arXiv:2602.04321v1 [math.RA] 4 Feb 2026

同余密度大于3/32的格

G´ABOR CZ´EDLI

This paper is dedicated to Eszter K. Horváth, my coauthor on ten papers.

Abstract. 根据 R. Freese 于 1997 年得到的一个结果，一个有 n个元素的格至多有2^{n-1} 个同余关系。这促使我们将有限 n元格的 *congruence density* cd(L)定义为 $|\mathrm{Con}(L)|/2^{n-1}$，其中 $|\mathrm{Con}(L)|$ 是 L的同余格 Con(L) 中元素的个数。我们证明，只要L 是一个满足 cd(L) $> 3/32$的有限格，那么 L 的并不可约元和交不可约元数量相同。这个结果是最优的，因为存在一个六元格 R_6 ，其 cd(R_6) $= 3/32$ ，但并不可约元少于交不可约元。根据 R. Freese、C. Mure.san、J. Kulin 以及本文作者的结果，同余密度大于 $1/8$的格已经得到描述。本文将下限从 $1/8$降低至 $3/32$。也就是说，我们描述所有满足 cd(L) $> 3/32$的有限格 L 。作为推论，对于 $n > 8$和 $k \in \{n+1, n+2, n+3, n+4\}$，我们给出 n元格同余关系数量的第 k大值。

1. Introduction and the first theorem

我们假设读者熟悉格论或泛代数的基本概念。我们将用到 Cz´edli [8] （撰写本文时可开放获取）以及其他来源中的若干辅助结果，但在需要时都会回顾这些结果。

本文考虑的所有格都假定为有限格，并且 L 始终表示有限格，即使没有明确重申这些约定也是如此。对于格$L = (L; \vee, \wedge)$，我们用 Con(L) 表示 L的同余关系格，简称 L的同余格。于是， L的同余关系数为 $|\mathrm{Con}(L)|$。本文的主要概念是有限格 L的同余密度cd(L)，定义为 $\mathrm{cd}(L) := |\mathrm{Con}(L)|/2^{|L|-1}$。根据 Freese 的一个结果，$|\mathrm{Con}(L)| \leq 2^{|L|-1}$ ，因此 cd(L) ≤ 1。注意，当且仅当 L 是链时，cd(L) $= 1$ 。我们的第一个目标是证明以下定理。

定理 1.1. 每个有限格 L 满足$\mathrm{cd}(L) > 3/32$ 时具有以下两个性质。

(jm1) L 并不可约元与交不可约元的数量相同。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 06B10.*Key words and phrases.* 大量格同余、大的同余密度、同余格的大小、具有许多同余关系的格、并不可约元的个数、交不可约元的个数、有限格。本研究由匈牙利国家研究、发展与创新基金在资助计划 K 138892 下提供支持。 **2026年2月4日版本**。

(jm2) 更一般地，对于每个非负整数 k，恰好覆盖 k 个元素的 L 元素的数量，等于恰好被 k 个元素覆盖的元素的数量。

“jm”中的字母来自“并不可约”和“交不可约”。正如“更一般地”这一说法所示，性质 (jm2) 显然蕴含 (jm1)。根据 Dilworth覆盖定理 [12]（另见 Kung [18, 定理 464]），每个有限模格都具有性质 (jm2)，因而也具有性质 (jm1)。请注意，L 的模性与条件 $\mathrm{cd}(L) > 3/32$ 彼此独立，也就是说，二者互不蕴含。

如下文将要证明的观察所示，定理 1.1 是尖锐的。

观察 1.2. 图 *1* 中间的六元格 R_6 只有三个并不可约元，却有四个交不可约元，并且 $\mathrm{cd}(R_6) = 3/32$。

仍然围绕定理 1.1，我们指出，$\mathrm{cd}(L)$ 对另一种格性质也有类似影响：Cz´edli [6] 证明，对于每个有限格 L，

$$\text{if } \mathrm{cd}(L) > 1/16, \text{ then } L \text{ is planar.} \tag{1.1}$$

八元布尔格并非平面格，且其同余密度为$1/16$，它表明这一结果也是尖锐的。

Freese [13], Mure.san、Kulin [19], 和 Cz´edli [3] 以及 [8]证明的结果，对所有满足 $\mathrm{cd}(L) >1/8$ 的有限格 L 给出了合理的结构描述；这一描述通过结合 Cz´edli [8], 的引理 3 和引理 10 得出，并在此作为引理 2.1 给出。受这一结果和定理 1.1 的启发，我们的主要目标是将阈值从 $1/8$ 提高到 $3/32$。

尽管从 $1/8 = 4/32$ 到 $3/32$ 的过渡看似微不足道，却需要付出不小的努力。特别是，虽然满足 $\mathrm{cd}(L) > 1/8$ 的格的宽度至多为 2（即不存在三元素反链），但对于满足 $\mathrm{cd}(L) > 3/32$ 的格，这一点不再成立。所讨论的过渡还需要两种新方法。首先，在本文中，我们有时会考察 Foot(a, b) 中彼此“相距较远”的元素（其定义稍后给出）；例如，参见引理 3.3 以及引理 3.7 和 4.1 的证明。其次，我们现在可以将 Cz´edli [9][1], 在此以 (3.15) 表述的结果应用于某些子集；例如，参见引理 3.10 和 5.2 的证明。

2. Stating the Main Theorem and its corollary

我们需要借用一些约定俗成的记号和概念，以及 Cz´edli [8] 的记号和概念。对于 $4 \leq n \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}$，用 Circ($n$) 表示由 n 个元素组成的格所构成的类，这些格的（哈斯）图是 n 个元素的圆，也就是说，按图论术语，它们是长度为 n 的环。例如，Circ(6) 由两个格[2]、N_6 和 N_6'组成，如图 1 所示。

对于有限格 L_1 与 L_2，粘合和 $L_1 \dotplus L_2$ 是 L_1 与 L_2 的一种特殊 Hall-Dilworth 粘合，使得 L_1 与 L_2 （它们是 $L_1 + L_2$的子格）的交为一个单元素子格。换言之，把 L_2 置于 L_1之上，并将 L_1 的顶元 1_{L_1} 与 L_2的底元 0_{L_2} 等同，便得到 $L_1 \dotplus L_2$ 的（Hasse）图示。注意$(L_1 \dotplus L_2) \dotplus L_3 = L_1 \dotplus (L_2 \dotplus L_3)$，因此可以省去括号，并写出诸如 $L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_h$的表达式。$L_1$ 与 L_2 的另一种特殊 Hall-Dilworth 粘合是它们的边粘合，其中 $|L_1 \cap L_2| = 2$。

[1][9]的撰写和提交时间晚于 [8]。[2]在本文及下文中，我们不区分两个同构的格。

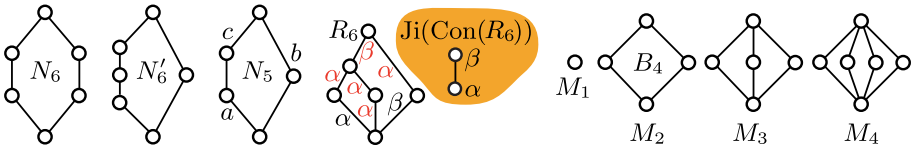


FIGURE 1. 论文中出现的一些格

对于 $n \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}$，$\mathsf{C}_n$ 表示 n元链。格 L 的子集 Y是凸的，如果对所有 $x,\ z \in Y$与 $y \in L,\ \ x \le y \le z$蕴含 $y \in Y$。采用记号

$$\mathrm{Nar}(L) := \{x \in L : x \text{ is comparable with every element of } L\},$$

一个非单元素集合 X 是 L 的窄链分量，当且仅当它是 Nar(L) 的一个极大子集，且是 L 的一个凸子集。设 L 是一个非单元素格。那么存在唯一的 $h \in \mathbb{N}^+$，并且存在唯一确定的元素 $u_0 = 0_L < u_1 < \cdots < u_h = 1_L$使得对每个 $i \in \{1, \dots, h\}$，区间 $[u_{i-1}, u_i] := \{x \in L : u_{i-1} \le x \le u_i\}$ 要么是 L 的一个窄链分量，要么是 $[u_{i-1}, u_i] \cap \mathrm{Nar}(L) = \{u_{i-1}, u_i\} \neq [u_{i-1}, u_i]$。在这种情况下，

$$L = [u_0, u_1] \dotplus [u_1, u_2] \dotplus \cdots \dotplus [u_{h-1}, u_h], \tag{2.1}$$

它是 L 的典范粘合和分解。图2中的 L、K（其中 $h = 3$）和 M（其中 $h = 4$）展示了这一点。若 L 是一条非单元素链，则 $h = 1$，(2.1) 变为 $L = [u_0, u_1] = [0_L, 1_L]$，而 L 是其自身唯一的窄链分量。单元素格既没有典范粘合和分解，也没有窄链分量。

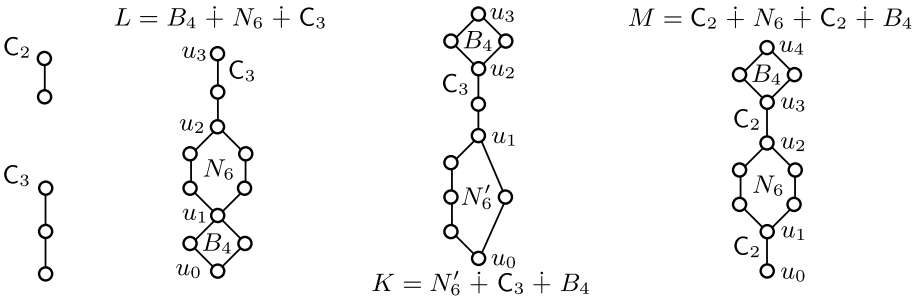


FIGURE 2. 典范粘合和分解的示例

我们称有限格 L 为核心格，如果对于任何 $x,\ y \in \mathrm{Nar}(L),\ \ x \prec_L y$ 都不成立；等价地，L 的典范粘合和分解 (2.1) 中没有任何加项是链。注意，单元素格是核心格。对于核心格 L 和 K，如果使用记号 (2.1) 表示 L 的典范粘合和分解，存在一个 $\{1, \dots, h\}$ 的置换 π，使得.....那么我们称 L 和 K 是重排粘合和同构的（记作 $L \cong_{\mathrm{rgs}} K$）。

$$K = [u_{\pi(1)-1}, u_{\pi(1)}] \dotplus [u_{\pi(2)-1}, u_{\pi(2)}] \dotplus \cdots \dotplus [u_{\pi(h)-1}, u_{\pi(h)}]. \tag{2.2}$$

需要强调的是，只有当 L 和 K 都是核心格时，$L \cong_{\mathrm{rgs}} K$ 才有定义。

如果 L 是有限链，那么它的核（记作 Cor(L)）是单元素格。假设 L是一个非链有限格。根据 (2.1)，令$L_i := [u_{i-1}, u_i]$，其中 $i \in \{1, \dots, h\}$；并令 $J := \{i : 1 \leq i \leq h$，且 L_i不是链}。那么 J非空，且具有如下形式： $J = \{j_1, \dots, j_t\}$，使得 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq h$，并且我们将 L 的核 定义为

$$\mathrm{Cor}(L) := L_{j_1} \dot{+} L_{j_2} \dot{+} \cdots \dot{+} L_{j_t}. \tag{2.3}$$

请注意，无论 L 是否为链，Cor(Cor(L)) =Cor(L)，且 Cor(L) 是一个核心格。核心格便于描述我们所需的大多数有限格类。（根据脚注 2，这里我们可以说“集合”而不是“类”。）例如，

$$\{L : |L| = 11 \text{ and } \mathrm{Cor}(L) \cong_{\mathrm{rgs}} B_4 \dot{+} X \text{ for some } X \in \mathrm{Circ}(6)\},$$

其中 B_4 表示图 1 中绘出的四元布尔格，是对一个含 24 个格的集合的简洁描述，而图2 中所示的 L、 K和 M 都属于该集合。类似地， $\{L$ ： 对于某个 $X \in$ Circ(6)}，Cor(L) $\cong_{\mathrm{rgs}}$ $B_4 \dot{+} X$ 描述了一个无限的有限格集合；由于 $|L| \geq |$ Cor(L)|，该类（或集合）中的每个格至少有 9 个元素。对我们而言，Cor(L) 通常只在重排粘和同构意义下有趣。然而，当 (2.3) 中的 $L_{j_1} \cong L_{j_2} \cong \ldots \cong L_{j_t}$时，我们的重排粘和同构会化为通常的同构（特别是当 $t = 1$时）。

与 [8], 一样，我们通常将同余密度表示为 $x/64$的形式，即使它本可化简，或分子不是整数。公分母 64 便于比较，也提高了可读性。我们回顾 Cz´edli [8, 引理 3 和 10], 中的以下引理，不过请注意，其中 (e1)、(e2) 和 (e3)–(e5) 部分分别由 Freese [13], Cz´edli [3], 、Mure˛san 和 Kulin[19], 证明。标签 (e1)–(e10) 中的字母 e 表示我们展示的是早期论文中的结果。同样，标签 (c1)–(c8) 和 (p1)–(p8) 中的字母 c 和 p 分别表示当前论文和先前的结果。

引理 2.1 (Cz´edli [8, 引理 3 和 10])。 设 L 是一个有限格。那么，$\mathrm{cd}(L)$ $>8/64$ 当且仅当下列十个条件之一成立。

(e1) |*Cor(L)*| $= 1$，也就是说， L 是一条链。（在这种情形下，*cd(L)* $= 64/64$。） （*e2*）*Cor(L)* $\cong B_4$。（在这种情形下，*cd(L)* $= 32/64$。） （*e3*）*Cor(L)* $\cong N_5$。（在这种情形下，*cd(L)* $= 20/64$。） （*e4*）*Cor(L)* $\cong C_2 \times C_3$。等价地，*Cor(L)*是两个B_4的边粘合。（在这种情形下，*cd(L)* $= 16/64$。） （*e5*）*Cor(L)*$\cong B_4 \dot{+} B_4$。（在这种情形下，*cd(L)* $= 16/64$。） （*e6*）*Cor(L)* $\in$ *Circ(6)*。（在这种情形下，*cd(L)* $= 14/64$。） （*e7*）*Cor(L)* $\in$ *Circ(7)*。（在这种情形下，*cd(L)* $= 11/64$。） （*e8*）*Cor(L)*是 B_4 和 N_5的边粘合，顺序不限。（在这种情形下，*cd(L)* $= 10/64$。） （*e9*）*Cor(L)*$\cong_{\mathrm{rgs}} B_4 \dot{+} N_5$。（在这种情形下，*cd(L)* $= 10/64$。） （*e10*）对于某个 $8 \leq n \in \mathbb{N}^+$，*Cor(L)* $\in$ *Circ(n)*。（在这种情形下，我们有 *cd(L)* $= (8 + 3/2^{n-7})/64$。）

现在我们可以给出这篇论文的主要结果。下述定理中出现的格 B_4、 M_3、N_5、N_6 和 N_6' 由图 1 定义，而符号 $\cong_{\mathrm{rgs}}$ 则在前文包含 (2.2) 的句子中已经引入。注意，定理中 $\cong$ 的每次出现都可以替换为 $\cong_{\mathrm{rgs}}$，但反之则不成立。

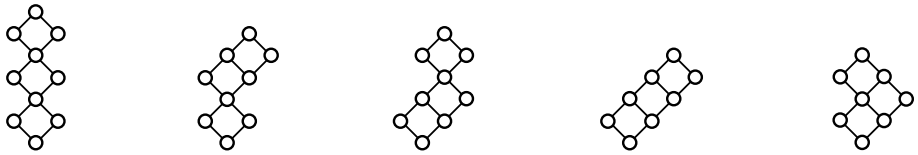


FIGURE 3. 定理 2.2(c3) 中的核心格

定理 2.2（主定理）：对于有限格 L，L 的同余密度超过 $3/32$（即 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$）当且仅当以下八个条件之一成立。

