arXiv:2602.04286v1 [math.LO] 4 Feb 2026

几乎 o-极小结构的初等扩张

Mourad Berraho* Akito Tsuboi†

摘要

本文研究几乎 o-极小结构。这一概念由 Fujita 提出，是对 o-极小性的一种弱化，用以刻画经典 o-极小框架之外的结构。与 o-极小性和局部 o-极小性不同，几乎 o-极小性在初等等价下并不保持。这引出了一个自然的问题：每个几乎 o-极小结构是否都存在一个真初等扩张，且该扩张仍然几乎 o-极小？本文的主要结果对此给出了肯定的回答。

1 引言

o-极小性的概念揭示了逻辑与实代数几何之间的深刻联系。然而，诸如 $(\mathbb{R}, +, 0, \mathbb{Z})$ 这样的简单结构并不属于这一框架。为涵盖此类例子，人们引入了几种较弱的概念；这些概念在涵盖更广泛的结构类别的同时，保留了 o-极小性的一些理想性质。其中包括局部 o-极小性、可定义完备性（DC）和类型完备性（TC），它们已在 [3], [7], 和 [10]中得到广泛研究。结构 M 的可定义完备性（简称 DC）的定义等价于以下条件：每个有界可定义子集 $D \subset M$ 在 M中都有上确界和下确界。这意味着，只要一个可定义集没有“逃向无穷”，它的端点就已在该结构内部受到控制。特别地，任何有界凸可定义集都必须是一个

*b.mourad87@hotmail.com
†tsuboi@math.tsukuba.ac.jp

端点位于 M中的区间。这正是 o-极小结构所体现的那种驯性。因此，从某种意义上说，可定义完备性刻画了 o-极小性中与可定义集在有界区域内的行为有关的部分。简言之，DC 条件断言有界区域的表现类似于 o-极小结构。另一方面，Schoutens 引入了 DCTC 理论，将有序域的局部 o-极小扩张加以推广（见 [10]）。在这里，附加条件 TC（类型完备性）作用于“无穷远处”的点，确保可定义集最终呈现出类似 o-极小结构的行为。更确切地说，对于满足 TC 的模型中的任意可定义集 $X \subseteq M$，存在 $a, b \in M$，使得 $X \cap \{x < a\}$ 和 $X \cap \{x > b\}$ 要么为空，要么是开区间。Fujita 提出了另一种弱化 o-极小性的方式，引入了几乎 o-极小性的概念。有序对 $(\mathbb{R}, <)$ 的每个局部 o-极小扩张都是几乎 o-极小的，但这一性质在初等等价下并不保持（见 [2], 命题 4.14）。在 SAML 2024 京都会议上 [4], , Fujita 提出了以下问题:

- 每个几乎 o-极小结构都存在真初等扩张吗?

本文对这个问题给出了肯定的回答。证明结合了皮亚诺算术中 Gaifman 定理证明的思路，以及 ´Lo´s 定理的一个适当变体。我们的主要结果包含以下结论:

定理: 设 $M = (M, <, \ldots)$ 是一个几乎 o-极小结构。那么，存在一个仍然是几乎 o-极小结构的真初等扩张 $N \succ M$。

我们假定读者具备模型论的基础知识，包括紧致性定理和超积的构造。我们将介绍 o-极小性及相关概念的基本事实，以便不熟悉这些内容的读者也能理解我们的论证；不过，对这些主题有所了解或有助于理解背景。

2 预备知识

我们的记号大体上是标准的。非负整数集记作 ω，我们用 m, n, ...表示 ω 的元素。在固定的¯结构 M中，我们用 a, b, ...表示 M 的元素，用 $\bar{a}$, b, ... 表示有限元组

来自 M。稍微滥用一下记号，对于有限元组 $\bar{a} = (a_0, \ldots\ldots, a_{n-1})$，我们有时写作 $\bar{a} \in M$，表示对所有 $i < n$， $a_i \in M$。 M 的子集用大写字母表示，例如 A， B。我们用 $A \subset B$ 表示（不一定是真）包含。 A 的基数记作 $|A|$。对于两个结构 M 和 N，我们写作 $M \prec N$（或 $N \succ M$），表示 M 是 N 的初等子结构。此包含关系不一定是真包含。

