde{}$ 概率空间上存在独立的 Y, δ, Z, Z，其中 $\Delta\sim$ 服从伯努利分布(a)，并且

$$\bar{X} = (1-\Delta)Y + \Delta Z \qquad \text{and} \qquad \tilde{X} = (1-\Delta)Y + \Delta\tilde{Z}. \tag{3.1}$$

证明见 [4, 附录 A.1]。虽然 Y, Z 的确切形式较为复杂，但我们仍然有 $\bar{}$ $\tilde{}$ $\bar{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ 估计 $X = (1-\Delta)X + \Delta Z$、 $|\Delta Z| \leq |X|$ 和 $|\Delta Z| \leq |X|$。注意，通过递归条件化，这一结果可推广至随机序列。

引理 3.1. 给定一个随机序列 $(X_i)_{i\geq 1}$ ，其分布为 P，使得对某个概率测度 Q,

$$\big\|P(\bar{X}\in\cdot\,|\bar{X}_j,\, j<i) - Q\big\|_{FV} \leq a < 1.$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ 于是，在扩大的概率空间上，存在一个独立同分布序列 $(X_i,\Delta_i)_{i\geq 1}$ ，使得 $X_1\sim Q$ 且 $\Delta_1\sim$ 服从伯努利分布(a)，此外还存在一个序列 $(Z_i)_{i\geq 1}$ ，满足 Δ_i 与 $\sigma(X_j,\Delta_j\colon\ j<i)\vee\sigma(Z_i)$ 独立，并且

$$\tilde{X}_i = (1-\Delta_i)\tilde{X}_i + \Delta_i Z_i, \qquad \forall\, i\geq 1.$$

证明。 </style}假设该断言已对 得到验证。将（3.1）应用于概率律 (·|X_j, $j < i$) 和Q，我们便得到 Δ_i, Z_i, X_i，它们具有所需性质。另见 [8, 引理 2.1] 和 [53, 第 3] 章。 □

为了解析散射体的弱相互作用距离数组 $(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$，我们利用近似更新结构，将纠缠信息与无序介质分离。为此，我们构造一个辅助概率空间。定义 $\mathcal{W} := \{-1, 0, 1\}$，并在$\epsilon =$上定义乘积概率测度 Q (ϵ_1, ϵ_2... ...) $\in (\mathcal{W})^{\mathbb{N}}$，使得 $Q(\epsilon_1 = 1) = Q(\epsilon_1 = -1) = \frac{1}{4}$， $Q(\epsilon_1 = 0) = \frac{1}{2}$。我们还通过以下方式引入辅助随机场 $\eta =(\eta_r)_{r\in\mathbb{N}}$：

$$\tfrac{1}{2}\eta_r = E_Q[\zeta_r]\mathbb{1}_{\{\epsilon_r=\pm 1\}} + (\zeta_r - E_Q[\zeta_r])\mathbb{1}_{\{\epsilon_r=0\}}, \qquad \forall\, r \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

不难看出，对于所有 $r \in \mathbb{N}$， $E_Q[\eta_r] = \zeta_r$。遵循这一约定，我们记 $P_0^S := Q \otimes P_0^S$，继而记 $E_0^S := E_{Q\otimes P_0^S}$。现在选取一个随机时间序列 $(\tau(L)_n)_{n\geq 0}$，定义为 $\tau(L)_0 = 0$，并且

$$\tau_n^{(L)} := \inf\big\{j \geq \tau_{n-1}^{(L)} + L : (\epsilon_{j-L}, \ldots, \epsilon_{j-1}) = +1, \ldots, 1, \epsilon_j = -1, 0\big\}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

这里， L 是用于分隔纠缠信息的大距离长度 .

因此，为了量化相互作用散射体产生的相关信息，我们还在 $\mathbb{N} \times (\mathcal{W})^{\mathbb{N}}$ 上定义如下随机场 σ-代数： $\mathcal{G}_0 := \sigma(\zeta_r : r \leq -L)$，并且

$$\mathcal{G}_n := \sigma\big(\tau_1^{(L)}, \ldots, \tau_n^{(L)}, \zeta_r : r \leq \tau_n^{(L)} - L, \epsilon_i : i = 1, \ldots, \tau_n^{(L)}\big), \qquad \forall\, n \geq 1.$$

我们还定义特定的场 σ-代数 $\mathcal{F}_n^{(L)} := \sigma(\omega_r : r \leq n - L, \ \epsilon_i : i = 1, \ldots..., n)$。事实上，我们有如下正则性命题。

引理 3.2。 对于任意实数 $p \geq 1$，存在一些常数 c_p， $c'_p > 0$，它们独立于 L，使得

$$c_p \leq E_Q\big[(\bar{\tau}_1^{(L)})^p\big]^{1/p} \leq c'_p$$

对所有 L，其中我们令 $\bar{\tau}(L)_1 := 4^{-L}\tau_1^{(L)}$。

证明。 我们将此引理的证明分为几个步骤。

步骤I。下界。

定义状态空间为 $\{0, 1, \ldots, L\}$ 的马尔可夫链 $(U_n)_{n\geq 1}$，其中 $U_0 = 0$ 并且

$$U_n = \max\big\{k \geq 1 : (\epsilon_{n-k+1}, \ldots, \epsilon_n) = (1, \ldots, 1)\big\} \vee 0.$$

那么，不难看出 $\tau_{(L)_1} \geq \min\{n \geq 1 : U_n = L\}$，见 [24, 第 892] 页。考虑 $U_n = 1$ 时的相继时刻，则 $\tau_1^{(L)}$ 可以下界于若干个独立随机变量之和，其中这些独立随机变量的个数服从几何分布 Geometric(4^{-L+1})，且每个随机变量都以下界 1 为界。因此，

$$\varliminf_{L\to\infty} Q\big(\tau_1^{(L)} \geq \theta 4^{-L}\big) \geq g(\theta) \qquad \text{for some} \quad g(\theta) \xrightarrow{\theta\to 0} 1.$$

因此，

$$E_Q\big[\bar{\tau}_1^{(L)}\big] \geq 4^{-L} E_Q\big[\tau_1^{(L)}\mathbb{1}_{\{\tau_1^{(L)} \geq \theta 4^{-L}\}}\big] \geq \theta\big(1 - Q(\tau_1^{(L)} < \theta 4^{-L})\big) \geq c > 0,$$

前提是我们选择 θ 足够小，使得 $\lim_{L\to\infty} Q(\tau_1^{(L)} < \theta 4^{-L}) < \frac{1}{2}$。

第二步。上界。

我们将实际证明 $\bar{\tau}_1^{(L)}$ 的指数矩是有限的，而这仍然强于该命题。对每个 $n \geq 1$ 定义事件如下

$$A_n := \big\{\epsilon \in (\mathcal{W})^{\mathbb{N}} : (\epsilon_{n-L}, \ldots, \epsilon_{n-1}) = 1, \ldots, 1, \epsilon_n = -1, 0\big\}$$

and

$$B_n \coloneqq \big\{\epsilon \in (\mathcal{W})^{\mathbb{N}} : (\epsilon_{j-L}, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_j) \neq 1, \dots, 1, -1 \text{ or } 0, \forall\ L \le j \le n-L-1\big\}.$$

因此,

$$\begin{aligned} E_Q\big[e^{\bar{\tau}_1^{(L)}}\big]/3 &\le \sum_{n=1}^{2L} E_Q\big[e^{4^{-L}n},\, A_n\big] + \sum_{n=2L+1}^{\infty} E_Q\big[e^{4^{-L}n},\, A_n,\, B_n\big] \\ &\le (L^2-1)4^{-(L+1)}e^{L4^{-(L-1)}} + 4^{-(L+1)} \sum_{k=L^2}^{\infty} E_Q\big[e^{4^{-L}n},\, B_n\big]. \end{aligned}$$

根据 [31, 引理 6.6], $Q(B_n) \le (1-cL^2 4^{-L})^{\lfloor n/L^2 \rfloor}$，对每个 $n \ge L^2$ 均成立。因此,

$$E_Q\big[e^{\bar{\tau}_1^{(L)}}\big] \le K + \tfrac{3}{2}L^2 4^{-L} \sum_{k=1}^{\infty} \big(e^{L^2 4^{-L}}(1-cL^2 4^{-L})\big)^k \le K + \frac{3K^2 4^{-L}/2}{e^{-L^2 4^{-L}} - (1-cL^2 4^{-L})} \le K + K' < \infty,$$

其中 K, K' 是与 L 无关的绝对常数。断言得证。 □

引理 3.3. 设 $f : (\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ 是一个有界博雷尔可测函数。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们将有限时过程 $(\sum_{r=\tau_{n-1}^{(L)}+1}^{i} \eta_r)^{\tau_{n-1}^{(L)} \le i \le \tau_n^{(L)}}$ 和过程 $(\sum_{r=\tau_{n-1}^{(L)}+1}^{i} \zeta_r)^{\tau_{n-1}^{(L)} \le i \le \tau_n^{(L)}}$ 均简记为 $S^{\tau,\cdot,n}$。那么，在弱纠缠条件下，对每个 $t \in (0,\ 1)$，存在 $L_0 = L_0(C,\ g,\ t) \in \mathbb{N}$，使得对所有 $L \ge L_0$，$\mathbb{P} \otimes P_0^S \otimes Q$-几乎必然成立:

$$\exp\big(-e^{-gtL}\big)\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S_{\cdot}^{\tau,1})\big] \le \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S_{\cdot}^{\tau,n})\big|\mathscr{G}_{n-1}\big] \le \exp\big(e^{-gtL}\big)\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S_{\cdot}^{\tau,1})\big].$$