(c1) $\mathrm{cd}(L) > 8/64$；关于具有此性质的格的完整刻画，见 [8] 中的引理 *3* 和 *10*，或者等价地，见本文的引理 *2.1*。*(c2)* $\mathrm{Cor}(L) \cong M_3$。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 8/64$。*(c3)* $\mathrm{Cor}(L) \cong B_4 +_1 B_4 +_2 B_4$，其中符号 $+_1$ 和 $+_2$ 中的每一个都表示粘合和运算 $\dotplus$ 或边粘合。换言之，$\mathrm{Cor}(L)$ 同构于图 *3* 中给出的五个格中的一个。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 8/64$。*(c4)* $\mathrm{Cor}(L) \cong N_{5,5}$；见图 *4* 的左侧。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 7/64$。*(c5)* 对某个 $X \in \mathit{Circ}(6)$，$\mathrm{Cor}(L) \cong_{\mathrm{rgs}} B_4 \dotplus X$。换言之，$\mathrm{Cor}(L) \cong_{\mathrm{rgs}} B_4 \dotplus N_6$ 或 $\mathrm{Cor}(L) \cong_{\mathrm{rgs}} B_4 \dotplus N_6'$。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 7/64$。*(c6)* $\mathrm{Cor}(L)$ 通过将 B_4 与一个 $X \in \mathit{Circ}(6)$ 按两种可能的顺序之一进行边粘合得到。也就是说，$\mathrm{Cor}(L)$ 同构于图 *5* 中绘出的六个格中的一个。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 7/64$。*(c7)* $\mathrm{Cor}(L)$ 是两个 N_5 副本的边粘合。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 6.5/64$。*(c8)* $\mathrm{Cor}(L) \cong N_5 \dotplus N_5$。在此情形下，$\mathrm{cd}(L) = 6.25/64$。

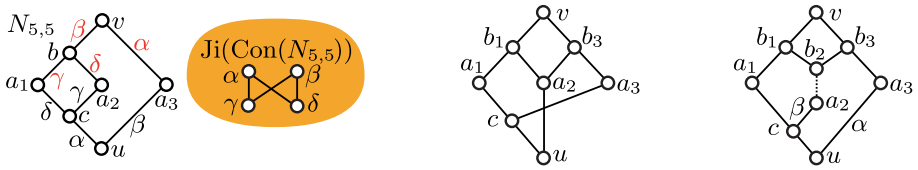


FIGURE 4. $N_{5,\ 5}$ 以及引理 4.2 证明的插图

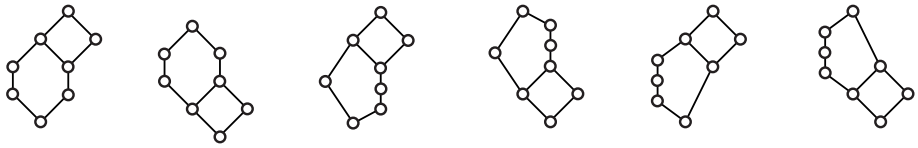


FIGURE 5. 定理 2.2(c6) 中的核心格

对于 $n, k \in \mathbb{N}^+$，令 $\mathrm{lcd}(n,k)$ 表示 n 个元素的格的同余密度中第 k 大的值。注意，$\mathrm{lcd}(n,k)$ 并非总是有定义。例如，$\mathrm{lnc}(3,2)$ 与 $\mathrm{lnc}(4,3)$ 无定义，因为 $|\{\mathrm{cd}(L) : |L| = 3\}| = 1$ 且 $|\{\mathrm{cd}(L) : |L| = 4\}| = 2$。通过对 (p1)–(p5) 各部分进行直接改述，我们回顾如下来自四篇不同论文的陈述。

引理 2.3。
(p1) $\mathrm{lcd}(n,1) = 1 = 64/64$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^+$（由 *Freese* [13] 证明）。*(p2)* $\mathrm{lcd}(n,2) = 32/64$ 对于 $4 \leq n \in \mathbb{N}^+$（由 *Cz´edli* [3] 证明）。*(p3)* $\mathrm{lcd}(n,3) = 20/64$ 对于 $5 \leq n \in \mathbb{N}^+$（由 *Mure.san* 与 *Kulin* [19] 证明）。*(p4)* $\mathrm{lcd}(n,4) = 16/64$ 对于 $6 \leq n \in \mathbb{N}^+$（由 *Mure.san* 与 *Kulin* [19] 证明）。*(p5)* $\mathrm{lcd}(n,5) = 14/64$ 对于 $6 \leq n \in \mathbb{N}^+$（由 *Mure.san* 与 *Kulin* [19] 证明）。*(p6)* $\mathrm{lcd}(n,6) = 11/64$ 对于 $7 \leq n \in \mathbb{N}^+$（由 *Cz´edli* [8] 证明）。*(p7)* $\mathrm{lcd}(n,7) = 10/64$ 对于 $7 \leq n \in \mathbb{N}^+$（由 *Cz´edli* [8] 证明）。*(p8)* $\mathrm{lcd}(n,k) = (8 + 3 \cdot 2^{7-k})/64$ 对于 $8 \leq k \leq n$（由 *Cz´edli* [8] 证明）。

特别是，如果 $8 \leq n \in \mathbb{N}^+$，那么 $\mathrm{lcd}(n,\ k)$ 已知，并且对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，都有一个简单的公式给出其值。经过繁琐的工作，Cz´edli [8] 在第 4 节给出了所有满足 $\mathrm{lcd}(7,\ k)$ 有定义的 k 对应的 $\mathrm{lcd}(7,\ k)$。在下面的陈述中，我们给出 $n = 8$ 的 $\mathrm{lcd}(n,\ k)$ 的三个新值，以及 $n > 8$ 的四个[3] 新值。

推论 2.4。
(A) 对于 $9 \leq n \in \mathbb{N}^+$，我们有 $\mathrm{lcd}(n, n+1) = 8/64$、$\mathrm{lcd}(n, n+2) = 7/64$、$\mathrm{lcd}(n, n+3) = 6.5/64$，以及 $\mathrm{lcd}(n, n+4) = 6.25/64$。此外，$\mathrm{lcd}(8,\ 9) = 8/64$、$\mathrm{lcd}(8,\ 10) = 7/64$，且 $\mathrm{lcd}(8{,}11) = 6.5/64$。*(B)* 将 *(A)* 部分给出的 $\mathrm{lcd}(n,k)$ 值乘以 2^{n-1}，即可得到 k 个元素的格中同余关系数量的第 n 大值。

上述同余密度取值所对应的格由定理 2.2 描述。推论 2.4 可由定理 2.2 以及引理 2.1 和 2.3 立即推出，因此不再单独给出证明。

3. 工具

格的同余密度仅取决于其核。事实上，回顾 Cz´edli [8, 引理 3]，对于每个有限格 L，

$$\mathrm{cd}(L) = \mathrm{cd}(\mathrm{Cor}(L)). \tag{3.1}$$

集合上的拟序是一种自反且传递的关系。若 ρ 是这样的关系，则 $a \leq_\rho b$ 和 $a \equiv_\rho b$ 分别表示 $(a,b) \in \rho$ 和 $(a,b) \in \rho \cap \rho^{-1}$。对于预序集 $(A;\ \rho)$，其子集 B 若对于所有 $x, y \in A$，$y \in B$ 和 $x \leq_\rho y$ 都蕴含 $x \in B$，则称为一个理想。(A, ρ) 的理想构成一个分配格 $\mathrm{Idl}(A;\ \rho) = (\mathrm{Idl}(A;\ \rho);\ \cup, \cap)$。当上述拟序 ρ 是反对称的，(A, ρ) 就是一个偏序集。

对于有限格 L，令 $\mathrm{Ji}(L)$ 表示并不可约元的集合of$L$；若元素 L 恰有一个下覆盖，则称其为并不可约。（对偶定义的）交不可约元的集合记作 $\mathrm{Mi}(L)$。元素 $x \in \mathrm{Ji}(L)$ 的唯一下覆盖记作 x_*。我们将经常使用以下记号，其中 pr 源自“pair”（对）：

$$\text{对于 } x \in \mathrm{Ji}(L),\ \text{令 } \mathrm{pr}(x),\ \text{或在可能引起混淆时令 } \mathrm{pr}_L(x),\ \text{表示 } (x_*,\ x)。 \tag{3.2}$$

请注意，如果 x 不是并不可约元素，那么记号 $\mathrm{pr}(x)$ 就没有意义。

[3]借助计算机辅助，还可以求出小 n 的一些其他值，但这种做法不可能走得太远。未来或许也能通过数十页的理论考量求出一些其他值。然而，在可预见的未来，例如计算 $\mathrm{lcd}(10^{10}, 10^{12})$，似乎不太可能。

对于 x，$y \in L$，$x \parallel y$ 表示 x 和 y 不可比较，也就是说，$x \not\leq y$ 和$y \not\leq x$。如果一个元素 $x \in L$ 至少有两个下覆盖，则称其为并可约；此类元素的集合记为 $\mathbf{Jr}(L)$，而 $\mathbf{Mr}(L)$ 表示（对偶定义的）交可约 元素的集合。由于 $0 \notin \mathbf{Ji}(L) \cup \mathbf{Jr}(L)$ 且 $1 \notin \mathbf{Mi}(L) \cup \mathbf{Mr}(L)$，

$$|L| = |\mathrm{Ji}(L)| + |\mathrm{Jr}(L)| + 1 = |\mathrm{Mi}(L)| + |\mathrm{Mr}(L)| + 1. \tag{3.3}$$

根据有限分配格的经典结构定理，

$$D \cong \mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(D); \leq) \tag{3.4}$$

对每个这样的格 D，其中“$\leq$”表示格 D 的格序在 $\mathbf{Ji}(D)$ 上的限制。对于有限格 L 中的元素 a 和 b，将使 a 和 b 合并的最小同余记作 $\mathbf{con}(a, b)$，或者在可能产生歧义时记作 $\mathbf{con}_L(a, b)$。特别地，对于 $b \in \in \mathbf{Ji}(L)$，$\mathbf{con}(\mathbf{pr}(b)) = \mathbf{con}(b_*, b)$。

令 $\mathbf{Edge}(L)$ 表示 L 的边集（边的集合）；也就是说，$\mathbf{Edge}(L) := \{(a, b) : a, b \in L$ 且 $a \prec b\}$。换言之，$\mathbf{Edge}(L) := \{(a, b) : [a, b]$ 是 $L\}$ 的一个素区间。我们回顾 Gr¨atzer [14] 中的以下事实；另见 Gr¨atzer [15] 的第一句话：对于每个有限格 L，

$$\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L)) = \{\mathrm{con}(a, b) : (a, b) \in \mathrm{Edge}(L)\}. \tag{3.5}$$

我们在 $\mathbf{Edge}(L)$ 上定义拟序 $\nu(L)$，方法如下：

$$(x, y) \leq_{\nu(L)} (u, v) \iff \mathrm{con}(x, y) \leq \mathrm{con}(u, v) \tag{3.6}$$

对于 (x, y)，$(u, v) \in \mathbf{Edge}(L)$。结合 (3.4)、(3.5)、(3.6)，以及格的同余格总是分配格这一事实，我们得到[4]：

$$\mathrm{Con}(L) \cong \mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L)); \leq) \quad \text{and} \quad \mathrm{Con}(L) \cong \mathrm{Idl}(\mathrm{Edge}(L); \nu(L)) \tag{3.7}$$

对于每个有限格 L 都成立。由于单靠 (3.7) 不足以满足我们的目的，我们还需要一个额外的概念。$\mathbf{Edge}(L)$ 的子集 B 称为同余决定边集，如果对于每个 $(x, y) \in \mathbf{Edge}(L)$，都存在一条边 $(u, v) \in B$，使得 $(u, v) \equiv_{\nu(L)} (x, y)$，也就是说，$\mathbf{con}(u, v) = \mathbf{con}(x, y)$。综合以上事实，不难证明（这一点已在 Cz´edli [8] 的 (2.8) 之前证明）：对于有限格 L 的每个同余决定边集 B，

$$\mathrm{Con}(L) \cong \mathrm{Idl}(B; \nu(L)). \tag{3.8}$$

对于 $a \leq b$和 $c \leq d$属于 L，$[a, b]$和 $[c, d]$是透视区间，当且仅当 $[a, b] \nearrow_{\mathrm{p}} [c, d]$，这意味着 $b \vee c = d$和 $b \wedge c = a$；或者 $[a, b] \searrow_{\mathrm{p}} [c, d]$，这意味着$[c, d] \nearrow_{\mathrm{p}} [a, b]$。我们用 $\sim_{\mathrm{p}}$表示区间集上的透视关系，因此 $[a, b] \sim_{\mathrm{p}} [c, d]$ 意味着 $[a, b] \nearrow_{\mathrm{p}} [c, d]$ 或 $[a, b] \searrow_{\mathrm{p}} [c, d]$。众所周知，

$$\text{if } [a, b] \sim_{\mathrm{p}} [c, d], \text{ then } \mathrm{con}(a, b) = \mathrm{con}(c, d). \tag{3.9}$$

引理 3.1. 在有限格 L中，设 a、b、$x \in L$ 满足 $a \parallel b$、$b \prec a \vee b$和$a \wedge b \prec x \leq a$。则 $[a \wedge b, x] \nearrow_{\mathrm{p}} [b, a \vee b]$ 且$\mathrm{con}(a \wedge b, x) = \mathrm{con}(b, a \vee b)$。

证明。根据 (3.9)，只需证明 $[a \wedge b, x] \nearrow_{\mathrm{p}} [b, a \vee b]$。若有$x \leq b$，那么 $x \leq a \wedge b$ 将导致矛盾。因此 $x \not\leq b$。由于 $a \wedge b = x \wedge a \wedge b \leq x \wedge b < x$ 和 $a \wedge b \prec x$，我们得到 $x \wedge b = a \wedge b$。由 $x \not\leq b$，我们还得到$b < x \vee b$，从而由 $b < x \vee b \leq a \vee b$ 和 $b \prec a \vee b$ 可得 $x \vee b = a \vee b$。因此，$[a \wedge b, x] \nearrow_{\mathrm{p}} [b, a \vee b]$，证明完毕。□

[4]或者，（3.7）由（2.1）和（2.8）的一个特例组成，二者均出自 Cz´edli [8]。

为了以略微弱化（但更简单）的形式表述 Gr¨atzer [15] 的结果，我们回顾下面的引理。

引理 3.2 (Gr¨atzer [15])。

(A) 对于有限格 L 及边 (u,v)、$(p,q) \in \mathit{Edge}(L)$，有 $(p,q) \leq_{\nu(L)} (u,v)$；等价地，$\mathit{con}(p,q) \leq \mathit{con}(u,v)$ 当且仅当存在一个数 $k \in \mathbb{N}_0$、一个由边 (x_0,y_0)、(x_1,y_1)、…、(x_k,y_k) 构成的序列，以及一个由区间 $[\dot{x}_1,\dot{y}_1]$、…、$[\dot{x}_k,\dot{y}_k]$ 构成的序列，使得 $(x_0,y_0) = (u,v)$、$(x_k,y_k) = (p,q)$，且对每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，都有 $[x_{i-1},y_{i-1}] \sim_{\mathrm{p}} [\dot{x}_i,\dot{y}_i] \supseteq [x_i,y_i]$。

(B) 第(A) 部分的“若”方向在较弱的假设下仍然成立，即 $x_i < y_i$ 对于 $i \in \{0,\dots,k\}$，而不必要求这些对 (x_i,y_i) 是边。

对于预序集（$A;\rho$）中的 u，$\mathrm{idl}(u)$ 或 $\mathrm{idl}_A(u)$ 表示 $\{x \in A\colon x \leq_\rho u\}$，而 $\mathrm{fil}(u)$ 或 $\mathrm{fil}_A(u)$ 表示 $\{x \in A\colon u \leq_\rho x\}$。这些记法也适用于偏序集和格。对于有限格 L 的一条边 $(a,b) \in \mathrm{Edge}(L)$，$\mathrm{Foot}(a,b)$ 或 $\mathrm{Foot}_L(a,b)$ 表示 $\mathrm{idl}(b) \setminus \mathrm{idl}(a)$ 的极小元集合；我们常用 b' 或 b'' 表示其中的元素。下面这段如今已广为人知的文字基本取自 Day [11, Page 71]。

对于 $(a,\ b) \in \mathrm{Edge}(L)$，令 $b' \in \mathrm{Foot}(a,\ b)$。显然，$b' \neq 0$。若 x 和 y 是 b'的不同下覆盖，那么（由 b'的极小性）它们都属于 $\mathrm{idl}(a)$，因此$b' = x \vee y \in \mathrm{idl}(a)$将导致矛盾。故

$$\text{for every } (a,b) \in \mathrm{Edge}(L),\ \text{we have } \mathrm{Foot}(a,b) \subseteq \mathrm{Ji}(L). \tag{3.10}$$

