arXiv:2602.04351v1 [quant-ph] 4 Feb 2026

代数概率、量子计算与信息学的展望

Antonio Falcó*[1] 和 Hermann G. Matthies[2]

[1]数学、物理与技术科学系，CEU Universities 卡德纳尔·埃雷拉大学，San Bartolomé 55，46155 Alfara del Patriarca（巴伦西亚），西班牙，电子邮件： afalco@uchceu.es[2]科学计算研究所，布伦瑞克工业大学，38092 布伦瑞克，德国，电子邮件： h.matthies@tu-braunschweig.de

概率是现代科学中最重要的概念，尤其是因为没人对它的含义有丝毫概念。

伯特兰·罗素，1929

摘要

柯尔莫哥洛夫的概率基础以测度空间、 σ-代数和概率测度作为概率论的基础。人们普遍认为，经典的柯尔莫哥洛夫概率观点不足以处理涉及量子效应的随机现象，更广泛地说，也不足以应对类量子情形。因此，人们或许需要寻求一种更宽广、涵盖面更广的观点。所谓代数观点，便能实现这种表述。它以随机变量代数及一个指定的线性泛函——态——为起点，并将其解释为期望。顺便一提，这也可视为对早期概率学家（如伯努利家族）所用框架的一种现代诠释。现代形式的代数观点源自量子物理学，并在其中得到广泛应用；它有望同时处理经典行为和类量子行为，但在经典概率和不确定性量化领域并未得到广泛重视，尽管即便在这些领域，它也可能开辟新的视野并揭示不同的侧面。这一源流使其术语带有物理学色彩，但该学科纯粹属于概率论。经典与类量子概率行为之间的关键差异，最终在于交换性；缺乏交换性会导致类量子情形中出现的效应。量子计算机的出现便是一例，它或许会使计算科学领域的经典研究者也有必要应对类量子行为。在此，我们力图展示这一方法中纯粹代数的部分。聚焦于有限维代数，可以避开许多棘手的分析问题，同时仍能展现经典概率中代数观点的主要特征与思想，以及它如何延伸至类量子行为，并实际上应用于量子计算。

关键词： 代数概率、非柯尔莫哥洛夫概率、非对易随机变量、类量子行为、量子信道与信息、量子计算

MSC2020 分类： 46L53, 47L90, 46K10, 81R05, 81S25, 46N50, 46L89, 81P68, 60A99

*通讯作者。

目录

1 引言 **3**

记号 **8**

2 Alge概率的代数表述 **9**
2.1 基础知识 .9
2.2 表示与希尔伯特空间 .302.3 有限维代数的结构 .43

3 代数概率的发展 54
3.1 观测与赋值 .553.2 广义观测与信道 .593.3 相互作用福克空间与量子分解 .81

4 Mod量子处理器单元（QPU） 8 **9**
4.1 预备知识 .89
4.2 从代数概率到量子计算 .904.3 Grover 算法 .94

5 结论 **97**

参考文献 **99**

1 引言

基于柯尔莫哥洛夫公理的经典概率框架 [91, 92] （例如，另见 [137]）通常用于进行不确定性量化（UQ）。该框架从样本空间、 σ事件子集的代数和概率测度出发，并可将随机变量代数（RVs）定义为这些测度空间上的可测函数，将期望算子定义为关于概率测度对这些随机变量求积分。另一种途径则提供了不同的观点：它将随机变量代数（物理学术语中也称为“可观测量”）与期望算子（例如， [131]）作为正线性泛函视为基本概念。更具体地说，期望是“态”（即所研究系统的态）的一个例子；在数学上，它是随机变量代数对偶中的一个元素，在经典概率中承担概率分布的角色。代数观点源于描述量子现象的需要，或者更一般地说，源于描述类量子行为（QLB）的需要，因为在这类行为中，观测的先后顺序至关重要。事实证明，随机变量代数的非交换性或交换性这一性质，正是描述 QLB 与经典情形之间差异的关键。代数观点为经典情形和 QLB 提供了统一的图景。此外，这一观点不区分同构对象或忠实表示，因此许多描述和讨论都可以在抽象框架中进行，从而聚焦于本质。不过，如有需要，也可以转而采用某些同构的具体数学表示。这也使我们能够从某个忠实表示中已知的事实，推断抽象框架下的性质。尽管“态”或“可观测量”等术语源自量子物理学，但希望读者能明白，代数概率是一门纯数学理论，并不需要物理学；而当它局限于有限维代数时，实际上只是（多重）线性代数的一部分。

