arXiv:2602.04310v1 [math.OC] 4 Feb 2026

A Path-Complete Approach for Optimal Control of Switched Systems

L´ea Ninite*, Adrien Banse*, Guillaume O. Berger*, Rapha¨el M. Jungers**ICTEAM, UCLouvain，比利时

摘要

我们研究离散时间切换系统在*arbitrary* 切换下估计 *value function* 的问题。与切换 LQR 问题不同，后者同时优化输入和模式序列，而我们考虑切换由外部决定的情况。对于这类系统，可能的模式序列数量会随时间呈指数增长，因此无法精确计算值函数。为此，我们致力于开发可处理的界来近似值函数。我们提出一种基于 *path-complete* 图的新框架，用于构造值函数的可计算上界。在此框架中，多个二次函数通过有向图组合，该图编码了动态规划不等式，从而得到凸且可靠的形式。例如，对于具有二次代价的切换线性系统，我们推导出可处理的基于线性矩阵不等式的形式，并给出计算复杂度界。我们进一步为这些上界建立近似保证，并利用图论中的概念证明其渐近非保守性。最后，我们将此方法扩展到具有仿射控制输入的系统的控制器综合，并通过数值示例展示其有效性。

1 引言

离散时间切换线性系统是多模态离散时间系统，其中每个模式 i 对应如下形式的线性转移系统

$$x_{k+1} = A_i x_k + B_i u_k.$$

这类系统广泛存在于各种应用中，例如机械系统 [6] 、电力系统 [26] 和信息物理系统 [11] ，也可以作为更复杂的非线性或混合系统 [18, 16, 28]的抽象。在这项工作中，我们关注这类系统在任意切换下的后续代价分析与优化。这意味着，给定一个将状态—输入对映射到代价值的代价函数 $c(x,\ u)$以及一个初始点 x_0，我们的目标是评估或优化系统从x_0出发的最坏情况总成本，即从 x_0出发的所有轨迹（也就是所有模式序列）中最大的总成本。这个问题对于安全关键或能源关键应用十分重要，因为它能够提供安全性或性能保证，即使是在对抗条件下也是如此，例如 [18, 28, 7] 中的稳定性。

对于非切换线性系统，在众所周知的 LQR 设定中，代价为

$$c(x,u) = x^\top Q x + u^\top R u, \quad Q \succeq 0,\ R \succ 0.$$

在这种情况下，最优代价到达函数（下文称为值函数 在受控情形下）具有闭式二次表达式，该表达式可通过黎卡提方程 [21]的解高效计算。类似地，若系统没有输入，相应的后续代价（下文称为值

*L´ea Ninite 是一名 Fonds de la Recherche Scientifique – FNRS 研究员。电子邮箱： lea.ninite@uclouvain.be

函数 在自治情形下）也可通过求解线性贝尔曼方程 [5]高效计算。然而，对于切换系统，情况则有所不同。当切换任意时，可能的序列数目随时间呈指数增长，这使得值函数的计算在受控情形和自治情形下都难以处理，即便对于给定的初始状态 x_0也是如此。特别地，值函数一般不存在闭式表达式，它通常不是二次型，并且可能是非光滑的 [30]。这促使人们发展值函数的易处理的近似，例如可证明的上界和下界。

在本文中，我们提出一种路径完备方法，用于构造任意切换下切换线性系统值函数的易处理界。路径完备框架最早在 [1] 中引入，用于切换线性系统的稳定性分析。该框架将使用单个李雅普诺夫函数推广到多个李雅普诺夫函数，并以组合方式将这些函数结合起来，从而得到更紧的稳定性证书。在本文中，我们采用相同的组合结构，获得任意切换系统值函数的上界。具体而言，通过在有向图上编码动态规划条件来计算多个函数：每个节点 α 都与一个函数 V_α （待确定）相关联；每条边 $\alpha \to \beta$ 都标记有一个系统模态 i，并表示关于这些函数的一个动态规划不等式 $V_\alpha \geq c + V_\beta \circ A_i$。该方法的一个关键优势在于，在某些情况下（例如，考虑函数 V_α 的二次模板时），它提供了一种可靠且易处理的方式（例如，通过半定规划）来求得任意切换下切换线性系统值函数的上界，从而扩展了现有的基于李雅普诺夫的方法。

本文主要关注任意切换下自治 切换线性系统的值函数界。我们指出，自治情形不仅与闭环系统的安全性或性能分析有关，也与安全、高效的控制器综合有关（例如，通过近似策略改进 [23]或 A* [14] 等知情搜索算法）。此外，我们还考虑受控 情形，并说明路径完备框架可用于直接综合一个控制器，使其最小化相关闭环系统值函数的上界。

概要 具体而言，我们的贡献如下。在介绍问题（第2节）并证明任意切换下自治切换非线性系统值函数的一般动态规划界（第3节）之后，我们提出了首个用于求取此类系统值函数上界的路径完备框架（第4节）。随后，我们将该框架应用于具有二次代价的切换线性系统（第5节），推导出易于求解的线性矩阵不等式表述以及计算复杂度界。我们还给出了近似保证，用以量化所计算的值函数上界的紧致程度，并证明当使用所谓德布鲁因 图的对偶 [9] （见下文定义4），且其阶数趋于无穷时，所提出的方法渐近地不存在保守性。接着，我们将路径完备方法应用于任意切换下具有仿射控制输入的切换线性系统的控制 ，为控制器设计提供易于求解的线性矩阵不等式表述以及值函数上界（第6节）。最后，我们通过数值示例展示了所提方法的实用性和效率（第7节）。

相关工作 切换 *LQR* 问题旨在通过选择仿射控制输入和 模式序列，最小化切换线性系统的总二次代价，已在文献中受到广泛关注。例如， [25, 13, 31, 3, 15] 提出了在输入与模式控制下近似最优未来代价的高效技术， [29] 则在系统满足额外假设的情况下提出了一种多项式时间精确计算方法。这些技术无法应用于我们的问题，因为它们将模式视为控制变量，而在我们的设定中，切换是任意的。尽管如此，上文提及的工作 [25]与我们的方法存在若干有趣的联系。在该工作中，作者考虑满足如下形式不等式 $V_i \leq c + V_j \circ A_{ij}$ 的多个二次函数（其中 i、j为模式），以获得切换 LQR 框架下最优值函数的下 界；而我们考虑如下形式的不等式 $V_\alpha \geq c + V_\beta \circ A_i$（其中 α、β为节点， i为一种模式），以推导值函数的上 界。

尽管表面上相似，但我们的方法与其存在几个关键差异。首先，二次函数 V_i 附属于系统的模式，而不是像我们的方法那样附属于抽象 节点。因此，给出这些不等式的图是固定的，不能作为算法参数用于平衡效率与保守性。相比之下，我们的方法考虑任意路径完备图（特别是，节点不一定对应于系统模式），从而可以增大图的“规模”以获得更紧的界。具体而言，我们证明，当考虑一种特殊类型的图（对偶德布鲁因图）且其规模趋于无穷时，我们的方法渐近地无保守性；而 [25]中没有类似结果。其次，尽管 [25] 也通过对其下界进行缩放来得到近似保证，但其方法比我们的方法更为保守。[1]

非确定性系统背景下的最优控制问题也受到了关注；例如，在非确定性动态规划中， [12], 鲁棒马尔可夫决策过程 [27, 24] 或双人博弈 [22]。然而，据我们所知，现有文献中尚无关于任意切换下切换线性系统值函数的研究。

记号 给定 $M \in \mathbb{N}$，记 $\langle M\rangle := \{1,\dots,M\}$。对称正定（半正定）矩阵的集合记为 $n\times n\,\mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}(\mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0})$。定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负值函数集合（即满足 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的函数）记为 $\mathcal{F}^n_{\geq 0}$。

2 问题陈述

2.1 切换系统与值函数

我们考虑如下形式的离散时间自治切换系统

$$x_{k+1} = f_{\sigma(k)}(x_k), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

其中， $x_k\in\mathbb{R}^n$ 是时刻 k 的状态， $\sigma(k)\in\langle M\rangle$ 是时刻 k 的模式，且对于所有 $i\in\langle M\rangle$, f_i，都有: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$。函数 $\sigma:\mathbb{N}\to\langle M\rangle$ 称为切换信号。

给定 $x\in\mathbb{R}^n$ 和切换信号 σ： $\mathbb{N}\to\langle M\rangle$，我们用 $\xi(\cdot,x,\sigma)$表示带有切换信号 σ的(1)的解，即对所有 $k\in\mathbb{N}$，$\xi(k,x,\sigma) = x_k$，其中 $x_0 = x$，且 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 满足(1)。

We 同时也考虑一个代价函数 c： $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，将状态映射为非负成本值 .