公式用希腊字母表示，例如 φ， ψ；变量则用x， y，.....表示。当公式 φ 的自由变量包含于元组 $\bar{x}$中时，我们常写作 $\varphi(\bar{x})$。 M 的子集称为可定义的，如果它具有以下形式

$$\{\bar{a} \in M^n : M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\},$$

其中 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ 是某个公式， $b \in M$ 是某些参数。上述可定义集常写作 $\varphi(M^n, b)$。

设 $M = (M, <, \ldots\ldots)$ 是一个扩张稠密线性序 $(M, <)$ 的结构，且该序没有端点。

定义 1. 1. 若结构 M 的每个可定义子集（允许带参数） $D \subset M$ 都是有限个（开）区间和点的并，则称该结构为*o*-极小。

2. 若对于每个可定义集$D \subset M$ 和每个 $a \in M$，都存在一个区间 $I \ni a$，使得$D \cap I$ 是有限个点和区间的并，则称结构 M 为局部 *o*-极小。特别地，对于足够小的左侧区间 (a_0, a)，集合 $D \cap (a_0, a)$ 要么等于 (a_0, a)，要么等于 $\emptyset$；对足够小的右侧区间也同样成立。

3. 若每个有界可定义集 $B \subset M$ 在 M 中都有上确界 B 和下确界 B，则称结构 M 为 可定义完备。

注 2. 1. 显然，每个 o-极小结构都是局部 o-极小且可定义完备的。

2. o-极小这一性质是初等的；也就是说，若 $M \equiv N$ 和 M 是 o-极小的，则 N 也是 o- 极小的（见 [9]）。在证明中，一致有限性定理（事实 3 ）起着关键作用（见 [11]）。

3. 局部o-极小性和可定义完备性也是初等性质。这些事实相对容易验证。例如，对于局部o-极小性，可以直接根据定义中的“特别是”条款验证其初等性。

事实 3 (一致有限性**)**。 设 M 是一个 *o*-极小结构，且 $D \subset M^{n+1}$ 是满足以下性质的可定义集：

(*) For every $\bar{a} \in M^n$*, the fiber* $D_{\bar{a}} := \{ b \in M : (\bar{a}, b) \in D \}$ *is finite.*

T因此存在一致上界 $k \in \omega$，使得 $|D_{\bar{a}}| < k$ 对所有 $\bar{a} \in M^n$ 都成立。

事实 4 ([3], [8])。 设 M 是一个具有可定义完备性的局部 *o*-极小结构，且 $f : M \to M$ 是一个可定义函数。那么存在一个可定义离散集 $D \subset M$，具有以下性质：对于 $D \cup \{-\infty, \infty\}$ 中任意一对相邻元素 $a < b$，限制函数 $f|_{(a,b)}$ 连续，且为常值或严格单调。

以下定义源自 Fujita。

定义 5 ([4]**)**。 若结构 $M = (M, <, \dots)$ 中， M 的所有有界可定义子集都可以写成有限个点和区间的有限并，则称该结构为几乎 o-极小结构。

例 6。 设 $M = (\mathbb{Q}, <, \mathbb{Z})$，其中 $\mathbb{Z}$ 被解释为一元谓词。在这种情况下， M 显然是一个几乎 o- 极小结构。现在，令 N 为通过取 M 的两个副本而得到的初等扩张；更确切地说，令 N 的论域为 $\{0, 1\} \times \mathbb{Q}$，并赋予其字典序，且令 $\mathbb{Z}^N = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}$。虽然 $M \equiv N$，结构 N 不再是几乎 o-极小结构。这是因为 (0,0) 与 (1,0) 之间的有界区间包含无限多个 $\mathbb{Z}$-元素，违反了几乎 o-极小性的要求。

例 7. 令 M 为结构 $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, <, U)$，其中 $U = \{\pm 1/n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$ 由一个一元谓词给出。则 M 是 DCTC 的一个模型，但它并非几乎 o-极小。

