arXiv:2602.04334v1 [math.GT] 4 Feb 2026

双重切片结与三维流形在四维流形中的嵌入

SE-GOO KIM 和 TAEHEE KIM

摘要。 对于三维球面中的纽结 K 以及单连通闭四维流形 X，我们定义了 K的X双切片亏格，将这一概念从 X 为四维球面的情形推广而来。我们证明，对于每个整数 n，都存在一个代数双切片的带状结 K，其 X双切片亏格大于 n。我们的论证使用了新的 L^2签名障碍，来研究如何将第一同调为无限循环群的闭 3-流形嵌入基本群为无限循环群的闭四维流形，同时保持第一同调不变。

我们还将纽结 K 的超切片亏格概念推广到单连通四维流形，并证明存在双切片纽结，其广义超切片亏格可以任意大。

此外，我们定义了纽结的双稳定数，将稳定数的概念推广
由 Conway 和 Nagel 引入，并证明这一不变量也可以任意大。

1. 引言

在研究三维和四维拓扑学时，许多基本问题涉及 3 球面 S^3 中的纽结与 4 球面 S^4中的曲面之间的相互作用。其中，关于切片结的问题尤为重要；如果一个纽结围成四维球 D^4中的一个拓扑局部平坦圆盘，那么它就是切片的。等价地，如果一个纽结是一个无结的 2 球面与标准 S^3在 S^4中的横截交，那么它就是切片结。

如果一个定向的、闭合的、局部平坦嵌入曲面在 S^4 中围成一个嵌入局部平坦的三维把手体，那么它就是平凡打结的。Fox [Fox62] 提出了这样一个问题：哪些切片结可以作为无结 2 球面与标准 S^3在 S^4中的横截交出现？这样的纽结称为双切片。

约定。 本文中，除非另有说明，所有流形均为定向、紧致、连通的拓扑流形，且所有嵌入均为局部平坦的。

为了衡量一个纽结接近切片或双切片的程度，我们使用 4-亏格 （也称为切片亏格）或双切片亏格。纽结 K 在 S^3中的 4-亏格 记为$g_4(K)$，定义为边界为 K、适当嵌入于 D^4 中的曲面的最小亏格。 K [的双切片亏格 见文献 LM15 第 5] 节，定义为

$$g_{ds}(K) = \min\{\,\mathrm{genus}(F) \mid F \text{ is an unknotted surface in } S^4,\, F \cap S^3 = K\}.$$

纽结 K 是双切片的，当且仅当 $g_{ds}(K) = 0$，并且

$$2g_4(K) \le g_{ds}(K) \le 2g_3(K)$$

（参见 [LM15，第 5]节），其中 $g_3(K)$ 表示 K 的 Seifert亏格。

纽结 K 的 4-亏格这一概念可推广为 4维流形 X 中 K 的亏格，其中
边界为 S^3。 K的 X-亏格 记为 $g_X(K)$，定义为以下曲面的最小亏格：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57K10，57N70。纽结、双切片、双切片亏格。第二作者获得韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目资助（编号：RS-2023-NR076429）。

在 X 中带边界 K的适当嵌入曲面。Kasprowski、Powell、Ray 和 Teichner[KPRT24，推论 1.15] 证明了，对于每个纽结 K，若 X 是一个不同胚于 S^4、$\mathbb{CP}^2$ 或 $*\mathbb{CP}^2$ 中某个四维球补集的单连通四维流形，则 $g_X(K) = 0$。

进一步的细化涉及固定由一个嵌入曲面表示的同调类，该曲面以 K 为边界。若纽结 K 位于 S^3 中，且它在边界为 S^3 的 4维流形 X 中以 H–切片 的方式存在，则称其为 H–切片，如果它围成一个零同调圆盘，且该圆盘适当嵌入于 X 中。（若 4维流形 W 中的适当嵌入曲面 F 满足 $[F, \partial F] = 0 \in H_2(W, \partial W)$，则称其为零同调的 。除非另有说明，以下（上）同调群均取整数系数。）例如， D^4 中的每个适当嵌入曲面都是零同调的。Klug 和 Ruppik [KR21, 定理 4.4] 证明，对于每个边界为 S^3 的 4维流形 X，都存在一个在 X 中不是 H–切片的纽结。

双切片亏格。 本文将纽结 K 的双切片亏格这一概念推广到（成对的）单连通四维流形中 K 的双切片亏格。若曲面 S （适当）嵌入 4维流形 X 中，且满足 $\pi_1(X \smallsetminus S) \cong \mathbb{Z}$，则称其为 $\mathbb{Z}$–曲面 ；若 $\mathbb{Z}$–曲面 S 满足 S 与 S^2 同胚，则称其为 $\mathbb{Z}$–球面 。例如， S^4 中的平凡嵌入曲面是 S^4 中的 $\mathbb{Z}$–曲面。

我们指出，在单连通四维流形中， $\mathbb{Z}$–曲面是零同调的 [CP23，引理 5.1]。本文中，假设所有四维流形都是单连通的，因此每个 $\mathbb{Z}$–曲面都是零同调的。

设 X_i 是边界为 $S^3, i = 1, 2$ 的单连通四维流形。若存在适当嵌入圆盘 $D_i \subset X_i$ ，满足 $\partial D_i = K, i = 1, 2$，且 $D_1 \cup_K D_2$ 是 $X_1 \cup_{S^3} X_2$中的 $\mathbb{Z}$–球面，则称纽结 K是（X_1, X_2）–双切片的。 K 的（X_1, X_2）–双切片亏格定义为

$$g_{X_1, X_2}(K) = \min\{ \operatorname{genus}(F_1 \cup_K F_2) \mid F_i \subset X_i \text{ and } F_1 \cup_K F_2 \text{ is a } \mathbb{Z}\text{–surface in } X_1 \cup_{S^3} X_2\},$$

其中每个 F_i 遍历 X_i 中边界为 K, $i = 1, 2$ 的所有适当嵌入曲面。显然，当且仅当 K 是（X_1, X_2）–双切片时，$g_{X_1, X_2}(K) = 0$。

设 X 是一个单连通闭4维流形。注意，若 $X = X_1 \cup_{S^3} X_2$ 对于带边界 S^3 的4维流形 X_i 满足 $i = 1, 2$，则每个 X_i 都是单连通的。我们称纽结 K 是 X–双切片的，如果存在带边界 S^3 的4维流形 X_i，使得 $i = 1, 2$，且 $X = X_1 \cup_{S^3} X_2$，并且 K 是（X_1, X_2）–双切片的。 K 的–双切片亏格 X定义为

$$g_{ds}^X(K) = \min\{g_{X_1, X_2}(K) \mid X_i \text{ are 4-manifolds with boundary } S^3, i = 1, 2, \text{ such that } X = X_1 \cup_{S^3} X_2\}.$$

容易看出，纽结 K 是 X–双切片的，当且仅当 $g_{ds}^X(K) = 0$。由于 S^4 中的每个平凡嵌入曲面都是一个 $\mathbb{Z}$–曲面，因此有$g_{ds}^{S^4}(K) \leq g_{ds}(K)$。我们还将在定理 5.1 中证明，对于每个单连通闭四维流形 X，都有$g_{ds}^X(K) \leq g_{ds}^{S^4}(K)$。

注 1.1。 (1) 如果曲面 F 在 S^4中是平凡打结的，那么 $\pi_1(S^4 \smallsetminus F) \cong \mathbb{Z}$。解纽结猜想 断言其逆命题成立；当亏格$(F) \neq 1$， 2 时，解纽结猜想成立（参见 [FQ90, 定理 11.7A]（亏格$(F) = 0$）， [CP23, 定理 1.1]（亏格$(F) \geq 3$），以及 [CP23, 第 1.1] 节关于相关讨论的内容）。由此可知，一个纽结是双切片的，当且仅当它在上述意义下是 S^4–双切片的。此外，$g_{ds}^{S^4}(K) \leq g_{ds}(K)$；如果解纽结猜想成立，那么 $g_{ds}^{S^4}(K) = g_{ds}(K)$。

(2) 在上述$g_{X_1, X_2}(K)$ 和 $g_{ds}^X(K)$的定义中， X_i 中的曲面 D_i 和 F_i 是零同调的， $i = 1, 2$，因为 $D_1 \cup_K D_2$ 和 $F_1 \cup_K F_2$ 是单连通四维流形中的 $\mathbb{Z}$–曲面，因此是零同调的（见 [CP23, Lemma 5.1]）。

我们将给出 $g_{ds}^X(K)$的下界，并证明它可以任意大。为此，我们将利用新的障碍，研究如何将具有无限循环第一同调的3维流形嵌入基本群为无限循环群的4维流形（定理 A）；这些结果本身也可能具有独立的研究价值。

将三维流形嵌入四维流形的障碍。 设 M 是一个闭三维流形， W 是一个闭四维流形。若嵌入 $M \hookrightarrow W$ 诱导出一个同构 $H_1(M) \xrightarrow{=} H_1(W)$，我们称其为 H_1–嵌入 。令 $M(K)$表示对 S^3 中的纽结 K 进行零系数手术所得的流形。我们将证明， H_1–嵌入与 X–双切片亏格密切相关，并利用它给出 X–双切片亏格的下界。在定理4.1中，我们还将证明，纽结 K 是双切片的，当且仅当存在一个 H_1–嵌入，将 $M(K)$嵌入 $S^1 \times S^3$中。

对于闭 3-流形 M和群同态 $\phi\colon \pi_1(M) \to G$，*Cheeger– Gromov–*冯·诺依曼 $\rho^{(2)}$-不变量（记作 $\rho^{(2)}(M, \phi)$）定义为一个 L^2–签名缺陷，其中 ϕ 可延拓到某个四维流形上（更多关于 $\rho^{(2)}$-不变量的内容，见第2节）。