在本文中，切换信号被视为外部不受控 信号，这意味着对系统(1)的分析是在最坏情况框架下进行的。特别地，我们考虑如下定义的最坏情况剩余代价:

定义1（后续代价与值函数） 考虑切换系统(1) 和代价函数c： $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$。对于每个切换信号 σ: $\mathbb{N}\to\langle M\rangle$，后续代价 是由下式定义的映射 J_σ： $\mathbb{R}^n\to[0,+\infty]$

$$J_\sigma(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c(\xi(k,x,\sigma)),$$

约定若级数发散，则 $J_\sigma(x) = +\infty$ 。
值函数 J： $\mathbb{R}^n\to[0,+\infty]$ 刻画了所有切换信号下的最坏情况代价，其定义为

$$J(x) := \sup_{\sigma:\mathbb{N}\to\langle M\rangle} J_\sigma(x).$$

[1]在 [25], 中，作者采用由这些二次函数的任意凸组合构成的最小值的凸过近似，而我们则利用了不那么保守的 *S-procedure*，来自 [8]（详情见第 5.3 节）。

切换线性系统的值函数即使在采用二次代价函数的情况下，也可能难以精确计算。[2] 因此，本文旨在推导值函数的可处理界。为此，我们采用路径完备框架（见下文第 2.2 节），该框架能够以二次函数的组合（取最小值或最大值）这一可处理的方式计算上界。

2.2 路径完备图

路径完备李雅普诺夫框架在 [1], 中提出，将经典二次型李雅普诺夫技术推广到离散时间切换线性系统的稳定性分析中。其核心概念是路径完备图，该图编码了系统不同模式下二次函数之间的李雅普诺夫不等式，并具有这样一种性质：系统的任意模式序列都可以通过图中的一条路径得到。下面我们简要回顾所需的定义。

我们考虑一个有向标记图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$，其中 $\mathcal{S}$ 是节点的有限集，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \langle M \rangle$ 是由 $\langle M \rangle$ 中的元素标记的边集。每条边 $(\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}$ 表示切换系统在模式 i 下从节点 α 转移到节点 β 的一种可能转移。

定义 2（路径完备图） 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ 为一个有向标记图。若对于任意 $l \in \mathbb{N}_{>0}$ 以及任意序列 $\sigma = (i_1, \ldots, i_l) \in \langle M \rangle^l$，都存在一条路径 $\{(\alpha_k, \alpha_{k+1}, i_k)\}_{k=1}^{l}$，使得对于每个 $k \in \{1, \ldots, l+1\}$，$\alpha_k \in \mathcal{S}$，且对于每个 $k \in \{1, \ldots, l\}$，$(\alpha_k, \alpha_{k+1}, i_k) \in \mathcal{E}$，则称 $\mathcal{G}$ 是路径完备的（对于 $\langle M \rangle$）。

路径完备图的一个示例见图 1a。图 1b 中的图不是路径完备的（例如，它无法生成序列 22）。

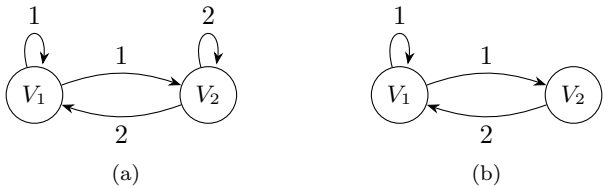

图 1：(a) 具有两个节点的路径完备图，适用于具有两种切换模式的系统。(b) 非路径完备的图。

给定一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$，其对偶图 $\mathcal{G}^{\mathsf{T}} = (\mathcal{S}, \mathcal{E}^{\mathsf{T}})$ 通过对每条边的方向取反得到，即 $(\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (\beta, \alpha, i) \in \mathcal{E}^{\mathsf{T}}$。一个图是路径完备的，当且仅当其对偶图是路径完备的。

下面，我们定义两类特殊的路径完备图：

定义 3（完全图与余完全图） 有向标记图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ 是完全（对于 $\langle M \rangle$）的，如果对于每个节点 $\alpha \in \mathcal{S}$ 和每个标记 $i \in \langle M \rangle$，都存在至少一个节点 $\beta \in \mathcal{S}$，使得 $(\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}$。反之，$\mathcal{G}$ 是余完全的，如果对于每个节点 $\beta \in \mathcal{S}$ 和每个标记 $i \in \langle M \rangle$，都存在至少一个节点 $\alpha \in \mathcal{S}$，使得 $(\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}$。

图 1a 中的图是余完全的。

[2] 论文 [30] 表明，在采用二次代价函数的受控切换下，切换线性系统的 *finite-horizon* 值函数是分段二次函数，其分段数可能随时域呈指数增长。因此，无限时域值函数通常既不是二次型函数，也不光滑，难以近似。类似的论证也可应用于处于 *arbitrary* 切换下的系统，但由于篇幅限制，此处省略证明。

3 动态规划不等式与值函数的界

¯在随机最优控制中，也就是说，当目标是最小化形式为 $x_{k+1} = f(x_k, v_k)$ 的随机系统的轨迹的期望总成本 J，其中 $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是独立同分布噪声序列时，便有¯ ¯著名的贝尔曼方程 [5]: $J(x) = c(x) + \mathbb{E}_v J(f(x, v))$。对于非确定性和非随机系统[3],，也可以推导出类似的方程（例如，参见 [12, 27]）。为方便起见，我们在此回顾该方程（尽管我们只关注命题 2 和命题 3 中的不等式形式）：

命题1 代价为 $c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的系统 (1) 的值函数 J 满足以下动态规划方程:

$$J(x) = c(x) + \max_{i \in \langle M \rangle} J(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

实际上，当在有限的模板（例如二次函数）中寻找值函数时，可能无法找到一个函数 J 使其精确满足式 (2)。因此，我们考虑对该动态规划方程进行松弛，并将其表示为动态规划不等式。根据不等式方向的不同，这些松弛可为精确值函数提供上界或下界。[4]以下两个命题对此作了形式化说明。

命题 2（上界） 考虑系统 (1) 及代价函数 $c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。令 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足以下动态规划不等式:

$$V(x) \geq c(x) + \max_{i \in \langle M \rangle} V(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

那么，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \geq J(x)$，其中 J 是代价为 c的系统 (1) 的值函数。

证明。令 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{N} \to \langle M \rangle$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，记 $x_k = \xi(k, x, \sigma)$。注意，由 (3) 可知，对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $V(x_k) \geq c(x_k) + V(x_{k+1})$ 均成立。因此，对于所有 $H \in \mathbb{N}_{>0}$,

$$V(x) \geq V(x) - V(x_H) = \sum_{k=0}^{H-1} V(x_k) - V(x_{k+1}) \geq \sum_{k=0}^{H-1} c(x_k).$$

当 $H \to \infty$ 时取极限，可得 $V(x) \geq J_\sigma(x)$。然后，对 σ 取上确界，得到 $V(x) \geq J(x)$，证明至此完成。□

命题 3（下界） 考虑系统 (1) 和代价函数 $c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。令 $W\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足以下动态规划不等式:

$$W(x) \leq c(x) + \max_{i \in \langle M \rangle} W(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

假设 W 在0处连续，$W(0) = 0$，且系统的所有轨迹都收敛到0 （即系统渐近稳定）。那么，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$, $W(x) \leq J(x)$，其中 J 是系统(1)在代价 c 下的值函数。

[3]系统 (1) 是非确定性的，因为切换序列是任意的；它也是非随机性的，因为没有与之关联的概率分布。[4]我们注意到，贝尔曼不等式也被用于随机最优控制，以获得期望总代价的界 $\bar{J}$；例如，参见 [20, 25, 19]。

证明。令 $x \in \mathbb{R}^n$。递归定义 $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ 和 $(i_k)_{k=0}^{\infty}$，使其满足 $x_0 = x$，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$, $i_k \in$, arg max $_{i\in\langle M\rangle} W\ f_i\ x_k$ $x_{k+1} = f_{i_k}\ x_k$ 4 $k \in \mathbb{N}$ $W\ x_k$ $\leq$(( )) 和 ( )。注意，由 ( ) 可知，对 $c\ x_k$ $+W\ x_{k+1}$ $H \in \mathbb{N}_{>0}$ 所有，( ) ( ) ( )。因此，对所有，

$$W(x) - W(x_H) = \sum_{k=0}^{H-1} W(x_k) - W(x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{H-1} c(x_k).$$

当 $H \to \infty$ 时取极限（并利用 $x_H \to 0$），我们得到 $W(x) \leq J_\sigma(x)$，其中 σ： $\mathbb{N} \to \langle M\rangle$ 由 $\sigma(k) = i_k$ 定义。这意味着 $W(x) \leq J(x)$，从而完成证明。□

本文着重计算值函数的上界。我们采用命题 2 的动态规划不等式，并结合路径完备框架，以获得易处理的近似，这些近似表示为二次函数等简单函数的组合。利用命题 3，我们进一步建立近似保证，表明上界的某个缩放版本可作为下界。

4 值函数的路径完备上界

路径完备框架在于将给定函数模板中的若干函数（例如二次函数）加以组合，以计算一个满足命题 2 中动态规划不等式的函数，从而给出值函数的上界。

更精确地说，我们考虑一个路径完备图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$（对于 $\langle M\rangle$）以及一个函数模板$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}^n_{\geq 0}$。该图的每个节点 α 都与一个函数 $V_\alpha \in \mathcal{T}$相关联。对于系统 (1) 和代价函数 c： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，该图编码了受 (3) 启发的如下不等式：

$$V_\alpha(x) \geq c(x) + V_\beta(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}. \tag{5}$$

例 1 作为说明，考虑图 *1a* 所示的路径完备图。与其边相关联的不等式为：

- 转移 $V_1 \to V_1$： $V_1(x) \geq c(x) + V_1(f_1(x))$， $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
- 转移 $V_2 \to V_2$： $V_2(x) \geq c(x) + V_2(f_2(x))$， $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
- 转移 $V_1 \to V_2$： $V_1(x) \geq c(x) + V_2(f_1(x))$， $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
- 转移 $V_2 \to V_1$: $V_2(x) \geq c(x) + V_1(f_2(x))$， $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$。 ◁

给定一组满足 (5) 的函数 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$，我们旨在通过适当组合这些函数 V_α，构造真实值函数 J 的一个上界 V，即构造一个函数 V，使得对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $V(x) \geq J(x)$。具体构造取决于底层图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$的结构：

- 如果 $\mathcal{G}$ 是完全 的，对函数 V_α 逐点取最小值即可得到一个有效的上界。
- 如果 $\mathcal{G}$ 是余完全 的，对函数 V_α 逐点取最大值即可得到一个有效的上界。

以下定理对这些陈述进行了形式化，其依据是从路径完备李雅普诺夫函数中提取公共李雅普诺夫函数的先前研究 [1, 推论 3.4 和 3.5]。

定理 1 考虑系统 (1)、代价函数 c： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$、有向标记图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ 以及模板 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}^n_{\geq 0}$。假设 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$满足 (5)。定义 V： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为

$$V(x) := \min_{\alpha\in\mathcal{S}} V_\alpha(x), \quad \textit{if } \mathcal{G} \textit{ is complete for } \langle M\rangle, \tag{6a}$$

$$V(x) := \max_{\alpha\in\mathcal{S}} V_\alpha(x), \quad \textit{if } \mathcal{G} \textit{ is co-complete for } \langle M\rangle. \tag{6b}$$