证明。 理论 $Th(M)$在将语言扩张为 $\{<, U, -1, 1, D_n(x, y) (n \in \omega)\}$后具有量词消去，其中 $D_n(x, y)$表示区间 (x, y)中至少有 n 个 U-点。这可以通过标准的往返论证证明。在这个扩张语言中的量词消去意味着 M 满足 DCTC，而 U 的离散性表明 M 并非几乎 o-极小。

注 8. 根据定义可知，几乎 o-极小结构M 既是局部 o-极小的，也是可定义完备的。特别地，若 $N \equiv M$，则 N 是局部 o-极小且可定义完备的。

我们主要结果的证明包含两个关键要素：集合论中的有界超幂概念，以及皮亚诺算术的 Gaifman 定理。o-极小性领域的研究者对这两种工具都不太熟悉，因此我们简要回顾相关基本事实。在模型论中，超幂是一种强大的构造，它能从给定结构 M 得到一个新结构。具体做法是取 M 的无限直积，并将模某个非主超滤子等价的元素视为同一元素。然而，这种构造并不能按照 Fujita 的意义保持几乎 o-极小性。这一现象类似于对结构 $(V_\omega, \in)$（遗传有限集）的非主超幂不是良基的这一事实（见 [1]）。为了解决 o-极小类结构中的这一问题，我们引入了有界超幂的概念，这与集合论和非标准分析中的类似构造相呼应。

一般而言，有界超幂并不保留所有公式的真值，而只保留含有有界量词的公式的真值。然而，我们的目标是构造一个几乎 o-极小结构的真初等扩张。为克服这一障碍，我们将 Gaifman 关于皮亚诺算术模型的论证调整到我们的情形。广义而言，Gaifman 分裂定理指出，任意一个模型 M 的初等扩张 N 都可以分解为一个初等共终扩张 $M' \succ M$，随后接一个初等末端扩张 $N \succ M'$（见 [5] 和 [6]）。由于我们的有界超幂是原模型的一个共终扩张，这表明 Gaifman 的论证或许可以调整到我们的情形——事实也确实如此。

3 有界超幂

设 L 是一个包含小于符号 $<$ 的语言，$M = (M, <, \ldots)$ 是一个 L-结构，其中 $<$ 是一个无端点的稠密线性序。设 U 是指标集 I 上的一个非主超滤子。我们用 $M^{(I)}$ 表示从 I 到 M 的所有有界函数构成的集合。这里，如果存在元素 $a, b \in M$，使得对所有 $i \in I$，$a < f(i) < b$ 都成立，则称 f 有界。在集合 $M^{(I)}$ 上，我们定义等价关系 $\sim$ 如下：

$$f \sim g \iff \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U.$$

令 $[f]$ 表示 f 的等价类，并令 $M^{(I)}/U$ 表示所有等价类的集合。通过定义下列内容，我们将 $M^{(I)}/U$ 视为一个 L-结构：

L 中符号的解释:

$$M^{(I)} \models R([f], ...) \iff \{i \in I : M \models R(f(i), ...)\} \in U,$$

其中 R 是一个谓词符号。函数符号也按自然方式加以解释。 $M^{(I)}/U$将称为 M模 U的有界超幂。为简便起见，我们将 $M^{(I)}/U$记为 M^*。

定义 9. 形如 $\forall x \in D$ 或 $\exists x \in D$ 的量词称为有界量词，其中 D 是 M中的有界区间。设 φ 是一个 L-公式。若 φ中出现的每个量词都是有界的，则 φ 称为 Δ_0-公式（或有界公式）。 Π_n-类与 Σ_n-类公式按通常方式定义。特别地，形如 $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \theta(x, y, z)$的公式是 Π_3-公式，只要 θ 是有界的。

下述引理是 Ł´os引理的类似结果，可通过对有界量词个数作归纳而轻易确立。此处我们仅给出证明梗概。更多细节，读者可参阅例如Davis的书 [1]。回顾 M^*表示 $M_{(I)}/U$。

引理10。 对于所有 Δ_0-公式 $\varphi(\bar{x})$、 $\bar{x} = x_1, ..., x_m$和 $f = f_1, ..., f_m \in M^{(I)}$，

$$M^* \models \varphi([\bar{f}]) \iff \{i \in I : M \models \varphi(f_1(i), ..., f_m(i))\} \in U,$$