利用 $\rho^{(2)}$-不变量，我们得到以下 H_1–嵌入障碍。在下述定理中，假设群 G 为可和 群，并且属于 ***Strebel*** 类 $D(R)$，其中 $R = \mathbb{Q}$或 $\mathbb{Z}_p$ 对应于素数 p；这些术语的定义和性质请参见第 3 节。对于空间 X，令 $b_i(X) = \text{秩}_{\mathbb{Z}} H_i(X)$。

定理 A。 设 M 为一个具有 $H_1(M) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ 的闭 *3*-流形，且 W 为一个具有 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$的闭四维流形。如果 $f\colon M \to W$是一个 H_1–嵌入，则存在 *4*-流形 W_1 和 W_2，满足以下条件：令 $r = b_2(W)$ 以及 $\Lambda = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$。

(1) $f(M) = \partial W_1 = \partial W_2$且 $W = W_1 \cup_{f(M)} W_2$。(2) 对于 $i = 1$、2，令 $f_i\colon M \to W_i$ 为由 f诱导的包含映射。于是， f_i 诱导出一个同构 $(f_i)_*\colon H_1(M) \xrightarrow{=} H_1(W_i)$， $i = 1$, 2。(3) 存在一个正合序列

$$\Lambda^r \longrightarrow H_1(M;\Lambda) \xrightarrow{((f_1)_*,(f_2)_*)} H_1(W_1;\Lambda) \oplus H_1(W_2;\Lambda) \longrightarrow 0.$$

(4) 设 G 是位于 ***Strebel*** 类 $D(R)$ 中的可和群，其中 $R = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Z}_p$，且 p为素数。若 $\phi\colon \pi_1(M) \to G$是可延拓到 W_1或 W_2上的同态，则

$$\left|\rho^{(2)}(M,\phi)\right| \le 2r.$$

我们在下述定理中将定理 A 与 $g_{X_1,X_2}(K)$ 及 $g_X(K)$ 联系起来。

定理 B. 设 K 是 S^3 中的纽结，且 g 为非负整数。

(1) 设 X_i 是以 S^3为边界的单连通四维流形， $i = 1$, *2*，并设 $X = X_1 \cup_{S^3} X_2$。若 $g_{X_1,\, X_2}(K) \le g$，则存在闭四维流形 W，满足 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$且 $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{2g+b_2(X)}$，使得 $M(K)$ 在 W中存在 H_1–嵌入。*(2)* 设 X 是单连通闭四维流形。若 $g_{ds}^X(K) \le g$，则存在闭四维流形 W，满足 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ 且 $H_2(W) = \mathbb{Z}^{2g+b_2(X)}$，使得 $M(K)$ 在 W 中存在H_1–嵌入。

定理 A 和定理 B 给出了 $g_{ds}^X(K)$的下界。应用这些下界，我们得到以下定理，该定理表明，对于每个单连通闭四维流形 X， $g_{ds}^X(K)$都可以任意大。

定理 C。 设 g 和 n 为非负整数。则存在一个代数双切片且带状的纽结 K，位于 S^3 中，使得在任何满足 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$和 $b_2(W) \le 2g + n$的闭四维流形 W中，都不存在 H_1–嵌入 $M(K)$ 。特别地，对于每个满足 $b_2(X) = n$的单连通闭四维流形 X，这样的纽结 K都满足$g_{ds}^X(K) > g$ 。

注 1.2。 (1) 在定理 C 中，由于 K 是带状的，在每个具有边界 S^3的四维流形 X_i 的分解 $X = X_1 \cup_{S^3} X_2$中，纽结 K 都在每个 X_i中界定一个位于 S^3 领圈内的零同调圆盘。因此，K 在每个 X_i中都是 H–切片的。(2) 当 $X = S^4$时，由于 $g_{ds}^{S^4}(K) \leq g_{ds}(K)$，定理 C 重证了 [Che21，定理 1.2]„，该定理指出，对于任意整数 g，都存在一个代数双切片且带状的纽结 K，使得 $g_{ds}(K) > g$。(3) Orson 和 Powell [OP21，定理 1.1] 证明，对于每个$\omega \in S^1$，$g_{ds}(K) \geq |\sigma_K(\omega)|$，其中 σ_K 表示 K的 Levine–Tristram 符号函数。定理 C 中的纽结 K 对于每个 $\omega \in S^1$ 都满足 $\sigma_K(\omega) = 0$，因为它们是代数双切片的。

设 $\Sigma_n(K)$ 是 S^3 在 K 上的 n 重分支循环覆盖。若 K 是一个双切片纽结，那么对每个素数幂 n，3维流形 $\Sigma_n(K)$ 都是有理同调 3 球面，并且它嵌入于 S^4，因为无结 2 球面上的 S^4 的 n 重分支循环覆盖同胚于 S^4 （参见 [GL83]）。由此自然产生一个问题：如果对每个素数幂 n， $\Sigma_n(K)$ 都嵌入于 S^4，那么纽结 K 是否是双切片的?

我们给出的答案是否定的。我们指出，如果对所有素数幂 n， $H_1(\Sigma_n(K)) = 0$ （等价地， $\Sigma_n(K)$ 是一个整数同调 3 球面），那么 K [CG86] 的 Casson–Gordon 不变量均为零。我们还指出，每个整数同调 3 球面都嵌入于 S^4 [（Fre82，定理 1.4]）。

定理 D。 设 g 为一个非负整数。那么，存在一个代数双切片纽结 K，满足以下条件：

(1) 不存在将 $M(K)$ 嵌入到闭四维流形 W 中的 H_1–嵌入，其中 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ 且$b_2(W) \leq 2g$。特别地， $g_{ds}(K) > g$，并且 K 不是双切纽结。(2) 对于每个素数幂 n，都有 $H_1(\Sigma_n(K)) = 0$。特别地， $\Sigma_n(K)$ 嵌入于 S^4中，且 *Casson–Gordon* 不变量对 K消失。

我们指出， [OP21 的定理 1.1] 和 [Che21]中关于 $g_{ds}(K)$的下界并不适用于定理 D 中的纽结 K，因为 K 是代数双切片的，且 $H_1(\Sigma_2(K)) = 0$。

双稳定数。 我们定义纽结的双稳定化数，并将其与定理 A 联系起来。若纽结 K 在 $D^4 \# nS^2 \times S^2$ 中是 H–切片的，则称其为稳定 H–切片，其中 $D^4 \# nS^2 \times S^2$ 是 D^4 与 n 个 $S^2 \times S^2$ 副本的连通和，且某个 $n \geq 0$ 满足这一条件。当且仅当 K 的 Arf 不变量消失时，这一条件成立 [Sch10]。Conway 和 Nagel [CN20] 将稳定的 H–切片纽结 K 的稳定数定义为

$$\mathrm{sn}(K) = \min\{\, n \mid K \text{ is } H\text{–slice in } D^4 \# nS^2 \times S^2\}.$$

我们注意到，$\mathrm{sn}(K) = 0$ 当且仅当 K 在 D^4 中是切片结，因为 D^4 中的每个切片圆盘都是零同调的。

我们将上述概念推广到双重切片纽结。对于整数 $n \geq 0$，令

$$W_n = D^4 \# nS^2 \times S^2.$$

我们称纽结 K 为稳定双切片，如果它对某些整数 $m, n \geq 0$ 是 (W_m, W_n)–双切片。定理 7.1(1) 表明，纽结是稳定双切片的当且仅当它是稳定 H–切片的。

对于稳定双切片结 K，我们将 的双稳定数定义为

$$\mathrm{dsn}(K) = \min\{\, m + n \mid K \text{ is } (W_m, W_n)\text{–doubly slice}\}.$$

在定理 7.1 (2) 中，我们证明对于一个稳定双切片结 K

$$2\mathrm{sn}(K) \leq \mathrm{dsn}(K) \leq g_{ds}(K).$$

我们想知道这些不等式是否可能是严格的。利用定理 A，我们给出以下定理，它表明差值 dsn(K) − 2sn(K) 可以任意大。

定理 E. 对每个整数 $m \geq 0$，都存在一个代数双切片且带状的纽结 K（因此 $\mathrm{sn}(K) = 0$），使得 $\mathrm{dsn}(K) > m$。

对于一个边界为 S^3 的单连通四维流形 X，以及 $x \in H_2(X, \partial X)$，Conway、Orson 和 Pencovitch [COP25, 定义 1.11]将 K 的稳定数推广为 (x, X)–稳定数 K。受此启发，在第 7.2 小节中，对于单连通闭四维流形 X, ，我们将定义 K的 X–双稳定数，以此推广双稳定化数的概念，并证明它可以任意大。

注 1.3. 定义 K 的弱双稳定数为

$$\mathrm{wdsn}(K) = \min\{\, n \mid K \text{ is } mS^2 \times S^2\text{–doubly slice}\}.$$

显然，wdsn(K) ≤ dsn(K)。如果对于满足 $\partial X_i = S^3$ 的 4维流形 X_i，有 $H_2(mS^2 \times S^2) \cong H_2(X_1) \oplus H_2(X_2)$。利用这一点以及定理 E 的证明，可以说明将 dsn(K) $> m$ 替换为 wdsn(K) $> m$后，定理 E 仍然成立。但作者不知道 2sn(K) ≤ wdsn(K) 是否成立：当 $mS^2 \times S^2 = X_1 \cup_{S^3} X_2$ 时，可能对任意 n 都有 $\#nS^2 \times S^2$。例如， $8S^2 \times S^2 \cong X \cup (-X)$，其中 $X = E_8 \smallsetminus \mathrm{int}(D^4)$。