那么，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \geq J(x)$，其中 J 是系统(1) 在代价 c下的值函数。

证明。 对于完全情形和余完全情形，我们将证明

$$V(x) \geq c(x) + \max_{i \in \langle M \rangle} V(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

根据命题 2，可得对所有 $x \in \mathbb{R}^n$， $V(x) \geq J(x)$。

情形 1： $\mathcal{G}$ **是完全的**。我们先考虑完全图的情形，即 $V(x) = \min_{\alpha \in \mathcal{S}} V_\alpha(x)$。定义集合

$$E \coloneqq \{(\alpha, i) \in \mathcal{S} \times \langle M \rangle :\ \exists\, \beta \in \mathcal{S} \text{ such that } (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}\}.$$

由 (5) 可推出

$$V_\alpha(x) \geq c(x) + \min_{\beta \in \mathcal{S}} V_\beta(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (\alpha, i) \in E.$$

根据 V 的定义，

$$V_\alpha(x) \geq c(x) + V(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (\alpha, i) \in E. \tag{8}$$

由于该图是完全图，根据定义 3 可得 $E = \mathcal{S} \times \langle M \rangle$。因此，(8) 可改写为
as

$$V_\alpha(x) \geq c(x) + V(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathcal{S},\ \forall\, i \in \langle M \rangle.$$

对 α 取最小值并对 i 取最大值，可得 (7)。

情形 2： $\mathcal{G}$ **是余完全的**。现在考虑余完全情形，即 $V(x) = \max_{\alpha \in \mathcal{S}} V_\alpha(x)$。推理过程与完全情形类似。定义集合

$$E \coloneqq \{(\beta, i) \in \mathcal{S} \times \langle M \rangle : \exists\, \alpha \in \mathcal{S} \text{ such that } (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}\}.$$

由 (5) 可推出

$$\max_{\alpha \in \mathcal{S}} V_\alpha(x) \geq c(x) + V_\beta(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (\beta, i) \in E.$$

根据 V 的定义，

$$V(x) \geq c(x) + V_\beta(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (\beta, i) \in E. \tag{9}$$

由于该图是余完全图，由定义 3 可知 $E = \mathcal{S} \times \langle M \rangle$。因此，(9) 可改写为

$$V(x) \geq c(x) + V_\beta(f_i(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \beta \in \mathcal{S},\ \forall\, i \in \langle M \rangle.$$

先对 β 取最大值，再对 i 取最大值，得到 (7)，证明至此完成。 □

注 1 注意，与 *[2]*，中的做法相同，可以将定理 *1* 推广到任意路径完备图，此时上界的形式为

$$V(x) = \min_{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{S}} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_i} V_\alpha(x),$$

其中， $\mathcal{A}_1$、.....、 $\mathcal{A}_k$ 是观测器图完全子图的节点（见 *[2,* 定理 *1]*）。为求简洁明了，此处省略该结果。◁

5 自主切换线性系统的结果

本节将上一节提出的框架应用于具有二次代价的切换线性系统。我们将说明，该框架通过对路径完备不等式（5）进行线性矩阵不等式表述，可以求得易于处理的值函数上界。我们还将说明，当图为所谓的对偶德布鲁因图（见下文定义4），且其阶数趋于无穷时，该框架渐近地无保守性（即能够得到收敛至真实值函数的上界）。最后，我们通过对先前计算出的上界进行适当缩放，推导出近似保证。缩放后的函数保证是一个有效下界，而缩放因子通过求解一组线性矩阵不等式获得。

具体而言，我们考虑如下形式的离散时间自主切换线性 系统

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)} x_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

其中，对每个 $i \in \langle M \rangle$， $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$。因此，(10) 是 (1) 中系统的一个特例，其中每个映射 f_i 都是线性映射 $x \mapsto A_i x$。我们还假设代价是二次型的，即 $c(x) = x^\top Q x$，其中某个 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}$。最后，我们考虑二次函数模板，即 $\mathcal{T}_{\text{quad}} = \{x^\top P x : P \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0}\}$。

5.1 路径完备线性矩阵不等式与计算复杂度

在假设对每个 $\alpha \in \mathcal{S}$， $V_\alpha \in \mathcal{T}_{\text{quad}}$ 的条件下，我们将其参数化为

$$V_\alpha(x) = x^\top P_\alpha x, \quad P_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0}, \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{S}.$$

在此参数化下，路径完备不等式 (5) 可等价地写成以下一组线性矩阵不等式：

$$P_\alpha \succeq Q + A_i^\top P_\beta A_i, \quad \forall\, (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}. \tag{11}$$

备注 2 请注意，任何满足 (11) 的矩阵集合 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0}$ 都能为真实值函数 J提供一个上界；对于每个 x，在图为完全图或余完备图的情况下，分别取 $\{x^\top P_\alpha x\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ 的最小值或最大值即可得到该上界（参见定理 *1*）。然而，这并不能保证该界是紧的。因此，选择一个能够惩罚上界较大取值的目标函数至关重要。例如：

- 若要最小化给定 x_0 处的上界，可以使用以下目标函数：

$$\begin{aligned} &\min_{\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}} \min_{\alpha\in\mathcal{S}} x_0^\top P_\alpha x_0 && \text{if } \mathcal{G} \text{ is complete,} \\ &\min_{\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}} \max_{\alpha\in\mathcal{S}} x_0^\top P_\alpha x_0 && \text{if } \mathcal{G} \text{ is co-complete.} \end{aligned} \tag{12}$$

  这保证了上界在 x_0 处达到最小值（在所有由满足 (11) 的矩阵导出的上界中）。[5]

- 相反，如果希望上界在“全局范围内”较小，即对于大量 x 的取值都较小，可以使用以下目标函数：

$$\min_{\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}} \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \ell(P_\alpha), \tag{13}$$

  其中 ℓ（P）是任意一个对 P、[6] 的“大”值进行惩罚的函数，从而使整个状态空间上的上界取较小值。

[5]注意，式（12）中的第一个目标函数关于 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ 并非凸函数。不过，通过考虑 $|\mathcal{S}|$ 个子问题即可轻松将其凸化（每个 $\alpha \in \mathcal{S}$ 对应一个以 $x_0^\top P_\alpha x_0$ 为目标函数的子问题；具体示例请参见附录A）。[6]例如， ℓ（P）$=\log(\det(P))$、 ℓ（P）$=\text{trace}(P)$ 或 ℓ（P）$=\|P\|^2$，均可表示为半定规划。

注意，还可以考虑其他目标函数，例如，如果希望最小化上界的期望值（针对某个给定的状态分布）。其他目标函数的研究留待后续工作。◁

作为一个示例 ，我们将路径完备方法应用于一个简单的切换线性系统 .

例 2 考虑系统(10)，其中

$$A_1 = \frac{1}{1.75}\begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{1.75}\begin{bmatrix} -0.3 & 1 \\ 0 & -1.3 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

在 (13) 中取目标函数为 $\ell =$迹，使用 $Q = I$，并考虑余完备图（如图 *1a* 所示）上的线性矩阵不等式 (11) ，可得以下解：

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.32 & 0.14 \\ 0.14 & 1.14 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1.14 & -0.14 \\ -0.14 & 3.32 \end{bmatrix}.$$

上界 $V(x) =$最大值$_{\alpha\in\{1,2\}}\, x^\top P_\alpha x$ 与真实值函数的对比如图 *2* 所示（真实值函数仅供参考，通过将无限时域求和截断于时域 H 处进行近似，使得 H 之后的累积代价可以忽略）。◁

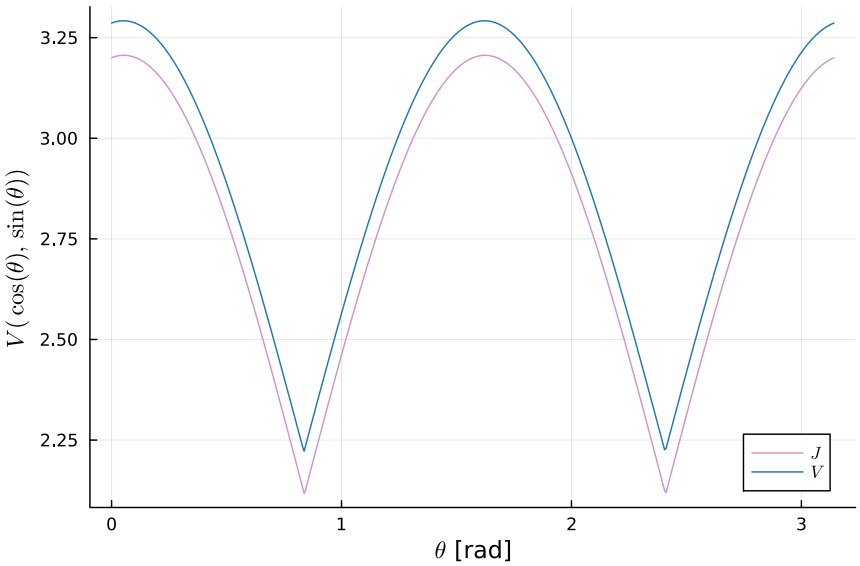

图 2：切换线性系统的值函数上界 $V(x) = \max_{\alpha\in\{1,2\}} x^\top P_\alpha x$，其中系统的矩阵如式 **(14)** 所示。沿单位圆 $x =$(cos(*θ*)，sin(*θ*)) 绘制，适用于 $\theta \in [0, \pi]$。该上界使用路径完备框架和图 1a 中的余完备图计算；同时给出真实值函数 J 以作比较。

线性矩阵不等式表述 **(11)** 提供了一种高效方法，可计算具有二次代价的切换线性系统值函数的上界。事实上，使用内点算法，可以在关于 n、$|\mathcal{S}|$ 和 $|\mathcal{E}|$ 的多项式时间内求解这些线性矩阵不等式：