其中 $[f] = [f_1], ..., [f_m]$和 $f(i) = f_1(i), ..., f_m(i)$。

证明。 我们对 φ 中出现的有界量词个数进行归纳来证明该引理。基本情形显然成立，因为它直接由 M^* 的定义得出。关键的归纳步骤是 φ 具有如下形式时

$$\exists y \in (x_1, x_2)\big(\theta(y, \bar{x})\big),$$

其中 $y \in (x_1, x_2)$ 表示 y 属于开区间 (x_1, x_2)。假设 $M^* \models \exists y \in ([f_1], [f_2])\big(\theta(y, [\bar{f}])$ 成立。那么，存在 $h \in M^{(I)}$ 使得 $M^* \models [h] \in ([f_1], [f_2]) \wedge \theta([h], [f])$ 成立。因此，根据归纳假设，我们有

$$\{i \in I : M \models h(i) \in (f_1(i), f_2(i)) \wedge \theta(h(i), \bar{f}(i))\} \in U.$$

因此， $\{i \in I: M \models \exists y \in (f_1(i), f_2(i))\big(\theta(y, \bar{f}(i))\big)\}$也属于 U。对于另一个方向，假设 $\{i \in I: M \models \exists y \in (f_1(i), f_2(i))\big(\theta(y, \bar{f}(i))\big)\} \in U$。

那么，对每个 i，选取 $h(i) \in M$，使得 $\{i : h(i) \in (f_1(i)\ f_2(i)) \wedge \theta(y, f(i))\} \in U$。由于 f_1和 f_2有界， $h: I \to M$是一个有界函数。根据归纳假设，$M^* \models [h] \in ([f_1], [f_2]) \wedge \theta([h], [f])$成立。因此，我们得到 $M^* \models \exists y \in ([f_1], [f_2])(\theta(y, [\bar{f}]))$，正如所需。 □

对于 $a \in M$，a 可以看作 $M^{(I)}$ 中的常值函数，其值恒为 a。通过识别 a和 $[a]$，很容易看出 M 在 M^*中既共初又共终。根据引理10中的上述等价关系，我们还得到 $M \prec_{\Delta_0} M^*$，即 M^*是 M的一个 Δ_0-初等扩张。现在我们考虑以下条件，它对应于较弱形式的替换模式。带有来自 M 的参数的公式称为$L(M)$-公式。对于元组 $\bar{y} = (y_0, \ldots\ldots, y_{n-1})$，量化 $\forall \bar{y} \in (a, b)$ 是以下表达式的简写：

$$\forall y_0 \in (a, b)\ \ldots\ \forall y_{n-1} \in (a, b).$$

(†) 对于所有 $L(M)$-公式 $\varphi(x, \bar{y})$ 以及 $a, b \in M$，如果 $M \models \forall \bar{y} \in (a, b)\, \exists x (\varphi(x, \bar{y}))$，那么存在 $d, e \in M$，使得 $M \models \forall \bar{y} \in (a, b)\, \exists x \in (d, e)\ (\varphi(x, \bar{y}))$。

下面的定理是皮亚诺算术中 Gaifman 分裂定理的一个类比（例如，参见 [6]）。我们的版本是在连续情形下表述的。

定理11. 假设 M 满足条件 (†)。那么， $M \prec M^*$，且 M 在 M^*中共终且共初。

证明。 我们通过对公式复杂度作归纳来证明以下断言：

断言 A. 对于所有 $L(M)$公式 $\varphi(\bar{y})$，以及所有 $\bar{f} = f_1, \ldots, f_m \in M^{(I)}$，

$$M^* \models \varphi([\bar{f}]) \iff \{i \in I : M \models \varphi(\bar{f}(i))\} \in U.$$

关键的一步仍然是 $\varphi(\bar{y})$ 具有 $\exists x(\theta(x, \bar{y}))$ 形式的情形。根据 M^* 的定义，我们有如下等价关系：

$$M^* \models \exists x(\theta(x, [\bar{f}])) \iff M^* \models \theta([g], [\bar{f}]) \text{ for some } g \in M^{(I)}.$$