超切片亏格。我们将超切片结和结的超切片亏格的概念推广到单连通四维流形。若存在适当嵌入圆盘 D in D^4，满足 $\partial D = K$，且 D 的双在 S^4 中是平凡打结的，则称结 K in S^3 是超切片结。为简便起见，对于带边界的流形 M，令 DM 表示 M 的双。K 的超切片亏格记为 $g_s(K)$，定义为满足 $\partial F = K$、且 DF 在 S^4 中是平凡打结的适当嵌入曲面 F in D^4 的最小亏格。已知 $g_s(K)$ 等于结 K 的 $\mathbb{Z}$–切片亏格，其中结 K 的 $\mathbb{Z}$–切片亏格定义为满足 $\partial F = K$、且 $\pi_1(D^4 \smallsetminus F) \cong \mathbb{Z}$ 的适当嵌入曲面 Fin D^4 的最小亏格。（见 [FL24，推论 1.7] 和 [Che21，第 1] 节）。关于 $\mathbb{Z}$–切片亏格和 $\mathbb{Z}$–曲面，读者可参见 [FL24、CP23]。

设 X 是一个边界为 S^3 的单连通4维流形。若纽结 K 位于 S^3 中，且 K 是 X 中的一个适当嵌入圆盘 D 的边界，并满足 $\partial D = K$，使得 D 的双是 DX 中的一个 $\mathbb{Z}$ 球面，则称该纽结为 X–超切片。我们还将 X–超切片亏格定义为 K

$$g_s^X(K) = \min\{\mathrm{genus}(F) \mid DF \text{ is a } \mathbb{Z}\text{–surface in } DX\},$$

其中 F 遍历 X 中满足 $\partial F = K$ 的所有适当嵌入曲面。（于是， F 在 X 中是零同调的。参见注记1.1(2)。）

容易看出， $g_{ds}^{DX}(K) \leq 2g_s^X(K)$，且 $g_s^{D^4}(K) \leq g_s(K)$。我们注意到，如果解纽结猜想成立，则 $g_s^{D^4}(K) = g_s(K)$。在定理 8.1 中，我们证明 $g_s^X(K) \leq g_s^{D^4}(K)$。

下面的定理给出了 $g_s^X(K)$ 的下界。回忆一下， $\Lambda = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$。

定理 F。 设 K 是 S^3 中的一个纽结，且 X 是边界为 S^3 的单连通四维流形。那么， $H_1(M(K); \Lambda)$ 作为 Λ-模的最小生成元个数小于或等于 $4g_s^X(K) + 2b_2(X)$。

利用定理 F，我们得到如下定理，该定理表明差值 $2g_s^X(K) - g_{ds}^{DX}(K)$ 可以任意大。

定理 G。 设 X 是一个边界为 S^3 的单连通*4*维流形，且令 g 为一个整数。那么，存在一个双切片且带状的纽结 K，使得 $g_s^X(K) > g$ 且$g_{ds}^{DX}(K) = 0$。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们回顾 L^2–签名和 $\rho^{(2)}$–不变量。在第3节中，我们证明定理 A。定理 B 在第4节中证明。在第5节和第6节中，分别证明定理 C 和定理 D。定理 E 在第7节中证明。定理 F 和定理 G 在第8节中证明。

致谢
We t感谢 Charles Livingston、James Davis 和 Jae Choon Cha 的宝贵交流 .

2. Cheeger–Gromov–冯·诺依曼 $\rho^{(2)}$不变量

本节回顾 3维流形的 $\rho^{(2)}$不变量及相关结果。

设 M为一个闭 3-流形，且 $\phi\colon \pi_1(M) \to G$是群 G的一个同态。在[CG85], 中，对于 M上的给定黎曼度量，Cheeger 和 Gromov 利用 M 及 M的G覆盖的签名算子，定义了*Cheeger–Gromov–冯·诺依曼* $\rho^{(2)}$不变量 $\rho^{(2)}(M,\ \phi)$。他们证明了该不变量与度量的选择无关。后来，Chang 和 Weinberger [CW03] 给出了 $\rho^{(2)}(M,\ \phi)$的拓扑定义，如下所示。对于同态 ϕ，存在一个单射同态 $i\colon G \to G'$ 以及一个 4维流形 W，使得 $i\circ\phi\colon \pi_1(M) \to G'$可扩张为 $\pi_1(W)$。于是， $\rho^{(2)}(M,\ \phi)$定义为

$$\rho^{(2)}(M,\phi) = \operatorname{sign}^{(2)}_{G'}(W) - \operatorname{sign}(W) \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

其中，$\operatorname{sign}^{(2)}_{G'}(W)$ 是厄米交叉形式的 L^2–签名

$$H_2(W;\mathcal{N}G') \times H_2(W;\mathcal{N}G') \longrightarrow \mathcal{N}G'$$

对应于群冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}G'$，而 $\operatorname{sign}(W)$ 是 W 的普通签名。已知上述 $\rho^{(2)}(M,\ \phi)$ 的定义与映射 $i\colon G \to G'$ 以及 4维流形 W 的选择均无关。关于 $\rho^{(2)}$-不变量和 L^2–签名的更多细节，请参见 [COT03、CT07、Cha13]。

下面列出本文将用到的 $\rho^{(2)}$-不变量的若干性质。回忆一下，对于纽结 K，3维流形 $M(K)$ 表示对 K 在 S^3中进行的零系数手术，而 σ_K 表示 K的 Levine–Tristram 签名函数。

引理 2.1 ([COT04，第 2 节，第 108])。 设 M是一个闭 *3*-流形，且 $\phi\colon \pi_1(M) \to G$是一个同态。

(1) $\rho^{(2)}(-M,\phi) = -\rho^{(2)}(M,\phi)$。(2)（子群性质）若 $i\colon G \to G'$ 是单射同态，则

$$\rho^{(2)}(M, i\circ\phi) = \rho^{(2)}(M,\phi).$$

(3) 若 ϕ 是平凡的，则 $\rho^{(2)}(M,\phi) = 0$。
(4) 若 $\phi\colon \pi_1(M(K)) \to \mathbb{Z}$ 是满射同态，则

$$\rho^{(2)}(M(K),\phi) = \int_{S^1} \sigma_K(\omega)\, d\omega$$

其中 S^1 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆，且积分经过归一化，使得 $\int_{S^1} d\omega = 1$。

为估计 $\rho^{(2)}(M,\phi)$，我们使用以下引理。

引理 2.2 ([CG85])。 设 M 是一个闭 *3*-流形。则存在常数 C_M，使得对于所有同态 ϕ，均有 $|\rho^{(2)}(M,\phi)| \le C_M$。

我们指出，在引理 2.2 中，若纽结 K 满足 $M = M(K)$，则其通用上界可明确写为 $C_M = 69713280\cdot c(K)$，其中 $c(K)$ 是 K 的交叉数（参见 [Cha16，定理 1.9]）。

3. H_1–四维流形中三维流形的嵌入

本节中，我们回顾可和且属于 Sterebel 类 $D(R)$ 的群，并给出定理 A 的证明。

群 G若存在一个在左乘法下保持不变的有限可加测度，则称其为可和。对于带单位元的交换环 R，若群 G上的一个同态 $f\colon P \to Q$ 在射影 RG-模之间满足：只要同态 $1_R \otimes_{RG} f\colon R \otimes_{RG} P \to R \otimes_{RG} Q$ 是单射，该同态也必为单射，则称群 G属于*Strebel* 类$D(R)$。（这里，我们将 R 视为带平凡 G-作用的（R, RG）-双模。）

有很大一类群是可和的，并且属于 Strebel 类 $D(R)$。例如，群 $\mathbb{Q}$是可和的，并且属于 Strebel 类 $D(\mathbb{Z})$；有限 p- 群是可和的，并且属于 Strebel 类 $D(\mathbb{Z}_p)$。若群 G 存在一个有限长度的次正规列，且其相继商群均为无挠阿贝尔群，则称该群为多挠自由阿贝尔群；每个多挠自由阿贝尔群对于任意环 R都是可和的，并属于 Strebel 类 $D(R)$。关于属于 Strebel 类 $D(R)$的可和群的更多讨论，请参阅[CO12，第 6]节。

现在我们给出定理 A 的证明。

定理 *A* 的证明。 回忆一下，对于空间 X，我们定义 $b_i(X) = \text{秩}_{\mathbb{Z}} H_i(X)$。对于同态 $\mathbb{Z}[\pi_1(X)] \to \Lambda$，令

$$b_i(X;\Lambda) = \operatorname{rank}_{\Lambda} H_i(X;\Lambda).$$

为方便起见，我们通过 f 将 M与 $f(M)$ 等同。

补集 $W \smallsetminus M$ 有两个连通分支，因为 M 和 W 都是定向的$\widetilde{}$，且 f诱导了一个同构 $H_1(M) \xrightarrow{\cong} H_1(W)$。令 W_1和 W_2为 $W \smallsetminus M$的两个连通分支的闭包。那么，

$$\partial W_1 = \partial W_2 = M \text{ and } W_1 \cup_M W_2 = W,$$

因此 (1) 得证。

注意，$f_*\colon H_1(M) \to H_1(W)$ 分别经由 $H_1(W_1)$ 和 $H_1(W_2)$ 分解。由 (1)、Mayer–Vietoris序列以及 $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$且 $f_*\colon H_1(M) \to H_1(W)$ 是一个同构，可立即得到性质 (2)。