注意，在某些情形下，(3.10) 只会被隐式使用。对于 $b' \in \mathrm{Foot}(a,\ b)$，覆盖关系 $a \prec b$和 $b'_* \prec b'$很容易推出 $[a,b] \searrow_{\mathrm{p}} [b'_*,b']$。因此，(3.9) 推出 $\mathrm{con}(b'_*,\ b') = \mathrm{con}(a,\ b)$。这个等式、(3.5) 和 (3.10) 表明

$$\mathrm{con}(\mathrm{pr}(b')) = \mathrm{con}(a,b) \text{ for all } (a,b) \in \mathrm{Edge}(L) \text{ and } b' \in \mathrm{Foot}(a,b), \tag{3.11}$$

$$\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L)) = \{\mathrm{con}(\mathrm{pr}(x))\colon\ x \in \mathrm{Ji}(L)\},\ \text{并且} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{pr}(\mathrm{Ji}(L)) := \{\mathrm{pr}(x) : x \in \mathrm{Ji}(L)\} \text{ is a congruence-determining edge set.} \tag{3.13}$$

如 (3.13) 所示，可以通过 $\mathrm{Ji}(L)$ 而非 $\mathrm{Edge}(L)$ 来研究 $\mathrm{Con}(L)$，例如 Day [11], Freese [13], 和 Nation [20, 定理 316] 所展示的那样。尽管如此，我们通常还是依赖 $\mathrm{Edge}(L)$，因为 L 的“关键部分”往往缺少并不可约元，而 $\mathrm{Edge}(L)$ 能提供更好的洞见；例如，参见引理 4.1 证明中的 $H \cong H_2$ 情形。我们需要下面这个引理。

引理 3.3. 给定一个有限格 L，令 $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in \mathrm{Edge}(L)$。取 $v'_1 \in \mathrm{Foot}(u_1,v_1)$ 和 $v'_2 \in \mathrm{Foot}(u_2,v_2)$。假设要么 $u_1 \leq u_2$ 且 $v_1 \not\leq v_2$，要么 $v_1 \leq u_2$。那么 $v'_1 \neq v'_2$。

证明。反设 $v'_1 = v'_2$，这与假设矛盾。对于 $i \in \{1,2\}$, $v_i = u_i \vee v'_i$。若 $u_1 \leq u_2$ 但 $v_1 \not\leq v_2$，则 $v_1 = v'_1 \vee u_1 = v'_2 \vee u_1 \leq v'_2 \vee u_2 = v_2$，这与 $v_1 \not\leq v_2$ 矛盾。若 $v_1 \leq u_2$，则 $u_1 \prec v_1 \leq u_2$ 推出 $u_2 = u_2 \vee u_1$，因此
$v_2 = u_2 \vee v'_2 = u_2 \vee v'_1 = u_2 \vee u_1 \vee v'_1 = u_2 \vee v_1 = u_2$ 矛盾，证明完毕。□

下面的引理显然，因此省略其证明。

引理 3.4。由三个两两不可比较的元素生成的每个交半格，都同构于图 *6* 所示的某一个。

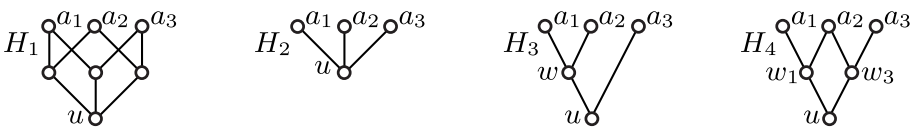


FIGURE 6. 由三元素反链生成的交半格

引理 3.5。 对于有限格 L，若 $|\mathrm{Jr}(L)| \geq 4$ 或 $|\mathrm{Mr}(L)| \geq 4$，则$\mathrm{cd}(L) \leq 4/64$。类似地，若 L 有一个至多包含$(|L|-5)$个元素的同余决定边集，则$\mathrm{cd}(L) \leq 4/64$。

证明。 令 $n := |L|$。为验证第二部分，设 B 为一个至多（$n-5$）元素的同余决定边集。则根据 (3.8)， $|\mathrm{Con}(L)| \leq 2^{n-5}$。因此 L的同余密度为$\leq 2^{n-5}/2^{n-1} = 4/64$, 正如所要求的。证明第一部分时，根据对偶性[5]，，不妨设 $|\mathrm{Jr}(L)| \geq 4$。于是 $\mathrm{pr}(\mathrm{Ji}(L))$ 是一个由 (3.13) 可知的同余决定边集，并且根据 (3.3) 至多有 $n-5$ 个元素。因此，前面已经证明的第二部分适用，从而完成引理 3.5 的证明。□

采用 (3.6) 中引入的记号，并设 $B \subseteq \mathrm{Edge}(L)$，如果对于每个 x， $y \in B$, $x \leq_{\nu(L)} y$都蕴含$x = y$，我们称拟序集（$B; \nu(L)$）为一个反链。

引理 3.6。 设 L 是一个 n 元格， $B \subseteq$边集(L) 是一个确定同余的边集，$|B| \leq n-4$，且 $(B; \nu(L))$ 不是反链。那么 $\mathrm{cd}(L) \leq 6/64$。

证明。 选取 $e, d \in B$，使得 $d \leq_{\nu(L)} e$ 且 $d \neq e$。那么 B 恰有 $2^{|B|-2}$个子集 X 满足 $e \in X$ 但不满足 $d \notin X$。利用 (3.8) 以及这些子集 X不是理想这一事实,

$$|\mathrm{Con}(L)| = |\mathrm{Idl}(B; \nu(L))| \leq 2^{|B|} - 2^{|B|-2} = 3 \cdot 2^{|B|-2} \leq 3 \cdot 2^{n-6}.$$

因此 $\mathrm{cd}(L) \leq 3 \cdot 2^{n-6}/2^{n-1} = 6/64$，由此完成引理 3.6 的证明。 □

有时，以下陈述比引理 3.6 更方便使用。

引理 3.7。 设 L 是一个有限格，且 $|\mathrm{Jr}(L)| \geq 3$，并设 (u_1, v_1),$(u_2, v_2) \in$边集(L)，使得 $\mathrm{con}(u_1, v_1)$ 与 $\mathrm{con}(u_2, v_2)$ 可比较。若 $u_1 \leq u_2$和 $v_1 \not\leq v_2$，或 $v_1 \leq u_2$，则 $\mathrm{cd}(L) \leq 6/64$。

证明。 令 $B :=$pr(Ji(L))。由 (3.13)， B 是一个同余决定边集；由 (3.3), $|B| \leq n-4$。取 $v_1' \in \mathrm{Foot}(u_1, v_1)$ 和 $v_2' \in \mathrm{Foot}(u_2, v_2)$。引理 3.3 和 (3.10) 推出 $v_1' \neq v_2'$ 以及 $v_1', v_2' \in \mathrm{Ji}(L)$。因此， $\mathrm{pr}(v_1')$ 和 $\mathrm{pr}(v_2')$ 是 B 中不同的元素。由于 $\mathrm{con}(u_1, v_1)$ 和 $\mathrm{con}(u_2, v_2)$ 可比较，根据 (3.6) 和 (3.11)， $\mathrm{pr}(v_1')$ 和 $\mathrm{pr}(v_2')$ 在 $(B; \nu(L))$ 中也可比较。因此引理 3.6 适用，引理 3.7 的证明至此完成。□

对于 $2 \leq k \in \mathbb{N}^+$，我们用 M_k 表示由元素 0 和 1 以及 k 个原子构成的 $(k+2)$ 元素格；对于 $k \in \{2, 3, 4\}$， M_k 如图 1 右侧所示。

[5]由于 $\mathrm{Con}(L) = \mathrm{Con}(L^{\mathrm{dual}})$，对偶原理适用。

引理 3.8. 设 L 是一个有限格，且 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$。对于 $3 \leq k \in \mathbb{N}^+$，令 $S = \{u, a_1, \ldots, a_k, v\}$ 为 L 的一个（$k+2$）元素子格，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$u \prec a_i < v$。（特别地，$S \cong M_k$。）那么 $k + |\mathrm{Jr}(L)| \leq 4$。

证明。假设条件成立。对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$，取一个元素 $b_i \in L$ such that$a_i \leq b_i \prec v$，再取一个元素 $a'_i \in \mathsf{Foot}(u, a_i)$。由引理 3.3，$|\{a'_1, \ldots, a'_k\}| = k$。引理 3.1 的对偶表明，对于所有满足 $i \neq j$ 的 $i, j \in \{1, \ldots, k\}$，$\mathsf{con}(u, a_i) = \mathsf{con}(b_j, v)$。因此，$\mathsf{con}(u, a_1) = \mathsf{con}(b_3, v) = \mathsf{con}(u, a_2) = \cdots = \mathsf{con}(u, a_k)$。于是，根据 (3.11)，$\mathsf{con}(\mathsf{pr}(a'_1)) = \cdots = \mathsf{con}(\mathsf{pr}(a'_k)$。根据 (3.6)，这意味着对于所有 $i, j \in \{1, \ldots, k\}$，$\mathsf{pr}(a'_i) \equiv_{\nu(L)} \mathsf{pr}(a'_j)$。将这一事实与 (3.13) 结合，可得$B := \mathsf{pr}(\mathsf{Ji}(L)) \setminus \{\mathsf{pr}(a'_2) \ldots, \mathsf{pr}(a'_k)\}$ 是一个同余决定边集。由$|\{a'_1, \ldots, a'_k\}| = k$和 (3.10)，$|B| = |\mathsf{Ji}(L)| - (k-1)$。考虑到 (3.3)，并分别将 $|L|$ 和 $|\mathsf{Jr}(L)|$ 记为 n和 j，我们有 $|B| = n - 1 - j - (k-1) = n - j - k$。如果 $k + j \geq 5$，那么 $|B| \leq n - 5$ 和引理 3.5 将推出 $\mathsf{cd}(L) \leq 4/64$，这就产生了矛盾。因此，整数 $k + j$ 至多为 4，证毕。引理 3.8 的证明完成。□

对于有限格 L 的子格 S，如果存在一些子格 T_0、T_1、.....、T_k，其中某个 $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$，使得 L 是 S的 可拆卸扩张，那么我们称之为

$$S = T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_{k-1} \subset T_k = L \text{ and } |T_i \setminus T_{i-1}| = 1 \text{ for } i \in \{1, \ldots, k\}. \quad (3.14)$$

回忆 Cz´edli [9] 的结果：对于有限格 L 的任意子格 S，

$$\text{if } L \text{ is a dismantlable extension of } S, \text{ then } \mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S). \quad (3.15)$$

下面给出一个引理，因为我们将反复用到它。

引理 3.9。若 S 是有限格 L的一个非空子集，则以下两个断言成立。

(1) 若 $\mathsf{Mr}(L) \subseteq S$ 且 $\mathsf{Jr}(L) \subseteq S$，则 S 是 L 的子格，且 $\mathsf{cd}(L) \leq \mathsf{cd}(S)$。(2) 若 $\mathsf{cd}(L) > 4/64$、$|S \cap \mathsf{Jr}(L)| \geq 3$，且 $|S \cap \mathsf{Mr}(L)| \geq 3$，则 S是 L的子格，$\mathsf{Mr}(L) \subseteq S$，$\mathsf{Jr}(L) \subseteq S$，$|\mathsf{Mr}(L)| = |\mathsf{Jr}(L)| = 3$，且 $\mathsf{cd}(L) \leq \mathsf{cd}(S)$。

证明。假设 $\mathsf{Mr}(L) \subseteq S$ 且 $\mathsf{Jr}(L) \subseteq S$。我们需要证明，对于每个$x$，$y \in S$，并 $x \vee_L y$（在 L中取）属于 S。若 $x \parallel y$，则 $x \vee_L y \in \mathsf{Jr}(L) \subseteq S$。对于 $x \nparallel y$，$x \vee_L y \in \{x, y\} \subseteq S$。因此，$S$对并运算封闭。由对偶原理，$S$是 L 的子格。显然，L 是S的可拆卸扩张。因此，根据 (3.15)，$\mathsf{cd}(L) \leq \mathsf{cd}(S)$。这就证明了第 (1) 部分。

为证明第 (2) 部分，注意到 $\mathsf{cd}(L) > 4/64$，且引理 3.5 表明 $|\mathsf{Jr}(L)| \leq 3$ 和 $|\mathsf{Mr}(L)| \leq 3$。这些不等式、$|S \cap \mathsf{Jr}(L)| \geq 3$ 以及 $|S \cap \mathsf{Mr}(L)| \geq 3$ 推出 $\mathsf{Mr}(L) \subseteq S$ 且 $\mathsf{Jr}(L) \subseteq S$。因此，已证明的第 (1) 部分推出引理 3.9 的第 (2) 部分。□

以下引理也将用到。

引理 3.10. 假设 H 和 K 是有限格，$K \in \mathrm{Circ}(k)$ 满足 $4 \leq k \in \mathbb{N}^+$，且 L是 H 和 K 的边粘合（顺序不限）。那么

(1) $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(H)/2$, *and*
(2) $\mathrm{cd}(L) = \mathrm{cd}(H)/2$ *if and only if* $k = 4$ *(that is, if* $K = B_4$*).*

证明。由 Cz´edli [8, 引理 4] 可知，$k = 4$ 蕴含 $\mathsf{cd}(L) = \mathsf{cd}(H)/2$。

接下来，令 $k = 5$，也就是说，$K = N_5$；我们需要证明 $\mathsf{cd}(L) < \mathsf{cd}(H)/2$。根据对偶性，不妨假设 N_5 是粘合中的“上格”。如图

1 所示，$(a,\ c) \in \mathrm{Edge}(N_5)$ 表示 N_5的所谓幔边 。由于 $c \in L$ 位于 H之外， $L' := L \setminus \{c\}$ 是 H 与 $B_4 = N_5 \setminus \{c\}$的边粘合。我们已经知道 $\mathrm{cd}(L') = \mathrm{cd}(H)/2$，因此只需证明 $\mathrm{cd}(L) < \mathrm{cd}(L')$。令 $B' := \mathrm{pr}(\mathrm{Ji}(L'))$，并令 $B := \mathrm{pr}(\mathrm{Ji}(L))$。由于 $\mathrm{Ji}(L) = \mathrm{Ji}(L') \cup \{c\}$，我们有 $B = B' \cup \{\mathrm{pr}(c)\} = B' \cup \{(a,\ c)\}$。我们声称，对于任意 X，

$$\text{if } X \in \mathrm{Idl}(B; \nu(L)), \text{ then } X \cap B' \in \mathrm{Idl}(B'; \nu(L')). \tag{3.16}$$

对于 $\mathrm{pr}(u) \in X \cap B'$ 和 $\mathrm{pr}(v) \in B'$，假设 $\mathrm{pr}(v) \leq_{\nu(L')} \mathrm{pr}(u)$。此处注意， u和 v 均不等于并可约元 $1_L = 1_{L'}$，因此 $\mathrm{pr}(u)$ 和 $\mathrm{pr}(v)$ 在 L 中的含义与在 L'中相同。不等式 $\mathrm{pr}(v) \leq_{\nu(L')} \mathrm{pr}(u)$ 表示 $\mathrm{pr}(v) = (v_*, v) \in \mathrm{con}_{L'}(u_*, u) = \mathrm{con}_{L'}(\mathrm{pr}(u))$。根据引理 3.2(A)，边与区间序列 L' 证明了这一归属。尽管边 $(x_i, y_i) \in \mathrm{Edge}(L')$ 未必是 L的边，引理 3.2(B)意味着 $\mathrm{pr}(v) \in \mathrm{con}_L(\mathrm{pr}(u))$，也就是说，$\mathrm{pr}(v) \leq_{\nu(L)} \mathrm{pr}(u)$。利用 $X \in \mathrm{Idl}(B; \nu(L))$，可得 $\mathrm{pr}(v) \in X$。因此，$\mathrm{pr}(v) \in X \cap B'$，从而证明了 (3.16)。

根据 (3.16)，赋值 $X \mapsto X \cap B'$ 是一个函数

$$f \colon \mathrm{Idl}(B; \nu(L)) \to \mathrm{Idl}(B'; \nu(L')).$$

由于 $B \setminus B' = \{\mathrm{pr}(c)\}$，每个 $Y \in \mathrm{Idl}(B';\ \nu(L'))$ 至多有两个 f-原像： Y和 $Y \cup \{\mathrm{pr}(c)\}$。因此，

$$|\mathrm{Idl}(B; \nu(L))| \leq 2 \cdot |\mathrm{Idl}(B'; \nu(L'))|, \tag{3.17}$$