证明。 取有界且关于 $\mathscr{G}_{n-1}$ 可测的 $h : (\mathbb{R})^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d} \times (\mathcal{W})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$，其中 $\mathcal{W} \coloneqq \{-1, 0, 1\}$。那么,

$$\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S_{\cdot}^{\tau,n})h\big] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S_{\cdot}^{\tau,n})h_k,\, \tau_{n-1}^{(L)} = k\big],$$

因为在事件 $\{\tau_{n-1}^{(L)} = k\}$ 上，我们可以找到一个有界函数 h_k，它是关于 $\mathscr{F}_{(L)k}$ 可测的，并且在该事件上与 h 一致。因此，我们观察到

$$\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S_{\cdot}^{\tau,n})h\big] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[h_k,\, \tau_{n-1}^{(L)} = k,\, \mathbb{E}\overline{E}_0^S[f(S_{k+\cdot}^{\tau,1})|\mathscr{F}_k^{(L)}]\big], \tag{3.3}$$

考虑时空超平面 $\mathbb{H}_{L,\ k}$ 和由下式分别定义的一维锥状区域 $\mathbb{C}_k$

$$\mathbb{H}_{L,k} \coloneqq \big\{m \in \mathbb{Z} :\, m - k \le -L\big\} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{C}_k \coloneqq \mathbb{Z}_{\ge k}.$$

根据散射体的弱相互作用条件，我们估计级数

$$\sum_{\vec{y}\in\mathbb{H}_{L,k,x}} \sum_{\vec{z}\in\mathbb{C}_{k,x}} \exp\big(-g|\vec{y}-\vec{z}|_1\big). \tag{3.4}$$

注意，当 L 足够大时，由于 $\mathbb{C}_k$ 是锥状的，该级数收敛。事实上，取 $\hat{}t \in (t,\ 1)$ 并考察 (3.4)。我们取足够大的 L，使得 $L > (1-\hat{}t)^{-1}2r$，从而 $L - 2r > \hat{}tL$。令

$$\mathbb{K}_{L,k,n} \coloneqq \big\{(\vec{y},\vec{z}) :\, \vec{y} \in \mathbb{H}_{L,k},\, \vec{z} \in \mathbb{C}_k,\, \hat{t}L + n \le |\vec{y}-\vec{z}|_1 < \hat{t}L + n + 1\big\}.$$

由此可得

$$\sum_{\vec{y}\in\mathbb{H}_{L,k}} \sum_{\vec{z}\in\mathbb{C}_k} \exp\big(-g|y-z|_1\big) \le \sum_{n\ge 0} \sum_{(\vec{y},\vec{z})\in\mathbb{K}_{L,k,n}} e^{-g|\vec{y}-\vec{z}|_1} \le \sum_{n\ge 0} |\mathbb{K}_{L,k,n}| e^{-g(\hat{t}L+n)}.$$

由于 $|\mathbb{K}_{L,k,n}| \le Cr^2(n+1)$，我们有

$$\sum_{\vec{y}\in\mathbb{H}_{L,k}} \sum_{\vec{z}\in\mathbb{C}_k} \exp\big(-g|\vec{y}-\vec{z}|_1\big) \le \sum_{n\ge 0}(n+1)e^{-gn} \le e^{-g\tilde{t}L}, \quad \text{with } \tilde{t}\in(t,\hat{t}), \tag{3.5}$$

从而得到对 (3.4) 的估计。由 (3.3) 中的最后一项可得

$$\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S^{\tau,1}_{k+\cdot})\big|\mathscr{F}_k^{(L)}\big] = \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S^{\tau,1}_{k+\cdot})\big|\mathscr{F}_{\mathbb{H}_{L,\hat{\gamma}k}}\big],$$

因为 Q 是 $(\mathcal{W})^{\mathbb{N}}$ 上的乘积概率测度。进一步记

$$\mathbb{H}_{L,k}^{(n)} := \mathbb{H}_{L,k} \cup \{\vec{z}\in\mathbb{Z}:\ |\vec{z}|_1 \ge n\}, \quad \forall\ k\in\mathbb{Z}.$$

散射体满足弱纠缠条件，再结合 (3.5)，可得

$$\exp\big(-Ce^{-g\tilde{t}L}\big) \le \frac{\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S^{\tau,1}_{k+\cdot}),\,\gamma=(S_{k+i}-S_k)_{0\le i\le\tau_1^{(L)}}\big|\mathscr{F}_{\mathbb{H}^{(n)}_{L,\hat{\gamma}k}}\big]}{\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S^{\tau,1}_{k+\cdot}),\,\gamma=(S_{k+i}-S_k)_{0\le i\le\tau_1^{(L)}}\big]} \le \exp\big(Ce^{-g\tilde{t}L}\big)$$

对有界的 f 以及满足 (3.5) 的任意有限路径 γ，上述结论一致成立。取适当的 $\bar{t}\in(t,\ \tilde{t})$ 并令$n\to\infty$，可得

$$\exp\big(-e^{-g\bar{t}L}\big) \le \frac{\sum_\gamma \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S^{\tau,1}_{k+\cdot}),\,\gamma=(S_{k+i}-S_k)_{0\le i\le\tau_1^{(L)}}\big|\mathscr{F}_{\mathbb{H}^{(n)}_{L,\hat{\gamma}k}}\big]}{\sum_\gamma \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[f(S^{\tau,1}_{k+\cdot}),\,\gamma=(S_{k+i}-S_k)_{0\le i\le\tau_1^{(L)}}\big]} \le \exp\big(e^{-g\bar{t}L}\big). \tag{3.6}$$

将 (3.6) 代入 (3.3)，令 $L_0(t)$ 足够大且 $L\ge L_0$，即可验证该断言。 □

引理 3.4。存在一个确定性极限 $\ell>0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\omega_{\alpha n+\beta} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} = \sum_{r\le\alpha n+\beta}\eta_r = \alpha\ell, \qquad \mathbb{P}\otimes Q\text{-a.s.}, \qquad \forall\ \alpha\in\mathbb{R} \quad\text{and}\quad \beta\in\mathbb{Z},$$

其中 $\omega_{\alpha n+\beta}$ 是$\omega_{[\alpha n+\beta]}$ 的缩写，不会引起任何歧义。

注意，我们只在 $\mathbb{N}$上定义了辅助场 $(\eta_r)_{r\in\mathbb{N}}$。不过，它在 $\mathbb{Z}_{<0}$ 上的定义与 (3.2) 类似，这里省略细节。不失一般性，我们取 $\alpha=1,\beta=0$。

证明。对于每个 $i\ge 1$，令 $\bar{X}_i^{(L)} := \sum_{k=\tau_{i-1}^{(L)}+1}^{\tau_i^{(L)}} 4^{-L}\eta_k$和 $\bar{\tau}_i^{(L)} := 4^{-L}(\tau_{(L)i} - \tau_{(L)i-1})$，并令 $\mu^{(L)}(\cdot)$ 表示 $\bar{X}_1^{(L)}$ 的分布。根据引理 3.3，很容易看出，对于任意 $k\ge 2$，

$$\Big|\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[\bar{X}_k^{(L)}\in A\big|\mathscr{G}_{k-1}\big] - \mu^{(L)}(A)\Big| \le \psi_L < 1, \qquad \forall\ \text{Borel } A\subseteq\mathbb{R},$$

其中 $\psi_L := \exp\big(e^{-gtL}\big)-1$。对所有博雷尔集 $A\subseteq\mathbb{R}$取上确界，得到

$$\big\|\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[\bar{X}_k^{(L)}\in\cdot\big|\mathscr{G}_{k-1}\big] - \mu^{(L)}(\cdot)\big\|_{FV} \le \psi_L, \qquad \forall\ k\ge 2.$$

应用引理 3.1，我们得到独立同分布序列 $(\tilde{X}_i^{(L)}, \Delta_i^{(L)})_{i\ge1}$，使得 $\tilde{X}_1^{(L)}\sim\mu^{(L)}$, $\Delta_1^{(L)}\sim$ 服从伯努利分布(ψ_L), 以及满足以下条件的另一序列 $(Z_i^{(L)})_{i\ge1}$

$$\bar{X}_i^{(L)} = (1-\Delta_i^{(L)})\tilde{X}_i^{(L)} + \Delta_i^{(L)}Z_i^{(L)}.$$

我们也将扩大的 σ-代数记为 $\tilde{\mathscr{G}}_i := \mathscr{G}_i\vee\sigma(\tilde{X}_j^{(L)},\ \Delta_j^{(L)}:\ j\le i)$。注意，我们还有 $|\Delta_i^{(L)}Z_i^{(L)}|\le$

$|\bar{X}_i^{(L)}|$ 对每个 $i \geq 1$均成立。因此，以下利用 H¨older 不等式，并对所有实数且为偶数的 $1 < p \leq \mathfrak{p}$,

$$\psi_L \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[(Z_i^{(L)})^p \big| \tilde{\mathscr{G}}_{i-1}\big] \leq \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[(\Delta_i^{(L)} Z_i^{(L)})^p \big| \tilde{\mathscr{G}}_{i-1}\big] \leq 2K(p) 2^{-pL} \exp\big(e^{-gtL}\big) E_Q\big[(\tau_1^{(L)})^p\big], \ \ \mathbb{P}\otimes P_0^S \otimes Q\text{-a.s.}, \tag{3.7}$$