由Mayer–Vietoris序列，我们得到正合序列

$$H_2(W;\Lambda) \longrightarrow H_1(M;\Lambda) \longrightarrow H_1(W_1;\Lambda) \oplus H_1(W_2;\Lambda) \longrightarrow H_1(W;\Lambda).$$

我们将证明 $H_2(W;\Lambda) \cong \Lambda^r$。容易看出，对 $i = 0, 1, 3, 4$，有 $b_i(W) = 1$。因此，W的欧拉示性数等于 $b_2(W) = r$，从而

$$r = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i b_i(W;\Lambda). \tag{3.1}$$

由于 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$，我们有 $H_1(W;\Lambda) = 0$。由Poincar´e对偶以及主理想整环 Λ上的普遍系数定理，可得 $b_3(W;\Lambda) = b_1(W;\Lambda) = 0$。同样容易看出 $b_0(W;\Lambda) = b_4(W;\Lambda) = 0$。由(3.1)可得 $b_2(W;\Lambda) = r$。此外，

$$H_2(W;\Lambda) \cong H^2(W;\Lambda) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda}(H_2(W;\Lambda),\Lambda)$$

因为 $H_1(W;\Lambda) = 0$。由此可知 $H_2(W;\Lambda)$是 Λ上的自由模。（或者，由于 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$，可以从 $H_2(W;\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$是 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-自由的看出这一点。例如，参见 [CP23，引理3.2]。）因此，$H_2(W;\Lambda) \cong \Lambda^r$，从而性质（3）成立。

假设 G 是一个可和群，属于 Strebel 类 $D(R)$，其中 $R = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Z}_p$，且 p 是素数，并且同态 $\phi\colon \pi_1(M) \to G$ 可延拓至 W_i，其中 $i = 1$ 或 2。

由 L^2-signature $\operatorname{sign}_G^{(2)}(W_i)$ 的定义可直接得出

$$\left|\operatorname{sign}_G^{(2)}(W_i)\right| \leq \dim^{(2)} H_2(W_i;\mathcal{N}G),$$

其中 $\dim^{(2)}$ 表示 L^2 维数（参见 [Cha13，第 3.1] 节）。我们有

$$\dim^{(2)} H_2(W_i;\mathcal{N}G) \leq \dim_R H_2(W_i;R)$$

由 [Cha13，定理 3.11(1)] 得到。此外，$\dim_R H_2(W_i;R) \leq b_2(W_i)$，因为 $H_1(W_i) \cong H_1(M) \cong \mathbb{Z}$。因此，我们得到

$$\left|\operatorname{sign}_G^{(2)}(W_i)\right| \leq b_2(W_i).$$

O显然，$|\operatorname{sign}(W_i)| \leq b_2(W_i)$，并且由 (2.1) 可得 $|\rho^{(2)}(M,\phi)| \leq 2b_2(W_i)$.

因此，$|\rho^{(2)}(M,\phi)| \leq 2r$，因为 $b_2(W_i) \leq b_2(W) = r$，性质 (4) 得证。 □

4. 双切片亏格与 H_1–嵌入

在本节中，我们给出定理 B 的证明。

定理 *B* 的证明。存在曲面 F_i，位于 X_i 中，满足 $\partial F_i = K$，$i = 1, 2$，使得 $\operatorname{genus}(F_1 \cup F_2) \leq g$ 且 $\pi_1((X_1 \cup_{S^3} X_2) \setminus (F_1 \cup_K F_2)) \cong \mathbb{Z}$，因为 $g_{X_1 \cup X_2}(K) \leq g$。必要时，通过与 S^3 在 X_1 的领圈中的一个平凡嵌入曲面作连通和，我们可以假设 $\operatorname{genus}(F_1 \cup F_2) = g$。

对于 $i = 1, 2$，令 $\widetilde{X_i}$ 是通过沿着 $\widetilde{K}$ 的 0 框架将一个 2-柄附加到 X_i 上得到的 4维流形，令 F_i 为 X_i 中的一个闭曲面，它由 2- 柄的核与沿着 K 的 F_i 的并集构成。注意，$\partial\widetilde{X_i} = M(K)$、$H_1(\widetilde{X_i}) = 0$，且 $H_2(\widetilde{X_i}) \cong \mathbb{Z}^{b_2(X_i)+1}$。回想一下，每个 F_i 在 X_i 中都是零同调的，因为 $F_1 \cup F_2$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 曲面，因而是零-$\widetilde{K}$同调的。因此，F_i 的自交数为零，且 F_i 具有平凡法丛，$i = 1, 2$。$\widetilde{F_i}$ 上的框架集合与 $H^1(\widetilde{\Sigma_i})$ 之间存在一一对应，并且存在 $\widetilde{K}$ 的一个 F_i 上的框架，使得诱导同态 $H_1(F_i) \to H_1(X_i \setminus F_i)$ 是平凡的（参见 Cha08，第 899] 页）。我们利用这个框架，将 $\widetilde{F_i}$ 在 $\widetilde{X_i}$ 中的管状邻域与 $\widetilde{F_i} \times D^2$ 等同起来。

对于 $i = 1, 2$，令 $Z_i = \widetilde{X_i} \setminus \operatorname{int}(\widetilde{F_i} \times D^2)$。容易证明，$H_1(Z_i) \cong \mathbb{Z}$由 K 的一条子午线生成，并且 $b_2(Z_i) = b_2(X_i) + 1 + 2g_i$。令 H_i 为一个边界为 F_i的把手体，并定义4维流形 W_i 为

$$W_i = Z_i \cup \left(H_i \times S^1\right),$$

其中 $\widetilde{F_i} \times S^1 \subset \partial Z_i$ 与 $\partial H_i \times S^1 = \partial(H_i \times D^2)$ 等同。利用 Mayer–Vietoris序列以及我们对 F_i 上框架的选择，容易证明 $H_1(W_i) \cong \mathbb{Z}$ 且$b_2(W_i) = b_2(X_i) + 2g_i$。我们还有 $\partial W_i = M(K)$。定义4维流形 W 为

$$W = W_1 \cup_{M(K)} W_2.$$

我们将证明 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{2g+b_2(X)}$，且包含映射 $M(K) \hookrightarrow W$是一个H_1–嵌入。

注意，$g = g_1 + g_2$和 $b_2(X) = b_2(X_1) + b_2(X_2)$。利用这一对 (W_1, W_2) 的 Mayer–Vietoris序列，可以很容易看出

$$H_1(W) \cong \mathbb{Z} \text{ and } b_2(W) = 2g + b_2(X),$$

这里，$H_1(W)$ 由 K 的一条子午线生成，因此包含映射 $M(K) \hookrightarrow W$是一个 H_1–嵌入。群 $H_2(W)$ 是自由阿贝尔群，因为 $H_1(W) \cong \mathbb{Z}$，由此可得 $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{2g+b_2(X)}$。

还需证明 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$。为简洁起见，令

$$Z = Z_1 \cup_{M(K)} Z_2.$$

注意到 $\pi_1(Z_i) \cong \pi_1(X_i \setminus \Sigma_i)/\langle\ell\rangle$，$i = 1, 2$，以及 $\pi_1(M(K)) \cong \pi_1(S^3 \setminus K)/\langle\ell\rangle$，其中 ℓ 和 $\langle -\rangle$ 分别表示 K 的优选经线和由 $-$ 正规生成的子群。利用塞弗特–范坎彭定理，可以直接看出

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1((X_1 \cup_{S^3} X_2) \setminus (F_1 \cup_K F_2))/\langle\ell\rangle \cong \mathbb{Z}/\langle\ell\rangle.$$

由 Mayer–Vietoris序列可知 $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}$。我们得到 $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}$，因为 $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}$，且 $\pi_1(Z)$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个商。注意到

$$W = Z \cup \left(\coprod_{i=1}^{2} H_i \times S^1 \right).$$

注意到由包含映射诱导的同态 $\pi_1(\partial H_i \times S^1) \to \pi_1(H_i \times S^1)$ 对每个 i 都是满射，利用塞弗特–范坎彭定理，可以直接看出 $\pi_1(W)$ 是 $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}$ 的一个商。我们回忆 $H_1(W) \cong \mathbb{Z}$，因此可得 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$。这就证明了定理 B (1)。

定理 B（2）可由定理 B（1）和 $g_{ds}^X(K)$ 的定义立即推出。 □

利用定理 B，我们给出以下定理，它刻画了一个纽结何时为双切片纽结。

定理4.1。纽结 K 为双切片，当且仅当存在一个 H_1–嵌入，将 $M(K)$嵌入 $S^1 \times S^3$ 中。

证明。假设 K 为双切片。那么，$g_{ds}(K) = 0$，由定理 B（2）可得一个闭四维流形 W，满足 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ 且 $H_2(W) = 0$，并且存在一个 H_1–嵌入，将 $M(K)$ 嵌入 W 中。我们将证明 W 与 $S^1 \times S^3$ 同胚。

由于 $H_1(W) \cong \mathbb{Z}$ 且 $H_2(W) = 0$，我们有 $H^2(W; \mathbb{Z}_2) \cong H_2(W; \mathbb{Z}_2) = 0$，因此 4维流形 W 是自旋的。又由于 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$，我们有 $H_1(W; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = 0$，因此 $H_2(W; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ 没有 $\mathbb{Z}$-挠元。此外，如定理 A 的证明所示，可以证明 $H_2(W; \Lambda) = 0$，由此可得 $H_2(W; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = 0$。

因此，W 是一个自旋闭四维流形，具有 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$，且其在 $\pi_2(W) \cong H_2(W; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = 0$上的交形式为平凡形式。由此可根据 [Kre99，定理F] 得出，W与 $S^1 \times S^3$ 同胚（另见 [FQ90，第 10.7] 节）。