命题 4（复杂度）考虑目标函数 (13)，其中 $\ell =$ 迹。那么，由线性矩阵不等式 (11) 定义的相应半定规划可在

$$\mathcal{O}\left((1+|\mathcal{E}|n)^{\frac{1}{2}}\, n^5 |\mathcal{S}|\left(n|\mathcal{S}|^2 + n|\mathcal{S}||\mathcal{E}| + |\mathcal{E}|\right)\right)$$

基本算术运算。

证明。由于目标函数是线性的，该结果可直接由 [4, 第 6.6 节的复杂度分析得出。3], 该分析适用于一个包含 $|\mathcal{E}|$ 线性矩阵不等式、涉及大小为 $n\times n$ 的矩阵以及 $n^2|\mathcal{S}|$ 决策变量的问题。 □

除了计算效率之外，所计算上界的准确性（或紧密程度）也是一个核心问题。接下来的两个小节将探讨这一问题。

5.2 对偶德布鲁因图上的收敛

德布鲁因图构成一个完全图的层次化族，最初由 [9] 引入。其定义回顾如下：

定义4（德布鲁因） $l \in \mathbb{N}$阶（原始）德布鲁因图定义在 $\langle M\rangle$ 上，记作 $\mathcal{H}_l(M) = (\mathcal{S}_l, \mathcal{E}_l)$，其定义如下：
$\mathcal{S}_l = \langle M\rangle^l$，且$(\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}_l$ 当且仅当 $\alpha = (j_1, \ldots, j_l)$ 和 $\beta = (i, j_1, \ldots, j_{l-1})$ 对某个$(j_1, \ldots, j_l) \in \langle M\rangle^l$成立。

德布鲁因图 $\mathcal{H}_l(M)$ 是完全的，其对偶图记作 $\mathcal{H}_l^\top(M)$，是余完全的。下面我们为对偶德布鲁因图建立一个收敛结果：

定理 2 考虑系统(10) 以及二次代价函数 $c(x) = x^\top Qx$，其中 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}$。假设系统(10) 是渐近稳定的。对每个 $l \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{H}_l^\top(M) = (\mathcal{S}_l, \mathcal{E}_l)$ 为 $\langle M\rangle$ 上阶数为 l 的对偶德布鲁因图（见定义*4*）。则存在二次函数的集合序列 $\{\{V_\alpha^l\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$，使得对每个 l，$\{V_\alpha^l\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l} \subseteq \mathcal{T}_{\text{quad}}$ 在 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_l$下满足(5)，并且

$$\lim_{l\to\infty} V^l(x) = J(x), \quad V^l(x) \coloneqq \max_{\alpha\in\mathcal{S}_l} V_\alpha^l(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 J 是系统(10) 在代价 c下的值函数。

注记 3 定理 *2*保证存在二次函数的集合序列 $\{\{V_\alpha^l\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$，其中每个集合在 $\mathcal{H}_l^\top(M)$上满足不等式(5)，使得相应的函数序列 $V^l(x) = \max_{\alpha\in\mathcal{S}_l} V_\alpha^l(x)$ 收敛到真实值函数 $J(x)$。虽然这保证了在极限意义下存在非保守的可行解，但通过求解实际优化问题得到的解可能是保守的，因为它依赖于所选取的目标函数；见注记 *2*。 ◁

定理 2 的证明使用以下引理，该引理是系统渐近稳定的推论：

引理 1 *[28,* 命题 *2.13]* 考虑系统(10)，并假设该系统渐近稳定。那么，存在 $0 \le \rho < 1$和 $C \ge 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma\colon \mathbb{N} \to \langle M\rangle$ 以及 $k \in \mathbb{N}$, $\|\xi(k, x, \sigma)\| \le C\rho^k\|x\|$。

定理 *2* 的证明。对于每个 $l \in \mathbb{N}$，定义

$$\eta_l \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \max_{\sigma:\mathbb{N}\to\langle M\rangle} \frac{\xi(l+1, x, \sigma)^\top Q\xi(l+1, x, \sigma)}{x^\top Qx}.$$

根据引理 1，对于所有 $l \in \mathbb{N}$, $\eta_l \le \lambda_{\max}(Q)\, \lambda_{\min}(Q) C^2\rho^{2l+2}$，结论成立。这意味着存在 $L \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $l \ge L$, $\eta_l < 1$。我们将证明：

命题 *1*：对于所有 $l \ge L$，存在满足 (5) 的 $\{V_\alpha^l\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l} \subseteq \mathcal{T}_{\text{quad}}$，其中 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_l$，且对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$，$V^l(x) \le \frac{1}{1-\eta_l} J(x)$，其中 $V^l(x) \coloneqq \max_{\alpha\in\mathcal{S}_l} V_\alpha^l(x)$。

命题 *1* 的证明：固定 $l \ge L$。对于每个 $\alpha = (i_0, \ldots, i_{l-1}) \in \mathcal{S}_l$，定义 $\widetilde{V}_\alpha^l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 如下

$$\widetilde{V}_\alpha^l(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{l} \xi(k, x, \sigma_\alpha)^\top Q\xi(k, x, \sigma_\alpha), \tag{15}$$

其中 $\sigma_\alpha\colon \mathbb{N}\to\langle M\rangle$ 满足对所有 $k\in\{0,\dots,l-1\}$，$\sigma_\alpha(k)=i_k$。显然，对于每个 $\alpha\in\mathcal{S}_l$，$\widetilde{V}^l_\alpha\in\mathcal{T}_{\mathrm{quad}}$。此外，注意到对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\alpha\in\mathcal{S}_l$，$\widetilde{V}^l_\alpha(x)\le J(x)$。因此，

$$\max_{\alpha\in\mathcal{S}_l}\widetilde{V}^l_\alpha(x)\le J(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{16}$$

现在，对于每个 $\alpha\in\mathcal{S}_l$，定义 $V^l_\alpha:=\frac{1}{1-\eta_l}\widetilde{V}^l_\alpha$。由 (16) 可得

$$V^l(x):=\max_{\alpha\in\mathcal{S}_l}V^l_\alpha(x)\le\frac{1}{1-\eta_l}J(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

要完成命题 1 的证明，还需证明 $\{V^l_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}$ 满足带有 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_l$ 的 (5)。因此，考虑任意一条边 $(\alpha,\ \beta,\ i_0)\in\mathcal{E}_l$。由于我们考虑的是对偶德布鲁因图，对于某个 $(i_1,\ \dots,\ i_l)\in\langle M\rangle^l$，有 $\alpha=(i_0,\ i_1,\ \dots,\ i_{l-1})$ 和 $\beta=(i_1,\ \dots,\ i_l)$。由 (15) 可知

$$\widetilde{V}^l_\alpha(x)=\widetilde{V}^l_\beta(A_{i_0}x)+x^\top Qx-\xi(l+1,x,\bar\sigma)^\top Q\xi(l+1,x,\bar\sigma),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\bar\sigma\colon\ \mathbb{N}\to\langle M\rangle$ 满足 $\bar\sigma(k)=i_k$，对于 $k\in\{0,\dots,l\}$。因此，根据 η_l 的定义可得

$$\widetilde{V}^l_\alpha(x)\ge\widetilde{V}^l_\beta(A_{i_0}x)+(1-\eta_l)x^\top Qx,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

利用 $V^l_\alpha:=\frac{1}{1-\eta_l}\widetilde{V}^l_\alpha$ 和 $V^l_\beta:=\frac{1}{1-\eta_l}\widetilde{V}^l_\beta$，我们得到

$$V^l_\alpha(x)\ge V^l_\beta(A_{i_0}x)+x^\top Qx,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,$$

这就是 (5)。由于边 (α,β,i_0) 是任意的，因此命题的证明到此结束。 ⌟

我们利用命题 1 完成定理的证明。对于每个 $l\ge L$，令 $\{V^l_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}$ 和 V^l 如命题 1 所述。该命题指出，对于每个 $l\ge L$，$\{V^l_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}$ 满足 (5)，其中 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_l$ 和 $(1-\eta_l)V^l(x)\le J(x)\le V^l(x)$（第二个不等式由定理 1 得出，因为 $V^l(x)=\max_{\alpha\in\mathcal{S}_l}V^l_\alpha(x)$，且 $\mathcal{H}_l^\top(M)$ 是余完全的）。由于 $\lim_{l\to\infty}\eta_l=0$，可得 $\lim_{l\to\infty}V^l(x)=J(x)$，定理的证明至此结束。□

5.3 上界的相对精度

本小节提出一种算法框架，用于评估由定理 1 推导出的上界对于具有二次代价和二次模板的切换线性系统的相对紧致性。具体而言，给定形式为 (6a) 或 (6b) 且满足 $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\mathrm{quad}}$ 的上界 V，我们提供一种易于计算的方法来求出因子 $\mu\ge1$，使得

$$\frac{1}{\mu}V(x)\le J(x)\le V(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

为此，我们确定满足 $W:=\frac{1}{\mu}V$ 的最小 μ，使其满足动态规划不等式 (4)。这意味着 W 构成真实值函数 J 的下界。具体而言，对于切换系统 (1) 和代价 c，给定先前计算出的上界 $V\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\ge0}$，问题可归结为求出满足以下条件的最小 $\mu\ge1$

$$V(x)\le\mu\,c(x)+\max_{i\in\langle M\rangle}V(f_i(x)),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{17}$$