并且 (3.17) 中的不等式

当且仅当每个 $Y \in \mathrm{Idl}(B';\ \nu(L'))$ 恰有两个 f-原像时， $\iff$是等式。现在,(3.18)考虑图 1 所示的元素 $b \in N_5$ ，并选取满足 $\mathrm{pr}(b) \in Y$ 的 $Y \in \mathrm{Idl}(B'; \nu(L'))$；例如，我们可以取 $Y := B'$。这里 $\mathrm{pr}(b) = (b_*, b) = (0_{N_5}, b)$。由 $[b_*, b] \nearrow_{\mathrm{p}} [a, 1]$ 和 (3.9)，我们得到 $(a, 1) \in \mathrm{con}_L(\mathrm{pr}(b))$。由于任意格同余的块都是凸子集， $a \leq c \leq 1$ 以及 a 的 $\mathrm{con}_L(\mathrm{pr}(b))$-块的凸性推出 $\mathrm{pr}(c) = (a, c) \in \mathrm{con}_L(\mathrm{pr}(b))$ 。因此 $\mathrm{con}_L(\mathrm{pr}(c)) \leq \mathrm{con}_L(\mathrm{pr}(b))$，这意味着 $\mathrm{pr}(c) \leq_{\nu(L)} \mathrm{pr}(b)$。于是，不包含 $\mathrm{pr}(c)$ 的 Y 不可能是 f 的原像，因此 Y 的唯一 f-原像是 $Y \cup \{\mathrm{pr}(c)\}$。由此，(3.17) 和 (3.18) 推出 $|\mathrm{Idl}(B;\ \nu(L))| < 2 \cdot |\mathrm{Idl}(B'; \nu(L'))|$。根据 (3.8)，这个不等式转化为 $|\mathrm{Con}(L)| < 2 \cdot |\mathrm{Con}(L')|$ 。因此，利用 $|L| - 1 = |L'|$，

$$\mathrm{cd}(L) = |\mathrm{Con}(L)|/2^{|L|-1} < 2 \cdot |\mathrm{Con}(L')|/2^{|L|-1} = |\mathrm{Con}(L')|/2^{|L'|-1} = \mathrm{cd}(L'),$$

证明关于 $k = 5$ 的引理。

最后，假设 $k \geq 6$。在 K 中，我们可以找到一个由 $(k-5)$ 个双重不可约元组成的集合 U ，使得 $U \cap H = \emptyset$ 且 $K' := K \setminus U \in \mathrm{Circ}(5)$。于是， L 是其子格 $L' := L \setminus U$ 的可拆卸扩张，而 L' 是 H 与 K' 的边粘合。由于 $K' \in \mathrm{Circ}(5)$，因此 $K' \cong N_5$，我们已经知道 $\mathrm{cd}(L') < \mathrm{cd}(H)/2$。因此，利用 (3.15) 得出的 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(L')$，可得 $\mathrm{cd}(L) < \mathrm{cd}(H)/2$，从而完成引理 3.10 的证明。□

我们以如下约定结束本节，该约定将用于论文中的图示。

约定 3.11。 如果图示中包含线型不同的边，那么

- 一条从顶点 x 指向顶点 y 的向上细边表示 $x < y$,
- 一条从 x 到 y 的粗边表示 $x \prec y$，并且
- 从 x 到 y 的点线边表示 $x \leq y$。

在只包含细边的图示中，从 x 向上指向 y 的边既可以表示覆盖 $x \prec y$ （通常如此），也可以表示——当较大的格L 中只有少数元素被描绘出来时—— $x < y$。如果我们用黑色希腊字母标记一条边（a，b），那么只要 $\mathsf{con}(x,\ y) = \mathsf{con}(a,\ b)$，我们也可以用相同的红色（黑白印刷时为灰色）希腊字母标记一条边（x，y）或一个区间 $[x, y]$。

4. The case of a three-element antichain

由于一个元素的下覆盖构成反链，本节接下来的引理讨论一种特殊情形。关于 M_3，见图 1。

引理 4.1. 设 L 是一个有限格，且 $6/64 < \mathrm{cd}(L)$，$v \in L$，并且 v至少有三个下覆盖。则$\mathrm{cd}(L) \leq 8/64$，且 v 恰有三个下覆盖。此外，记这些下覆盖的交为 u ，区间$[u, v]$ 与 M_3同构。

证明。 Cz´edli [8] 的引理 6 指出，若 L 有一个三元素反链，则 $\mathsf{cd}(L) \leq 8/64$。因此 $\mathsf{cd}(L) \leq 8/64$，得证。（ [8] 的引理 5 给出的较弱结论也足以推出这一结论。）

令 $n := |L|$。我们的计划是构造一个较小的同余决定边集。我们从 $B_0 := \mathsf{pr}(\mathsf{Ji}(L))$ 开始。利用 (3.13) 和 0，$v \notin \mathsf{Ji}(L)$，我们得到

$$B_0 \text{ is a congruence-determining edge set and } |B_0| \leq n - 2. \tag{4.1}$$

设 a_1，a_2，a_3 是 v的互不相同的下覆盖，并将 $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$ 记作 u。用 H 表示由 $\{a_1, a_2, a_3\}$生成的交半格。根据引理 3.4，H 同构于图 6 所示的四种交半格之一。根据 H，需要考虑四种情形。

首先，假设 $H \cong H_1$；见图 6。于是 $H \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ 是 $\mathsf{Mr}(L)$ 的一个四元素子集，因此 $|\mathsf{Mr}(L)| \geq 4$。由此，引理 3.5 表明 $\mathsf{cd}(L) \leq 4/64$，这与 $6/64 < \mathsf{cd}(L)$ 矛盾。因此排除情形 $H \cong H_1$。

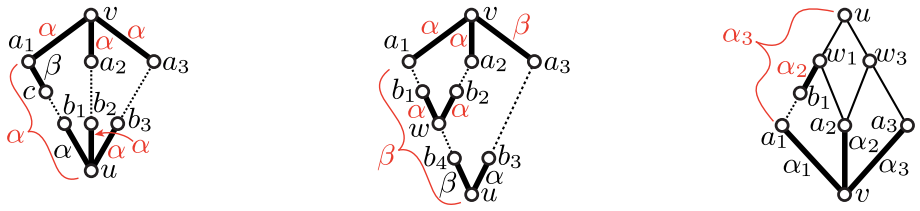


Figure 7. 引理 4.1 的证明示意图

接下来，假设 $H \cong H_2$。那么 $S := \{u, a_1, a_2, a_3, v\}$ 是 L 的子格，且与 M_3 同构。我们声称，S 是 L 的保覆盖子格，也就是说，对 $i \in \{1, 2, 3\}$，有 $u \prec a_i \prec v$。反设 S 不是保覆盖子格。那么，由对称性，不妨假设存在元素 b_1 和 c，使得 $u \prec b_1 \leq c \prec a_1$。图 7 左侧部分展示了这一情形；请注意，在此处以及后面的一些插图中，如果图示没有标注 L，那么 L 可能包含未显示的元素。对于 $i \in \{2, 3\}$，取一个元素 $b_i \in L$，使得 $u \prec b_i \leq a_i$。由于 $a_i \wedge a_j = u$，容易推出，对于互不相同的 i、$j \in \{1, 2, 3\}$，有 $b_i \parallel b_j$；此外，$a_1 \parallel b_2$ 且 $a_1 \parallel b_3$。将 $\mathsf{con}(u, b_1)$ 记为 α。多次应用引理 3.1 和 (3.9)，可得

$\alpha = \mathrm{con}(a_2,\ v) = \mathrm{con}(u,\ b_3) = \mathrm{con}(a_1,\ v) = \ldots$，也就是说，对于所有 i、$j \in \{1,2,3\}$，有 $\alpha = \mathrm{con}(u,\ b_i) = \mathrm{con}(a_j,\ v)$。

令 $\beta := \mathrm{con}(c, a_1)$。由于 $[a_2, v] \searrow_{\mathrm{p}} [u, a_1]$，由 (3.9) 可得 $(u, a_1) \in \alpha$。格同余的块总是凸子格。因此，a_1 的 α-块包含 c。于是 $(c, a_1) \in \alpha$，从而 $\beta \leq \alpha$。

请注意，像上一段中那样的论证，稍后会以更简洁的方式呈现；例如，可以写成“$[a_2, v] \searrow_{\mathrm{p}} [u, a_1] \supseteq [c, a_1]$推出 $\beta = \mathrm{con}(c, a_1) \leq \mathrm{con}(a_2, v) = \alpha$”。

对于 $i \in \{1,2,3\}$，取一个元素 $b'_i \in \mathrm{Foot}(u, b_i)$，再取一个 $a'_1 \in \mathrm{Foot}(c, a_1)$。由于对每个 $i \in \{1,2,3\}$，$\mathrm{con}(u, b_i) = \alpha$，因此由 (3.11)，每个 $\mathrm{con}(\mathrm{pr}(b'_i))$ 都是 α。将此与 (4.1) 结合，可得 $B_1 := B_0 \setminus \{\mathrm{pr}(b'_2), \mathrm{pr}(b'_3)\}$ 是一个确定同余的边集。由引理 3.3，

$$|\{\mathrm{pr}(a'_1), \mathrm{pr}(b'_1), \mathrm{pr}(b'_2), \mathrm{pr}(b'_3)\}| = |\{a'_1, b'_1, b'_2, b'_3\}| = 4.$$

这个等式、(3.10) 和 (4.1) 表明 $|B_1| = |B_0| - 2 \leq n - 4$，并且 $\mathrm{pr}(a'_1)$ 和 $\mathrm{pr}(b'_1)$ 是 B_1 中不同的元素。由 (3.11)，$\mathrm{con}(\mathrm{pr}(a'_1)) = \beta$ 且 $\mathrm{con}(\mathrm{pr}(b'_1)) = \alpha$，因此 $\beta \leq \alpha$ 变为 $\mathrm{pr}(a'_1) \leq_{\nu(L)} \mathrm{pr}(b'_1)$，从而 $(B_1,\ \nu(L))$ 不是反链。因此，由引理 3.6 可得 $\mathrm{cd}(L) \leq 6/64$，这就导出了矛盾。由此证明，$S = \{u, a_1, a_2, a_3, v\}$ 是 L 的保覆盖子格。

接下来，我们证明 $[u, v] = S$。反设 $S \subset [u, v]$，并取一个极小元素 $a_4 \in [u, v] \setminus S$。由于 S 是保覆盖子格，我们有 $a_4 \parallel a_i$ 对于 $i \in \{1,2,3\}$。因此，对于 $i \in \{1,2,3\}$，覆盖关系 $u \prec a_i$ 和$a_i \prec v$推出 $a_i \vee a_4 = v$ 和 $a_i \wedge a_4 = u$。于是，$S' := S \cup \{a_4\}$ 是 L 的子格，并且 $S' \cong M_4$。由 a_4 的极小性可得 $u \prec a_4$。因此，根据引理 3.8，$4 + |\mathrm{Jr}(L)| \leq 4$，从而 $|\mathrm{Jr}(L)| = 0$。这与 $v \in \mathrm{Jr}(L)$ 矛盾，因此 $[u, v] = S$。所以 $[u, v] = S \cong M_3$。

最后，令 d 为 v 的一个下覆盖，使得 $d \notin \{a_1, a_2\}$；并令 w 和 T 分别表示 $a_1 \wedge a_2 \wedge d$ 以及由 $\{a_1, a_2, d\}$ 生成的子格。由于 $(d,\ w,\ T)$ 和 $(a_3,\ u,\ S)$ 起着相同的作用，$T = [w, u] \cong M_3$。因此 $d \in T = [w, v] \neq [a_1 \wedge a_2, v] = [u, v] = S$。这意味着 $d = a_3$，从而 v 只有三个下覆盖。因此，只要 $H \cong H_2$，引理 4.1 的陈述便成立。

接下来，我们处理 $H \cong H_3$ 的情形。除去指标编号，$a_1 \wedge a_3 = a_2 \wedge a_3 = u < a_1 \wedge a_2 =: w$；见图 7 中间部分。选取元素 b_1、……、$b_4 \in L$，使得 $w \prec b_1 \leq a_1$、$w \prec b_2 \leq a_2$、$u \prec b_3 \leq a_3$ 且 $u \prec b_4 \leq w$。此外，选取 $b'_1 \in \mathrm{Foot}(w, b_1)$、$b'_2 \in \mathrm{Foot}(w, b_2)$、$b'_3 \in \mathrm{Foot}(u, b_3)$ 和 $b'_4 \in \mathrm{Foot}(u, b_4)$。定义 $\alpha := \mathrm{con}(u, b_3)$ 以及 $\beta := \mathrm{con}(u, b_4)$。利用引理 3.1 和 (3.9) 三次，对于 $i \in \{1,2\}$，我们得到 $\mathrm{con}(w, b_i) = \mathrm{con}(a_{3-i}, v) = \alpha$，以及 $\mathrm{con}(a_3, v) = \beta$。因此，由 (3.11)，对于 $i \in \{1,2,3\}$，$\mathrm{con}(\mathrm{pr}(b'_i)) = \alpha$。此处请注意，为求简洁，应用 (3.11) 时通常不再显式说明。由于 $[a_3, v] \searrow_{\mathrm{p}} [u, a_1] \supseteq [w, b_1]$，我们有 $\alpha = \mathrm{con}(w, b_1) \leq \mathrm{con}(a_3, v) = \beta$。因此，$\mathrm{con}(\mathrm{pr}(b'_3)) = \alpha \leq \beta = \mathrm{con}(\mathrm{pr}(b'_4))$。也就是说，$\mathrm{pr}(b'_3) \leq_{\nu(L)} \mathrm{pr}(b'_4)$。

由于 $b_1 \leq b_3$ 会导致 $w \leq b_1 = b_1 \wedge b_3 \leq a_1 \wedge a_3 = u$，而 $b_3 \leq b_1$ 会导致 $b_3 = b_1 \wedge b_3 \leq a_1 \wedge a_3 = u$，因此有 $b_1 \parallel b_3$。类似地，$b_2 \parallel b_3$。这些事实、显然的可比性和不可比性（如 $b_1 \parallel b_2$ 和 $b_4 \leq w$），以及引理 3.3 表明

$$|\{\mathrm{pr}(b'_1), \mathrm{pr}(b'_2), \mathrm{pr}(b'_3), \mathrm{pr}(b'_4)\}| = |\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}| = 4. \tag{4.2}$$

结合 (3.10)、$\mathrm{con}(\mathrm{pr}(b_i'))=\alpha$ for $i\in\{1,2,3\}$ 这一事实、(4.1) 和 (4.2)，可得 $B_1:=B_0\setminus\{\mathrm{pr}(b_1'),\mathrm{pr}(b_2')\}$ 是一个至多包含（$n-4$）个元素的、确定同余的边集，其中包含 $\mathrm{pr}(b_3')$ 和 $\mathrm{pr}(b_4')$。因此，$\mathrm{pr}(b_3')\le_{\nu(L)}\mathrm{pr}(b_4')$ 与引理 3.6 蕴含 $\mathrm{cd}(L)\le 6/64$，这产生矛盾。因此，情形 $H\cong H_3$不可能发生。

最后，我们处理当 $H\cong H_4$ 时的情形；见图 6。我们的目标是排除这一情形。由于 $\mathrm{Con}(L^{\mathrm{dual}})=\mathrm{Con}(L)$，我们可以在 $K:=L^{\mathrm{dual}}$ 中进行讨论，其中可约并元更容易处理。所有序论符号，如$\le$、$\vee$、$\prec$等，都将在 K 中理解。特别地，对 $i\in\{1,2,3\}$ 有 $v\prec a_i$，并且对 $i\in\{1,3\}$ 有$w_i:=a_i\vee a_2<a_1\vee a_3=:u$。该情形如图 7 的右部所示。显然，$|\mathrm{Jr}(K)|\ge 3$。取一个元素 $b_1\in K$ 使得 $a_1\le b_1\prec w_1$，并对 $i\in\{1,2,3\}$ 令 $\alpha_i:=\mathrm{con}(v,a_i)$。由 (3.9) 以及引理 3.1 的对偶，$\mathrm{con}(b_1,w_1)=\alpha_2$。由于 $[v,a_3]\nearrow_{\mathrm{p}}[a_1,u]\supseteq[b_1,w_1]$，我们得到 $\mathrm{con}(v,a_2)=\alpha_2=\mathrm{con}(b_1,w_1)\le\mathrm{con}(v,a_3)$。因此，引理 3.7 蕴含 $\mathrm{cd}(L)=\mathrm{cd}(K)\le 6/64$，这是一个矛盾，从而排除了情形 $H\cong H_4$。于是，引理 4.1 的证明完成。□

引理 4.2. 设 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 是有限格 L 中的一个三元素反链，且$\mathrm{cd}(L)>6/64$，并假设 $\mathrm{Cor}(L)\ncong M_3$。则由$\{a_1,a_2,a_3\}$ 生成的子格同构于 $N_{5,5}$ （如图 *4* 左侧所示）。