假设存在一个 H_1–嵌入 $f\colon M(K) \to S^1 \times S^3$。为方便起见，我们将 $M(K)$ 认作 $f(M(K))$。补集 $S^1 \times S^3 \setminus M(K)$ 有两个连通分支，因为由 f 诱导的同态 $H_1(M(K)) \to H_1(S^1 \times S^3)$ 是一个同构。令 V_1和 V_2为 $S^1 \times S^3 \setminus M(K)$ 各连通分支的闭包。那么，V_i是四维流形，且$\partial V_i = M(K)$；K的一条子午线正规生成 $\pi_1(V_i)$，并且 $H_2(V_i) = 0, i = 1, 2$。

回顾一下，$M(K) = (S^3 \setminus \nu K) \cup_{S^1 \times S^1} (S^1 \times D^2)$，其中 νK 表示 S^3中 K的开管状邻域。令 μ为曲线 $S^1 \times 0 \subset S^1 \times D^2 \subset M(K)$，它是 K的子午线。对于 $i = 1, 2$，令 W_i为沿着 μ 以 0 框架将 2-柄 $D^2 \times D^2$ 附加到 V_i上所得到的 4维流形。那么，$\partial W_i = S^3$、$\pi_1(W_i) = 0$，且 $H_2(W_i) = 0$。由此可知，W_i与 D^4同胚。令 D_i为 W_i中的 2-柄 $0 \times D^2$ 的余核，其中 $i = 1, 2$。那么，∂D_i 表示 $S^3 = \partial W_i$中的纽结 K。

设 $W = W_1 \cup_{S^3} W_2$，其与 S^4 同胚；再设 $S = D_1 \cup_K D_2$，其与 S^2 同胚。我们证明 S 在 W 中是平凡打结，这将说明 K 是双切片。注意，$W \setminus S = (W_1 \setminus D_1) \cup_{S^3 \setminus K} (W_2 \setminus D_2)$。由塞弗特-范

坎彭定理可知

$$\begin{aligned}\pi_1(W \smallsetminus S) &\cong \pi_1(W_1 \smallsetminus D_1) *_{\pi_1(S^3 \smallsetminus K)} \pi_1(W_2 \smallsetminus D_2)\\ &\cong \pi_1(V_1) *_{\pi_1(S^3 \smallsetminus K)} \pi_1(V_2)\\ &\cong \pi_1(V_1) *_{\pi_1(M(K))} \pi_1(V_2)\\ &\cong \pi_1(S^1 \times S^3)\\ &\cong \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

由 [FQ90, 定理 11.7A] 可知， S 在 $W \cong S^4$中是平凡打结的。 □

5. 纽结的 X–双切片亏格

本节中，我们给出具有非平凡 X-双切片亏格的纽结，并证明定理 C。

定理 *C* 的证明。 设 R 为纽结 9_{46}, , 它是带状的。设 η 为一条简单闭曲线，它绕着 R 的显然塞弗特曲面的左侧带一次，并且在 S^3中是平凡打结的。见图 1。

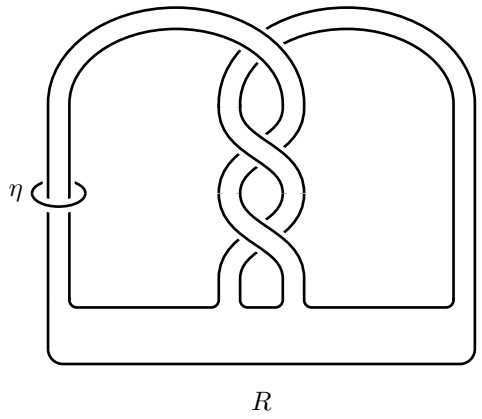

FIGURE 1. 纽结 R

回忆一下， $\Lambda = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$。我们选择 R 的一个定向，使得

$$H_1(M(R); \Lambda) \cong \Lambda/\langle 2t-1\rangle \oplus \Lambda/\langle t-2\rangle$$

并且 η 生成子模 $\Lambda/\langle 2t-1\rangle$。

对于一个纽结 K，令 $\rho_0(K)$ 表示 $\rho^{(2)}(M(K)\ \epsilon)$，其中 ϵ 是阿贝尔化同态$\pi_1(M(K)) \to \mathbb{Z}$。令 J为满足 $\rho_0(J) > 4g+2n$的纽结。例如，我们可以取 J为 N 个左手三叶结 J_0 的连通和，其中 N 是大于 $3g + \frac{3}{2}n$的整数；注意到 $\int_{S^1} \sigma_{J_0}(\omega)\ d\omega = 4/3$ （见引理 2.1 (4)）。

对于 $1 \le i \le 2g+n+1$，令 $\eta_i = \eta$，并令 $K_i = R(\eta_i, J)$，这是一个图案为 R、伴纽结为 J、轴为 η_i的卫星纽结。注意，每个 K_i 都是带状结，因为对 K_i 显然的塞弗特曲面的左侧带进行带手术后，会得到一个二分支平凡链。此外， K_i 是代数双切片的，因为 η_i 与 R 之间的链接数为零，纽结 K_i 和 R 具有相同的塞弗特形式，而 R 显然的塞弗特曲面所对应的塞弗特型是双曲的。

设 $K = \#_{i=1}^{2g+n+1} K_i$。则纽结 K 是代数双切片且带状的。

假设存在一个闭四维流形 W，使得 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$， $b_2(W) \le 2g+n$，并且存在一个 H_1–嵌入，将 $M(K)$ 嵌入 W 中。通过取 W 与

$\mathbb{CP}^2$ 的副本的连通和（如有必要），我们可以假设 $b_2(W) = 2g+n$。那么，存在满足定理 A 中性质的四维流形 W_1 和 W_2，且 $r = 2g+n$。

分别令 A_{2t-1} and A_{t-2} 为 $H_1(M(K);\Lambda)$ 的 $(2t-1)$–主部和 $(t-2)$–主部。注意

$$H_1(M(K);\Lambda) \cong (\Lambda/\langle 2t-1\rangle)^{2g+n+1} \oplus (\Lambda/\langle t-2\rangle)^{2g+n+1} = A_{2t-1} \oplus A_{t-2},$$

且 A_{2t-1} 由 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2g+1}\}$ 生成。

注意，序列

$$\Lambda^{2g+n} \cong H_2(W;\Lambda) \xrightarrow{\partial_*} H_1(M(K);\Lambda) \xrightarrow{((f_1)_*,(f_2)_*)} H_1(W_1;\Lambda) \oplus H_1(W_2;\Lambda) \longrightarrow 0$$

根据定理 A (3)，该序列正合，且 A_{2t-1} 不能由 $2g+n$ 个元素生成。因此，∂_* 的像不包含 A_{2t-1}。于是，存在某个不属于 ∂_* 像的 $\eta_i \in H_1(M(K);\Lambda)$。必要时重新排列 K_i，可假设 $\eta_1 \notin \operatorname{Im}\partial_*$。那么，$(f_1)_*(\eta_1)$ 或 $(f_2)_*(\eta_1)$ 非平凡。必要时交换 W_1 和 W_2，可假设 $(f_1)_*(\eta_1)$ 非平凡。

令 A'_{2t-1} 为 $H_1(W_1;\Lambda)$ 的 $(2t-1)$–主部。对于群 G，我们对每个整数 $n \geq 0$ 归纳定义 G 的第 n 导出子群：令 $G^{(0)} = G$，并且当 $n \geq 0$ 时令 $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$。注意，存在一个同构

$$\begin{aligned}\pi_1(W_1)/\pi_1(W_1)^{(2)} &\cong \left(\pi_1(W_1)^{(1)}/\pi_1(W_1)^{(2)}\right) \rtimes \left(\pi_1(W_1)/\pi_1(W_1)^{(1)}\right)\\ &\cong H_1(W_1;\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \rtimes \langle t\rangle.\end{aligned}$$

令 $G = A'_{2t-1} \rtimes \langle t\rangle$，并令 $\phi\colon \pi_1(M(K)) \to G$ 为以下复合映射

$$\pi_1(M(K)) \longrightarrow \pi_1(W_1) \longrightarrow \pi_1(W_1)/\pi_1(W_1)^{(2)} \longrightarrow H_1(W_1;\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \rtimes \langle t\rangle \longrightarrow H_1(W_1;\Lambda) \rtimes \langle t\rangle \longrightarrow G,$$

其中，最后一个映射由投影 $H_1(W_1;\Lambda) \to A'_{2t-1}$ 诱导。

为方便简洁起见，我们将 ϕ 在 W_1 的子空间上的限制记作 ϕ。注意，群 G 是多挠自由阿贝尔群，因为 A'_{2t-1} 和 $\langle t\rangle$ 都是无挠阿贝尔群。因此，G 是可和的，且属于 Strebel 类 $D(\mathbb{Z})$；由定理 A (4)，我们得到

$$|\rho^{(2)}(M(K),\phi)| \leq 4g+2n.$$

我们将通过另一种计算证明 $\rho^{(2)}(M(K)\ \phi) > 4g+2n$，这将导出矛盾并完成证明。

Note 即 $\phi\colon \pi_1(M(K)) \to G$ 可分解为 $\phi = h\circ\psi$，其中 ψ 是如下复合

$$\psi\colon \pi_1(M(K)) \longrightarrow \pi_1(M(K))/\pi_1(M(K))^{(2)} \longrightarrow H_1(M(K);\Lambda) \rtimes \langle t\rangle$$

and

$$h\colon H_1(M(K);\Lambda) \rtimes \langle t\rangle \longrightarrow H_1(W_1;\Lambda) \rtimes \langle t\rangle \longrightarrow G$$