其中 $K(p) \coloneqq \mathbb{E}[e^{p\zeta_1}] + 1 < \infty$ 并且我们利用了如下事实:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[(\bar{X}_i^{(L)})^p\big] &\leq \mathbb{E}\overline{E}_0^S\Bigg[\Big(\sum_{k=\tau_{i-1}^{(L)}+1}^{\tau_i^{(L)}} e^{\eta_k}\Big)^p\Bigg] \\
&\leq 2^{-pL} E_Q\Bigg[(\tau_i^{(L)} - \tau_{i-1}^{(L)})^{p-1} \sum_{k=\tau_{i-1}^{(L)}+1}^{\tau_i^{(L)}} \mathbb{E}E_0^S\big[e^{p\eta_k} \big| \sigma(\tau_j^{(L)} : \, j \leq i)\big]\Bigg] \leq 2E_Q\big[(\bar{\tau}_1^{(L)})^p\big] K(p).
\end{aligned}$$

注意 $\lim_{L\to\infty} \overline{E_Q[(\bar{\tau}_1^{(L)})^p]} < \infty$ 由引理 3.2 可得。我们可以将

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(L)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^{(L)} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Delta_i^{(L)} \tilde{X}_i^{(L)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Delta_i^{(L)} Z_i^{(L)}, \tag{3.8}$$

其中首先由独立性

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^{(L)} \xrightarrow{n\to\infty} \gamma_L, \qquad \text{where} \quad \gamma_L \coloneqq \mathbb{E}\overline{E}_0^S[\tilde{X}_1^{(L)}], \qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S \otimes Q\text{-a.s.}$$

同时，对任意共轭 $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, – –

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Delta_i^{(L)} \tilde{X}_i^{(L)}\right| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\Delta_i^{(L)})^p\right|^{1/p} \cdot \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\tilde{X}_i^{(L)})^q\right|^{1/q} \leq 2K(q)\psi_L^{1/p} E_Q\big[(\bar{\tau}_1^{(L)})^q\big]^{1/q},$$

$\mathbb{P}\otimes P_0^S \otimes Q$-几乎必然，其中 $\eta_L \xrightarrow{L} 0$ 且最后一个不等式源于 (3.7)。对每个 $i \geq 1$，我们定义 $\bar{Z}_i^{(L)}$: $= \mathbb{E}E_0^S[Z_i^{(L)} | \tilde{\mathscr{G}}_{i-1}]$。注意到过程 $(M_{(L)n})_{n\geq 1}$（其中每个 $M_n^{(L)} \coloneqq \sum_{i=1}^n i^{-1}\Delta_i^{(L)}(Z_i^{(L)} - \bar{Z}_i^{(L)})$）是一个˜中心化的 $(\mathscr{G}_n)_{n\geq 1}$-鞅。由伯克霍尔德-冈迪极大不等式 [59, 式 (14.18)],

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{E}_0^S\Big[\big|\sup_{n\geq 1} M_n^{(L)}\big|^\gamma\Big] &\leq C(\gamma)\mathbb{E}\overline{E}_0^S\Bigg[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\big(\Delta_n^{(L)} Z_n^{(L)} - \Delta_n^{(L)} \bar{Z}_n^{(L)}\big)^2\Bigg]^{\gamma/2} \\
&\leq C(\gamma)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\gamma}\mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[\big(\Delta_n^{(L)} Z_n^{(L)} - \Delta_n^{(L)} \bar{Z}_n^{(L)}\big)^\gamma\big] \leq C'(\gamma) \qquad \text{with} \quad \gamma \coloneqq p \wedge q.
\end{aligned}$$

此后， $M_{(L} \xrightarrow{n} M_\infty^{(L))}$, $\mathbb{P}\otimes P_0^S \otimes Q$-几乎处处，且极限 $M_{(L)\infty}$ 可积。由克罗内克引理 [59, 式（12.7）],, 可得 $n^{-1}\sum_{i=1}^n \Delta_i^{(L)}(Z_i^{(L)} - \bar{Z}_i^{(L)}) \xrightarrow{n} 0$, $\mathbb{P}\otimes P_0^S \otimes Q$-几乎处处。因此，对于实值偶函数 $q > 1$，任意 $n \geq 1$, 由（3.7）可得,

$$|\bar{Z}_n^{(L)}| \leq \mathbb{E}\overline{E}_0^S\big[(\bar{Z}_n^{(L)})^q \big| \tilde{\mathscr{G}}_{n-1}\big]^{1/q} \leq K(q)\exp\big(q^{-1}e^{-gtL}\big)\|\bar{\tau}_1^{(L)}\|_{L^q(Q)}\psi_L^{-1/q} =: \eta_L \psi_L^{-1/q},.$$

今后根据独立性,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \bar{Z}_i^{(L)}\Delta_i^{(L)}\right| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \eta_L\psi_L^{-1/q}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Delta_i^{(L)} \leq \eta_L\psi_L^{1/p}, \qquad \text{where} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

结合上述所有估计，我们得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}_i^{(L)}-\gamma_L\right|\le 2\eta_L\psi_L^{1/p}\xrightarrow{L\to\infty}0,\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\otimes Q\text{-a.s.}\tag{3.9}$$

另一方面，显然

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{\tau}_i^{(L)}\xrightarrow{n\to\infty}\beta_L\coloneqq E_Q\big[\bar{\tau}_1^{(L)}\big],\qquad Q\text{-a.s.},$$

由独立性可知。进一步，由引理 3.2，$E_Q[\bar{\tau}_1^{(L)}]\ge c>0$。因此，结合 (3.9)，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{\tau_n^{(L)}}\sum_{k=1}^{\tau_n^{(L)}}\eta_k-\frac{\gamma_L}{\beta_L}\right|\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}_i^{(L)}}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\bar{\tau}_i^{(L)}}-\frac{\gamma_L}{\beta_L}\right|\le C\eta_L\psi_L^{1/p},\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\otimes Q\text{-a.s.}\tag{3.10}$$

按照标准论证 [52, p. 1864], 我们定义一个递增序列 $(k_n)_{n\ge1}$，满足 $\tau_{k_n}^{(L)}\le n<\tau_{k_n+1}^{(L)}$ 对所有 n。于是，我们可以写出

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k=\frac{k_n}{n}\cdot\frac{1}{k_n}\Bigg(\sum_{k=1}^{\tau_{k_n}^{(L)}}\eta_k+\sum_{k=\tau_{k_n}^{(L)}+1}^{n}\eta_k\Bigg).$$

显然

$$\frac{k_n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}4^{-L}\frac{1}{E_Q[\bar{\tau}_1^{(L)}]},\qquad Q\text{-a.s.}$$

并且

$$\gamma_L-2\eta_L\psi_L^{1/p}\le 4^{-L}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{\tau_{k_n}^{(L)}}\eta_k\le 4^{-L}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{\tau_{k_n}^{(L)}}\eta_k\le\gamma_L+2\eta_L\psi_L^{1/p},\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\otimes Q\text{-a.s.}$$

进一步，定义 $\bar{\gamma}_L\coloneqq 4^{-L}\mathbb{E}E_0^S[\sum_{k=1}^{\tau_1^{(L)}}|\eta_k|]$。沿用与上述计算几乎完全相同的论证，可得

$$4^{-L}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{k_n}\sum_{k=\tau_{k_n}^{(L)}+1}^{n}\eta_k\le 4^{-L}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{k_n}\Bigg(\sum_{k=1}^{\tau_{k_n+1}^{(L)}}-\sum_{k=1}^{\tau_{k_n}^{(L)}}\Bigg)|\eta_k|\le\bar{\gamma}_L+2\eta_L\psi_L^{1/p}-(\bar{\gamma}_L-2\eta_L\psi_L^{1/p}).\tag{3.11}$$

同样地，对于下界，我们有

$$4^{-L}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{k=\tau_{k_n+1}^{(L)}}^{n}\zeta_k\ge-\bar{\gamma}_L-2\eta_L\psi_L^{1/p}+(\bar{\gamma}_L+2\eta_L\psi_L^{1/p})\xrightarrow{L\to\infty}0,\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\otimes Q\text{-a.s.}$$

综合上述估计，我们得到关于 $N^{-1}\sum_{k=1}^{N}\eta_k$ 的所需大数定律，其极限为$\ell=\lim_{L\to\infty}\gamma_L/\beta_L$。另一方面，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $M>0$,

$$\mathbb{E}P_0^S\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|\ge M\right)\le e^{-Mn}\mathbb{E}E_0^S\big[e^{\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|}\big]\le K^n e^{-Mn},$$

其中 $K\le C\mathbb{E}$ 由于两个最近邻散射体之间存在相关性，对于某个常数 $C>0$，$[e^{\zeta_1}]$.