当随机变量的代数是阿贝尔的或交换的情形下，基本上可以恢复与经典柯尔莫哥洛夫概率论的等价关系。值得注意的是，代数方法允许使用与量子理论一同发展起来的随机变量非交换代数，也有助于处理随机矩阵（例如 [103]）、张量随机场以及类量子行为（QLB）（例如 [18, 80, 154, 89, 21, 37, 38, 72, 135, 14, 155, 108,22, 19, 106, 90]）等问题，这些问题也存在于量子理论之外。我们还将展示这种方法如何很好地应用于量子计算（QC）（例如 [107]），以及量子信道和量子信息（QI）（例如 [150, 23, 151]）；顺带一提，这也是该理论在最简单情形下的一种应用，此时随机变量的代数可视为有限维代数（例如[39, 71]）。为求简明扼要，我们在此仅讨论有限维情形，并着重于代数层面来展示关键概念。很快便会明白，这类概率代数可以表示为作用于代数自身的线性映射代数，而该代数可赋予预希尔伯特空间结构。在此，“实”随机变量，或者说可观测量，即自伴随机变量，对应于自伴映射。因此，对于有限维代数，可以通过矩阵代数给出忠实表示。尽管本文将聚焦于有限维代数，论述仍会保持在较为抽象的层面，因为这样能够独立于任何表示，凸显其中的代数内涵。采用这种描述方式的动机在于，事实证明，代数的具体实现并不重要；承载概率信息的是其内在代数性质，而具体的实现或表示则可根据特定目的酌情选用。此外，这种方式也能让读者顺畅地过渡到探讨

处理连续随机变量时的代数观点。

正如后文将要说明的，可观测量或随机变量可能出现的观测值或样本，都是其谱中的值，因此自伴随机变量的样本取实数值。由于有限维空间上的自伴线性映射的谱是实数中的离散有限子集，要描述连续随机变量，就必须处理无限维代数，使线性映射可能具有连续谱。要表示无界随机变量，也必须处理无界自伴映射。因此，聚焦于有限维代数可以避免在处理无限维空间上的线性算子（可能无界）时出现的分析困难，同时偶尔也能一窥如何将其推广到无限维情形。不过，我们想指出，代数观点能够自然地处理具有无限多个自由度的系统（例如 [118], 本文将在此方面考察不同类型的冯·诺依曼代数）、随机过程和随机场；更一般地说，也能直接处理取值于无限维空间的随机变量。若采用经典概率方法，这些主题只能以较为迂回的方式加以处理。

在柯尔莫哥洛夫观点下（这等同于只使用交换代数），无法处理量子逻辑现象（QLB phenomena）：事实证明，在非交换情形下，无法定义一个全局的 σ-事件代数，并为其中的事件一致地赋予概率；而这一概念正是经典概率的基础。这是因为，对于量子逻辑现象（QLB phenomena），并非所有可观测量或随机变量（RVs）都彼此相容，也就是说，它们无法在所考察系统的同一状态下同时实现或观测。可能的概率赋值取决于“语境”，即同时观测了哪些其他随机变量（RVs）。用数学语言来说，这体现为这些随机变量是否对易的问题；事件的布尔代数则被一种较弱的概念——投影格——所取代。事实证明，并不存在全局“样本空间”，这是一种“无点”的概率论。这会带来一些从经典观点来看“奇特”或不可能出现的结果。在理论中，贝尔不等式被违反，以及与之相关的柯亨-施佩克定理（我们将看到，这是一项纯粹的概率结果），都印证了这一点；它们是量子理论中所谓“无定理”的两项定理。也就是说，2022年诺贝尔物理学奖颁给了“……确立贝尔不等式被违反，并开创量子信息科学……”的研究，以表彰对此事实的实验确认。然而，在经典概率的视角下显得奇特的现象，恰恰是量子信息和量子计算所利用的。尽管如此，本文采取的观点是，（非交换）代数观点是一种概率论，而不只是对量子物理现象的物理学描述。