证明. 设 $n:=|L|$、$u:=a_1\wedge a_2\wedge a_3$ 以及 $v:=a_1\vee a_2\vee a_3$。用 $S^{\wedge}$ 和 $S^{\vee}$分别表示由 $\{a_1,a_2,a_3\}$生成的交半格与并半子格。由引理 3.4 及其对偶命题，$S^{\wedge}\in\{H_1,\dots,H_4\}$ 和 $S^{\vee}\in\{H_1^{\mathrm{dual}},\dots,H_4^{\mathrm{dual}}\}$（二者均在同构意义下理解）。有若干情形需要考虑。

情形1：我们假设 $S^{\wedge}\cong H_1$ 或 $S^{\vee}\cong H_1^{\mathrm{dual}}$。于是 $|\mathrm{Mr}(L)|\ge 4$ 或 $|\mathrm{Jr}(L)|\ge 4$，这意味着由引理 3.5 可得 $\mathrm{cd}(L)\le 4/64$，与假设 $\mathrm{cd}(L)>6/64$矛盾。因此，情形1不可能出现；也就是说，$S^{\wedge}\ncong H_1$ 且 $S^{\vee}\ncong H_1^{\mathrm{dual}}$。

情形2：$S^{\wedge}\cong H_2$ 或$S^{\vee}\cong H_2^{\mathrm{dual}}$。于是，由对偶性，我们不妨假设$S^{\vee}\cong H_2^{\mathrm{dual}}$。我们有 $v:=a_1\vee a_2=a_1\vee a_3=a_2\vee a_3$。对于 $i\in\{1,2,3\}$，取一个元素 $b_i\in L$，使得 $a_i\le b_i\prec v$。这些元素是 v 的不同下覆盖；事实上，若例如有 $b_1=b_2$，则会导致矛盾 $v=a_1\vee a_2\le b_1\vee b_2=b_1<v$。令 $u_0:=b_1\wedge b_2\wedge b_3$。由引理 4.1，$[u_0,v]\cong M_3$。特别地，对于 $i\in\{1,2,3\}$，有$u_0\prec b_i\prec v$。因此，由引理 3.8 及其对偶可得$|\mathrm{Jr}(L)|\le 1$ 且 $|\mathrm{Mr}(L)|\le 1$。结合 $u_0\in\mathrm{Mr}(L)$ 和 $v\in\mathrm{Jr}(L)$，可得 $\mathrm{Mr}(L)=\{u_0\}$ 且 $\mathrm{Jr}(L)=\{v\}$。若存在元素 $x\in L$，满足$x\parallel u_0$ 或 $x\parallel v$，则分别会推出 $x\wedge u_0\in\mathrm{Mr}(L)\setminus\{u_0\}=\emptyset$ 或 $x\vee v\in\mathrm{Jr}(L)\setminus\{v\}=\emptyset$，这是不可能的。因此不存在这样的 x。所以，u_0，$v\in\mathrm{Nar}(L)$ 且 $L=\mathrm{idl}(u_0)\dotplus[u_0,v]\dotplus\mathrm{fil}(v)$。这一粘合和分解，加上 $\mathrm{Mr}(L)=\{u_0\}$、$\mathrm{Jr}(L)=\{v\}$ 以及已证明的 $[u_0,v]\cong M_3$，意味着 $\mathrm{idl}(u_0)$ 和 $\mathrm{fil}(v)$ 是链，而且 $\mathrm{Cor}(L)=[u_0,v]\cong M_3$。这与我们的假设矛盾，因此情形2也不成立。

情形 3：$S^{\wedge}\cong H_4$ 或 $S^{\vee}\cong H_4^{\mathrm{dual}}$。利用对偶性，我们可以假设 $S^{\vee}\cong H_4^{\mathrm{dual}}$。经过下标置换，$b_1:=a_1\vee a_2<a_1\vee a_3=:v$，$b_3:=a_2\vee a_3<v$，且 $v=b_1\vee b_3$。由情形 1 和 2 可知，$S^{\wedge}\ncong H_1$ 且 $S^{\wedge}\ncong H_2$。因此，根据引理 3.4，$S^{\wedge}\cong H_3$ 或 $S^{\wedge}\cong H_4$。

首先，为了导出矛盾，我们假设 $S^{\wedge} \cong H_3$。令 c 为 $S^{\wedge} \setminus \{u, a_1, a_2, a_3\}$的唯一元素，其中 u 仍表示 $S^{\wedge}$中的最小元素。除对称性外， c 要么是 $a_1 \wedge a_2$，要么是 $a_1 \wedge a_3$。

反设 $c = a_1 \wedge a_3$；参见图 4 中间的格图。由于 $c \parallel a_2$（在 $S^{\wedge}$ 中，因此也在 L 中）， $c \vee a_2 \in \mathrm{Jr}(L)$。鉴于 $c \vee a_2 \leq a_1 \vee a_2 = b_1$、 $c \vee a_2 \leq a_3 \vee a_2 = b_3$ 和 $b_1 \parallel b_3$，我们得到 $c \vee a_2 \notin \{b_1, b_3, v\}$。因此， $\{c \vee a_2, b_1, b_3, v\}$ 是 $\mathrm{Jr}(L)$ 的一个四元素子集，由此引理 3.5 蕴含 $\mathrm{cd}(L) \leq 4/64$，这就产生了矛盾。因此 $c \neq a_1 \wedge a_3$。

因此 $c = a_1 \wedge a_2$，如图 4 右侧所示。于是 $b_2 := b_1 \wedge b_3 \geq a_2$，从而 $\{b_2, c, u\}$ 是 $\mathrm{Mr}(L)$ 的一个 3 元素子集。因此，由于 $\{b_1, b_3, v\}$ 是 $\mathrm{Jr}(L)$ 的一个 3 元素子集，引理 3.9(2) 得出： $S := \{u, v, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c\}$ 是 L 的子格，且 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S)$。注意，根据 a_2 是否等于 b_2， $|S|$ 为 8 或 9。我们断言

$$S \text{ is correctly depicted on the right of Figure 4.} \tag{4.3}$$

由于 S 是 L 的子格这一点本身并不能推出 (4.3)，因此我们在此提供一些细节。（稍后在类似情形下，我们通常会略去这些细节，只说论证与证明 (4.3) 的论证类似。）引理 3.9(2) 中“$\mathrm{Mr}(L) \subseteq S$、$\mathrm{Jr}(L) \subseteq S$ 以及 $|\mathrm{Mr}(L)| = |\mathrm{Jr}(L)| = 3$ 部分”，结合我们对 $S^{\vee}$ 和 $S^{\wedge}$ 的假设，足以如下验证 (4.3)。由 $S^{\vee}$，我们知道 $b_1 \parallel a_3$。因此 $b_1 \wedge a_3 \in \mathrm{Mr}(L) = \{b_2, c, u\}$。由于 $c \not\leq a_3$（即使在 $S^{\wedge}$ 中也是如此），且 $b_2 \not\leq a_3$（否则 $c \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3$ 会推出 $c \leq a_3$），所以 c 和 b_2 均不是 $b_1 \wedge a_3$。于是 $b_1 \wedge a_3 \in \{b_2, c, u\} \setminus \{c, b_2\}$，从而 $b_1 \wedge a_3 = u$。类似地，由于 $c \parallel a_3$ 蕴含 $c \vee a_3 \in \mathrm{Jr}(L) = \{b_1, b_3, v\}$，$\mathrm{Jr}(L)$ 中的元素只有 b_3 和 v 是 c 与 a_3 的公共上界；又由于 $b_3 \leq v$，我们得到 $c \vee a_3 = b_3$。最后，由于格运算是保序的（换言之，它们保持序关系），将已确立的等式与我们对 $S^{\vee}$ 和 $S^{\wedge}$ 的了解结合起来，便得到 (4.3)。

在 S 中进行运算， $[u, a_3] \nearrow_{\mathrm{p}} [c, b_3] \supseteq [c, a_2]$ 得到 $\mathrm{con}_S(c, a_2) \leq \mathrm{con}_S(u, a_3)$。因此，引理 3.7 与 (4.3) 共同蕴含 $\mathrm{cd}(L) \leq 6/64$，这是一个矛盾。从而， $S^{\wedge} \ncong H_3$。

其次，为了导出矛盾，假设 $S^{\wedge} \cong H_4$。对于 $\{1, 2, 3\}$ 的一个置换p，$a_{p(1)} \wedge a_{p(2)} \in S^{\wedge}$与 $a_{p(2)} \wedge a_{p(3)} \in S^{\wedge}$是不可比较的元素。因此，$(a_{p(1)} \wedge a_{p(2)}) \vee (a_{p(2)} \wedge a_{p(3)})$——它属于 $\mathrm{idl}(a_{p(2)})$——以及 b_1, b_3, v——它们不属于 $\mathrm{idl}(a_{p(2)})$——是 $\mathrm{Jr}(L)$ 的四个不同元素。因此，引理 3.5 蕴含 $\mathrm{cd}(L) \leq 4/64$，这与假设 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$ 相矛盾。从而，$S^{\wedge} \ncong H_4$。由于 $S^{\wedge}$ 的每一种可能性都导致了矛盾，我们得出结论：情形 3 不可能发生。

接下来，既然已经排除了每个三元素反链中的情形 1、2 和 3，就可得出 $S^{\wedge} \cong H_3$ 和 $S^{\vee} \cong H_3^{\mathrm{dual}}$。不失一般性（如有必要，可交换下标），我们可以假设 $b := a_1 \vee a_2 < v$，并且

$$\text{either } a_2 \wedge a_3 > u \text{ or } a_1 \wedge a_2 > u. \tag{4.4}$$

为了通过矛盾排除 (4.4) 中的第一种可能性，假设$c := a_2 \wedge a_3 > u$；参见图 8 左侧部分。我们声称，在这一假设下，

$$a_1 \vee c = b \quad \text{and} \quad b \wedge a_3 = c. \tag{4.5}$$

由对偶性，只需处理第一个等式。令 $x := a_1 \vee c$。为导出矛盾，假设 $x < b$；见图 8 中间的两个格图。

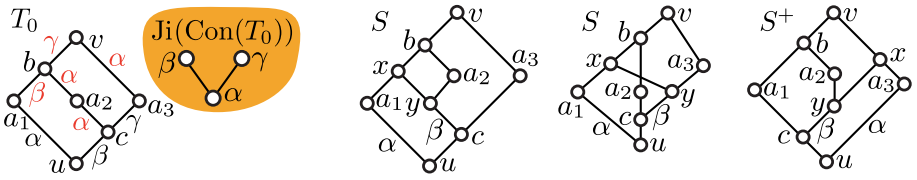


FIGURE 8. $S^{\wedge} \cong H_3$ 和 $S^{\vee} \cong H_3^{\text{dual}}$情形的图示

由于 $x \leq a_2$ 会导致 $a_1 \leq a_2$， $x \leq a_3$ 导致 $a_1 \leq a_3$， $a_2 \leq x$ 导致 $b \leq x$，而 $a_3 \leq x$导致 $v \leq x$，我们得到 $\{x, a_2, a_3\}$是一个 3 元反链。由于情形 1、2、3（针对每个 3 元反链）均已排除，由 $\{x, a_2, a_3\}$ 生成的交半格与 H_3同构。因此，利用 $a_2 \wedge a_3 = c = x \wedge c = x \wedge a_2 \wedge a_3$，可知 $x \wedge a_2$ 和 $x \wedge a_3$ 中恰有一个严格大于c，而另一个等于 c。对应的两个子情形画在图 8 中间的两个格图中。这两个子情形的处理方式相同。将 $x \wedge a_2$ 和 $x \wedge a_3$中较大的一个记为 y；另一个记为 c。由于 $a_1 \not\leq a_2$ 和 $a_1 \not\leq a_3$，我们有 $a_1 \not\leq y$。舍弃其先前的含义，定义 S: $= \{u, v, a_1, a_2, a_3, b, c, x, y\}$，它是 L的一个子偏序集。仿照验证 (4.3) 时所用的论证，由引理 3.9(2) 可得， S 是 L的子格，其图示正确，并且 cd(L) $\leq$ cd(S)。在 S中，令 $\alpha := \text{con}_S(u, a_1)$，并令$\beta := \text{con}_S(c, y)$。同样，在 S中，我们有 $[u, a_1] \nearrow_{\text{p}} [c, x] \supseteq [c, y]$，从而 $\beta \leq \alpha$。因此，由引理 3.7 得 cd(S) $\leq 6/64$，于是 cd(L) $\leq$ cd(S) $\leq 6/64$，这与 (4.5) 矛盾。

由 $S^{\wedge} \cong H_3$、 $S^{\vee} \cong H_3^{\text{dual}}$和（4.5）可知， $T_0 := \{a_1, a_2, a_3, u, v, b, c\}$是 L的子格，并且 T_0 与图 8 左侧的格同构。利用引理 3.2 和（3.7），不难看出，Ji(Con(T_0))在图 8 中绘制正确， |Con(T_0)| = 5，且 cd(T_0) $= 5/64$。显然， $\{b, v\} =$ Jr(T_0) $\subseteq$Jr(L)，且 $\{c, u\} =$ Mr(T_0) $\subseteq$ Mr(L)。这些包含关系（下一句也会用到）和引理 3.5 表明， |Jr(L)| 和 |Mr(L)| 属于 $\{2, 3\}$。若 |Jr(L)| = |Mr(L)| = 2，则 Jr(L) $\cup$Mr(L) $\subseteq T_0$，因此由引理 3.9(1)及 cd(T_0) $= 5/64$ 可得 cd(L) $\leq$ cd(T_0) $= 5/64$，这与之矛盾。

因此，我们可以假设 |Jr(L)| 和 |Mr(L)| 之一等于 3。事实上，利用对偶性，我们可以假设 |Jr(L)| = 3。令 $T := T_0 \cup$ Jr(L) $\cup$ Mr(L)。选取一个元素 $z \in T$ 使得 $c \prec_T z \leq a_2$，并注意到

$$z \parallel a_1 \text{ and } z \parallel a_3. \tag{4.6}$$

确实，由于 $z \leq a_1$ 会导出 $z \leq a_1 \wedge a_2 = u$、 $a_1 \leq z$ 会导出 $a_1 \leq a_2$、 $z \leq a_3$ 会导出 $z \leq a_2 \wedge a_3 = c$，而 $a_3 \leq z$ 会导出 $a_3 \leq a_2$，我们得出 (4.6) 成立。

由引理 3.9(1)， T 是 L 的子格，且 cd(T) $\leq$ cd(L)。此外，|Jr(L)| = 3、 |Mr(L) | ≤ 3、 $\{b, v\} \subseteq$Jr(L) $\cap T_0$和 $\{c, u\} \subseteq$Mr(L) $\cap T_0$推出$|T \setminus T_0| \leq 2$。由此不等式可知，边 (u, a_1)、(u, c)、(c, a_3)中至少有一条 $\in$Edge(T_0)仍是 T的一条边。若 $(u, a_1) \in$Edge(T)，则（利用 T_0 是 T的子格，并考察 T中的区间） $[u, a_1] \nearrow_{\text{p}} [c, b] \supseteq [c, z]$ 给出 con$_T(c, z)$ $\leq$con$_T(u, a_1)$，因此引理 3.7结合(4.6)推出 cd(L) $\leq$cd(T) $\leq 6/64$，矛盾。若 $(u, c) \in$ Edge(T)，则 $[u, c] \nearrow_{\text{p}} [a_1, b] \searrow_{\text{p}} [u, a_2] \supseteq [c, z]$ 推出 con$_T(c, z)$ $\leq$con$_T(u, c)$，而引理 3.7给出同样的

矛盾。最后，若 $(c,\ a_3) \in \mathrm{Edge}(T)$，则

$$[c,a_3] \nearrow_{\mathrm{p}} [a_2,v] \supseteq [a_2,b] \searrow_{\mathrm{p}} [u,a_1] \nearrow_{\mathrm{p}} [c,b] \supseteq [c,z]$$

这意味着 $\mathrm{con}_T(c,\ z) \leq \mathrm{con}_T(c,\ a_3)$。因此，由引理 3.7 和 (4.6) 可得 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(T) \leq 6/64$，再次得到矛盾。由此，我们排除了 (4.4) 中的第一种可能性 $a_2 \wedge a_3 > u$。

因此，$a_1 \wedge a_2 > u$，这正是 (4.4) 中的第二种可能性。暂且不考虑它在上一段中的含义，令 c 表示 $a_1 \wedge a_2$。重新使用符号 S，我们断言

$$S := \{a_1,a_2,a_3,b,c,u,v\} \text{ is a sublattice of } L \text{ and that } S \cong N_{5,5}. \tag{4.7}$$