对于 V 的两种形式，即 (6a) 和 (6b)，下面说明当系统为切换线性系统、代价为二次型且模板为二次型时，如何利用半定规划高效地完成这一过程。

5.3.1 最大值情形

首先假设 V 具有 (6b) 的形式，且由二次函数构成，即 $V(x) = \max_{\alpha\in\mathcal{S}} V_\alpha(x)$，其中 $\mathcal{S}$ 是有限集，且对每个 $\alpha \in \mathcal{S}$，$V_\alpha(x) = x^\top P_\alpha x$ with$P_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0}$。考虑切换线性系统 (10) 和二次代价 $c(x) = x^\top Q x$ with $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}$。要在这种情况下求解 (17)，我们首先需要将其改写成便于处理的形式。为此，我们借鉴了$\mathcal{S}$-过程 [8]。[7] 具体而言，对于每个 $(\gamma, \alpha, i, \beta, j) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle$，我们引入一个乘子 $t_{\gamma,\alpha,i,\beta,j} \geq 0$。接着考虑以下条件

$$V_\gamma(x) \leq \mu c(x) + V_\alpha(f_i(x)) + \sum_{(\beta,j)\in\mathcal{S}\times\langle M\rangle} t_{\gamma,\alpha,i,\beta,j}\{V_\beta(f_j(x)) - V_\alpha(f_i(x))\},$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\,(\gamma,\alpha,i) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle. \tag{18}$$

在上述关于系统的假设下（即，对每个 $i \in \langle M\rangle$，$f_i(x) = A_i x$），代价函数 c and$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$，(18) 可表示为一组线性矩阵不等式:

$$P_\gamma \preceq \mu Q + A_i^\top P_\alpha A_i + \sum_{(\beta,j)\in\mathcal{S}\times\langle M\rangle} t_{\gamma,\alpha,i,\beta,j}\big(A_j^\top P_\beta A_j - A_i^\top P_\alpha A_i\big),$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\,(\gamma,\alpha,i) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle. \tag{19}$$

因此，可以使用内点法高效求解。以下结果表明，简化约束 (18) 的任何可行解都能提供原始约束 (17) 的一个可行解:

命题 5 给定系统 (1)、$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$*and*以及代价函数 c: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，令 $\mu \geq 1$ *and*

$$\{t_{\gamma,\alpha,i,\beta,j}\}_{(\gamma,\alpha,i,\beta,j)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

满足 (18)。那么，μ 满足 (17)，其中 $V(x)$ =最大值$_{\alpha\in\mathcal{S}} V_\alpha(x)$。

证明。考虑任意一个 $x \in \mathbb{R}^n$。令 $\gamma \in \mathcal{S}$ 满足

$$V_\gamma(x) = \max_{\zeta\in\mathcal{S}} V_\zeta(x),$$

并令 $(\alpha, i) \in \mathcal{S}\times\langle M\rangle$ 使得

$$V_\alpha(f_i(x)) = \max_{j\in\langle M\rangle}\ \max_{\beta\in\mathcal{S}} V_\beta(f_j(x)).$$

于是，由 (18) 可得 $V_\gamma(x) \leq \mu c(x) + V_\alpha(f_i(x))$，根据 γ、α 和 i 的定义，这意味着 (17)。由于 x 是任意的，证明至此完成。□

5.3.2 最小情形

现在，假设 V 具有由二次函数构成的形式 (6a)，即 $V(x) = \min_{\alpha\in\mathcal{S}} V_\alpha(x)$，其中 $\mathcal{S}$ 是一个有限集，且对每个 $\alpha \in \mathcal{S}$，$V_\alpha(x) = x^\top P_\alpha x$ with $P_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0}$。考虑切换线性系统 (10) 和二次代价 $c(x) = x^\top Q x$ with $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}$。在这种情形下求解 (17)，可以采用与最大情形类似的方法，但需要更多乘子。具体而言，对每个 $(\gamma, \alpha, i, \vec{\omega}, \zeta) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}^M\times\mathcal{S}$，令 $s_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},\zeta} \geq 0$；对每个 $(\gamma, \alpha, i, \vec{\omega}, j) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}^M\times\langle M\rangle$，令 $t_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},j} \geq 0$。考虑以下条件:

$$V_\gamma(x) + \sum_{\zeta\in\mathcal{S}} s_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},\zeta}\{V_\zeta(x) - V_\gamma(x)\} \leq \mu c(x) + V_\alpha(f_i(x)) + \sum_{j\in\langle M\rangle} t_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},j}\{V_{\vec{\omega}_j}(f_j(x)) - V_\alpha(f_i(x))\},$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\,(\gamma,\alpha,i,\vec{\omega}) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}^M. \tag{20}$$

[7] S-过程允许将形式为 $\bigwedge_{i=1}^m x^\top Q_i x \geq 0 \Rightarrow x^\top R x \geq 0$ 的蕴含关系（保守地）改写为存在非负乘子 $t_1,\ldots,t_m \geq 0$ 使得 $R \succeq \sum_{i=1}^m t_i Q_i$。

在上述关于系统的假设下（即，对每个 $i \in \langle M \rangle$， $f_i(x) = A_i x$ ），代价函数 c and$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$，(20) 可以表述为一组线性矩阵不等式：

$$P_\gamma + \sum_{\zeta\in\mathcal{S}} s_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},\zeta}\{P_\zeta - P_\gamma\} \preceq \mu Q + A_i^\top P_\alpha A_i + \sum_{j\in\langle M\rangle} t_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},j}\{A_j^\top P_{\vec{\omega}_j} A_j - A_i^\top P_\alpha A_i\},$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\,(\gamma,\alpha,i,\vec{\omega}) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}^M.$$

因此，可以使用内点法高效求解。下述结果表明，(20) 的任一可行解都能给出 (17) 的一个可行解：

Prop命题 6 给定系统 (1)， $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$以及代价函数 $c\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，令 $\mu \geq$ 1，

$\{s_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},\zeta}\}_{(\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},\zeta)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}^M\times\mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ *and* $\{t_{\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},j}\}_{(\gamma,\alpha,i,\vec{\omega},j)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\langle M\rangle\times\mathcal{S}^M\times\langle M\rangle} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$

满足 (20)。则 μ 满足 (17)，且 $V(x) = \min_{\alpha\in\mathcal{S}} V_\alpha(x)$。

证明。 考虑任意的 $x \in \mathbb{R}^n$。令 $\gamma \in \mathcal{S}$ 使得

$$V_\gamma(x) = \min_{\zeta\in\mathcal{S}} V_\zeta(x),$$

并令 $(\alpha, i) \in \mathcal{S}\times\langle M\rangle$ 使得

$$V_\alpha(f_i(x)) = \max_{j\in\langle M\rangle}\min_{\beta\in\mathcal{S}} V_\beta(f_j(x)).$$

这表明，对每个 $j \in \langle M\rangle$，存在 $\beta_j \in \mathcal{S}$ 使得 $V_{\beta_j}(f_j(x)) \leq V_\alpha(f_i(x))$。令 $\vec{\omega} = (\beta_1, \ldots, \beta_M)$，其中各 β_j 如上所述。则由 (20) 可得 $V_\gamma(x) \leq \mu c(x) + V_\alpha(f_i(x))$，再由 γ、 α 和 i 的定义可知 (17) 成立。由于 x 是任意的，证明完毕。□

得益于前述命题，可以通过线性矩阵不等式高效地计算缩放因子 μ，该因子界定了上界 V 的相对精度。

6 任意切换线性系统的控制

本节采用路径完备框架，在控制仿射输入（即形式为 $B_i u$）下，对任意切换的切换线性系统进行最优控制。我们将展示，路径完备框架可用于为这些系统的最优值函数（即在最优反馈控制下的最坏情况剩余代价）提供上界。

具体而言，我们考虑受控切换线性系统，即如下形式的系统 m

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)} x_k + B_{\sigma(k)} u_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

其中， $u_k \in \mathbb{R}^m$ 是时间 k 的控制输入，且对所有 $i \in \langle M\rangle$、 $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 均成立。

我们考虑二次代价函数 $\tilde{c}\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$\tilde{c}(x,u) = x^\top Q x + u^\top R u, \quad Q \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0},\ R \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\succ 0}. \tag{22}$$

给定反馈策略 $\phi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，相应的闭环系统是对所有 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $u_k = \phi(x_k)$ 的切换系统 (21)。等价地，它是自治切换系统 (1)，其中对每个 $i \in \langle M\rangle$， f_i 由 $f_i(x) = A_i x + B_i \phi(x)$ 给出。相应的闭环代价定义为 $c^\phi(x) = \tilde{c}(\{$v15，$\phi(x))$。闭环系统的值函数 定义如下。

定义 *5*（闭环价值函数）给定反馈策略 ϕ*:* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，具有代价 $\tilde{c}$*:* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和策略 ϕ 的系统 *(21)* 的闭环价值函数记为 J^{ϕ}*(x)*，并定义为系统 *(1)* 的值函数（定义 *1*），其中 f_i 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $i \in \langle M \rangle$ 定义为 f_i*(x)* $:=$ $A_i x + B_i \phi$*(x)*，代价 c*(x)* $:=$ $\tilde{c}$*(x,* ϕ*(x))* 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 定义。具有代价 $\tilde{c}$ 的系统 *(21)* 的最优值函数，是所有闭环系统中（逐点）可得到的最小值函数：

$$J^*(x) \coloneqq \inf_{\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} J^{\phi}(x).$$

在本工作中，我们并不试图计算最优反馈策略。相反，我们考虑一种分段线性策略，因为它使我们能够通过求解线性矩阵不等式来计算相关闭环系统值函数的上界，类似于我们在自治情形中的做法。由构造可知，该界同时也为最优值函数 J^*提供了一个上界。具体而言，我们采用 [10], 中提出的策略，其中引入了 $|\mathcal{S}|$ 个增益矩阵 $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$，完全图$\mathcal{G} =$ 的每个节点各对应一个（$\mathcal{S}$，$\mathcal{E}$）。该反馈策略定义为

$$\phi(x) = K_{\kappa(x)} x, \quad \kappa(x) \in \arg\min_{\alpha \in \mathcal{S}} V_\alpha(x), \tag{23}$$

其中 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}} \subseteq \mathcal{F}^n_{\geq 0}$ 是与图的节点相关联的函数。所得闭环动力学由下式给出

$$x_{k+1} = \left(A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\kappa(x_k)}\right) x_k,$$

以及所得代价 c： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 由下式给出

$$c(x) = x^\top Q x + x^\top K^\top_{\kappa(x)} R K_{\kappa(x)} x, \quad Q \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\succ 0},\ R \in \mathbb{R}^{m \times m}_{\succ 0}. \tag{24}$$