现在我们选择 M_0，使得 $M_0 > \log K$。那么，对于每个 $M \geq M_0$ 和 $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{E}P_0^S\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k| \geq M\right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} K^n e^{-Mn} \leq \frac{K^N e^{-MN}}{1-Ke^{-M}} < 1.$$

定义事件 $A_{N,\,M} := \{n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|\eta_k| \leq 2M, \forall\, n \geq N\}$。根据上述构造，我们得到估计 $\mathbb{E}P_0^S(A_{N,\,M}) \geq 1 - (1-Ke^{-M})^{-1}K^N e^{-MN}$。因此，固定 N_0，我们有 $\mathbb{E}P_0^S(\cup_{M\geq M_0} A_{N_0,\,M}) = 1$。由控制收敛定理,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\zeta_k = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E_Q[\eta_k] = \ell, \qquad \text{conditioned on } A_{N_0,M}, \quad \forall\, M \geq M_0. \tag{3.12}$$

此后，上述 (3.12) 实际上对 $\mathbb{P}$-几乎处处成立，从而验证了该断言。 □

定理 2.1 的证明。第一部分。注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \omega_{S_n}$。现在，对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 以及任意小的 $\epsilon > 0$，我们有 $\mathbb{P}$- 几乎处处 $P_0^S(X_n - \ell E[S_1]n \leq xn^{1/2})$ 小于或等于

$$P_0^S\big(\omega_{S_n} - \ell E[S_1]n \leq xn^{1/2},\, S_n - E[S_1]n > (\ell^{-1}x+\epsilon)n^{1/2}\big) + P_0^S\big(S_n - E[S_1]n \leq (\ell^{-1}x+\epsilon)n^{1/2}\big).$$

取 $n\to\infty$，并注意到根据引理 3.4，在较大的 n 下，$\omega_{S_n} \sim \omega_{S_n - E[S_1]n} + \ell E[S_1]n$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(X_n - \ell E[S_1]n \leq xn^{1/2}\big) &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(\omega_{S_n - E[S_1]n} \leq xn^{1/2},\, S_n - E[S_1]n > (\ell^{-1}x+\epsilon)n^{1/2}\big)\\ &\quad + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(S_n - E[S_1]n \leq (\ell^{-1}x+\epsilon)n^{1/2}\big)\\ &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(\omega_{(\ell^{-1}x+\epsilon)n^{1/2}} \leq xn^{1/2}\big) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(S_n - E[S_1]n \leq (\ell^{-1}x+\epsilon)n^{1/2}\big).\end{aligned}$$

利用引理 3.4 和长程随机游走的中心极限定理 [39] $(S_n)_{n\geq 0}$，右侧的第一项趋于零，因此有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(X_n - \ell E[S_1]n \leq xn^{1/2}\big) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x'} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \qquad \text{where} \quad x' := E[S_1^2]^{-1/2}(\ell^{-1}x+\epsilon). \tag{3.13}$$

事实上，对 (3.13) 作类似推导可得下界

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, P_0^S\big(X_n - \ell E[S_1]n \leq xn^{1/2}\big) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x''} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \qquad \text{with} \quad x'' := E[S_1^2]^{-1/2}(\ell^{-1}x-\epsilon).$$

结合 上述两个估计，离散时间随机 Lévy–Lorentz 气体的中心极限定理得以验证。 □

3.2 连续时间情形。我们将用到以下技术引理。

引理 3.5。取 $N_t := \sup\{n \in \mathbb{N}:\ T_n^\omega \leq t\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 对每个 $t \geq 0$。对于所有 $t > 0$，$\mathbb{P}\otimes P_0^S$-几乎必然有 $N_t < \infty$，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^\omega}{n} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{N_t} = E[|V_1|]\ell, \qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\text{-a.s.},$$

这自然意味着几乎必然成立，从而可知 $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ 定义良好。

证明。 注意，距离变量 $(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ 不一定是遍历的，因此我们不能直接应用伯克霍夫遍历定理来得到极限。不过，利用 [37, 定理 2.5.6],可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k - X_{k-1}| = \mathbb{E}E_0^S[|\omega_{S_1}||\mathscr{L}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}P_0^S(V_1 = k)\mathbb{E}[|\omega_k||\mathscr{L}], \qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\text{-a.s.},$$

其中， $\mathscr{L}$ 表示 $\mathbb{R}^\infty$上的不变 σ-代数。另一方面，将相同的 [37, 定理 2.5.6] 应用于 $(n^{-1}\omega_n)_{n\geq 1}$，对每个 $k\in\mathbb{Z}$可得 $\mathbb{E}[|\omega_k||\mathscr{L}]=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\omega_{|k|n}=\ell|k|$。因此，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^\omega}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k-X_{k-1}|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ell|k|P_0^S(V_1=k)=E[|V_1|]\ell,\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\text{-a.s.},$$

这也表明 $T_n^\omega\to\infty$ 为 $n\to\infty$，进而对所有 $t>0$， $N_t<\infty$。由于 $N_t\to\infty$ 为 $t\to\infty$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T^\omega_{N_t+1}}{N_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{T^\omega_{N_t+1}}{N_t+1}\cdot\frac{N_t+1}{N_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{T^\omega_{N_t}}{N_t}=E[|V_1|]\ell,\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^S\text{-a.s.}$$

将上述内容代入以下考量中

$$N_t^{-1}\big|T^\omega_{N_t}-t\big|\leq N_t^{-1}(T^\omega_{N_t+1}-T^\omega_{N_t})\to 0\quad\text{as } t\to\infty,$$

该断言得证。 □

引理 3.6. 我们有如下 Ces`aro 型极限,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\zeta_{k+\beta}P_0^S(S_n=k)=\ell,\qquad\forall\,\beta\in\mathbb{Z},\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.},$$

对任意 $\psi_n\sim o(n^{1/2})$，在 $|\beta|\leq\psi_n$ 上一致成立；对于相互交互距离 $(\zeta_r)_{r\in\mathbb{Z}}$。

证明。对于每个 在 $k_1\leq k_2$ 中，对于 $\mathbb{Z}$，定义 $\psi_{k_1,k_2}:=(k_2-k_1+1)^{-1}\sum_{k=k_1}^{k_2}\zeta_{k+\beta}$。对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $r\in\mathbb{Z}$，定义

$$\mathscr{E}^+_{n,r}:=\sum_{k>r}\zeta_{k+\beta}P_0^S(S_n=k),\qquad \mathscr{E}^-_{n,r}:=\sum_{k<-r}\zeta_{k+\beta}P_0^S(S_n=k)$$

其中 $\mathscr{E}^+_n:=\mathscr{E}^+_{n,-1}$， $\mathscr{E}^-_n:=\mathscr{E}^-_{n,0}$ 以及 $\mathscr{E}_n:=\mathscr{E}^+_n+\mathscr{E}^-_n$。直接整理可得

$$\mathscr{E}^+_{n,r}=\sum_{k>r}\psi_{0,k}(k+1)(P_0^S(S_n=k)-P_0^S(S_n=k+1)),\ \ \mathscr{E}^-_{n,r}=\sum_{k<-r}\psi_{k,-1}(-k)(P_0^S(S_n=k)-P_0^S(S_n=k-1)).\tag{3.14}$$

应用引理 3.4，对于任意 $\epsilon>0$，我们可以找到某个 $r=r(\omega)\in\mathbb{N}$ 使得

$$|\psi_{0,k}-\ell|<\epsilon,\qquad|\psi_{-k,-1}-\ell|<\epsilon,\qquad\forall\,k\geq r.$$

从现在起，将这个特定值 $r(\omega)$ 赋给下文中的 $r\in\mathbb{N}$，我们得到

$$\big|\mathscr{E}^+_{n,r}-\ell P_0^S(S_n>r)\big|\leq\epsilon P_0^S(S_n>r)\leq\epsilon,\qquad\big|\mathscr{E}^-_{n,r}-\ell P_0^S(S_n<-r)\big|\leq\epsilon P_0^S(S_n<-r)\leq\epsilon,$$

由此得到 $\big|\mathscr{E}_{n,r}-\ell P_0^S(|S_n|>r)\big|\leq\epsilon P_0^S(|S_n|>r)\leq\epsilon$，其中 $\mathscr{E}_{n,r}:=\mathscr{E}^+_{n,r}+\mathscr{E}^-_{n,r}$。应用底层随机游走 $(S_n)_{n\geq 0}$ 的中心极限定理，我们可以找到某个 $N=N(\omega)\in\mathbb{N}$ 使得

$$P_0^S(|S_n|\leq r)\leq\epsilon,\qquad\forall\,n\geq N.$$

我们还记 $\|\zeta\|_r:=\max_{|k|\leq r}|\zeta_{k+\beta}|$。此后，结合 (3.14)，对于任意 $n\geq N$，我们有

$$\begin{aligned}|\mathscr{E}_n-\ell|&\leq|\mathscr{E}_n-\mathscr{E}_{n,r}|+\big|\mathscr{E}_{n,r}-\ell P_0^S(|S_n|>r)\big|+\big|\ell P_0^S(|S_n|>r)-\ell\big|\\&\leq(\|\zeta\|_r+\ell)P_0^S(|S_n|\leq r)+\big|\mathscr{E}_{n,r}-\ell P_0^S(|S_n|>r)\big|\leq\epsilon(\|\zeta\|_r+\ell+1)\to 0,\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.},\end{aligned}$$

这验证了该断言。 □

证明 定理 2.1. **第二部分**。取确定性的 $N_t:=[t/E[|V_1|]\ell]$ 对所有 $t\geq 0$ 均成立。调用

$(X_n)_{n\geq 0}$ 的中心极限定理，该定理已在第一部分。中得到验证，因此我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\overset{\mathcal{L}}{=}\mathcal{N}(0,\ell E[S_1^2]/E[|V_1|]),\qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}\tag{3.15}$$

~由于对于所有 t， $X_t-\ell E[S_1]t$ 始终位于 $X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t$ 和 $X_{N_t+1}-\ell E[S_1]$（N_t+1）之间，因此我们有

$$\begin{aligned}\big|(\widetilde{X}_t-\ell E[S_1]t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|&\leq\big|(X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|\\&+\big|(X_{N_t+1}-\ell E[S_1](N_t+1))-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|.\end{aligned}$$