由 $h = ((f_1)_*, \mathrm{id})$ 定义。

令 C 为标准协边，其中 $\partial C = \partial_+ C \sqcup \partial_- C$，这里

$$\partial_+ C = \bigsqcup_{i=1}^{2g+n+1} M(K_i) \quad \text{and} \quad \partial_- C = -M(K)$$

（见 [COT04，第 113] 页）。可以看出 $\pi_1(C) \cong \pi_1(M(K))/N$，其中 N 是由 K_i，$1 \leq i \leq 2g+n+1$ 的零框架经线 ℓ_i 生成的正规子群。

由于对每个 i，$\psi(\ell_i)$ 都是平凡的，$\phi(\ell_i)$ 也如此，因此可得 $\phi\colon \pi_1(M(K)) \to G$ 可扩展为 $\pi_1(C) \to G$，我们仍将其记作 ϕ。为清楚起见，我们将 ϕ_i 记作 $\phi\colon \pi_1(C) \to G$ 在 $\pi_1(M(K_i))$ 上的限制，$1 \leq i \leq 2g+n+1$。根据 C 的构造，可以

很容易看出，对任意群 Γ，映射 $H_2(\partial C;\mathbb{Z}\Gamma) \to H_2(C;\mathbb{Z}\Gamma)$ 是满射，因此 $\text{sign}_\Gamma^{(2)}(C)=0$（见 [CHL09，引理 2.4] 及其证明）。特别地，

$$\text{sign}_G^{(2)}(C)=\text{sign}(C)=0.$$

因此，可得 $\rho^{(2)}(\partial C,\ \phi)=\text{sign}_G^{(2)}(C)-\text{sign}(C)=0$，并且我们有

$$\rho^{(2)}(M(K),\phi)=\sum_{i=1}^{2g+n+1}\rho^{(2)}(M(K_i),\phi_i).$$

令 νR 表示 R 在 S^3中的开管状邻域。由于对每个 i，$\phi_i(\ell_i)$ 都是平凡的，因此映射 ϕ_i 在 $S^3\setminus\nu R\subset M(K_i)$ 上可延拓至 $M(R)$，记作 ϕ_i'。

根据 CHL09，引理 2.3]，

$$\rho^{(2)}(M(K_i),\phi_i)=\rho^{(2)}(M(R),\phi_i')+a_i\rho_0(J),$$

其中，若 $\phi_i'(\eta_i)$ 非平凡，则 $a_i=1$；否则为 $a_i=0$。

由于 $(f_1)_*(\eta_1)$ 在 $H_1(W_1;\Lambda)$ 中非平凡，且它是 $(2t-1)$-挠元，因此 $\phi_1'(\eta_1)$ 在 G 和 $a_1=1$中非平凡。因此，

$$\sum_{i=1}^{2g+n+1}\Big(\rho^{(2)}(M(R),\phi_i')+a_i\rho_0(J)\Big)\geq\rho_0(J)+\sum_{i=1}^{2g+n+1}\rho^{(2)}(M(R),\phi_i').$$

可以看出，$\phi_i'\colon\ \pi_1(M(R))\to G$可延拓至 R在 D^4 中的一个带状圆盘的补集，该圆盘由切开 R 显然的塞弗特曲面的右侧带得到（注意，右侧带的对偶曲线在 ϕ_i'下映射为零）。因此，对所有 i，都有 $\rho^{(2)}(M(R),\ \phi_i')=0$。由此可得

$$\rho^{(2)}(M(K),\phi)=\sum_{i=1}^{2g+n+1}\Big(\rho^{(2)}(M(R),\phi_i')+a_i\rho_0(J)\Big)\geq\rho_0(J)>4g+2n,$$

这与结论矛盾。

定理 C 的最后一部分，即 $g_{ds}^X(K)>g$，由定理 B（2）推出。 □

我们以如下定理结束本节，该定理揭示了$g_{ds}^X(K)$与 $g_{ds}^{S^4}(K)$之间的关系。

定理 5.1. 设 K 是 S^3 中的一个纽结，且 X 是一个单连通闭四维流形。那么，

$$g_{ds}^X(K)\leq g_{ds}^{S^4}(K).$$

证明. 为简便起见，令 $g=g_{ds}^{S^4}(K)$。设 D_1 和 D_2 是 D^4的副本。那么，存在真嵌入曲面 $F_i\subset D_i$，满足 $\partial F_i=K$, $i=1,2$，且 $F_1\cup_K F_2$ 是$D_1\cup_{S^3}D_2=S^4$ 中的一个 $\mathbb{Z}$–曲面，并且 $\text{genus}(F_1\cup_K F_2)=g$。

设 X_1 和 X_2 是带边界 S^3 的4维流形，使得 $X_1\cup_{S^3}X_2=X$ 和 $g_{X_1,\ X_2}(K)=g_{ds}^X(K)$。我们可以将 F_i 嵌入 S^3 在 X_i 中的领圈 $i=1,\ 2$ 中，现在 $F_1\cup_K F_2$ 嵌入了 S^3 的双侧邻域中，记作 B，位于 X 中。此外，$\pi_1(B\setminus(F_1\cup_K F_2))\cong\mathbb{Z}$，因为它是 S^4 中的一个 $\mathbb{Z}$–曲面。利用塞弗特-范坎彭定理，可以很容易地证明 $\pi_1(X\setminus(F_1\cup_K F_2))\cong\mathbb{Z}$，因为所有 X_i 都是单连通的。

因此，

$$g_{ds}^X(K)=g_{X_1,X_2}(K)\leq\text{genus}(F_1\cup_K F_2)=g=g_{ds}^{S^4}(K).$$ □

6. 双切片亏格与其素数幂次折叠分支循环覆盖嵌入于 S^4中的纽结

本节中，我们给出定理 D 的证明。

定理 *D* 的证明。 对于 $n \geq 1$，令 $\Phi_n(t)$ 表示第 n 个分圆多项式。设 R 为一个满足 $H_1(M(R); \Lambda) \cong \Lambda/\langle\Phi_{30}(t)\rangle$ 的纽结，并设 η为 $\pi_1(S^3 \setminus R)^{(1)}$ 中的一条简单闭曲线，它生成 $H_1(M(R); \Lambda)$，且在 S^3 中是平凡打结。由引理 2.2，存在一个常数 D，使得对所有 ϕ，都有 $|\rho^{(2)}(M(R\#(-R)))\ \phi)| \leq D$。

回顾一下， $\rho_0(J)$ 表示 $\rho^{(2)}(M(J)\ \epsilon)$，其中 $\epsilon\colon\ \pi_1(M(J)) \to \mathbb{Z}$是阿贝尔化。设 J 为一个满足以下条件的纽结

$$\rho_0(J) > 4g + (2g+1)D.$$

对于某个个选择，可以取足够多个左手三叶结（s 见引理 2.1）。

对于 $1 \leq i \leq 2g+1$，令 $\eta_i = \eta$，并令

$$K_i = R(\eta_i, J)\#(-R) = (R\#(-R))(\eta_i, J),$$

一个以 J 为伴纽结、以 $R\#(-R)$ 为图案、以 η_i 为轴的卫星纽结。现在令

$$K = \#_{i=1}^{2g+1} K_i.$$

我们将证明 K 具有所需的性质。

由于 $\eta \in \pi_1(S^3 \setminus R)^{(1)}$，每个 K_i 都具有与 $R\#(-R)$ 相同的塞弗特型。由于 $R\#(-R)$ 是（代数）双切片的，因此每个 K_i 都是代数双切片的， K 也是如此。

K 的亚历山大多项式唯一的不可约因子是 $\Phi_{30}(t)$，因此根据 Liv02，定理 1.2]，对于每个素数幂 n ，都有$H_1(\Sigma_n(K)) = 0$ 。因此，性质 (2) 成立。

假设存在一个将 $M(K)$ H_1嵌入闭四维流形 W 中的嵌入，且满足$\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$和 $b_2(W) \leq 2g$。如有必要，通过与 $\mathbb{C}P^2$的若干副本取连通和，我们可以假设 $b_2(W) = 2g$。

于是，存在满足定理 A 中各项性质的四维流形 W_1 和 W_2 。由定理 A (3)，我们得到一个正合序列

$$\Lambda^{2g} \cong H_2(W; \Lambda) \xrightarrow{\partial_*} H_1(M(K); \Lambda) \xrightarrow{((f_1)_*, (f_2)_*)} H_1(W_1; \Lambda) \oplus H_1(W_2; \Lambda) \longrightarrow 0.$$

由于

$$H_1(M(K); \Lambda) \cong \bigoplus^{4g+2} \Lambda/\langle\Phi_{30}(t)\rangle$$

而由 η_1、.....、η_{2g+1}生成的子模不能由 $2g$个元素生成，因此存在某个 η_i 不属于 ∂_*的像。如有必要，重新排列 K_i ，我们可以假设 η_1 不属于 ∂_*的像。因此，$(f_1)_*(\eta_1)$ 或 $(f_2)_*(\eta_1)$ 非平凡。如有必要，通过互换 W_1 和 W_2 ，我们可以假设 $(f_1)_*(\eta_1)$ 非平凡。

令 $G = H_1(W_1; \Lambda) \rtimes \langle t\rangle$，并令 $\phi\colon\ \pi_1(W_1) \to G$为复合映射

$$\pi_1(W_1) \longrightarrow \pi_1(W_1)/\pi_1(W_1)^{(2)} \cong H_1(W_1; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \rtimes \langle t\rangle \longrightarrow G.$$