我们已经知道 $S^{\wedge} \cong H_3$，其中 $a_1 \wedge a_2 = c > u$，且 $S^{\vee} \cong H_3^{\mathrm{dual}}$，其中 $a_1 \vee a_2 = b < v$。因此，根据对偶性，要证明 (4.7)，只需证明 $c \vee a_3 = v$。反设不然，并记 $c \vee a_3$ 为 x。于是 $a_3 < x < v$；见图 8 右侧。此时，a_1 和 a_2 起对称的作用。对于 $i \in \{1,2\}$，不等式 $x \leq a_i$ 将推出 $a_3 \leq a_i$，而 $a_i \leq x$ 则会推出 $v = a_i \vee a_3 \leq x$；也就是说，我们会得到矛盾。因此，$x \parallel a_1$ 且 $x \parallel a_2$，由此 $\{a_1,a_2,x\}$ 是一个三元素反链。由于对于每个 3 元素反链，情形 1、2 和 3 均已排除，由 $\{a_1,a_2,x\}$ 生成的交半格与 H_3 同构。因此，利用 $a_1 \wedge a_2 = c \leq x$，两个交 $a_1 \wedge x$ 和 $a_2 \wedge x$ 中恰有一个等于 c。由对称性，不妨假设 $a_1 \wedge x = c$ 且 $y := a_2 \wedge x > c$；见图 8 右侧。与证明 (4.3) 时的用法类似，引理 3.9(2) 表明 $S^+ := S \cup \{x,y\}$ 是 L 的子格，其图示正确，且 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S^+)$。利用 $a_3 \not\leq a_2$ 或图示，可得 $a_3 \not\leq y$。由于 $[u,a_3] \nearrow_{\mathrm{p}} [c,x] \supseteq [c,y]$ 在 S^+ 中成立，我们有 $\mathrm{con}_{S^+}(c,y) =: \beta \leq \alpha := \mathrm{con}_{S^+}(u,a_3)$。因此，引理 3.7 推出 $\mathrm{cd}(S^+) \leq 6/64$，由此 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S^+) \leq 6/64$，得到矛盾。这就证明了 (4.7)。

最后，由于 S 由反链 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 生成，(4.7) 完成了引理 4.2 的证明。□

引理 4.3。若有限格 L 满足 $\mathrm{con}(L) > 6/64$，则 $|\mathrm{Jr}(L)| = |\mathrm{Mr}(L)|$。

证明。首先，假设 L 有一个元素 v，其下覆盖多于两个，或者覆盖（即上覆盖）多于两个。根据对偶性，不妨设 a_1、a_2 和 a_3 是 v 的三个不同下覆盖。显然，由反链 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 生成的子格不同构于 $N_{5,\ 5}$，因此引理 4.2 的结论在此处不成立，从而其假设也不可能成立。因此 $\mathrm{Cor}(L) \cong M_3$，且 $|\mathrm{Jr}(L)| = 1 = |\mathrm{Mr}(L)|$，如所需。

其次，假设每个元素至多有两个下覆盖，且至多有两个覆盖。我们按照边的顶元素来计算边数：0 不是任何边的顶元素；每个 $|\mathrm{Jr}(L)|$ 并可约元都是两条边的顶元素；每个 $|\mathrm{Ji}(L)| = |L|-1-|L|$ 并不可约元则是一条边的顶元素。因此 $|\mathrm{Edge}(L)| = 2\cdot|\mathrm{Jr}(L)|+(|L|-1-|\mathrm{Jr}(L)|) = |L|-1+|\mathrm{Jr}(L)|$。由对偶性，$|\mathrm{Edge}(L)| = |L|-1+|\mathrm{Mr}(L)|$。比较 $|\mathrm{Edge}(L)|$ 的两个表达式，可得所需等式 $|\mathrm{Jr}(L)| = |\mathrm{Mr}(L)|$，证明完毕。□

引理 4.4。若 L 是一个满足 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$ 的有限格，则 L 不含四元反链。

证明。 反设成立，并设 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 是L中的一个四元反链。显然，$\mathsf{Cor}(L) \ncong M_3$。因此，根据引理 4.2，对每个三元 $X \subseteq L$,

$$\text{if } X \subseteq \{a_1, \ldots, a_4\}, \text{ then } X \text{ generates a sublattice isomorphic to } N_{5,5}. \tag{4.8}$$

设 $B := \{a_i \vee a_j : 1 \leq i < j \leq 4\}$。引理 3.5 与 $B \subseteq \mathsf{Jr}(L)$ 及 (4.8) 相结合，推出 $2 \leq |B| \leq 3$。此外，(4.8) 表明，B 的每个元素都至少与 B 的另一个元素可比较。因此，偏序集 $(B; \leq)$ 只有四种可能。这些情形将在情形 (α)、.....、(δ) 中讨论。

情形 (α)：我们假设 B 是一条二元链。由于 (4.8) 对$\{a_1, a_2, a_3\}$成立，根据对称性，不妨设 $B = \{v_1, v_2\}$与 $v_1 := a_1 \vee a_2 < a_1 \vee a_3 = a_2 \vee a_3 =: v_2$。由于 (4.8) 对 $\{a_1, a_2, a_4\}$、$\{a_1 \vee a_4, a_2 \vee a_4\} \subseteq \{v_1, v_2\}$和 $a_1 \vee a_2 = v_1 < v_2$成立，我们有 $a_1 \vee a_4 = a_2 \vee a_4 = v_2$。因此，利用$a_3 \vee a_4 \in \{v_1, v_2\}$、$v_1 < v_2 = a_2 \vee a_3 = a_2 \vee a_4$，并对 $\{a_2, a_3, a_4\}$应用 (4.8)，可得 $a_3 \vee a_4 = v_1$。因此，$v_2 = a_2 \vee a_3 \leq (a_1 \vee a_2) \vee (a_3 \vee a_4) = v_1 \vee v_1 = v_1$是一个矛盾，证毕。

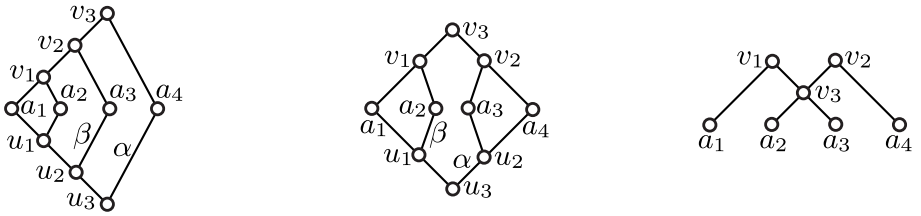


FIGURE 9. 引理 4.4 证明的图示

情形 (β)：我们假设 B 是一条三元链。令 $B = \{v_1, v_2, v_3\}$，且满足 $v_1 < v_2 < v_3$。首先，我们证明存在一个三元 $Y \subseteq \{a_1, \ldots, a_4\}$，它生成一个同时包含 v_1 和 v_2 的子格。假设并非如此。那么，根据对称性，我们可以假设 $a_1 \vee a_2 = v_1$。将 (4.8) 应用于 $\{a_1, a_2, a_3\}$和 $\{a_1, a_2, a_4\}$，不存在这样的 Y 意味着 $a_1 \vee a_3 = v_3$、$a_2 \vee a_3 = v_3$、$a_1 \vee a_4 = v_3$和 $a_2 \vee a_4 = v_3$。由于六个可能的并中有五个不同于 v_2，剩下的并必等于 v_2，也就是说，$a_3 \vee a_4 = v_2$。因此

$$v_3 = a_1 \vee a_3 \leq (a_1 \vee a_2) \vee (a_3 \vee a_4) = v_1 \vee v_2 = v_2,$$

这是一个矛盾。这表明 Y 存在。

再次利用对称性，不妨假设 $Y = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $a_1 \vee a_2 = v_1$。将 (4.8) 应用于 Y，可得 $a_1 \vee a_3 = v_2$ 和 $a_2 \vee a_3 = v_2$。为得到 v_3，我们需要 a_4。也就是说，对于某个 $s \in \{1, 2, 3\}$，有 $a_s \vee a_4 = v_3$。如果 $a_2 \vee a_4 \neq v_3$且 $a_3 \vee a_4 \neq v_3$，那么 s 将为 1，并且 (4.8) 对 $\{a_1, a_2, a_4\}$不成立。因此，$a_2 \vee a_4 = v_3$ 或 $a_3 \vee a_4 = v_3$。若 $a_2 \vee a_4 = v_3$，则由 $a_2 \vee a_3 = v_2 < v_3$ 以及将 (4.8) 应用于 $\{a_2, a_3, a_4\}$，可得 $a_3 \vee a_4 = v_3$。类似地，若 $a_3 \vee a_4 = v_3$，则 $a_2 \vee a_3 = v_2 < v_3$，从而将 (4.8) 应用于 $\{a_2, a_3, a_4\}$ 可得 $a_2 \vee a_4 = v_3$。因此，$a_2 \vee a_4 = v_3$ 且 $a_3 \vee a_4 = v_3$。我们已经得到了五个等式：$a_1 \vee a_2 = v_1$、$a_1 \vee a_3 = v_2$、$a_2 \vee a_3 = v_2$、$a_2 \vee a_4 = v_3$和 $a_3 \vee a_4 = v_3$。第六个等式 $a_1 \vee a_4 = v_3$可由将 (4.8) 应用于 $\{a_1, a_2, a_4\}$得到。

因此，形如 $a_i \vee a_j$ 的并在图 9 左侧得到了正确的可视化。换言之，对于 $i \neq j$，$a_i \vee a_j = v_{\max\{i,j\}-1}$。交也得到了

正确的可视化，因为根据 (4.8)，我们知道交的行为与并对偶。对于 $i \in \{1,2,3\}$，令 u_i 按以下规则定义： $a_j \wedge a_t = u_i$ 当且仅当 $a_j \vee a_t = v_i$；见图。由 (4.8)（或者，也可以类似于将引理 3.9(2) 用于 (4.3) 的方式应用它）可得： S: $= \{a_1, \ldots, a_4, v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$ 是 L 的子格，$\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S)$，并且 S 在图 9 左侧得到了正确描绘。由于 $[u_3, a_4] \nearrow_{\mathrm{p}} [u_2, v_3] \supseteq [u_2, a_3]$ 蕴含 $\mathrm{con}_S(u_2,\ a_3) =: \beta \leq \alpha := \mathrm{con}_S(u_3,\ a_4)$，将引理 3.7 应用于 S 可得 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S) \leq 6/64$。这就是所需的矛盾。

情形（γ）：我们假设 $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ 满足 $v_1 < v_3$、$v_2 < v_3$ 以及 $v_1 \| v_2$。根据（4.8），不存在满足 $v_1 = a_i \vee a_j$ 且 $v_2 = a_j \vee a_k$ 的 $\{i, j, k\} \subseteq \{1, \ldots, 4\}$。因此，我们可以假设 $v_1 = a_1 \vee a_2$ 且 $v_2 = a_3 \vee a_4$。应用（4.8）可直接得到，由 $\{a_1, \ldots, a_4\}$ 生成的并半子格和交半子格分别如图 9 中间所正确描绘。我们声称，对于 $i \in \{1,2\}$，$u_i \not\leq v_{3-i}$。由对称性，只需考虑 $i = 1$。若有 $u_1 \leq v_2$，那么 —— 由于 $a_4 \leq v_2$，且将（4.8）应用于 $\{a_1, a_2, a_4\}$ 得到 $u_1 \vee a_4 = v_3$——我们将得到 $v_3 = u_1 \vee a_4 \leq u_1 \vee v_2 = v_2$，这是不可能的。因此，确实对于 $i \in \{1,2\}$有 $u_i \not\leq v_{3-i}$。这使我们能够以类似于在（4.3）中使用引理 3.9(2)的方式应用引理 3.9(2)，从而得到: $= \{a_1, \ldots, a_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$是 L的子格，S 在图 9 中间被正确地画成一个格，并且 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S)$。由于 $[u_3, u_2] \nearrow_{\mathrm{p}} [u_1, v_3] \supseteq [u_1, a_2]$，我们有 $\mathrm{con}_S(u_3, u_2) =: \alpha \geq \beta := \mathrm{con}_S(u_1, a_2)$。因此，引理 3.7 意味着 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S) \leq 6/64$。这个不等式构成矛盾，正如所需。

情形 (δ)：假设 $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ with $v_3 < v_1$, $v_3 < v_2$ 和 $v_1 \| v_2$。除编号外，右侧图 9 展示了这一情形。由于 v_1, v_2, v_3 和 $v_1 \vee v_2$ 是 $\mathrm{Jr}(L)$ 中四个不同的元素，引理 3.5 推出 $\mathrm{cd}(L) \leq 4/64$。再次，我们得到了一个矛盾。

由于四种情形都导致矛盾，引理 4.4 的证明完成。□

引理 4.5。若有限格 L 有一个三元素反链，且 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$，则

- *either* $\mathrm{Cor}(L) \cong M_3$ *and* $\mathrm{cd}(L) = 8/64$ *(see* (c2) *in Theorem 2.2),*
- *or* $\mathrm{Cor}(L) \cong N_{5,5}$ *and* $\mathrm{cd}(L) = 7/64$ *(see* (c4) *in Theorem 2.2).*

证明。设 L 是一个具有 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$ 和三元素反链 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 的 n 元有限格。由于 $\mathrm{Cor}(M_3) = 2/2^{5-1} = 8/64$，并且由 (3.1) 可知 $\mathrm{cd}(L) = \mathrm{cd}(\mathrm{Cor}(L))$，我们可以假设 $\mathrm{Cor}(L) \ncong M_3$。

由引理 4.2 可知，由 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 生成的子格 S_0 同构于 $N_{5,5}$。因此，$|\mathrm{Jr}(L)| \geq 2$ 且 $|\mathrm{Mr}(L)| \geq 2$。除索引外，我们有 $b := a_1 \vee a_2 < v := a_1 \vee a_3 = a_2 \vee a_3$ 以及 $c := a_1 \wedge a_2 > u := a_1 \wedge a_3 = a_2 \wedge a_3$；见图 4 左侧。我们声称

$$|\mathrm{Jr}(L)| = |\mathrm{Mr}(L)| = 2. \tag{4.9}$$

为导出矛盾，假设 (4.9) 不成立。由引理 4.3 可知 $|\mathrm{Jr}(L)| = |\mathrm{Mr}(L)|$。因此，由引理 3.5 和 (4.9) 不成立可得 $|\mathrm{Jr}(L)| = |\mathrm{Mr}(L)| = 3$。于是，由于 $\{u, c\} = \mathrm{Mr}(S_0) \subseteq \mathrm{Mr}(L)$ 且 $\{b, v\} = \mathrm{Jr}(S_0) \subseteq \mathrm{Jr}(L)$，存在唯一的元素 p 和 q（不一定互不相同，也不一定在 S_0之外），使得 $\mathrm{Mr}(L) = \{u, c, p\}$ 且 $\mathrm{Jr}(L) = \{b, v, q\}$。

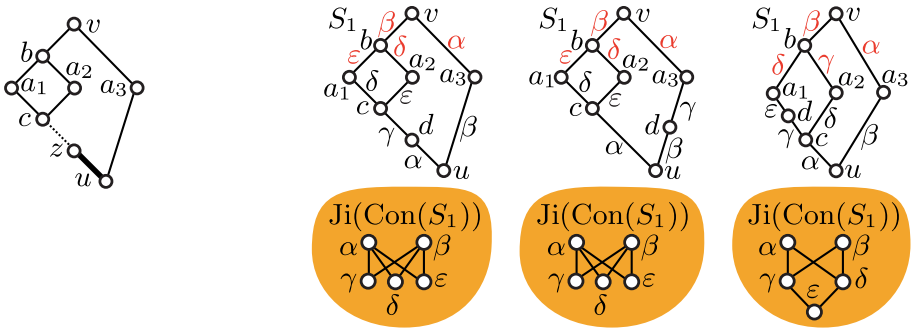


FIGURE 10. 左侧的 S 的一部分以及 S_1 的三种可能情况

令 $S := S_0 \cup \{p, q\}$。由于 $\mathrm{Mr}(L) \cup \mathrm{Jr}(L) \subseteq S$，由引理 3.9(1)可得 S是 L 的子格，且 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S)$。由于 S 是通过至多添加两个新元素从 S_0 得到的，因此四个素区间（即含两个元素的区间） $[u, c]_{S_0}$、 $[u, a_3]_{S_0}$、 $[b, v]_{S_0}$和 $[a_3, v]_{S_0}$ 中，至少有两个仍是 S的素区间。因此，根据对偶性，我们可以假设 $a_3 \prec_S v$ 或 $b \prec_S v$ 在 S中。在考察这两种情形之前，先取一个元素 $z \in S$ 使得 $u \prec_S z \leq c$，并取一条边 $(x, y) \in \mathrm{Edge}(S)$，其中 $c \leq x \prec_S y \leq b$。图 10 左侧展示了这种情形，但请注意，元素 p、 q、 x 和 y 并未指定，也不必画出。我们将在 $S_0 \cong N_{5,5}$中进行计算，但这些区间均指 S中的区间。