根据 (3.15) 和斯卢茨基定理 [36, 定理 13.18], , 只需证明上述各项依概率收敛到零， $\mathbb{P}$-几乎必然成立。接着应用 Portmanteau 定理 [36, 定理 13.16], , 只需证明

$$E_0^S\big[f(t^{-1/2}\big|(X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|)\big]\to f(0)\qquad\text{as}\quad t\to\infty,\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.}\tag{3.16}$$

对于任意有界 Lipschitz $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$。注意，我们省略了关于项$X_{N_t+1}-\ell E[S_1](N_t+1)$的分析，因为它与上述 (3.16) 完全类似。任取函数 $\psi\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得 $\psi_t\to\infty$ 且当 $t\to\infty$时 $t^{-1}\psi_t\to 0$。由引理 3.5 可知， $t^{-1}(N_t-\bar{N}_t)\to 0$ 当 $t\to\infty$时成立。因此，对于任意 $\epsilon>0$，存在某个 $t_0=t_0(\omega)>0$ 以及事件 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\omega)$，使得 $P_0^S(\mathcal{A})\leq\epsilon/4$

$$\big|N_t-\bar{N}_t\big|\leq\psi_t,\qquad\forall\, t\geq t_0\qquad\text{on}\quad\Omega\backslash\mathcal{A},\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.}$$

另一方面，由随机游走 $(S_n)_{n\geq 0}$ 的中心极限定理，我们可以找到某个 $t_1=t_1(\omega)>0$ 以及事件$\mathcal{B}=\mathcal{B}(\omega)$，满足 $P_0^S(\mathcal{B})\leq\epsilon/4$，使得

$$\big|S_{N_t}-S_{\bar{N}_t}\big|\leq\big|N_t-\bar{N}_t\big|^{1/2},\qquad\forall\, t\geq t_1\qquad\text{on}\quad\Omega\backslash\mathcal{B},\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.}$$

此后，为验证 (3.16)，对任意 $t\geq t_0\vee t_1$ 我们首先写出

$$E_0^S\big[f(t^{-1/2}\big|(X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|),\,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\big]\leq 2\|f\|_\infty P_0^S(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\leq\|f\|_\infty\epsilon,$$

$\mathbb{P}$-几乎必然。此外，对任意 $t\geq 0$ 我们有

$$\begin{aligned}&E_0^S\big[f(t^{-1/2}\big|(X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|),\,\Omega\backslash(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\big]\\&\quad\leq\mathrm{Lip}(f)t^{-1/2}E_0^S[\sum_{\beta\in K_t}\zeta_{S_{\bar{N}_t}+\beta}]\leq\mathrm{Lip}(f)t^{-1/2}(\psi_t^{1/2}+1)\|E_0^S[\zeta_{\cdot+S_{\bar{N}_t}}]\|_{K_t},\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.},\end{aligned}$$

其中 $K_t:=\mathbb{N}\cap[-|S_{N_t}-S_{\bar{N}_t}|,|S_{N_t}-S_{\bar{N}_t}|]$ 且 $\|E_0^S[\zeta_{\cdot+S_{\bar{N}_t}}]\|_{K_t}$ 为 $\sup_{\beta\in K_t}E_0^S[\zeta_{S_{\bar{N}_t}+\beta}]$ 的简记。根据引理 3.6，我们可以进一步说

$$E_0^S\big[f(t^{-1/2}\big|(X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|),\,\Omega\backslash(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\big]\leq 2\mathrm{Lip}(f)\ell(t^{-1}\psi_t)^{1/2}\leq\mathrm{Lip}(f)\ell\epsilon,$$

对所有 $t\geq t_2$， $\mathbb{P}$-几乎必然，对某个 $t_2=t_2(\omega)>0$。综合上述关于不相交事件 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$与 $\Omega\backslash(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ 的估计，我们得到

$$E_0^S\big[f(t^{-1/2}\big|(X_{N_t}-\ell E[S_1]N_t)-(X_{\bar{N}_t}-\ell E[S_1]\bar{N}_t)\big|)\big]\leq(\|f\|_\infty+\mathrm{Lip}(f)\ell)\epsilon,\qquad\forall\, t\geq\max\{t_0,t_1,t_2\},$$

$\mathbb{P}$-几乎必然成立，随后即可验证断言 (3.16)。 □

3.3 步长强化情形。 我们需要以下技术引理。

引理 3.7。 当 $0 \le p < 3/4$ 时，我们有如下渐近正态性，

$$\lim_{n\to\infty} P_0^{(p)}\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}} S_n^{(p)} \le (3-4p)^{-1/2} x\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

证明。 令 $\mathcal{F}_n := \sigma(V_{(p)\,1}, \ldots, V_{(p)n})$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$ 定义 $\mathcal{U}_n \sim \mathcal{U}\{1, \ldots, n\}$。显然，我们有

$$E_0^{(p)}[V_{n+1}^{(p)} | \mathcal{F}_n] = (2p-1) E_0^{(p)}[V_{\mathcal{U}_n}^{(p)} | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{n}(2p-1) \sum_{k=1}^{n} V_k^{(p)} = \frac{a}{n} S_n^{(p)},$$

其中 $a := (2p-1)$。以下，对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$E_0^{(p)}[S_{n+1}^{(p)} | \mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n^{(p)}, \qquad \text{where} \quad \gamma_n := 1 + \frac{a}{n}. \tag{3.17}$$

Now 我们通过 $M_n := a_n S_n^{(p)}$ 定义序列 $(M_n^{(p)})_{n\ge 0}$，对所有 $n \ge 0$ 均成立，其中 $a_0 = a_1 := 1$，并且

$$a_n := \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+a)}, \qquad \forall\, n \ge 2.$$

根据欧拉伽马函数的众所周知的性质 [26]，可观察到当 $n \to \infty$ 时， $\Gamma(n+a) \sim n^{2p-1}\Gamma(n)$。因此，当 $n \to \infty$ 时，我们有 $n^{2p-1} a_n \to \Gamma(a+1)$。此外，由于 $a_n = \gamma_n a_{n+1}$，我们可由 (3.17) 推得

$$E_0^{(p)}[M_{n+1}^{(p)} | \mathcal{F}_n] = M_n^{(p)}, \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.}, \qquad \forall\, n \ge 1.$$

因此，采用与 [9] 中类似的方法，$(M_n^{(p)})_{n\ge 0}$ 是一个 $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$-适应鞅。注意，该鞅可改写为

$$M_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \epsilon_k, \qquad \text{with} \quad \epsilon_n := S_n^{(p)} - \gamma_{n-1} S_{n-1}^{(p)}, \qquad \forall\, n \ge 1,$$

因为其增量为 $\Delta M_n^{(p)} = a_n S_n^{(p)} - a_{n-1} S_{n-1}^{(p)} = a_n \epsilon_n$。与 $(M_n^{(p)})_{n\ge 0}$ 相关联的可预测二次变差由下式给出

$$\langle M \rangle_n^{(p)} := \sum_{k=1}^{n} E_0^{(p)}\big[(\Delta M_k^{(p)})^2 \big| \mathcal{F}_{k-1}\big], \qquad \forall\, n \ge 1.$$

鞅 性质，我们已经知道 $E_0^{(p)}[\epsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$。此外，根据 (3.17)，我们有

$$E_0^{(p)}\big[(S_{n+1}^{(p)})^2 \big| \mathcal{F}_n\big] = E_0^{(p)}\big[(S_n^{(p)})^2 \big| \mathcal{F}_n\big] + \tfrac{2a}{n}(S_n^{(p)})^2 + 1 = (1 + \tfrac{2a}{n})(S_n^{(p)})^2 + 1, \tag{3.18}$$

这确保了

$$E_0^{(p)}\big[(\epsilon_{n+1})^2 \big| \mathcal{F}_n\big] = E_0^{(p)}\big[(S_{n+1}^{(p)})^2 \big| \mathcal{F}_n\big] - \gamma_n^2 (S_n^{(p)})^2 = 1 - (\gamma_n - 1)^2 (S_n^{(p)})^2, \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.}$$

同理,

$$\begin{aligned} E_0^{(p)}\big[(\epsilon_{n+1})^4 \big| \mathcal{F}_n\big] &= 1 - 3(\gamma_n - 1)^4 (S_n^{(p)})^4 + 2(\gamma_n - 1)^2 (S_n^{(p)})^2 \\ &\le 4/3 - 3\big((\gamma_n - 1)^2 (S_n^{(p)})^2 - 1/3\big)^2, \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.} \end{aligned}$$

因此，我们得到 $P_0^{(p)}$ -几乎必然成立的上界

$$\sup_{n\geq 0} E_0^{(p)}[(\epsilon_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] \leq 1 \qquad \text{and} \qquad \sup_{n\geq 0} E_0^{(p)}[(\epsilon_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] \leq 4/3. \tag{3.19}$$

此后，我们由 (3.18) 推得

$$\langle M\rangle_n^{(p)} = a_1^2 E_0^{(p)}[(\epsilon_1)^2] + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 E_0^{(p)}[(\epsilon_{k+1})^2|\mathcal{F}_k] = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - a^2 \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1}/k)^2 (S_k^{(p)})^2 \tag{3.20}$$

其渐近行为与 ν_n 的渐近行为密切相关：对所有 $n \geq 1$，$= \sum_{k=1}^n a_k^2$。可以看出，我们总有 $\langle M\rangle_n^{(p)} \leq \nu_n$。特别是，当 $p < 3/4$ 时，我们有

$$n^{2a-1}\nu_n \to (1-2a)^{-1}\Gamma(a+1)^2 \qquad \text{as} \quad n\to\infty, \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.}$$