根据归纳假设，对于所有 $h \in M^{(I)}$，

$$M^* \models \theta([h], [\bar{f}]) \iff \{i \in I : M \models \theta(h(i), \bar{f}(i))\} \in U \qquad (*)$$

由于 $M \models \theta(h(i),\ f(i))$ 蕴含 $M \models \exists x(\theta(x, f(i)))$，因此我们有

$$M^* \models \exists x(\theta(x, [\bar{f}])) \Longrightarrow \{i \in I : M \models \exists x(\theta(x, \bar{f}(i)))\} \in U.$$

现在证明上述命题的逆命题。因此，假设 $A := \{i \in I : M \models \exists x(\theta(x,\ f(i)))\} \in U$。由于 f是有界函数，存在 $a,\ b \in M$，使得对所有 $i \in I,\ a < f(i) < b$ 成立。注意，语句$\forall \bar{y} \in (a,\ b)\exists x(\exists z(\theta(z,\ \bar{y})) \rightarrow \theta(x,\ \bar{y}))$在 M中为真。因此，根据条件（†），存在 $d,\ e \in M$，使得

$$M \models \forall \bar{y} \in (a, b)\, \exists x \in (d, e)\big(\exists z(\theta(z, \bar{y})) \rightarrow \theta(x, \bar{y})\big).$$

对于 $i \in A$，由于 $\exists z\theta(z,\ f(i))$为真，我们有

$$M \models \exists x \in (d, e)\big(\theta(x, \bar{f}(i))\big).$$

因此，我们可以选取一个函数 $h \in M^{(I)}$，使得对所有 $i \in A,\ M \models \theta(h(i),\ \bar{f}(i))$ 成立。由此以及归纳假设（*），可得 $M^* \models \theta([h],\ [f])$，进而得到 $M^* \models \exists x(\theta(x,\ [f]))$。因此，逆命题也得到了证明。 □

4 一些推广

与上一节一样，$M = (M,\ <,\ .....)$ 和 U 是 I 上的非主超滤子。我们引入以下两个集合：

- $M_{(I)^+}$ 表示所有满足 f 有上界的函数 $f\colon I \rightarrow M$ 的集合；
- $M_{(I)^-}$ 表示所有满足 f 有下界的函数 $f\colon I \rightarrow M$ 的集合。

与有界超幂的情形类似，我们也可以引入新的结构 $M_{(I)}{}^+/U = \{[f]\colon f \in M_{(I)}{}^+\}$ 和 $M^{(I)^-}/U = \{[f]\colon f \in M_{(I)}{}^-\}$。它们将分别称为上有界超幂和下有界超幂。最后，我们定义两个条件：

(†)$^+$ 对于所有 $L(M)$-公式 $\varphi(x, \bar{y})$ 和 $a \in M$，若 $M \models \forall \bar{y} < a\exists x(\varphi(x, y))$，则存在 $d \in M$ 使得 $M \models \forall \bar{y} < a\exists x < d(\varphi(x, y))$。

$(\dagger)^-$ 对于所有 $L(M)$-公式 $\varphi(x,\bar{y})$ 和 $a\in M$，若 $M\models\forall\bar{y}>a\exists x(\varphi(x,y))$，则存在 $d\in M$ 使得 $M\models\forall\bar{y}>a\exists x>d(\varphi(x,y))$。

命题 12。 *1.* 如果 M满足条件 $(\dagger)^+$，那么 $M\prec M_{(I)}{}^+/U$。

2. 如果 M满足条件 $(\dagger)^-$，那么 $M\prec M_{(I)}{}^-/U$。

证明。 我们只需稍作修改，即可改编定理11的证明。例如，在第1项的证明中，我们使用形式为$\forall x\in(-\infty,\ a)$和 $\exists x\in(-\infty,\ a)$的量词，而不使用有界量词。作此修改后，论证过程与引理10和定理11的证明平行。