首先，假设 $b \prec_S v$。那么 $[b, v] \searrow_{\mathrm{p}} [u, a_3] \nearrow_{\mathrm{p}} [c, v] \supseteq [c, b] \supseteq [x, y]$ 意味着 $\mathrm{con}_S(x, y) \leq \mathrm{con}_S(b, v)$。因此，让 (x, y, b, v, S) 扮演 (u_1, v_1, u_2, v_2, L) 的角色，由引理 3.7 得到 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S) \leq 6/64$。

其次，假设 $a_3 \prec_S v$。令 (c, a_3, z) 扮演 (a, b, x) 的角色，由引理 3.1 得到 $\mathrm{con}_S(u, z) = \mathrm{con}_S(a_3, v)$。因此， $[a_3, v] \searrow_{\mathrm{p}} [u, b] \supseteq [x, y]$ 意味着 $\mathrm{con}_S(x, y) \leq \mathrm{con}_S(a_3, v) = \mathrm{con}_S(u, z)$。于是，让五元组 (u, z, x, y, S) 扮演 (u_1, v_1, u_2, v_2, L) 的角色，由引理 3.7 得到 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S) \leq 6/64$。

我们已经看到，无论是 $a_3 \prec_S v$ 还是 $b \prec_S v$，都会得到 $\mathrm{cd}(L) \leq 6/64$，这与假设矛盾，从而证明了 (4.9)。

由 (4.9)、$\mathrm{Mr}(S_0) = \{c, u\} \subseteq \mathrm{Mr}(L)$、$\mathrm{Jr}(S_0) = \{b, v\} \subseteq \mathrm{Jr}(L)$ 以及引理 3.9(1) 可知，对每个属于 L的子集 X，

$$\text{if } S_0 \subseteq X, \text{ then } X \text{ is a sublattice of } L \text{ and } \mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(X). \tag{4.10}$$

接下来，我们声称 $[u, v]$ 是与图 4 左侧所画的 $N_{5,\ 5}$ 的八条边对应的八个区间的并集，也就是说，

$$[u, v] = [u, c] \cup [c, a_1] \cup [c, a_2] \cup [a_1, b] \cup [a_2, b] \cup [b, v] \cup [u, a_3] \cup [a_3, v]. \tag{4.11}$$

为导出矛盾，假设 $x \in [u, v]$ 不在上述并集中。那么$x \parallel a_3$。根据引理 4.4，$\{a_1, a_2, a_3, x\}$ 不是反链，因此 x 与 a_1 或 a_2可比较。若 x 与 a_1 和 a_2都可比较，那么 $a_1 \parallel a_2$ 将推出 $x \geq a_1$ 和 $x \geq a_2$之一，从而 $x \in [b, v]$；或者推出 $x \leq a_1$ 和 $x \leq a_2$，从而$x \in [u, c]$。因此， x 恰好与 a_1 和 a_2中的一个可比较。根据对称性和对偶性，不妨设 $a_1 \parallel x$ 和 $a_2 < x$。由于 $x \leq b$ 会给出 $x \in [a_2, b]$，而 $b \leq x$ 会给出 $a_1 \leq x$，集合 $\{b, x, a_3\}$是一个三元素反链。由 (4.9)，因为 $\mathrm{Jr}(L) = \{b, v\}$，我们得到，除 $b \vee a_3 = v$之外，等式

$b \vee x = v$和 $x \vee a_3 = v$也成立。因此，反链 $\{b, x, a_3\}$与引理 4.2 矛盾，由此我们证明了 (4.11)。

假设存在一个元素 $x \in \mathrm{Nar}(L) \cap [u, v]$。由于 $a_1 \parallel a_3$，要么$x \leq a_1$ 且 $x \leq a_3$，因此 $x = u$；要么 $x \geq a_1$ 且 $x \geq a_3$，因此 $x = v$。于是 $\mathrm{Nar}(L) \cap [u, v] \subseteq \{u, v\}$，且 $[u, v]$是粘合和不可分解的。若存在一个元素 $y \in L$ 使得 $y \parallel u$，那么 $y \wedge u$ 将是 L 的第三个交可约元素，这与 c，$u \in \mathrm{Mr}(L)$ 和 (4.9) 矛盾。因此，$u \in \mathrm{Nar}(L)$。对偶地，$v \in \mathrm{Nar}(L)$，从而 $L = \mathrm{idl}(u) \dotplus [u, v] \dotplus \mathrm{fil}(v)$。此外，根据 (4.9)，$\mathrm{idl}(u)$ 和 $\mathrm{fil}(v)$ 是链。因此，$\mathrm{Cor}(L) = [u, v]$。

接下来，我们声称 $[u, v] = S_0$。为导出矛盾，假设相反。于是 $S_0 \subset [u, v]$，因此我们可以选取一个元素 $d \in [u, v] \setminus S_0$。令 $S_1 := S_0 \cup \{d\}$；它是一个子格，并且由 (4.10) 可得 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S_1)$。利用对偶性、$a_1$ 与 a_2之间的对称性以及 (4.11)，不妨假设 $u < d < c$、$u < d < a_3$或 $c < d < a_1$。一个与证明 (4.3) 类似的简单论证表明，这些情况在图 10 中均已正确绘出。利用引理 3.2 和 (3.7)，很容易验证，在这三种情况中，标记均正确，偏序集 $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(S_1))$ 的绘制也正确，并且 $|\mathrm{Con}(S_1)|$ 为 11 或 8。因此，$\mathrm{cd}(S_1)$为 $5.5/64$ 或 $4/64$，从而 $\mathrm{cd}(S_1) < 6/64$。于是 $\mathrm{cd}(L) < 6/64$，矛盾。这表明 $\mathrm{Cor}(L) = [u, v] = S_0 \cong N_{5,\ 5}$，正如所需。

最后，根据引理 3.2，偏序集 $\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(N_{5,\ 5}))$ 如图 4 所示。由 (3.7)，$|\mathrm{Con}(L)| = 7$。因此 $\mathrm{cd}(L) = 7/64$，且定理 2.2 中的 (c4) 成立。引理 4.5 的证明至此完成。□

5. If the width of L is at most 2

有限格 L 的宽度 记为 $\mathrm{width}(L)$，是 L 中反链的最大大小。本节讨论满足 $\mathrm{width}(L) = 2$ 且 $\mathrm{cd}(L) > 6/64$ 的有限核格 L。有多种方式可以看出，这样的格必然是平面 的（即它具有平面图）；例如，这可由 (1.1) 或 Cz´edli 和 Schmidt [10] 的引理 2.2 得出。在本节中，我们始终使用 L的固定平面图，左侧或右侧等术语均指该图示。尽管我们的论述在某些地方采用了直观的图示方式，但平面格的相关理论已在 Kelly 和 Rival [16] 的论文中进行了严格阐述。（无论在本文此处还是后文，读者都无需查阅 [16]。）令 $\mathrm{Bndl}(L)$ 和 $\mathrm{Bndr}(L)$ 分别表示 L（固定图示）的左边界链 和右边界链 。

引理 5.1。对于每个宽度为 $= 2$ 的有限格 L，都有 $L = \mathrm{Bndl}(L) \cup \mathrm{Bndr}(L)$。

证明。反设存在一个元素 $x \in L$，使得 $x \notin \mathrm{Bndl}(L) \cup \mathrm{Bndr}(L)$。由于 $\mathrm{Bndl}(L)$ 是一条极大链，且 $x \notin \mathrm{Bndl}(L)$，因此存在一个元素 $y \in \mathrm{Bndl}(L)$，使得 $y \parallel x$。此外，由于 $\mathrm{Bndl}(L)$ 是左边界链，y 位于 x 的左侧（参见边界的定义，以及 Kelly 和 Rival [16]中的命题 1.6 和 1.7）。由左右对偶性可得，存在一个元素 $z \in \mathrm{Bndr}(L)$，使得 x 位于 z 的左侧，特别是$x \parallel z$。根据 Zilber 的一项结果（作为 Kelly 和 Rival [16], 中的命题 1.7），「位于左侧」这一关系具有传递性。因此，y 位于 z 的左侧，特别是$y \parallel z$。于是，$\{y, x, z\}$ 构成一个含 3 个元素的反链。该反链与 $\mathrm{width}(L) = 2$矛盾，从而完成引理 5.1 的证明。□

引理 5.2。设 L 是一个有限格，满足 $\mathrm{width}(L)=2$，且 $6/64<\mathrm{cd}(L)\leq 8/64$。那么，定理 *2.2* 中列出的可能情形 (c3)、(c5)、(c6)、(c7) 和 (c8) 之一成立。

证明。由于由 (3.1) 知 $\mathsf{cd}(L)=\mathsf{cd}(\mathsf{Cor}(L))$，且宽度$(L)$ =宽度$(\mathsf{Cor}(L))$，我们可以假定 L 是一个核心格。此外，$|L|>1$，否则 $\mathsf{cd}(L)$ 将为 $64/64$。设 $L=L_1\dotplus\cdots\dotplus L_t$ 为 L的典范粘合和分解；此处 $t\in\mathbb{N}^+$，且 L_1，....., L_t 中无一为链。由于 $L=\mathsf{Cor}(L)$ 仅在相差 $\cong_{\mathrm{rgs}}$ 的意义下才值得考虑，我们可以假定 $\mathsf{cd}(L_1)\geq\cdots\geq\mathsf{cd}(L_t)$。Cz´edli [8, 引理 2],应用于 $L=L_1\dotplus\cdots\dotplus L_t$，断言

$$\mathrm{cd}(L)=\mathrm{cd}(L_1)\cdots\mathrm{cd}(L_t),\ \text{where } \mathrm{cd}(L_1)\geq\cdots\geq\mathrm{cd}(L_t). \tag{5.1}$$

由 Cz´edli [8, 引理 10], , 甚至由 Cz´edli [3], 可知，对 $i\in\{1,\ldots,t\}$ 有 $\mathsf{cd}(L_i)\leq 1/2$。因此 $\mathsf{cd}(L)\leq 1/2^t$。于是，由于 $6/64<\mathsf{cd}(L)$，我们有$t\leq 3$。

首先，假设 $t=3$。那么 $\mathsf{cd}(L)\leq 1/2^3=8/64$。若对某个 $i\in\{1,2,3\}$，$\mathsf{cd}(L_i)<1/2=32/64$，则由引理 2.1，$\mathsf{cd}(L_i)\leq 20/64$，因此

$$6/64<\mathrm{cd}(L)=\mathrm{cd}(L_1)\mathrm{cd}(L_2)\mathrm{cd}(L_3)\leq 1/2\cdot 1/2\cdot 20/64=5/64,$$

这就产生了矛盾。因此 $\mathsf{cd}(L_i)=1/2$，并且由引理 2.1，对所有$i\in\{1,2,3\}$都有 $L_i\cong B_4$。此外，$\mathsf{cd}(L)=1/2^3=8/64$ 且 $\mathsf{Cor}(L)=L=B_4\dotplus B_4\dotplus B_4$。也就是说，(c3) 成立，证毕。

其次，假设 $t=2$。注意，$|\mathsf{Nar}(L_1)|=|\mathsf{Nar}(L_2)|=2$，否则 t 会大于 2。与第一个子情形一样，我们假设 $\mathsf{cd}(L_1)=1/2$。由引理 2.1，$L_1\cong B_4$。由于 $6/64<\mathsf{cd}(L)=\mathsf{cd}(L_1)\mathsf{cd}(L_2)\leq 8/64$，我们有$12/64<\mathsf{cd}(L_2)\leq 16/64$。因此，同时考虑 $|\mathsf{Nar}(L_2)|=2$ 后，$L_2=\mathsf{Cor}(L_2)$ 满足引理 2.1 中的 (e4) 或 (e6)。也就是说，L_2 是两个 B_4 的副本的边粘合，且 $\mathsf{cd}(L_2)=16/64$；或者 L_2 属于 Circ(6)，且 $\mathsf{cd}(L_2)=14/64$。因此，同时考虑 $L_1\cong B_4$、$\mathsf{cd}(B_4)=1/2$和 (5.1) 后，(c3) 或 (c5) 对 $L=\mathsf{Cor}(L)$ 成立，证毕。

在情形 $t=2$ 的第二个子情形中，我们假设 $\mathsf{cd}(L_1)<1/2$。根据引理 2.1，$\mathsf{cd}(L_1)=20/64$ 或 $\mathsf{cd}(L_1)\leq 16/64$，而由 (5.1) 可得 $\mathsf{cd}(L_2)\leq\mathsf{cd}(L_1)$。我们重点考察 $\mathsf{cd}(L_2)$。若 $\mathsf{cd}(L_2)\leq 16/64$，则 $6/64<\mathsf{cd}(L)=\mathsf{cd}(L_1)\mathsf{cd}(L_2)\leq 20/64\cdot 16/64=5/64$ 将会导致矛盾。因此，$\mathsf{cd}(L_2)=\mathsf{cd}(L_1)=20/64$，且引理 2.1 蕴含 $L_1\cong L_2\cong N_5$。因此 $L\cong N_5\dotplus N_5$ 且 $\mathsf{cd}(L)=\mathsf{cd}(L_1)\mathsf{cd}(L_2)=20/64\cdot 20/64=6.25/64$。由此，定理 2.2 的 (c8) 成立，证毕。

第三，我们假设 $t=1$。因此，在证明的其余部分中，$L=\mathsf{Cor}(L)$，$6/64<\mathsf{cd}(L)\leq 8/64$，且 $|\mathsf{Nar}(L)|=2$。两条边界链的交集 $\mathsf{Bndl}(L)\cap\mathsf{Bndr}(L)$ 是 $\mathsf{Nar}(L)=\{0,1\}$。此外，根据引理 5.1，$\mathsf{Bndl}(L)\cup\mathsf{Bndr}(L)=L$。我们称边 $(x,\ y)\in\mathsf{Edge}(L)$ 为一条弦边，如果 $\{x,y\}\cap\{0,1\}=\emptyset$ 和 x 位于两条边界链中的一条上，而 y 位于另一条上。例如，图 11 左侧 L 的弦边为 $e_1=(x_1,\ y_1),\ldots,\ e_4=(x_4,\ y_4)$。由于图示是平面的，任意两条不同的弦边都不会在其内部几何点处相交。

令 h 为弦边的数量，并令 $n:=|L|$。若有 $h=0$，则L 将属于 $\mathsf{Circ}(n)$，因此引理 2.1 中的 (e2)、(e3)、(e6)、(e7) 和 (e10) 将推出 $\mathsf{cd}(L)>8/64$，这将导致矛盾。因此 $h>0$。

对于弦边 $e=(x,y)$，L 可分解为 $\mathsf{idl}(y)$ 与 $\mathsf{fil}(x)$ 沿边 e进行边粘合的结果。如果 $\mathsf{idl}(y)$ 或 $\mathsf{fil}(x)$ 含有一条不同于 e 的 L 弦边，那么

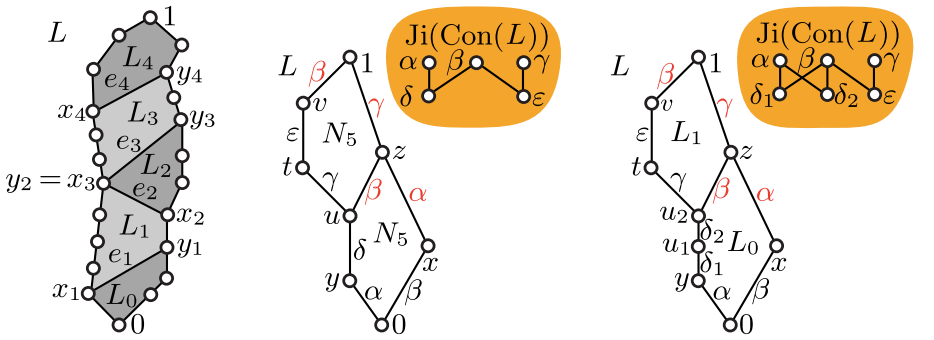


FIGURE 11. 引理 5.2 证明的示意图

可以重复这一分解。因此，存在大于 3 的整数 $n_0, n_1, \ldots, n_h$，以及格 $L_i \in \mathsf{Circ}(n_i)$ 和 M_i，使得对于 $i \in \{0, \ldots, h\}$，$M_0 = L_0$、$M_h = L$，并且 M_j 是 $j \in \{1, \ldots, h\}$时 M_{j-1} 与 L_j 的边粘合结果。例如，对于图 11 左侧的 L，我们有 $(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4) = (5, 7, 5, 7, 6)$，$L_0 = M_0 = \mathsf{idl}(y_1)$、$L_4 = \mathsf{fil}(x_4)$，$i \in \{1, 2, 3\}$时的 $L_i = [x_i, y_{i+1}]$、$M_4 = L$，以及 $j \in \{1, 2, 3\}$时的$M_j = \mathsf{idl}(y_{j+1})$。