除了上述 $(\nu_n)_{n\geq 1}$ 的渐近结果外，根据 [28, 定理 4.3。15], ，可得

$$|M_n^{(p)}|^2/\langle M\rangle_n^{(p)} = o\big((\log\langle M\rangle_n^{(p)})^{1+\epsilon}\big), \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.}, \qquad \forall\ \epsilon > 0.$$

因此，

$$|M_n^{(p)}|^2 = o\big(\nu_n(\log\nu_n)^{1+\epsilon}\big) \quad \Longrightarrow \quad |S_n^{(p)}|^2 = o\big(n(\log n)^{1+\epsilon}\big), \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.}, \qquad \forall\ \epsilon > 0,$$

因为对每个 $n \geq 1$，都有 $S_n^{(p)} = a_n^{-1} M_n^{(p)}$。由 (3.20) 可得

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n^{-1}\langle M\rangle_n^{(p)} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-2} a_n^4 < \infty, \qquad P_0^{(p)}\text{-a.s.}, \tag{3.21}$$

其中，最后一个结果由 $(\nu_n)_{n\geq 1}$ 的渐近结果推出。根据 (3.21)，要证明渐近正态性，只需验证 $(M_n^{(p)})_{n\geq 0}$ 满足林德伯格条件 [32, 推论 3。1]。也就是说，我们将证明

$$\nu_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} E_0^{(p)}\big[(\Delta M_k^{(p)})^2 \mathbb{1}_{\{|\Delta M_k^{(p)}|\geq \epsilon\nu_n^{1/2}\}}\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \to 0 \qquad \text{in} \quad P_0^{(p)}\text{-probability}, \qquad \forall\ \epsilon > 0. \tag{3.22}$$

事实上，对于任意 $\epsilon > 0$，由 (3.19) 可得

$$\begin{aligned}\nu_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} E_0^{(p)}\big[(\Delta M_k^{(p)})^2 \mathbb{1}_{\{|\Delta M_k^{(p)}|\geq \epsilon\nu_n^{1/2}\}}\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] &\leq (\epsilon\nu_n)^{-2}\sum_{k=1}^{n} E_0^{(p)}\big[(\Delta M_k^{(p)})^4\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &\leq \sup_{1\leq k\leq n} E_0^{(p)}[(\epsilon_k)^4|\mathcal{F}_{k-1}]\cdot(\epsilon\nu_n)^{-2}\sum_{k=1}^{n} a_k^4 \leq 4(\sqrt{3}\epsilon\nu_n)^{-2}\sum_{k=1}^{n} a_k^4.\end{aligned}$$

然而，由 (3.21) 我们已经看到 $\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^{-2}a_n^4 < \infty$。因此，利用克罗内克引理 [50, 引理 4.3。2], 我们得到，当 $n\to\infty$ 时，$\nu_n^{-2}\sum_{k=1}^n a_k^4 \to 0$，这保证了林德伯格条件成立。因此，由鞅中心极限定理可得

$$\tfrac{1}{\sqrt{\nu_n}} M_n^{(p)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{as} \quad n\to\infty.$$

由于 $M_n^{(p)} = a_n S_n^{(p)}$ 和 $na_n^2 \sim (1-2a)\ \nu_n$ 在较大的 n 下成立，该断言立即得证。 □

定理 2.3 的证明。步增强 L´evy–Lorentz 气体 $(X_n^{(p)})_{n\geq 0}$ 的常规中心极限定理现可通过引理 3.4 得出，论证方式与定理 2.1 证明的第一部分。类似，但我们使用引理 3.7

而非马尔可夫的（无记忆）随机游走 $(S_n)_{n\geq 0}$的中心极限定理。重复引理 3.5 中的步骤可知,

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k^{(p)}-X_{k-1}^{(p)}|>0,\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^{(p)}\text{-a.s.} \tag{3.23}$$

因此，连续时间步强化 L´évy–Lorentz 气体 $(\widetilde{X}_t^{(p)})_{t\geq 0}$ 在 $[0,\infty)$ 上确实定义良好。经直接计算可得，步强化随机游走 $(S_n^{(p)})_{n\geq 0}$ 在柱集上保持测度，另见 [23]。因此，应用 [37, 定理 2.5.6], ，我们仍有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k^{(p)}-X_{k-1}^{(p)}|=\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^{(p)}}{n}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{N_t^{(p)}}=E_0^{(p)}[|V_1^{(p)}|]\ell,\qquad \mathbb{P}\otimes P_0^{(p)}\text{-a.s.},$$

其中 $N_t^{(p)}:=\sup\{n\geq 1\colon\ T_{(n^p}\leq t\})$。再次使用引理 3.7，而非 $(S_n)_{n\geq 0}$ 的中心极限定理，我们进一步得到：对于 $\beta\in\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\zeta_{k+\beta}P_0^{(p)}(S_n^{(p)}=k)\to\ell\qquad\text{as}\quad n\to\infty,\qquad \mathbb{P}\text{-a.s.},$$

对任意 $\psi_n\sim o(n^{1/2})$，上述结论在 $|\beta|\leq\psi_n$ 上一致成立。因此，我们由此得到了 $(\widetilde{X}_t^{(p)})_{t\geq 0}$ 在 $p<3/4$ 处的渐近正态性。 □

4 泛函中心极限定理与 Skorokhod 空间

~在本节中，我们从 c`adl`ag 路径的 Skorokhod 空间出发，推导随机 L´évy–Lorentz 气体（X_n）$_{n\geq 0}$ 和（X_t）$_{t\geq 0}$及其步进强化版本（$X_n^{(p)}$）$_{n\geq 0}$ 和（$\widetilde{X}_n^{(p)}$）$_{n\geq 0}$的标度极限。

4.1 Skorokhod 空间拓扑的扩展。经典的 Skorokhod 拓扑仅讨论半直线 $[0,\infty)$上的实值函数。鉴于运动的马尔可夫粒子（S_n）$_{n\geq 0}$和步进强化粒子（$S_0^{(p)}$ ）$_{n\geq 0}$ 可以取负值，我们以适当的方式扩展 Skorokhod 空间。本节所述的扩展已见于文献，例如[51]。为保持表述的一致性，我们仍在此作一介绍。

令 $\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$ 表示从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^d$ 值 càdlàg 函数构成的空间，并用 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d)$ 表示半直线 $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ 上所有此类 càdlàg 函数的限制。现在，我们在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$ 上赋予一种从通常的空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d)$ 引出的 J_1-Skorokhod 拓扑。为此，令 Λ 为所有严格递增连续函数 $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 构成的空间，这些函数满足当 $t\searrow-\infty$ 时 $\lambda_t\searrow-\infty$，且当 $t\nearrow\infty$ 时 $\lambda_t\nearrow\infty$。于是有如下结果。

引理 4.1. 我们可以在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$ 上定义一种可度量化拓扑，称为 J_1-Skorokhod 拓扑。在此拓扑下，$\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$ 是一个波兰空间，并且该拓扑具有如下刻画：一列由 càdlàg 函数组成的序列 $\{x_n\}\subseteq\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$ 在此拓扑下收敛到 $x\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$，当且仅当存在$\{\lambda_n\}\subseteq\Lambda$ 使得当 $n\to\infty$ 时 $\|I-\lambda_n\|_{\mathbb{R}}\to 0$，且对任意 $M>0$，当 $n\to\infty$ 时 $\|x-x_n\circ\lambda_n\|_M\to 0$。此外，若 x 连续，则 $x_n\to x$ 在 J_1-Skorokhod 拓扑下收敛，当且仅当 $x_n\to x$ 在几乎一致拓扑下收敛。

证明。 证明见 [35, 定理 1.14] 。请注意，我们用 I 表示 $\mathbb{R}^d$上的恒等映射，并用$\|\cdot\|_M$表示所有限制在 $[-M,M]$上的函数的上确界范数。另请参见 [15]，其中讨论了几乎一致拓扑。

□

关于连续过程的更多讨论，请参见 [20, 21] 。为了更直观地描述 $\mathcal{D}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d)$ 上的 J_1- Skorokhod 拓扑，我们需要一个与该拓扑相容的显式度量。

我们首先通过指定以下条件，在 $\mathbb{R}$ 上选取函数 $k_N(\cdot)$：当 $|t| \le N$ 时，$k_N(t) = 1$；当$N < t \le N+1$时，$k_N(t) = N - t + 1$；当 $-(N+1) \le t < -N$ 时，$k_N(t) = N+t+1$；并且只要 $|t| > N+1$，$k_N(t)$ 就为零。我们还定义泛函 $\|\lambda\|_{\mathscr{D}} := \sup\{|\log(t-s)^{-1}(\lambda_t - \lambda_s)| : t > s\}$，其定义域为 Λ。现在，对所有属于 $\mathcal{D}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d)$ 的 x, y，我们定义

$$d(x,y) := \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N}(\delta_N(x,y) \wedge 1), \qquad \text{where} \quad \delta_N(x,y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \|(k_N x) \circ \lambda - k_N y\|_{\mathbb{R}} + \|\lambda\|_{\mathscr{D}} \right\}, \tag{4.1}$$

其中，对所有 $t \in \mathbb{R}$，我们自然记 $(k_N x)(t) = k_N(t)x(t)$。

引理4.2。在 (4.1) 中定义的泛函 $d(\cdot)$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d)$ 上的一个度量，并使其诱导 J_1-Skorokhod 拓扑。关于这个度量，空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d)$ 是完备且可分的，即为波兰空间。