下述定理表明，若 $\mathcal{G}$ 是完全的，且 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ 满足类似于(5)的图驱动不等式，则可通过取 V_α的逐点最小值得到与自治情形中类似的上界：

定理3 考虑系统(21)、代价函数 $\tilde{c}$： $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$、有向标记图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$和模板 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}^n_{\geq 0}$。假设 $\mathcal{G}$ 对于 $\langle M \rangle$ 是完全的，并且 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$, $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$满足

$$V_\alpha(x) \geq \tilde{c}(x, K_\alpha x) + V_\beta(A_i x + B_i K_\alpha x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}. \tag{25}$$

令 V： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$V(x) \coloneqq \min_{\alpha \in \mathcal{S}} V_\alpha(x), \tag{26}$$

并令 ϕ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 按(23)中的定义给出。则对所有 $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \geq J^{\phi}(x) \geq J^*(x)$，其中 J^* 是代价为 $\tilde{c}$的系统(21) 的最优值函数，而 J^{ϕ} 是相关闭环系统在策略 ϕ下的值函数。

证明。 由 (25) 和 V 的定义可得

$$V_\alpha(x) \geq \tilde{c}(x, K_\alpha x) + V(A_i x + B_i K_\alpha x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (\alpha, i) \in E,$$

其中集合 E 的定义与定理 1 证明中完全 部分的定义相同：

$$E = \{(\alpha, i) \in \mathcal{S} \times \langle M \rangle :\ \exists\, \beta \in \mathcal{S} \text{ such that } (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{E}\}.$$

由于图是完全图，我们将前面的不等式组改写为

$$V_\alpha(x) \geq \tilde{c}(x, K_\alpha x) + V(A_i x + B_i K_\alpha x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathcal{S},\ \forall\, i \in \langle M \rangle.$$

取具有（23）中所示 κ 的 $\alpha = \kappa(x)$，并令 $c(x) \coloneqq \tilde{c}(x,\ K_{\kappa(x)}x)$，即可得到

$$V_{\kappa(x)}(x) \geq c(x) + V(A_i x + B_i K_{\kappa(x)} x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\, \forall\, i \in \langle M \rangle.$$

根据 V 和 $\kappa(x)$的定义，我们有

$$V(x) \geq c(x) + V(A_i x + B_i K_{\kappa(x)} x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\, \forall\, i \in \langle M \rangle.$$

对 i取最大值，得到

$$V(x) \geq c(x) + \max_{i \in \langle M \rangle} V(A_i x + B_i K_{\kappa(x)} x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

定义 $f_i(x) \coloneqq A_i x + B_i K_{\kappa(x)} x$，利用命题 2 可得，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$，$V(x) \geq J^{\phi}(x)$。对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，不等式 $J^{\phi}(x) \geq J^{*}(x)$ 可直接由定义 5 得出，从而完成证明。□

现在，我们证明不等式 (25) 可以表示为线性矩阵不等式。与自治线性切换系统（参见第 5.1 节）一样，我们假设采用二次模板，即对于每个 $\alpha \in \mathcal{S}$，$V_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathrm{quad}}$。同样，我们将其参数化为 $V_\alpha(x) = x^\top P_\alpha x$，其中对于所有 $\alpha \in \mathcal{S}$，$P_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succeq 0}$。结合这一参数化以及式 (22) 中代价的表达式，我们可以将 (25) 重写如下：

$$P_\alpha - Q - K_\alpha^\top R K_\alpha - A_i^\top P_\beta A_i - K_\alpha^\top B_i^\top P_\beta B_i K_\alpha - 2K_\alpha^\top B_i^\top P_\beta A_i \succeq 0, \quad \forall\, (\alpha,\beta,i) \in \mathcal{E}. \tag{27}$$

下面的命题指出，通过适当的变量变换，这些矩阵不等式可以表示为线性矩阵不等式，其灵感来自 [17, 定理 1] 和 [10, 引理 11]。

命题 7 给定 $M \in \mathbb{N}_{>0}$ 和一个有限集 $\mathcal{S}$、矩阵集 $\{A_i\}_{i\in\langle M\rangle} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$、$\{B_i\}_{i\in\langle M\rangle} \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$、$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}$，以及矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\succ 0}$和 $R \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\succ 0}$，考虑以下变换

$$S_\alpha = P_\alpha^{-1}, \quad Y_\alpha = K_\alpha P_\alpha^{-1}, \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{S}.$$

不等式(27)等价于

$$\begin{bmatrix} S_\alpha & S_\alpha A_i^\top + Y_\alpha^\top B_i^\top & S_\alpha & Y_\alpha^\top \\ A_i S_\alpha + B_i Y_\alpha & S_\beta & 0 & 0 \\ S_\alpha & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y_\alpha & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall\, (\alpha,\beta,i) \in \mathcal{E}. \tag{28}$$

证明。(28)中的矩阵可以写成分块形式：

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix},$$

其中

$$A = S_\alpha,\ \ B = \begin{bmatrix} S_\alpha A_i^\top + Y_\alpha^\top B_i^\top & S_\alpha & Y_\alpha^\top \end{bmatrix},\ \ C = \begin{bmatrix} S_\beta & 0 & 0 \\ 0 & Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix}.$$

由于 $C \succ 0$，根据舒尔补，条件 $G \succeq 0$ 等价于

$$A - BC^{-1}B^\top \succeq 0.$$

代入 $P_\alpha = S_\alpha^{-1}$和 $K_\alpha = Y_\alpha P_\alpha$，即可得到不等式(27)。这确立了(27)与(28)之间的等价性。□

7 切换线性系统的数值实验 S

在本节中，我们通过数值实验说明所提出的方法，涵盖自治情形与受控情形。

7.1 自治情形

在本小节中，我们首先考虑形如(10)的自主切换线性系统，该系统具有两个状态和两个切换模式，其矩阵在(14)中给出，并且我们在代价函数 $c(x) = x^T Q x$中设定 $Q = I$ 。步骤如下。

对于图阶数 $l = 1,2,3$：

1. 我们考虑共完全对偶 De Bruijn 图 $\mathcal{H}_l^{\top}(2) = (\mathcal{S}_l, \mathcal{E}_l)$（见定义4）。
2. 利用(11)中的不等式以及含 $\ell =$迹的目标函数(13)，我们通过求解半定规划来计算 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}$

$$\min_{\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_l} \operatorname{trace}(P_\alpha) \quad \text{s.t.} \quad (11) \text{ holds with } \mathcal{E} = \mathcal{E}_l.$$

3. 根据定理 1，我们得到上界

$$V^l(x) \coloneqq \max_{\alpha\in\mathcal{S}_l} x^\top P_\alpha x.$$

4. 随后，我们通过求解，利用命题 5 计算下界 $W^l \coloneqq \frac{1}{\mu} V^l$

$$\min_{\mu\geq 1,\, \{t_{\gamma,\alpha,i,\beta,j}\}\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}} \mu \quad \text{s.t.} \quad (19) \text{ holds with } \mathcal{S} = \mathcal{S}_l.$$

对于 $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$，所得上界和下界如图 3 所示，其中 $\theta \in [0, \pi]$。请注意，在此自治情形下，我们关注对偶德布鲁因图，因为收敛结果是专门针对这一图族建立的（见定理 2）。从图中可以看出，随着图的阶增加，上界曲线与下界曲线之间的差距逐渐缩小，这表明所提出的上界估计方法效率较高，并且能够紧密逼近真实值函数。

为了进一步量化上界的紧致程度，我们分析状态数、切换模式数和图阶数的不同组合下的缩放系数 μ 。回顾一下，

$$\frac{1}{\mu} V(x) \leq J(x) \leq V(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

因此， μ 的值越接近 1，表明计算得到的上界越紧。为此，我们采用上述相同的流程，但现在系统矩阵 A_i 是随机生成的。对于每种配置（n， M），我们进行 500 次实现，并在表1中报告平均结果。每次实现均针对图的阶 $l = 1$， 2、3、4 进行评估。结果表明，随着 l 增大， μ 始终收敛到 1，这体现了我们所得上界的非保守性。

7.2 受控情形

在本小节中，我们通过一个如下形式的受控切换线性系统来说明我们的方法。具体而言，我们考虑 [10, 例 (21). 3], 中的系统，该系统涉及以下矩阵：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.95 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

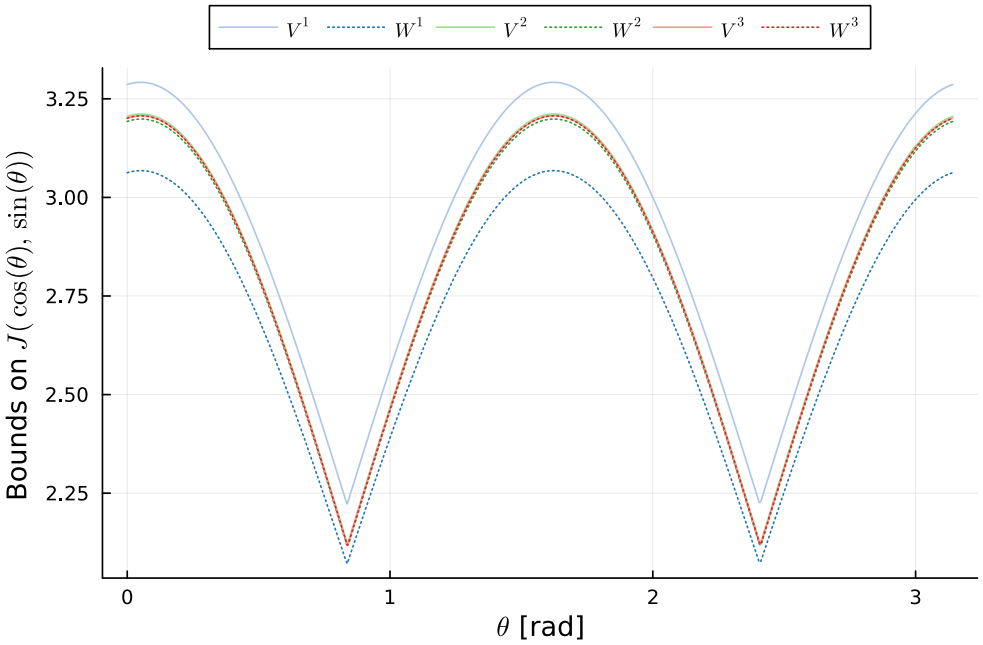

图3：对于矩阵由（14）给出的自主切换线性系统，使用阶数为 $l \in \{1,2,3\}$ 的对偶德布鲁因图，$x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ 的值函数 $V^l(x)$ 和 $W^l(x) := \frac{1}{\mu} V^l(x)$ 的上界与下界。随着阶数增加，上下界曲线之间的差距逐渐缩小。