根据引理 2.1，$\mathsf{cd}(M_0) = \mathsf{cd}(L_0) \leq 1/2$。此外，由引理 3.10(1)可得，对于 $j \in \{1, \ldots, h\}$，$\mathsf{cd}(M_j) \leq \mathsf{cd}(M_{j-1})/2$。因此，对 j作平凡归纳可得 $\mathsf{cd}(L) = \mathsf{cd}(M_h) \leq 1/2^{h+1}$。结合此不等式与 $6/64 < \mathsf{cd}(L)$，我们得出 $h < 3$。因此，我们只需处理 $h = 1$ 和 $h = 2$。

假设 $h = 1$。根据引理 2.1 中相应的部分，或者更直接地根据 Cz´edli [8, 引理 7], ，我们知道 $\mathsf{cd}(L_0) = (8 + 3/2^{n_0-7})/64$。因此，假设 $\mathsf{cd}(L) > 6/64$ 并结合引理 3.10(1)，可得

$$\frac{6}{64} < \mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(L_0)/2 < \frac{8 + 3/2^{n_0-7}}{64} \cdot \frac{1}{2},$$

这意味着 $n_0 \leq 6$。我们也可以类似地得到 $n_1 \leq 6$。因此，n_0，$n_1 \in \{4, 5, 6\}$。不妨假设 $n_0 \geq n_1$，否则我们可以研究 L 的对偶。

如果 $(n_0, n_1) = (6, 4)$，那么根据引理 2.1(e6) 和引理 3.10(2)，$\mathsf{cd}(L) = 7/64$，因此定理 2.2 的 (c6) 成立。如果 $(n_0, n_1) = (5, 5)$，那么一个直接的计算（图 11 中间部分展示了该计算）可得 $\mathsf{cd}(L) = 6.5/64$，因此 (c7) 成立；请注意，图 11 右侧部分的类似计算（但略长一些）的细节即将给出，而且 L 不必与图中间部分描绘的格同构。

由于 $\mathsf{cd}(L) \leq 8/64$，引理 2.1 的 (e4) 和 (e8) 排除了 $(n_0, n_1) \in \{(4, 4), (5, 4)\}$ 的可能性。要排除剩下的可能性，即 $(n_0, n_1) \in \{(5, 6), (6, 6)\}$，还需要更多工作。

图 11 右侧展示了如何排除情形 $(n_0, n_1) = (6, 5)$。尽管 L_0 和 L 未必同构于图中所示的格，但我们总可以如下选择记号。在 L_1 中，令 z 表示满足 $\mathsf{pr}(z)$（在 (3.2) 中定义）为粘合边的唯一原子，并令 t 表示另一个原子。在 L_0 中，令 x 为满足 $[z_*, z] \searrow_{\mathrm{p}} [x_*, x]$ 的唯一原子，并令 y 表示 L_0 的另一个原子。定义 $\alpha := \mathsf{con}(\mathsf{pr}(y))$、$\beta := \mathsf{con}(\mathsf{pr}(x))$ 和 $\gamma := \mathsf{con}(\mathsf{pr}(t))$。无论 $\mathsf{Circ}(6)$ 的两个成员中哪个是 L_0，也无论 L_0 和 L_1 中的粘合边如何排列，都将 $\mathsf{Ji}(L_0) \setminus \{x, y\}$ 的两个元素记为 u_1 和 u_2。

对 $i \in \{1,2\}$，令 $\delta_i := \mathrm{con}(\mathrm{pr}(u_i))$。令 v 为 $\mathrm{Ji}(L_1) \setminus \{z,t\}$ 中唯一的元素，并设 $\varepsilon := \mathrm{con}(\mathrm{pr}(v))$。由于 $\mathrm{Ji}(L) = \{y, x, u_1, u_2, t, v\}$，由 (3.12) 可得 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, \varepsilon\} = \mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L))$。利用引理 3.2(A)，很容易画出偏序集 $(\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L)); \leq)$；见图。为计算该偏序集的理想数，注意到 $2^3 = 8$ 个理想与 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 不相交； $2^2 = 4$ 个包含 β；2 个包含 α，但既不包含 β，也不包含 γ； $2^2 = 4$ 个包含 γ，但既不包含 α，也不包含 β；恰有 1 个包含 α 和 γ，但不包含 β。因此 $|\mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L)); \leq)| = 8 + 4 + 2 + 4 + 1 = 19$，由 (3.7) 得 $|\mathrm{Con}(L)| = 19$。因此 $\mathrm{cd}(L) = 19/2^{|L|-1} = 4.75/64$，这与假设 $6/64 < \mathrm{cd}(L)$ 矛盾，从而排除情形 $(n_0, n_1) = (6, 5)$。

最后，若 $(n_0, n_1) = (6,6)$，则 L 有一个子格 L'，使得 L' 的参数满足 $(n_0, n_1) = (6,5)$，且 L 是 L'的可拆卸扩张；见 (3.14)。我们已经看到 $\mathrm{cd}(L') = 4.75/64$，并且由 (3.15) 可知 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(L')$。因此 $\mathrm{cd}(L) \leq 4.75/64$，这与不等式 $6/64 < \mathrm{cd}(L)$ 矛盾，从而排除了 $(n_0, n_1) = (6,6)$ 这一可能性。这就完成了情形 $h = 1$（在情形$t = 1$之内）。

接下来，我们假设 $h = 2$。若 $(n_0, n_1, n_2) = (4,4,4)$，则由引理 3.10(2) 得 $\mathrm{cd}(L) = 1/2^3 = 8/64$，且 L满足 (c3)，符合要求。

因此，只需排除所有满足 $(n_0, n_1, n_2) \neq (4, 4, 4)$ 的情形。不妨设 $n_2 \neq 4$。则 $n_2 \geq 5$。由于 $L_2 \in \mathrm{Circ}(n_2)$是 N_5的可拆卸扩张，(3.15) 蕴含 $\mathrm{cd}(L_2) \leq \mathrm{cd}(N_5)$。将此不等式与引理 2.1(e3) 结合，我们有 $\mathrm{cd}(L_2) \leq 20/64$。将 L 中的子格 $L_1 \cup L_2$ 记为 T；则 T 是 L_1 与 L_2 的边粘合，而 L 是 L_0 与 T 的边粘合。因此，引理 3.10(1) 给出 $\mathrm{cd}(T) \leq \mathrm{cd}(L_2)/2 \leq 10/64$ 以及 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(T)/2 \leq 5/64$，这与$6/64 < \mathrm{cd}(L)$矛盾。当 n_0 或 n_1 不等于 4 时，我们同样得到相同的矛盾，只是在这种情形下，我们首先得到 M_1 作为 L_0 与L_1的边粘合，然后 L 是 M_1 与 L_2的边粘合。因此，$(n_0, n_1, n_2) \neq (4, 4, 4)$ 这一可能性被排除，引理 5.2 的证明完成。 □

6. 最终推论

根据论文前面建立的引理，我们现在可以轻松推出第 1 节和第 2 节中陈述的结果。

定理 *1.1* 的证明。 设 L 为一个有限格，且 $\mathrm{cd}(L) > 3/32$。对于 $k \in \mathbb{N}_0$，令 $\mathrm{uc}(k)$ 和 $\mathrm{lc}(k)$ 分别表示 L 中恰有 k 个上覆盖的元素数目，以及恰有 k 个下覆盖的元素数目。由 (3.3) 和引理 4.3 可得 $\mathrm{uc}(1) = |\mathrm{Ji}(L)| = |\mathrm{Mi}(L)| = \mathrm{lc}(1)$。等式 $\mathrm{uc}(0) = 1 = \mathrm{lc}(0)$ 显然成立。结合已经建立的等式，以及引理 4.4 给出的事实——没有元素拥有超过三个上覆盖或下覆盖——我们得到

$$\mathrm{uc}(k) = 0 = \mathrm{lc}(k) \text{ for all } k \geq 4 \text{ and } \mathrm{uc}(k) = \mathrm{lc}(k) \text{ for all } k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2,3\}. \tag{6.1}$$

为处理其余的值 $k \in \{2,3\}$，我们区分两种情形。

首先，假设 $\mathrm{uc}(3) = 0 = \mathrm{lc}(3)$。那么，由 (6.1) 和引理 4.3 可得 $\mathrm{uc}(2) = |\mathrm{Jr}(L)| = |\mathrm{Mr}(L)| = \mathrm{lc}(2)$。因此，(jm2) 成立。

其次，假设 $\mathrm{uc}(3) > 0$ 或 $\mathrm{lc}(3) > 0$。由对偶性，我们可假设 $\mathrm{lc}(3) > 0$。于是由引理 4.1， L 的一个区间 $[u, v]$ 同构于 M_3。由于 v 的三个下覆盖生成 $[u, v] \cong M_3$，且 M_3 不同构于$N_{5,5}$，引理 4.2 的结论在此情形下不成立，因此其假设不能成立。

因此 Cor(L) $\cong M_3$。从而 uc(3) $= 1 =$ lc(3) 且 uc(2) $= 0 =$ lc(2)。因此 (jm2) 再次成立，从而它在两种情形下都成立。

最后，(jm1) 断言 uc(1) =lc(1)，这由 (jm2) 推出。定理 1.1 的证明完成。□

观察 *1.2* 的证明。 根据 (3.7)、引理 3.2 以及图 1 的中间部分，很容易看出 |Con(R_6)| = |Idl(Ji(Con(R_6)))| $= 3$。因此 cd(R_6) $= 3/32$。显然， |Ji(R_6)| $= 3 \neq 4 =$ |Mi(R_6)|。□

定理 *2.2* 的证明。 设 L 是一个满足 cd(L) $> 6/64$ 的有限格。我们可以假设 cd(L) $\leq 8/64$，否则 (c1) 成立。由引理 2.1 和 4.4， $1 <$width(L) < 4，因此 width(L) $\in \{2, 3\}$。于是，引理 4.5 和 5.2 推出定理 2.2。□

7. Conclusion and outlook

我们证明了，同余密度 cd(L) 大于 $3/32$ 的有限格 L 中，并不可约元与交不可约元的数量相同（即 |Ji(L)| = |Mi(L)|），并指出 cd(L) $= 3/32$ 并不意味着 |Ji(L)| = |Mi(L)|。事实上，我们的分析得出了稍强一些的结论。此外，我们还给出了满足 cd(L) $> 3/32$ 的有限格 L 的结构描述。等价地说，我们描述了具有多于 $3 \cdot 2^{|L|-6}$ 个同余关系的有限格 L。我们猜想，经过大量工作，描述中的阈值 $3/32$ 未来或许还能略微改进。然而，即使借助计算机辅助，要将阈值提高到比如 10^{-8}，似乎也不太可能；另见脚注 3。

为了提出一个目前尚不清楚其难度的开放问题，令 M_1 为单元素格，并令 M_k 为当 $2 \leq k \in \mathbb{N}^+$时的长度 2 的（$k+2$）元素模格；关于 $k \leq 4$，请参见图 1 的右半部分。于是，width(M_k) $= k$。每个有限格 L 是否都满足 cd(L) $\leq$cd($M_{\mathrm{width}(L)}$)? 由引理 2.1 和定理 2.2 可知，对于宽度为 ≤ 3且 width(L) 的格 L，答案是肯定的。

已有一些类似的研究，其中“格”或“同余关系”被其他结构所取代，包括“半格”，或被其他相容关系所取代，例如一元的“子宇宙”关系；例如参见 Ahmed、Salih 和 Hale [2], Ahmed 和 Horv´ath [1], Cz´edli [4], [5], 以及 [7], Kwuida 和 Mure¸san [17], , 还有 Zaja、Haje 和 Ahmed 的摘要 [21]。有了这些先例，未来很可能会出现类似的研究。

References

[1] Ahmed, D., Horv´ath, E.K.: 有限格子宇宙数目中的另外两个较大的数。*Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications*, 2019年。第39卷。第251–261页。DOI: 10 7151 1309 。/ dmgaa。Ahmed, D., Salih, M., Hale, D.: 分析有限半格中的子宇宙计数：揭示排名与描述。DOI: [2] 10 48550 2408 09595 。/arXiv。。Czedli, G.: 关于具有多个同余关系的有限格的一则注记。 *Acta Universitatis Matthiae Belii, Series Mathematics Online* 2018 22 28 2602 ，。第–页。 [3] https://actamath.savbb.sk/pdf/aumb .pdf [4] Cz´edli, G.: 八十三个子格与平面性。 *Algebra Universalis*, 2019年。第80:45号。DOI: 10 1007 00012 019 0615 3 。/s - - - Czedli, G.: 具有多个同余关系的有限半格。 *Order*, 2019年。第36卷。第233–247页。DOI: 10 1007 11083 018 9464 5 。/s - - - Czedli, G.: 具有多个同余关系的格是平面的。 *Algebra Universalis*, 2019年。第80:16号。DOI: 10.1007/s00012-019-0589-1 [5] [6]

[7] Cz´edli, G.：具有八十三个子近格的平面半格与近格。Acta Sci. Math. (Szeged),
86 2020 117 165 10 14232 019 573 4 ( ), –。DOI: 。/actasm- - -
[8] ´ n
Czedli, G.：-元格的最大及其后各个同余数。乌拉尔数学杂志,
11 2 2025 81 99 10 15826 2025 2 006 ( ) ( ), –。DOI: 。/umj. . .
[9] ´
Czedli, G.：关于子格的同余密度与拟序密度的注记。载于：代数与模型论2025，由 M. Shahryari 和 S. V. Sudoplatov 编，论文集，选自第17届暑期学校“模型论与普适代数相关问题”，Erlagol，2025年6月19—26日。新西伯利亚国立技术大学，第31–44页。https://erlagol.ru/wp-content/uploads/cbor/erlagol 2025.pdf [10] Cz´edli, G., Schmidt, E. T.：群与半模格的唯一性 Jordan–H¨older 定理。Algebra Universalis
66 2011 69 79 10 1007 00012 011 0144 1 ( ) -。DOI: 。/
[11]
s - - - Day, A.：有限格为自由格的有界同态像或子格的刻画。 *Canad. J. Math.*，1979年。第31卷。第69–78页。DOI：10.4153/CJM-1979-008-x [12] Dilworth, R. P.：有限模格的一个猜想的证明。Ann. of Math. (2) 60 (1954年),
359 364 10 2307 1969639 –。DOI: 。/ Freese, R.：计算有限格的同余格。 *Proc. Amer. Math. Soc.*,
[13]
1997。第 125 3457 3463 10 1090 0002 9939 97 04332 3 卷。第–页。DOI: 。/S - - - -
[14] ¨ *Lattice Theory: Foundation.* ¨
Gratzer, G.：巴塞尔：Birkhauser，2011年。XXX+614 页。DOI: 10 1007 978 3 0348 0018 1 。/ - - - -
[15] ¨
Gratzer, G.：有限格中的同余与素透视关系。 *Algebra Universalis*，2015 74 351 359 10 1007 00012 015 0355。第。卷。第–页。DOI: 。/s - - -y [16] Kelly, D., Rival, I.：平面格。Canadian J. Math. 27，636–665（1975年）。DOI: 10 4153 1975 074 0 。/CJM- - - Kwuida, L., Muresan, C.：关于非平凡弱双补及保持它们的格同
[17] ¸
余。Order (2023 40 423 453 10 1007 11083 022 09597 4): –。
[18] 5 13 [14]
DOI: 。/s - - - Kung, J. P. S.：Dilworth覆盖定理。[19] 中的第。节。Mure¸san, C., Kulin, J.：关于有限格的最大同余数。 *Order*，2020年。第 37 445 460 10 1007 11083 019 09514 2 卷。第–页。DOI: 。/
[20] 4 4 [14]
s - - - Nation, J. B.：有限格。[21] 中的第。节。Zaja, N. E, Haje, D., Ahmed, D.：有限格子宇宙数目中第六大和第七大的数。纳乌鲁兹大学学术期刊（AJNU），第12卷，148，2023年1，143第。页–。*Email address*:
czedli@math.u-szeged.hu*URL*: http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/

University of Szeged, Bolyai Institute. Szeged, Aradi vértanúk tere 1, HUNGARY6720