证明。证明见 [35, 第 VI 章。] □

现在，对所有维数 $d \ge 1$，我们用 $\mathcal{D}_d$ 简记 $\mathcal{D}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d)$。特别地，我们用 $\mathscr{B}$ 表示 $\mathcal{D}_1$ 上的 Borel σ-代数，用 $\mathscr{B}^2$ 表示 $\mathcal{D}_2$ 上的 Borel σ-代数。令 $\mathcal{D}_0$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上的所有非减实函数构成的空间。显然，$\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_1$ 和 $\mathscr{B}_0 = \mathcal{D}_0 \cap \mathscr{B}$，其中 $\mathscr{B}_0$ 表示 $\mathcal{D}_0$ 上的 Borel σ-代数。我们还需要下面定义的变换 $\mathcal{K}$：

$$\mathcal{K} : \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1 \qquad \text{via} \quad \mathcal{K} : (x,y) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \mapsto x \circ y \in \mathcal{D}_1.$$

我们有以下命题。

引理 4.3. 变换 $\mathcal{K}$：$\mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ 关于 Borel σ-代数可测。同一变换 $\mathcal{K}$ 限制在定义域 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0) \times \mathcal{D}_1$上时连续，其中 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathbb{R}$上所有连续实函数构成的空间。

证明。我们首先证明 $\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1$上的 Borel可测性。由于 σ-代数 $\mathscr{B}_0$ 和 $\mathscr{B}$ 由有限维柱集生成，只需证明对于任意时刻 $t \in \mathbb{R}$，映射 $(x,y) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \mapsto x(y_t) \in \mathbb{R}$ 关于 $\mathscr{B}_0 \times \mathscr{B}$是 $\mathbb{R}$-Borel 可测的。也就是说，只需证明对于任意高度 $s \in \mathbb{R}$和时刻 $t \in \mathbb{R}$，事件 $\{(x,y) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 : x(y_t) \le s\} \in \mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}$。事实上，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $y \in \mathcal{D}_1$，记 $y_{k,t} := k^{-1}\min\{j \in \mathbb{Z} : ky_t \le j\}$。那么，当$k \to \infty$时，$y_{k,t} \to y_t$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 上逐点收敛。因此，映射 $(x,y) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \mapsto x(y_{k,t})$ 在 t 上逐点收敛到映射 $(x,y) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \mapsto x(y_t)$，其中 $k \to \infty$。于是，只需证明该映射序列关于 $\mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}$是 $\mathbb{R}$-Borel 可测的。也就是说，只需证明对每个 $k \in \mathbb{N}$和高度 $s \in \mathbb{R}$，事件 $\{(x,y) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 : x(y_{k,t}) \le s\} \in \mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}$。对每个 $j \in \mathbb{Z}$，记事件 $A_{k,j} := \{(x,y) : j-1 \le ky_t < j\} \cap \{(x,y) : x(y_t) \le s\}$。注意，对任意 Borel 集 $A \in \mathscr{B}$，有 $\{(x,y) : y_t \in A\} \in \mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}$；对任意高度 $s \in \mathbb{R}$，有 $\{(x,y) : x_t \le s\} \in \mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}$。因此，$A_{k,j} = \{(x,y) : j-1 \le ky_t < j\} \cap \{(x,y) : x_{j/k} \le s\} \in \mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}$。鉴于 $\{(x,y) : x(y_{k,t}) \le s\} = \cup_{j \in \mathbb{Z}} A_{k,j}$，根据 σ-代数的可数可加性，我们验证了该断言。现在证明 $\mathcal{K}$ 限制在 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0) \times \mathcal{D}_1$上时的连续性。取序列 $\{(x_n, y_n)\} \subseteq (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0) \times \mathcal{D}_1$，使得 $(x_n, y_n) \to (x,y) \in (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0) \times \mathcal{D}_1$ 在 J_1-Skorokhod 拓扑下收敛。于是可找到一个序列 $\{\lambda_n\} \subseteq \Lambda$，使得当 $n \to \infty$ 时 $\|Id - \lambda_n\|_{\mathbb{R}} \to 0$，且 $(x_n \circ \lambda_n, y_n \circ \lambda_n) \to (x,y)$ 当 $n \to \infty$时在 $\mathbb{R}^2$的紧集上一致。对于任意 $a, b \in \mathbb{R}$, $\|x_n \circ y_n \circ \lambda_n - x \circ y\|_{[a,b]} \le$
$\|x_n \circ y_n \circ \lambda_n - x \circ y_n \circ \lambda_n\|_{[a,b]} + \|x \circ y_n \circ \lambda_n - x \circ y\|_{[a,b]} \le \|x_n - x\|_{[a',b']} + \|x \circ y_n \circ \lambda_n - x \circ y\|_{[a,b]}$，其中$a' := \inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{a \le t \le b} |y_n \circ \lambda_n|(t)$，且 $b' := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a \le t \le b} |y_n \circ \lambda_n|(t)$。由于 $x_n \to x$ 和 $y_n \circ \lambda_n \to y$ 当$n \to \infty$ 时在紧集上一致，最左侧一项趋于零，因此连续性断言得证。

□

4.2 主要结果的证明。

我们将分别证明离散时间情形和连续时间情形下的标度极限。

离散时间模型的证明。我们首先证明离散时间随机 L´evy–Lorentz 气体 $(X_n)_{n \ge 0}$ 以及阶梯强化 L´evy–Lorentz 气体 $(X_n^{(p)})_{n \ge 0}$ 在 $0 \le p < 3/4$时的函数型中心极限定理。

事实上，首先注意到，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，c`adl`ag 过程 $(n^{-1/2}\omega_{n^{1/2}t})_{t\in\mathbb{R}}$ 与 $(n^{-1/2}S_{nt})_{t\in\mathbb{R}}$ 相互独立，其中我们在 $t < 0$时令 $S_{nt} \equiv 0$。由引理 3.4 可知，$n^{-1/2}\omega_{n^{1/2}t} \to \ell t$ 以$n \to \infty$，$\mathbb{P}$-几乎必然成立。另一方面，马尔可夫随机游走 $(S_n)_{n\geq 0}$ 的标准中心极限定理给出如下弱收敛 $(n^{-1/2}(S_{nt} - E[S_1]nt))_{t\in\mathbb{R}} \Rightarrow (E[S_1^2]^{1/2}B_t)_{t\in\mathbb{R}}$，当 $n \to \infty$ 时成立，且该收敛是在 J_1-Skorokhod 拓扑下的；其中 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动，并且当 $t < 0$ 时 $B_t \equiv 0$。因此，我们有如下弱收敛：$\{(n^{-1/2}\omega_{n^{1/2}t})_{t\in\mathbb{R}}, (n^{-1/2}(S_{nt} - E[S_1]nt))_{t\in\mathbb{R}}\} \Rightarrow \{(\ell t)_{t\in\mathbb{R}}, (E[S_1^2]^{1/2}B_t)_{t\in\mathbb{R}}\}$ 在$\mathcal{D}_2$ 中成立，该收敛是在 J_1-Skorokhod 拓扑下考察的。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，现在我们在 $t < 0$时令 $X_{nt} \equiv 0$。由于 $(\ell t)_{t\in\mathbb{R}}$ 具有连续且严格递增的轨迹，由引理 4.3 可得收敛 $(X_{nt})_{t\in\mathbb{R}} = \mathcal{K}\{(n^{-1/2}\omega_{n^{1/2}t})_{t\in\mathbb{R}}, (n^{-1/2}(S_{nt} - E[S_1]nt))_{t\in\mathbb{R}}\} \Rightarrow \mathcal{K}\{(\ell t)_{t\in\mathbb{R}}, (E[S_1^2]^{1/2}B_t)_{t\in\mathbb{R}}\} = (\ell E[S_1^2]^{1/2}B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{D}_1$中成立，该收敛是在 J_1-Skorokhod 拓扑下考察的。因此，定理 2.2 的第一个断言得证。对于阶梯强化 L´evy–Lorentz 气体 $(X_n^{(p)})_{n\geq 0}$，我们还利用引理 3.7 以及 [19, 定理 4.3] 关于强化粒子 $(S_n^{(p)})_{n\geq 0}$渐近正态性的结论，采用类似的论证。

□

连续时间模型的证明。 其次，我们证明连续时间随机 L´evy–Lorentz 气体 $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ 以及步进强化 L´evy–Lorentz 气体 $(\widetilde{X}_t^{(p)})_{t\geq 0}$ 在 $0 \leq p < 3/4$时的函数型中心极限定理。取 $m \in \mathbb{N}$和 $0 \leq s_1 < \ldots < s_m < \infty$。由定理 2.1 证明的第二部分。可知，对于所有 $k = 1, \ldots, m$，都有$\sim$ $X_{N_{s_k t}} - \ell E[S_1]N_{s_k t} \leq X_{s_k t} - \ell E[S_1]s_k t \leq X_{N_{s_k t}+1} - \ell E[S_1](N_{s_k t} + 1)$。注意，该不等式也可能反向成立。由已证明的离散时间模型 $(X_n)_{n\geq 0}$的弱收敛，可得有限维 $(N_{s_k t}^{-1/2}(X_{N_{s_k t}} - \ell E[S_1]N_{s_k t}))_{k=1,\ldots,m}$ 依分布收敛到所需的多元高斯分布，其中 $t \to \infty$。这里我们还应用引理 3.5，该引理指出，当 $t \to \infty$时，$t^{-1}N_{s_k t} \to s_k(E[|V_1|]\ell)^{-1}$ 几乎必然成立。连续时间步进强化气体的有限维边缘收敛证明完全类似，因此省略细节。 □