□

5 几乎 o-极小结构

如果 M是几乎 o-极小的，那么理论 $Th(M)$ 具有可定义完备性，且局部 o-极小。

注13。 设 M 是几乎 o-极小的。对于 M中的元素 $a<b$，令 $L^*=L\cup\{P_D\}_D$，其中每个 P_D 都是谓词符号，而 D 遍历$(a,\ b)^m$ 的M-可定义子集，且满足 $m\in\omega$。区间$(a,\ b)$通过自然解释视为一个 L^*-结构，即 ${P_D}^{(a,b)}=D$。那么，L^*-结构$(a,\ b)$是 o-极小的，并且$(a,\ b)$中的所有可定义集都可在 M中定义。

以下是一些辅助定义，将用于证明本节的主要结果。

定义14. 如果结构 M 的所有有上界（或分别有下界）的可定义子集都能表示为有限个点和区间的并，则称其为“向下 o-极小”（“向上 o-极小”）。

显然，如果 M 是向下（或向上）o-极小的，那么 M 是几乎 o-极小的；特别地，所有模型 $N\equiv M$ 都是局部 o-极小且可定义完备的。采用与注13中类似的论证，如果M 是向下 o-极小的，那么配备了可定义集增广谓词的结构 $(-\infty,a)$ 是 o-极小的。向上 o-极小的情形也有相同结论。

注15. 假设结构 M 几乎 o-极小，但并非 o-极小。那么以下情况必有其一。

1. M 向下 o-极小，但不是向上 o-极小；2. M 向上 o-极小，但不是向下 o-极小；3. M 既非向下 o-极小，也非向上 o-极小。

证明。 假设 3 不成立。因此， M 是向下 o-极小或向上 o-极小。由对称性，不妨假设 M 是向下 o-极小的。若 M 也是向上 o-极小的，那么 M 就满足 o-极小性的定义，这与关于 M 的初始假设矛盾。因此，在这种情况下，条目 1 成立。 □

定理 16。 设 M 是一个非 *o*-极小的几乎 *o*-极小结构。

1. 假设 M 是向下 *o*-极小的。设 N 是 M 的一个共终初等扩张。那么，N 是向下 *o*-极小的。*2.* 假设 M 是向上 *o*-极小的。设 N 是 M 的一个共初初等扩张。那么， N 是向上 *o*-极小的。*3.* 假设 M 既非向下 *o*-极小，也非向上 *o*-极小。设 N 是 M 的一个共终且共初的初等扩张。那么， N 是几乎 *o*-极小的（且既非向下 *o*-极小，也非向上 *o*-极小）。

证明。由于其他情形的证明类似，我们证明 1。为导出矛盾，假设 N 不是向下 o-极小的，并令 $D \subset N$为其见证。由于 N 是局部 o-极小的，将 D 替换为其边界 ∂D后，我们可以假设 D 是一个无穷可定义离散集，且有上界。（在定理 17 的证明中也会用到这种化简。）由于 M 在 N中共终，我们可以选取 $a \in M$ 使得 $D < a$。因此，存在一个非代数公式 $\varphi(x, d)$，其中 $d \in N$ 满足 (i) $N \models \forall x(\varphi(x, d) \to x < a)$，且 (ii) $\varphi(x, d)$ 在 N中定义一个离散集。这里，必要时将 $d < a$ 替换为 M 中的一个更大元素，我们可以假设 $d < a$ 在 N中成立。利用 φ，我们可以轻易得到另一个公式 $\psi(x, a, \bar{y})$，它对所有 $\bar{y}$都定义一个离散集；此外，还存在满足 $d_n < a$ 的元组 $d_n \in N$，对 $n \in \omega$成立，使得

(*) 对所有 $n \in \omega$， $\psi(N, a, \bar{d}_n)$ 都是区间 $(-\infty, a)^N$ 中基数至少为 n 的离散子集。

由 $M \prec N$，利用 (∗)，我们得到 $\bar{e}_n \in M$，其中 $\bar{e}_n < a$ $(n \in \omega)$ 满足：每个 $\psi(M, a, \bar{e}_n)$ 都是 $(-\infty, a)^M$ 中基数为 $\geq n$ 的离散（因此有限）子集。这与 $(-\infty, a)^M$ 的 o-极小性矛盾（见注13）。（这里我们用到了 o-极小结构具有一致有限性这一事实。见事实3。）□