稍微滥用一下记号，我们用 ϕ 表示将 ϕ限制到 W_1的子空间上。

由于 $\partial W_1 = M(K)$，我们有

$$\rho^{(2)}(M(K), \phi) = \operatorname{sign}^{(2)}_G(W_1) - \operatorname{sign}(W_1).$$

注意， G 是多挠自由阿贝尔。因此， G是可和的，并属于 Strebel 类 $D(\mathbb{Z})$。由定理 A (4)可得 $|\rho^{(2)}(M(K)\ \phi)| \leq 4g$。我们将通过另一种计算证明 $\rho^{(2)}(M(K)\ \phi) > 4g$，这将导出矛盾并完成证明。

通过类似于定理 C 证明中的论证，我们得到

$$\rho^{(2)}(M(K),\phi)=\sum_{i=1}^{2g+1}\rho^{(2)}(M(K_i),\phi_i).$$

由于对每个 i， $\phi_i(\ell_i)$ 都是平凡的，因此映射 ϕ_i on $S^3\setminus\nu(R\#(-R))\subset M(K_i)$ 可延拓至$M(R\#(-R))$，我们将其记为 ϕ_i'。

根据 [CHL09，引理 2.3]，

$$\rho^{(2)}(M(K_i),\phi_i)=\rho^{(2)}(M(R\#(-R)),\phi_i')+a_i\rho_0(J),$$

其中，若 $\phi_i'(\eta_i)$ 非平凡，则 $a_i=1$；否则为 $a_i=0$。

Note 即 $\phi_i'(\eta_i)=\phi_i(\eta_i)=((f_1)_*(\eta_i),0)$，由此可知 $\phi_1'(\eta_1)$ 非平凡。因此 ，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2g+1}\rho^{(2)}(M(K_i),\phi_i)&=\sum_{i=1}^{2g+1}\left(\rho^{(2)}(M(R\#(-R)),\phi_i')+a_i\rho_0(J)\right)\\&\geq\rho_0(J)+\sum_{i=1}^{2g+1}\rho^{(2)}(M(R\#(-R)),\phi_i')\\&>(4g+(2g+1)D)-(2g+1)D\\&=4g.\end{aligned}$$

因此， $\rho^{(2)}(M(K),\phi)>4g$，这就产生了矛盾。

显然， $g_{ds}^{S^4}(K)>g$，利用定理 B（2）和 $X=S^4$ 即可得出。由$g_{ds}(K)\geq g_{ds}^{S^4}(K)$ 可知， $g_{ds}(K)>g$。□

7. 纽结的双稳定化数

在本节 中，我们研究纽结的双稳定化数，并证明定理 E .

7.1. 双稳定数

定理 7.1。设 K 是 S^3 中的一个纽结。

(1) K 是稳定双切片的，当且仅当它是稳定的 H–切片。*(2)*

*</style}*假设 K 的 *Arf* 不变量为零。那么，

$$2\mathrm{sn}(K)\leq\mathrm{dsn}(K)\leq g_{ds}(K).$$

证明。显然，稳定双切片结是稳定的 H–切片。假设 K 是稳定的H–切片。简记 $g=g_{ds}(K)$。我们将证明，对于某些整数 m 和 n，满足 $g=m+n$， K 是 $(D^4\#mS^2\times S^2,D^4\#nS^2\times S^2)$–双切片，因此 K 是稳定双切片的。

令 F 为 S^4 中的一个闭合 $\mathbb{Z}$–曲面，使得 $K=S^3\cap F$ 且亏格$(F)=g$。我们有$S^4=D_1^4\cup_{S^3}D_2^4$，其中 $D_i^4\cong D^4, i=1,2$。令 $F_i=F\cap D_i^4$，并令 g_i 为 F_i的亏格，$i=1,2$。于是， $\partial F_1=\partial F_2=K$ 且 $g=g_1+g_2$。

回想一下， K 是稳定的 H–切片，当且仅当 K 的 Arf 不变量 [Sch10] 消失。由于 K的 Arf 不变量消失，由 [CN20 定理 5.15] 的证明可知，可以沿着 γ_1^i、.....、$\gamma_{g_i}^i$ 上的曲线进行手术，并在 D_i^4 中对 F_i 进行手术，从而得到适当嵌入的零同调圆盘 D_i，它们位于 $D_i^4\#g_iS^2\times S^2$ 中，且满足 $\partial D_i=K, i=1, 2$。令 $W_i=D_i^4\#g_iS^2\times S^2, i=1, 2$。注意到 $\partial W_1=\partial W_2=S^3$，令 $W=W_1\cup_{S^3}W_2$，并令 $S=D_1\cup_K D_2$。于是，$W\cong S^4\#gS^2\times S^2$, $S\cong S^2$，且 $S\cap S^3=K$。

此外， $\pi_1(W\setminus S)\cong\mathbb{Z}$，这可以从下述观察看出：我们有 $\pi_1(S^4\setminus F)\cong\mathbb{Z}$，并且 W与 S是通过对 S^4和 F施行手术得到的，

分别沿着 F上的一组曲线 $\{\gamma_j^i \mid 1 \le j \le g_i$与 $i = 1$、$2\}$。对 S^4的手术是通过去掉 $\gamma_j^i \times \mathrm{int}(D^3)$，再沿公共边界 $\gamma_j^i \times S^2$与 $D^2 \times S^2$取并来完成的。在此过程中，F被手术为 S，方法是从 F 中去掉 $\gamma_j^i \times \mathrm{int}(D^1)$，再沿公共边界$\gamma_j^i \times S^0 \subset \gamma_j^i \times S^2$与 $D^2 \times S^0 \subset D^2 \times S^2$ 取并。设 νF、νS和 νS^0分别表示 F、S和 S^0 在 S^4、W和 S^2中的开管状邻域。由此可知，$W \setminus \nu S$ 是 $S^4 \setminus \nu F$ 与$gD^2 \times (S^2 \setminus \nu S^0)$沿 $\gamma_j^i \times (S^2 \setminus \nu S^0)$的并。注意到 $[\gamma_j^i \times \{*\}] = 0 \in \pi_1(S^4 \setminus F)$以及 $\pi_1(S^2 \setminus \nu S^0) \cong \mathbb{Z}$ 的一条生成曲线同伦于 $S^4 \setminus F$的一条子午线，利用塞弗特–范坎彭定理即可看出 $\pi_1(W \setminus S) \cong \mathbb{Z}$。

因此，K 是（W_1，W_2）–双切片的。这就完成了（1）的证明。很容易看出，上述证明还表明 $\mathrm{dsn}(K) \le g = g_{ds}(K)$。

我们通过证明 $2\mathrm{sn}(K) \le \mathrm{dsn}(K)$ 来完成（2）的证明。令 $n = \mathrm{dsn}(K)$。那么，K 是（X_1，X_2）–双切片的，其中 $X_i = D^4 \# n_i S^2 \times S^2$，对某些整数 n_i，使得$n = n_1 + n_2$。因此，存在圆盘 D_i 位于 X_i 中，满足 $\partial D_i = K$，使得 $D_1 \cup D_2$ 是 $X_1 \cup X_2$中的一个$\mathbb{Z}$–球面。由于 $D_1 \cup D_2$ 是一个 $\mathbb{Z}$–球面，因而在 $X_1 \cup X_2$ 中零同调（参见 [CP23，引理 5.1]），所以圆盘 D_i 在 X_i 中零同调。由此可得

$$2\mathrm{sn}(K) \le 2 \cdot \min\{n_1, n_2\} \le n_1 + n_2 = n = \mathrm{dsn}(K),$$

由此证明了（2）。 □

下面的定理给出了双稳定化数与H_1–嵌入之间的关系。

定理 7.2。设 m 为非负整数，K 为稳定双切片结。若$\mathrm{dsn}(K) \le m$，则存在一个闭四维流形 W，满足 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ 且 $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{2m}$，使得 $M(K)$ 在 W中存在一个 H_1–嵌入。

证明。我们可以假设 $\mathrm{dsn}(K) = m$。于是，K 是 (X_1, X_2)–双切片的，其中 $X_i = D^4 \# m_i S^2 \times S^2$，$m_i$、$i = 1,2$ 为某些整数，且 $m = m_1 + m_2$。注意，$\mathrm{genus}(D_1 \cup D_2) = 0$，$H_1(X_1 \cup X_2) = 0$，并且 $b_2(X_1 \cup X_2) = 2m$。现在，取 $g = 0$ 和 $n = 2m$，由定理 B (1) 可得该定理。□

利用定理 7.2，我们给出定理 E 的证明。

定理 E 的证明。根据定理 C，存在一个代数双切片且带状的纽结 K，使得在某个闭四维流形 W 中，无法将 $M(K) \cong \mathbb{Z}$嵌入为 H_1，其中$\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$且 $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{2m}$。由定理 7.2 可知，$\mathrm{dsn}(K) > m$。□

7.2. X–双稳定数

对于单连通闭四维流形 X，我们将双稳定数 $\mathrm{dsn}(K)$ 扩展为 X–双稳定数，记作 $\mathrm{dsn}_X(K)$，如下所述。对于具有边界 S^3 的四维流形 X_1 和 X_2，以及整数 $n \ge 0$，令 $X_{i,n} = X_i \# n S^2 \times S^2$, $i = 1,2$。

定义 7.3。设 X_1 和 X_2 是边界为 S^3 和 K的单连通四维流形，且 S^3中有一个纽结。

(1) K 的（X_1，X_2）双稳定化数为$\mathrm{dsn}_{X_1,X_2}(K) = \min\{m + n \mid K \text{ is in } (X_{1,m}, X_{2,n})\text{-doubly slice}\}$.