我们的目标是求得一个形式如(23)的策略，并对所得闭环系统的值函数给出界，其中代价函数由(24)中的 $Q = I$ 和 $R = I$ 给出。为此，我们应用第6节所述的方法。对于图的阶 $l \in \{1, \ldots, 5\}$，我们考虑完全德布鲁因图 $\mathcal{H}_l(2) = (\mathcal{S}_l, \mathcal{E}_l)$（参见定义4），并求得满足线性矩阵不等式(27)的矩阵$\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}_l}$ 和$\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}_l}$。我们考虑两种不同的目标函数：式(13)中的 $\ell = \log \circ \det$（下文称为“log-det”目标），以及式(12)中定义的逐点目标。[8] 求解这些规划问题可得形式如(23)的控制器，其中 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_l$，并得到形式如(26)的值函数上界，其中 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_l$。

在表2中，我们报告了针对两个初始状态、并同时考虑“log-det”目标与逐点目标时，使用路径完备方法并取 $l = 1$，……，5所得到的 $V(x_0)$值。[9] 可以看出，对于两个初始状态以及两种目标，值函数的上界均随阶数递减。然而，我们必须明确指出：尽管两种目标均可观察到单调性，但只有逐点目标的单调性能够得到证明（证明见附录B）。我们还观察到，正如预期，在比较初始状态处的值函数时，逐点界表现更好。最后，我们注意到，在“log-det”目标下提高德布鲁因图的阶数，对第二个初始状态 $x_0 = (\cos(2), \sin(2))$比对第一个初始状态 $x_0 = (\cos(0.5), \sin(0.5))$更为有益（即使上界有更大的降低）。

[8]第一个程序可以通过命题 7 中介绍的舒尔补技巧进行凸化，而逐点目标的凸化过程则在附录A中作了详尽说明。在受控情形下，目标 $\ell = \text{trace}$ in (13) 是否可以凸化仍是一个悬而未决的问题，因此在这种情形下使用 $\ell = \log \circ \det$。[9]与自治情形不同，受控情形下能否得出（有用的）近似保证仍是一个悬而未决的问题。因此，我们直接报告该情形下的上界值 $V(x_0)$。

图的阶 ($n=2$, $M=2$)	($n=5$, $M=3$)	($n=8$, $M=2$)
1	1.038	1.131	1.301
2	1.008	1.032	1.098
3	1.002	1.009	1.031
4	1.0007	1.002	1.009

表1：对于具有不同状态数（n）和切换模式数（M）的自主切换线性系统，计算对偶德布鲁因图的若干阶下的 μ （见式（29））的取值。系统矩阵随机生成，所报告的数值是对 500 次实现取平均所得。我们观察到，随着图的阶增大， μ 趋于 1。

	$x_0 = (\cos(0.5), \sin(0.5))$		$x_0 = (\cos(2), \sin(2))$	
图的阶	**行列式对数**	**逐点**	**行列式对数**	**逐点**
1	10.453	10.200	10.392	9.428
2	10.426	9.475	10.227	9.004
3	10.417	9.218	10.142	8.841
4	10.412	9.167	10.074	8.814
5	10.410	9.163	10.023	8.813

表2：针对两个不同初始状态 x_0，使用阶数为 $l = 1, \ldots\ldots, 5$的德布鲁因图得到的值函数上界 $V^l(x_0)$。系统矩阵定义于(30)。考虑两种目标函数：$\ell =$(13)中的log $\circ$det，以及逐点目标函数（见(12)，完全情形）。我们观察到上界随阶数递减。

我们还在图4中展示了针对 $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$、$\theta \in [0, \pi]$时，在“行列式对数”目标下得到的上界。同样可以观察到，上界随阶数单调递减，尽管“行列式对数”目标并不保证这一点。最后，我们注意到，随着阶数增加，上界的下降幅度在某些点上比其他点更明显，这与我们此前从表2中观察到的情况一致。

8 结论

我们提出了一种路径完备框架，用于计算任意切换下切换系统值函数的上界。我们的方法是在路径完备图上编码动态规划不等式，为每个节点 α 关联一个函数 V_α，并以适当的方式（通过取最大值或最小值）组合这些函数，从而得到真实值函数的一个有保证的上界。我们首先研究一般的非线性自主情形，随后将其专门化为具有二次代价的切换线性系统，并为此推导了易于处理的线性矩阵不等式表述，同时给出了复杂度保证。我们还量化了这些界的紧致程度，并证明使用阶数递增的对偶德布鲁因图能够得到非保守近似。最后，我们将该框架扩展到具有仿射控制输入的受控切换线性系统，并通过数值示例展示了其有效性。

在未来的工作中，我们计划为受控情形计算近似保证。这将非常有用，因为与自治情形不同，通过在长时域上进行仿真来获得下界并非易事（计算成本会呈指数级增长）。我们还计划研究其他控制律，不一定是分段线性的，这可能会带来更优的策略。最后，我们计划探讨如何在策略改进循环中使用本文推导的上界和下界。

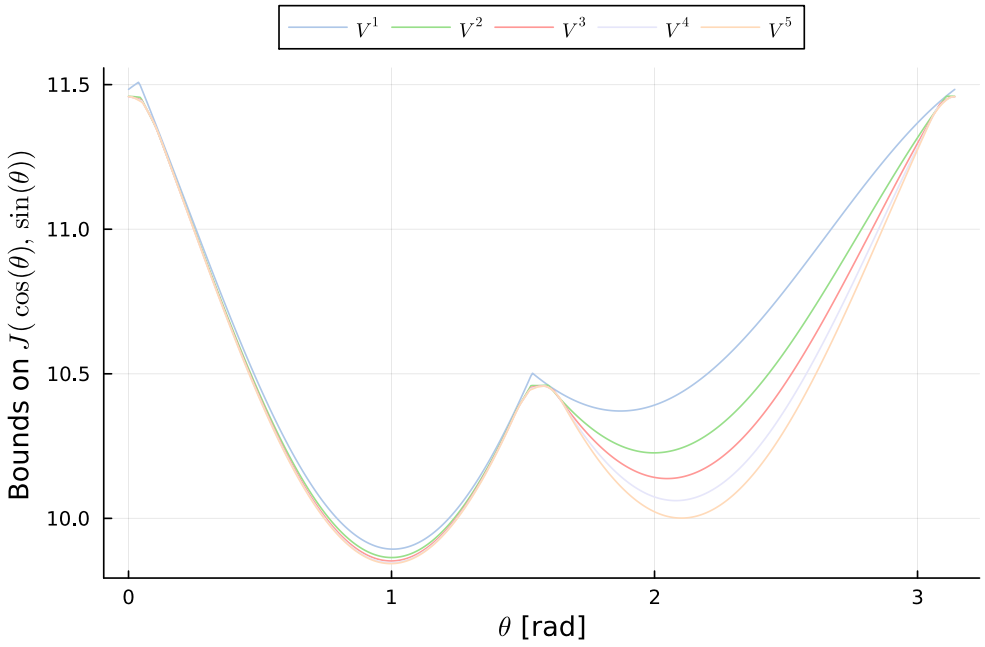

图 4：对于 $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ 且 $\theta \in [0, \pi]$，由式 (30) 中的矩阵定义的受控切换线性系统，使用阶数为 $l \in \{1, 2, \ldots, 5\}$的德布鲁因图计算得到的值函数上界 $V^l(x)$。随着阶数增加，上界逐渐降低，在某些点处这一效果更为显著。

参考文献

[1] A. A. Ahmadi、R. M. Jungers、P. A. Parrilo 和 M. Roozbehani。联合谱半径与路径完备图李雅普诺夫函数。*SIAM* 控制与优化杂志，52(1):687–717，2014。[2] D. Angeli、N. Athanasopoulos、R. M. Jungers 和 M. Philippe。路径完备图与共同李雅普诺夫函数。载于混合系统计算与控制国际会议第 *20* 届会议论文集，HSCC '17，第 81–90 页，美国纽约，2017。美国计算机协会。[3] D. Antunes 和 W. M. Heemels。利用知情策略对切换系统进行线性二次调节。*IEEE* 自动控制汇刊，62(6):2675–2688，2017。[4] A. Ben-Tal 和 A. Nemirovski。现代凸优化讲义：分析、算法与工程应用。SIAM，2001。[5] D. Bertsekas。动态规划与最优控制：第一卷，第 4 卷。Athena Scientific，2012。[6] F. Blanchini、D. Casagrande、P. Gardonio 和 S. Miani。振动结构半主动阻尼中的恒定增益与切换增益。国际控制期刊，85(12):1886–1897，2012。[7] F. Blanchini、S. Miani 等。控制中的集合论方法，第 78 卷。施普林格，2008。[8] S. P. Boyd 和 L. Vandenberghe。凸优化。剑桥大学出版社，2004。[9] N. G. De Bruijn 和 P. Erd¨os。一个组合问题。荷兰皇家艺术与科学学院阿姆斯特丹科学部论文集，51(10):1277–1279，1948。