定理 17。 设 M 为几乎 *o*-极小。则存在一个真初等扩张 $M^* \succ M$，且其仍为几乎 *o*-极小。

证明。 如果 M 是 o-极小的，那么这样的扩张 M^* 显然存在，因为 o-极小性在初等扩张下保持不变。因此，我们可以假设 M不是 o-极小的，并且注15中的情形 1–3 之一成立。情形 1 和情形 2 可以类似处理，因此我们假设情形 1 成立；也就是说， M 是向下 o-极小的，但不是向上 o-极小的。由于 M 不是向上 o-极小的，存在一个不是有上界的可定义离散集 $D \subset M$。

断言 A。 $(\dagger)^+$ 在 M中成立。

令 $a \in M$ 为任意元素。首先，我们通过对 n进行归纳证明以下陈述：

$(*)_n$令 F: $((-\infty, a)^M)^n \to D$为一个可定义函数。则，ran(F) 有上界。

对于基础情形，令 $F : (-\infty, a)^M \to D$ 为可定义的。令 $X \subset (-\infty, a)^M$ 为 F 的不连续点集。由事实4， X 是 M 中的可定义离散集。由于 X 在带有增广谓词的 o-极小结构 $(-\infty, a)^M$ 中也是可定义的（见注13），因此 X 是有限集。由于 D 是离散的，在 F 连续的每个区间上，函数 F 必为常值。因此，ran(F) 是有限集，且有上界。现在考虑情形 F: $((-\infty, a)^M)^{n+1} \to D$。对于每个 n-元组 $\bar{b} \in ((-\infty, a)^M)^n$，定义

$$F_{\bar{b}}(y) = F(\bar{b}, y).$$

由于 $F_{\bar{b}}$ 将 $(-\infty, a)^M$ 映入 D，因此基础情形适用。定义

$$G(\bar{b}) = \max\big(\mathrm{ran}(F_{\bar{b}})\big).$$

于是， $G : ((-\infty, a)^M)^n \to D$ 是一个可定义函数。由归纳假设，ran(G) 有上界。因此，ran(F) 也有上界。故对于所有 n，$(*)_n$ 均成立。

为导出矛盾，我们假设 $(\dagger)^+$ 不成立。于是，存在一个公式 $\varphi(x, \bar{y})$ 和 $a \in M$，满足以下性质：

1. $M \models \forall \bar{y} < a \exists x(\varphi(x, \bar{y}))$;

2. 对所有 $d \in M$, $M \models \exists \bar{y} < a \forall x < d(\neg\varphi(x, \bar{y}))$。

令 $n = |\bar{y}|$。对每个 $b < a$，定义

$$F(\bar{b}) = \min\{\, w \in D : M \models \exists x < w\,(\varphi(x, \bar{b}))\,\}.$$

这样的最小元素 $w \in D$ 存在，因为 M 是向下 o-极小的，而 D 是离散的。根据性质 2，ran(F) 必须无界。然而，这与上面的 $(*)_n$ 矛盾。（断言 A 的证明结束）。

对于情形 3，我们假设 M 仅仅是几乎 o-极小的；也就是说，M 是几乎 o-极小的，但既非向下 o-极小，也非向上 o-极小。因此，存在一个离散可定义集 $D \subset M$，使得 D 在上下两侧都无界。我们在这种情形下作如下断言。

断言 B. $(\dagger)$ 在 M 中成立。

令 $a < b \in M$ 为任意元素。我们证明以下陈述。

$(**)_n$ 设 $F\colon (a, b)^n \to D$ 是一个可定义函数。那么，ran(F) 是有界集。

($n = 1$): $F : (a, b) \to D$。由于 M 是局部 o-极小且可定义完备的，F 的不连续点集是 (a, b) 的离散子集。由几乎 o-极小性可知，该集合实际上是有限的。在 F连续的每个区间上，D 的离散性意味着 F 在该区间上必定是常值。因此，ran(F) 是有限的，故为有界集。