(2) 设 X 为单连通闭四维流形。K 的 X双稳定化数为$\mathrm{dsn}_X(K) = \min\{\mathrm{dsn}_{X_1,X_2}(K) \mid X_i$是带边界 S^3、$i = 1,2$ 的四维流形，使得 $X = X_1 \cup_{S^3} X_2\}$.

We 注意，dsn(K) =dsn$_{S^4}$(K)。以下定理推广了定理 7.2 和定理 E .

定理 7.4. 设 K 是 S^3 中的一个纽结， m 是一个非负整数。设 X 是一个单连通闭四维流形。

(1) 若 $\mathrm{dsn}_X(K) \leq m$，则存在一个闭四维流形 W，满足 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$，且 $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{b_2(X)+2m}$，使得 $M(K)$ 可嵌入 W，且该嵌入为 H_1–嵌入。(2) 对于每个整数 $m \geq 0$，都存在一个代数双切片且带状的纽结 K，使得 $\mathrm{dsn}_X(K) > m$。

证明. 证明与定理 7.2 和 E 的证明类似。陈述 (1) 由定理 B (1) 结合 $g = 0$ 和 $n = b_2$（X）$+ 2m$ 得出。陈述 (2) 由定理 C 和陈述 (1) 得出。□

8. 纽结的 X–超切片亏格

本节中，我们证明定理 F 和 G。

定理 *F* 的证明。 为简洁起见，令 $g = g_s^X(K)$。在 X 中存在一个适当嵌入的零同调曲面 F，满足 $\partial F = K$，且 genus(F) $= g$，并且 DF 是 DX 中的一个 $\mathbb{Z}$–曲面。于是，由定理 B 的证明可知，存在边界为 $M(K)$ 的四维流形 $W_i, i = 1, 2$，使得 $W_1 = W_2$，并且对于 $W = W_1 \cup_{M(K)} W_2$，有 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(W) \cong \mathbb{Z}^{4g+2b_2(X)}$，且包含映射 $M(K) \hookrightarrow W$ 是一个 H_1–嵌入。

由定理 A 及其证明可得如下正合序列:

$$\Lambda^{4g+2b_2(X)} \longrightarrow H_1(M(K);\Lambda) \xrightarrow{((f_1)_*,(f_2)_*)} H_1(W_1;\Lambda) \oplus H_1(W_2;\Lambda) \longrightarrow 0.$$

注意， $W_1 = W_2$、$(f_1)_* = (f_2)_*$，以及映射 $((f_1)_*, (f_2)_*)$ 在上述正合序列中是满射。因此可得 $H_1(W_i; \Lambda) = 0, i = 1, 2$。由此得到一个正合序列

$$\Lambda^{4g+2n} \longrightarrow H_1(M(K);\Lambda) \longrightarrow 0,$$

因此定理得证。 □

定理 *G* 的证明。 设 J 是任意一个具有非平凡亚历山大多项式的双切片带状结，且 $H_1(M(J); \Lambda)$ 是循环群。例如，可以令 $R = 9_{46}$ 取为 J。设 K 是 $4g + 2b_2(X)$ 的 $+1$ 个 J 的连通和。那么， K 是双切片的带状结，并且 $H_1(M(K); \Lambda)$ 的最小生成元个数为 $4g + 2b_2(X) + 1$。由定理 F 可知

$$4g + 2b_2(X) + 1 \leq 4g_s^X(K) + 2b_2(X),$$

因此 $g_s^X(K) > g$。

在 DX 中 S^3 的双侧邻域（记作 B）内，存在一个无结 2 球面 S，使得 $S \cap S^3 = K$，因为纽结 K 是双切片的。特别地， $\pi_1(B \setminus S) \cong \mathbb{Z}$。由于 X 单连通，利用塞弗特–范坎彭定理可容易看出 $\pi_1(DX \setminus S) \cong \mathbb{Z}$，因此 $g_{ds}^{DX}(K) = 0$。□

我们以如下定理结束本节。

定理 8.1. 设 K 是 S^3 中的一个纽结， X 是边界为 S^3 的单连通 *4*维流形。那么， $g_s^X(K) \leq g_s^{D^4}(K)$。

证明。 证明与定理 5.1 的证明类似。设 F 是 D^4 中亏格为 $g_s^{D^4}(K)$ 的适当嵌入曲面，使得 $\partial F = K$，且 DF 是 D^4 的双中的一个 $\mathbb{Z}$–曲面。设 B 是 S^3 在 X 中的领圈，我们可以嵌入 $F \subset B$。于是， DF 是 DB 中的一个 $\mathbb{Z}$–曲面。可以

利用塞弗特-范坎彭定理很容易证明， DF 是 DX 中的一个 $\mathbb{Z}$–曲面，因为 X 是单连通的。因此，

$$g_s^X(K) \leq \operatorname{genus}(F) = g_s^{D^4}(K). \qquad \square$$

参考文献

[CG85] J. Cheeger 和 M. Gromov， *Bounds on the von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds* **21** 1985 1, 1 34 ，《微分几何杂志》（），第 – 期。[CG86] A. Casson 和 C. McA. Gordon， *Cobordism of classical knots*，《寻觅失落的拓扑学》，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1986，附录由 P. M. Gilmer 撰写，第 181–199 页。[Cha08] J. C. Cha， *Topological minimal genus and L^2-signatures*，《代数与几何拓扑》8（2008），885–909。[Cha13] Jae Choon Cha， *Amenable L^2-theoretic methods and knot concordance*，《国际数学研究通知》(2013)，第 15 期，1–36。[Cha16]， *A topological approach to Cheeger-Gromov universal bounds for von Neumann ρ-invariants*，《纯粹与应用数学通讯》69（2016），第 6 期，1154–1209。[Che21] Wenzhao Chen， *A lower bound for the double slice genus*，《美国数学会汇刊》374（2021），第 4 期，2541–2558。[CHL09] T. D. Cochran、S. Harvey 和 C. Leidy， *Knot concordance and higher-order Blanchfield duality*，《几何与拓扑》13（2009），第 3 期，1419–1482。[CN20] Anthony Conway 和 Matthias Nagel， *Stably slice disks of links*，《拓扑学杂志》13（2020），第 3 期，1261–1301。[CO12] J. C. Cha 和 K. E. Orr， *L^2-signatures, homology localization, and amenable groups*，《纯粹与应用数学通讯》65（2012），790–832。[COP25] Anthony Conway、Patrick Orson 和 Mark Pencovitch， *Simply slicing knots*，arXiv 预印本 arXiv:2507.00431（2025）。[COT03] Tim D. Cochran、Kent E. Orr 和 Peter Teichner， *Knot concordance Whitney towers and L^2-signatures* 2 **157** 2003 2, 433 519 ，《数学年刊》（） （），第 – 期。[COT04]， *Structure in the classical knot concordance group* **79** 2004 1, ，《瑞士数学评论》（），第 – 期。[CP23] Anthony Conway 和 Mark Powell， *Embedded surfaces with infinite cyclic knot group*，《几何与拓扑》27（2023），第 2 期，739–821。[CT07] Tim D. Cochran 和 Peter Teichner， *Knot concordance and von Neumann ρ-invariants*，《杜克数学杂志》137（2007），第 2 期，337–379。[CW03] S. Chang 和 S. Weinberger， *On invariants of Hirzebruch and Cheeger-Gromov*，《几何与拓扑》7（2003），311–319（电子版）。[FL24] Peter Feller 和 Lukas Lewark， *Balanced algebraic unknotting linking forms and surfaces in three-space* **127** 2024 1, 213 275 ，《微分几何杂志》（），第 – 期。[Fox62] R. H. Fox， *Some problems in knot theory*，《三维流形拓扑及相关主题》（佐治亚大学研究所会议录，1961），Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1962，第 168–176 页。[FQ90] M. H. Freedman 和 F. Quinn， *Topology of 4-manifolds*，普林斯顿数学丛书，第 39 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1990。[Fre82] M. H. Freedman， *The topology of four-dimensional manifolds*，《微分几何杂志》17（1982），第 3 期，357–453。[GL83] P. M. Gilmer 和 C. Livingston， *On embedding 3-manifolds in 4-space* **22** 1983 3, ，《拓扑学》（），第 – 期。[KPRT24] Daniel Kasprowski、Mark Powell、Arunima Ray 和 Peter Teichner， *Embedding surfaces in 4-manifolds* **28** 2024 5, 2399 2482 ，《几何与拓扑》（），第 – 期。[KR21] Michael R. Klug 和 Benjamin M. Ruppik， *Deep and shallow slice knots in 4-manifolds*，《美国数学会会刊B辑》8（2021），204–218。[Kre99] Matthias Kreck， *Surgery and duality*，《数学年刊》（第 2 辑）149（1999），第 3 期，707–754。[Liv02] C. Livingston， *Seifert forms and concordance*，《几何与拓扑》6（2002），403–408（电子版）。[LM15] Charles Livingston 和 Jeffrey Meier， *Doubly slice knots with low crossing number*，《纽约数学杂志》21（2015），1007–1026。[OP21] Patrick Orson 和 Mark Powell， *A lower bound for the doubly slice genus from signatures*，《纽约数学杂志》27（2021），379–392。[Sch10] Rob Schneiderman， *Stable concordance of knots in 3-manifolds*，《代数与几何拓扑》10（2010），第 1 期，373–432。

数学系，庆熙大学，首尔 02447，大韩民国 电子邮箱：sgkim@khu.ac.kr

韩国首尔 05029 大韩民国建国大学数学系 电子邮箱：tkim@konkuk.ac.kr