要从有限维边缘分布推进到 $\mathcal{D}_1$中的依分布收敛，只需验证相关过程的紧性 [13] 。事实上，Prokhorov 定理 [46]应能为我们提供一个具体的判据，以根据离散时间过程判断连续时间过程的紧性。我们不再详细阐述这一点，并将其留待未来的研究。

参考文献

[1] A. Akhmerov、C. Beenakker、C. Groth。具有L´evy间距分布的势垒链透射的非代数长度依赖性。*Phys. Rev. B,* 79, 024204, 2009.[2] M. Antoni、A. Torcini。反常扩散作为二维自引力系统中塌缩相的标志。*Phys. Rev. E,* 57 (6): 6233–6236, 1998.[3] R. Artuso、G. Cristadoro、M. Onofri、M. Radice。非齐次持续随机游走与L´evy–Lorentz气体。*J. Stat. Mech.*，理论与实验，083209, 2018.[4] A. Barbour、L. Holst、S. Janson。泊松逼近。《牛津概率研究》，牛津大学出版社，第*1*版，1992.[5] E. Barkai、V. Fleurov、J. Klafter。一维随机L´evy–Lorentz气体。*Phys. Rev. E,*61 (2): 1164–1169, 2000.[6] P. Barthelemy、J. Bertolotti、D. Wiersma。光的L´evy飞行。《自然》, 453: 495–498, 2008.[7] G. Ben Arous、J. ˇCern´y。陷阱模型在 $\mathbb{Z}^d$上的标度极限。概率年刊, 35 (6): 2356–2384, 2007.[8] H. Berbee。有界混合序列强大数定律中的收敛速率。《概率论及相关领域》，74: 255–270, 1987.[9] B. Bercu。大象随机游走的鞅方法。《物理学杂志*A*：数学与理论》， 51, 2018.[10] N. Berger、R. Rosenthal。离散点过程上的随机游走。《亨利·庞加莱研究所年刊》´，概率与统计， 51 (2): 727–755, 2015.

[11] A. Bianchi、G. Cristadoro、M. Lenci、M. Ligab`o。一维L´evy随机环境中的随机游走。《统计物理杂志》，163: 22–40, 2016.[12] A. Bianchi、M. Lenci、F. P`ene。实直线上L´evy间隔靶点之间的连续时间随机游走。《随机过程及其应用》，130: 708–732, 2020.[13] P. Billingsley。概率测度收敛。威利概率与统计丛书，第2版，1999.[14] J. Bouchaud。无序系统中的弱遍历性破缺与老化。《法国物理学杂志I》，2 (9): 1705–1713, 1992.[15] J. Brace。几乎一致收敛的拓扑。《太平洋数学杂志》，9 (3): 643–652, 1959.[16] S. Bravyi、M. Hastings。论量子伊辛模型的复杂性。《数学物理通讯》，349: 1–45, 2017.[17] J. Chen。时间相关随机场中高维定向聚合物的局域化机制。arXiv预印本，arXiv: 2412.14712, 2024.[18] J. Chen。强混合环境中随机游走大偏差速率函数的速度面无序。arXiv预印本，arXiv: 2409.06581v4, 2025.[19] J. Chen、L. Laulin。光滑失忆强化的多维大象随机游走分析。《统计物理杂志》，190, 158, 2023.[20] J. Chen、V. Margarint。含两个非碰撞Dyson布朗运动的多重Schramm–Loewner演化的扰动。《随机过程及其应用》，151: 553–570, 2022.[21] J. Chen、V. Margarint。绘制随机Loewner曲线的分裂算法与范数收敛。《英国皇家学会会刊A》，481 (2320): 20240929, 2025.[22] B. Coleman。具有记忆的材料的热力学。《理性力学与分析档案》，17 (1): 1–46, 1964.[23] A. Collevecchio、K. Hamza、M. Shi、R. Williams。一般自助随机游走的极限定理与遍历性。《电子概率杂志》，27: 1–22, 2022.[24] F. Comets、O. Zeitouni。随机混合环境中随机游走的大数定律。概率年刊，32 (1B): 880–914, 2004.[25] F. Comets、O. Zeitouni。随机混合环境中随机游走的高斯涨落。《以色列数学杂志》，148: 87–113, 2005.[26] P. J. Davis。莱昂哈德·欧拉的积分：伽马函数的历史概述。《美国数学月刊》，66 (10): 849–869, 1959.[27] R. Dobrushin、S. Shlosman。完全解析的吉布斯场。施普林格统计物理与动力系统，物理学进展，10: 371–403, 1985.[28] M. Duflo。随机迭代模型。施普林格应用数学，随机模型与应用概率，34, 1996.[29] R. Feynman。发现事物的乐趣：理查德·P·费曼最佳短篇作品集。Allen Lane, 2000.[30] H. Gu´erin、L. Laulin、K. Raschel。超扩散大象随机游走的不动点方程方法。Ann. Inst. Henri Poincar´e，概率与统计，待发表，2023.[31] E. Guerra Aguilar、A. F. Ram´ırez。混合随机环境中随机游走的渐近方向。《电子概率杂志》，22 (92): 1–41, 2017.[32] P. Hall、C. Heyde。鞅极限理论及其应用。纽约学术出版社，概率与数理统计，1980.[33] 维尔纳·海森堡。论铁磁性理论。《物理学杂志》，49 (9): 619–636, 1928.

[34] F. den Hollander，J. Steif。《随机风景中的随机游走：近期一些研究成果综述》。IMS 讲义·专著系列，《动力学与随机性》，48：53–65，2006。[35] J. Jacod，A. Shiryaev。《随机过程的极限定理》。施普林格《数学科学基础丛书》，第 2 版，288，2002。[36] A. Klenke。《概率论》。施普林格《Universitext》，第 3 版，2020。[37] S. P. Lalley。《无限群上的随机游走》。施普林格《研究生数学丛书》，297，2023。[38] L. Laulin。P´olya urn 过程的鞅方法。《电子概率通信》，25：1–13，2020。[39] J.-F. Le Gall。《布朗运动、鞅与随机微积分》。施普林格《研究生数学丛书》，274，2016。[40] M. Lenci。一维 L´evy 随机介质中的离散时间和连续时间随机游走。施普林格意大利国家高等数学研究所丛书，51，2022。[41] M. Magdziarz，W. Szczotka。L´evy–Lorentz 气体的扩散极限是布朗运动。《非线性科学与数值模拟通信》，60：100–106，2018。[42] F. Martinelli。《离散自旋模型的 Glauber 动力学讲义》。施普林格《概率论与统计讲义》，1717：93–191，2004。[43] R. Metzler，J. Klafter。随机游走者的反常扩散指南：一种分数阶动力学方法。《物理学报告》，339（1）：1–77，2000。[44] M. van den Nest，W. D¨ur，H. J. Briegel。经典二维伊辛模型与通用量子计算的完备性。《物理评论快报》，100，110501，2008。[45] C. Ortega-de San Luis，T. Ryan。理解记忆的物理基础：记忆痕迹的分子机制。《生物化学杂志》，298（5），101866，2022。[46] Y. Prokhorov。随机过程的收敛与概率论中的极限定理。《理论概率及其应用》，1（2）：157–214，1956。[47] F. Rassoul-Agha。关于混合随机环境中随机游走大数定律的粒子观点。《概率年刊》，31（3）：1441–1463，2003。[48] O. Rojas。修饰蜂窝晶格上自旋-1/2 Ising–Heisenberg 模型中量子自旋阻挫的出现。《物理评论 E》，106，014109，2022。[49] H. Scher，E. Montroll。非晶固体中的反常渡越时间弥散。《物理评论 B》，12（6）：2455–2477，1975。[50] A. Shiryaev。《概率》。施普林格《研究生数学丛书》，95，1996。[51] S. Stivanello，G. Bet，A. Bianchi，M. Lenci，E. Magnanini。一维 L´evy 随机介质中 L´evy 飞行的极限定理。《电子概率杂志》，26：1–25，2021。[52] A.-S. Sznitman，M. P. W. Zerner。随机环境中随机游走的大数定律。《概率年刊》，27（4）：1851–1869，1999。[53] H. Thorisson。《耦合、平稳性与再生》。《概率及其应用》，第 1 版，2000。[54] D. Tusi，L. Fallani 等。相互作用晶格费米子中的味选择性局域化。《自然·物理》，18：1201–1205，2022。[55] S. Yamashika，D. Kagamihara，R. Yoshii，S. Tsuchiya。光晶格中强关联玻色子的纠缠熵演化。《物理评论研究》，5，043102，2023。[56] Z. Yan，L. Pollet，J. Lou，X. Wang，Y. Chen，Z. Cai。具有量子耗散的相互作用晶格系统：量子蒙特卡罗研究。《物理评论 B》，97，035148，2018。

[57] M. Zamparo. L´evy–Lorentz 气体的大涨落与输运性质。亨利·庞加莱研究所年刊 ´概率与统计，59 (2): 621–661, 2023.[58] G. Zeltser, I. Sukhanov, A. Nevorotin. 记忆的分子模型。理论生物学杂志，549, 2022.[59] M. P. W. Zerner, F. Merkl. 随机环境中平面随机游走的零一律。概率年刊，29 (4): 1716–1732, 2001.