($n + 1$): 设 $F\colon (a, b)^{n+1} \to D$。对每个 $\bar{c} \in (a, b)^n$，定义函数

$$F_{\bar{c}} : (a, b) \to D, \quad F_{\bar{c}}(x) := F(\bar{c}, x).$$

由基例可知，ran($F_{\bar{c}}$) 是有限的。因此，我们可以定义可定义函数$G_0, G_1 : (a, b)^n \to D$，定义为

$$G_0(\bar{c}) := \min(\mathrm{ran}(F_{\bar{c}})), \qquad G_1(\bar{c}) := \max(\mathrm{ran}(F_{\bar{c}})).$$

每个 G_i 都是可定义的，并且根据归纳假设，ran(G_i)（对于 $i = 0,\ 1$）是有界的。因此，ran(F) 也是有界的。$(**)_n$ 已得到证明。

现在我们证明 (†)。令 $\varphi(x,\ \bar{y})$ 为一个公式，且 $|\bar{y}| = n$ 满足

$$M \models \forall \bar{y} \in (a,b)^n\ \exists x\ \varphi(x, \bar{y}).$$

我们定义一个可定义函数 $F : (a,b)^n \to D$ 如下：

$$F(\bar{y}) = \begin{cases} \min\{w \in D : \exists x \in (b,w)\varphi(x,\bar{y})\} & \text{if } \exists x \in (b,\infty)\varphi(x,\bar{y}), \\ \max\{w \in D : \exists x \in (w,b]\varphi(x,\bar{y})\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 $(**)_n$，ran(F) 是一个有界集。取 $c, d \in M$，使得 $c <$ ran(F) $< d$。于是，我们有 $M \models \forall \bar{y} \in (a,b)^n \exists x \in (c,d)\varphi(x,\bar{y})$。因此，(†) 在 M 中成立。（断言 B 的证明结束）。

为简便起见，我们假设情形 1 和断言 A 成立。令 $a \in M$，并令 λ 为区间 $(-\infty, a)^M$ 的共尾性。令 U 为 λ 上的一个超滤子，它包含所有形如 $\lambda \setminus i$ 的集合，其中 $i < \lambda$。取一个递增序列 $\{a_i : i < \lambda\}$，它收敛于 a。定义 $a^* = [(a_i)_{i<\lambda}] \in M^{(\lambda)}/U$。于是 a^* 是一个与 a 无限接近的新元素。因此，由命题 12 (1)，$M^* = M^{(\lambda)^+}/U$ 是 M 的一个真初等扩张。此外，由定理 16(1)，M^* 仍然是几乎 o-极小的。

□

参考文献

[1] M. Davis，《应用非标准分析》，纯粹与应用数学丛书，Wiley–Interscience，纽约，1977。

[2] M. Fujita，几乎 *o*-极小结构与 *X*-结构，《纯粹与应用逻辑年刊》*173*（*2022*），第*9*期，论文编号 *103144*。

[3] M.Fujita、T. Kawakami 和 W. Komine，可定义完备局部 *o*-极小结构的驯性与可定义的有界乘法，《数学逻辑季刊》，68（4）（2022），496–515。

[4] M. Fujita，特邀报告，SAML 2024（京都）。

[5] H. Gaifman，“关于算术模型与子模型的注记。”载于 W. Hodges（编），《数理逻辑会议，伦敦 ’70》，《数学讲义》，第255卷，施普林格出版社，柏林，第128–144页，1972年。

[6]R. Kaye，皮亚诺算术模型，牛津逻辑指南，第15卷，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，牛津，1991年。[7]T. Kawakami、K. Takeuchi、H. Tanaka 与 A. Tsuboi，“局部o-极小结构”，日本数学会杂志 64 (3)，783–797，2012年7月。[8] W. Komine 与 A. Tsuboi，局部o-极小性与素模型，即将发表于 NDJFL。[9] J. F. Knight、A. Pillay 与 C. Steinhorn，有序结构中的可定义集。II，美国数学会汇刊，295(2):593–605，1986年。[10] H. Schoutens，*o*-极小主义，《符号逻辑杂志》**79** (2) (2014年)，355–374。[11] L. van den Dries，驯服拓扑与*o*-极小结构，伦敦数学会讲义丛书，第248卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。