[10] M. Della Rossa、T. Alves Lima、M. Jungers 和 R. M. Jungers。切换系统和线性参数变化系统反馈稳定化的基于图的条件。*Automatica*，160:111427，2024。[11] M. Donkers、W. M. H. Heemels、N. Van de Wouw 和 L. Hetel。使用切换线性系统方法对网络化控制系统进行稳定性分析。*IEEE* 自动控制汇刊，56(9):2101–2115，2011。[12] T. Fujita、T. Ueno 和 S. Iwamoto。非确定性动态规划模型。在知识型与智能信息及工程系统国际会议，第 1208–1214 页。施普林格，2004。[13] D. G¨orges、M. Iz´ak 和 S. Liu。切换系统的最优控制与调度。*IEEE* 自动控制汇刊，56(1):135–140，2011。[14] P. E. Hart、N. J. Nilsson 和 B. Raphael。启发式确定最小成本路径的形式化基础。*IEEE* 系统科学与控制论汇刊，4(2):100–107，1968。[15] T. Hou、Y. Li 和 Z. Lin。改进离散时间切换 LQR 问题无限时域值函数近似的方法。《系统科学与复杂性杂志》，37(1):22–39，2024。[16] R. Jungers。联合谱半径：理论与应用，第 385 卷。施普林格科学与商业媒体，2009。[17] M. V. Kothare、V. Balakrishnan 和 M. Morari。使用线性矩阵不等式的鲁棒约束模型预测控制。*Automatica*，32(10):1361–1379，1996。[18] D. Liberzon。系统与控制中的切换，第 190 卷。施普林格，2003。[19] B. Lincoln 和 A. Rantzer。松弛动态规划。*IEEE* 自动控制汇刊，51(8):1249–1260，2006。[20] F. Lu、P. G. Mehta、S. P. Meyn 和 G. Neu。凸 Q 学习。在*2021* 年美国控制会议（*ACC*），第 4749–4756 页。IEEE，2021。[21] V. L. Mehrmann。自治线性二次控制问题：理论与数值解。施普林格，1991。[22] J. Moos、K. Hansel、H. Abdulsamad、S. Stark、D. Clever 和 J. Peters。鲁棒强化学习：基础与最新进展综述。《机器学习与知识提取》，4(1):276–315，2022。[23] R. Munos。近似策略迭代的误差界。在第二十届国际机器学习国际会议论文集，第 560–567 页，2003。[24] A. Nilim 和 L. E. Ghaoui。具有不确定转移矩阵的马尔可夫决策过程的鲁棒控制。*Oper. Res.*，53:780–798，2005。[25] A. Rantzer。关于切换系统中的近似动态规划。在第 *44* 届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，第 1391–1396 页。IEEE，2005。[26] C. A. Sanchez、G. Garcia、S. Hadjeras、W. M. H. Heemels 和 L. Zaccarian。具有驻留时间保证的切换仿射系统实用稳定化。*IEEE* 自动控制汇刊，64(11):4811–4817，2019。[27] M. Suilen、T. Badings、E. M. Bovy、D. Parker 和 N. Jansen。鲁棒马尔可夫决策过程：人工智能与形式化方法交汇之处。在《验证原理：概率景观巡礼：献给 *Joost-Pieter Katoen* 六十岁生日的论文集，第三部分》，第 126–154 页。施普林格，2024。

[28] Z. Sun 和 S. S. Ge。切换动力系统的稳定性理论。2011。

[29] Z. Wu 和 Q. He。切换线性系统的最优切换序列。*SIAM* 控制与优化杂志，58(2):1183–1206，2020。

[30] W. Zhang、J. Hu 和 A. Abate。离散时间切换 LQR 问题的值函数。*IEEE* 自动控制汇刊，54(11):2669–2674，2009。

[31] W. Zhang、J. Hu 和 A. Abate。离散时间无限时域切换 LQR 问题：一种具有性能分析的次优算法。*IEEE* 自动控制汇刊，57(7):1815–1821，2012。

面向半正定规划求解器的重新表述

在本附录中，我们说明如何重新表述该规划问题

$$\min_{\{(P_\alpha,K_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} \min_{\gamma\in\mathcal{S}_l} x_0^\top P_\gamma x_0 \quad \text{s.t.} \quad (27) \text{ holds with } \mathcal{E}=\mathcal{E}_l \tag{31}$$

以便由半正定规划求解器求解。首先，根据命题 7，我们进行变量替换 $S_\alpha := P_\alpha^{-1}$和$Y_\alpha := K_\alpha P_\alpha^{-1}$，于是问题变为

$$\min_{\{(S_\alpha,Y_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} \min_{\gamma\in\mathcal{S}_l} x_0^\top S_\gamma^{-1} x_0 \quad \text{s.t.} \quad (28) \text{ holds with } \mathcal{E}=\mathcal{E}_l.$$

上述程序等价于

$$\min_{\gamma\in\mathcal{S}_l} \Big[\underbrace{\min_{\{(S_\alpha,Y_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} x_0^\top S_\gamma^{-1} x_0 \quad \text{s.t.} \quad (28) \text{ holds with } \mathcal{E}=\mathcal{E}_l}_{\text{prog}(\gamma)} \Big].$$

因此，可以通过对所有 γ 求解 prog(γ) 来求解原问题 (31)，并选出 γ 使目标值达到最优的情况。接下来需要重写给定 γ 时的目标值。为此，我们引入一个标量变量 $t\in\mathbb{R}$，如下所示：

$$\begin{aligned} \min_{t,\,\{(S_\alpha,Y_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & (28) \text{ holds with } \mathcal{E}=\mathcal{E}_l, \\ & t \geq x_0^\top S_\gamma^{-1} x_0. \end{aligned}$$

最后，我们可以利用舒尔补将最后一个约束重写为

$$t \geq x_0^\top S_\gamma^{-1} x_0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} S_\gamma & x_0 \\ x_0^\top & t \end{bmatrix} \succeq 0,$$

而求解 prog(γ) 等价于求解

$$\begin{aligned} \min_{t,\,\{(S_\alpha,Y_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & (28) \text{ holds with } \mathcal{E}=\mathcal{E}_l, \\ & \begin{bmatrix} S_\gamma & x_0 \\ x_0^\top & t \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

后者是一个半正定规划，可由大多数半正定规划求解器处理。

B 关于图的阶的上界单调递减

在此 在附录中，我们证明了以下优化问题的目标函数 :

$$\begin{aligned} &\min_{\{(P_\alpha,K_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}} \min_{\alpha\in\mathcal{S}_l} x_0^\top P_\alpha x_0 \\ &\text{s.t. } P_\alpha \succeq (Q+K_\alpha^\top R K_\alpha)+(A_i+B_iK_\alpha)^\top P_\beta (A_i+B_iK_\alpha), \quad \forall (\alpha,\beta,i)\in\mathcal{E}_l, \end{aligned} \tag{32}$$

随着德布鲁因图 $\mathcal{H}_l(M) = (\mathcal{S}_l, \mathcal{E}_l)$ 的阶 l 增大，.....单调递减。我们将问题 (32) 记为 $\mathcal{P}_l$，其最优目标值记为 g_l。我们的目标是证明，对所有 $l \geq 0$， $g_l \geq g_{l+1}$。

步骤 1. 为 $\mathcal{P}_{l+1}$ 构造一个候选解。令 $\{(P_\alpha^l, K_\alpha^l)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}$ 为.....的一个最优解$\mathcal{P}_l$。定义映射

$$\pi : \mathcal{S}_{l+1} \to \mathcal{S}_l,$$

该映射将每个长度为 $l+1$ 的序列映射为其前 l 个元素（即删除其最后一个切换模式后得到的序列）。

对于任意节点 $\alpha = (j_1, \ldots, j_{l+1}) \in \mathcal{S}_{l+1}$，定义

$$P_\alpha^{l+1} \coloneqq P_{\pi(\alpha)}^l, \qquad K_\alpha^{l+1} \coloneqq K_{\pi(\alpha)}^l.$$

步骤2. 所构造解的可行性。现在验证上述构造的 $\{(P_\alpha^{l+1}, K_\alpha^{l+1})\}_{\alpha\in\mathcal{S}_{l+1}}$ 满足 $\mathcal{P}_{l+1}$的约束。令$(\alpha, \beta, j) \in \mathcal{E}_{l+1}$，并记 $\alpha = (i_1, \ldots, i_{l+1})$。根据德布鲁因图的定义（见定义4），有 $\beta = (j, i_1, \ldots, i_l)$。因此，

$$\pi(\alpha) = (i_1, \ldots, i_l) \quad \text{and} \quad \pi(\beta) = (j, i_1, \ldots, i_{l-1}),$$

这意味着$(\pi(\alpha)\ \pi(\beta)\ j) \in \mathcal{E}_l$。由于 $\{(P_\alpha^l, K_\alpha^l)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_l}$ 对 $\mathcal{P}_l$是可行的，因此满足所有相应的线性矩阵不等式。根据 $\{(P_\alpha^{l+1}, K_\alpha^{l+1})\}_{\alpha\in\mathcal{S}_{l+1}}$的构造，同样的不等式也因此对 $\mathcal{P}_{l+1}$成立，从而证明了其可行性。

步骤3. 目标值的比较。与所构造的可行点相对应的目标函数为

$$\min_{\alpha\in\mathcal{S}_{l+1}} x_0^\top P_\alpha^{l+1} x_0 = \min_{\alpha\in\mathcal{S}_{l+1}} x_0^\top P_{\pi(\alpha)}^l x_0 = \min_{\alpha\in\mathcal{S}_l} x_0^\top P_\alpha^l x_0 = g_l.$$

因此，我们构造了一个可行解 $\{(P_\alpha^{l+1},\ K_\alpha^{l+1})\}_{\alpha\in\mathcal{S}_{l+1}}$，其代价与 $\mathcal{P}_l$ 的最优代价相同。由于 $\mathcal{P}_{l+1}$ 在 $\{(P_\alpha,\ K_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}_{l+1}}$ 上使相同的代价最小化，我们得出

$$g_{l+1} \leq g_l,$$

这就证明了所需的单调性。