回顾概率的发展史（例如 [2]），其数学处理始于对机会游戏的考察，可追溯至 Card- ano 的早期研究，以及 Fermat、Pascal、Huygens 和伯努利家族在17世纪所作的开创性贡献，并在18世纪初发展至雅各布·伯努利（1713）的《猜度术》；关于其重要性的两种现代评价，见 [133, 122]。从 Huygens、雅各布·伯努利及其侄子丹尼尔·伯努利等人开始，人们逐渐阐明了概率与期望的含义。这些早期概率论学者可以被视为 [131] 代数方法的早期倡导者：他们按照某些直观规则，像对待数一样以代数方式运算随机变量，但这些规则从未被明确表述。顺带一提，如今通常所说的 probability 当时称为“chance”，而当时所谓的“probable”，如今会被称为一种贝叶斯概率解释 [133]。即便到了今天，人们对现实世界中的概率究竟“是什么”

，仍有众多不同看法，这与人们对量子理论诠释的类似讨论并无二致（例如 [47]）。在这两个领域，人们都认同如何使用形式化工具，但对这种“是什么”的解释却各不相同。随着高斯等人的研究，经典概率论的形式化与分析逐渐发展起来；拉普拉斯对概率所作的分析处理则将其精彩地展现出来 [95]。

在新世纪初的1900年，希尔伯特公布了一份有待解决的数学问题清单，其中第六问题是为概率和力学建立公理化基础。巧合的是，这也是普朗克宣布发现能量量子的同一年，标志着量子理论的开端；量子理论将深刻改变我们对概率的理解，并催生量子概率 [3]。对于经典概率，冯·米塞斯[146] 于1928年着手建立公理化基础，柯尔莫哥洛夫则于1933年通过其所谓的《概率论基础》专著 [91, 92]，为其奠定了这一基础。该专著以测度论为基础，为经典概率确立了坚实的公理化根基。测度论源于测量长度、面积、体积等几何问题，并在此前数十年间发展成熟；它还将随机变量定义为派生对象，即可测函数，并将期望定义为关于概率测度的积分。

柯尔莫哥洛夫于1933年发表《概率论基础》时，用他自己的话来说，表达了许多数学家对概率形式化的看法。不过，以量子概率形式出现的“新”概率 [2, 3] ，其基本框架早已由海森堡的贡献 [73], 确立：海森堡于1925年指出了量子可观测量的非交换性，这一思想随即由他在哥廷根的同事玻恩和Jordan [31], 以及他们三人共同 [30]进一步拓展。海森堡认为非交换性更像是一种麻烦 [144], ，而率先认识到其根本重要性的，或许应归功于狄拉克[50, 51] 。希尔伯特 [76]与冯·诺伊曼和诺德海姆也在这一方向上作出了进一步贡献。此后不久，冯·诺伊曼建立了希尔伯特空间表述[147, 148], ，其中随机变量是自伴算子。这是刻画非交换性质的一种方式，因为随机变量被观察或测量的时间顺序会产生影响。

这一切都发生在柯尔莫哥洛夫的《概率论基础》出版之前，而冯·诺伊曼的工作表明，经典概率和量子概率都可以建立公理化的基，但当时柯尔莫哥洛夫似乎没有注意到这一可能性。正如阿卡迪所言， [2, 3], 描述数学构造与从一组公理推导出该构造，两者之间存在差别。而在 20 世纪 20 年代末和 30 年代初，代数路径似乎太过薄弱，无法用作公理基础。到了下一个十年，情况即将发生变化。

早在 20 年代末，Jordan [84] 就已开始思考量子理论的代数方法；到了 30 年代，他又与 Wigner 和冯·诺伊曼一同继续这一探索。随后，冯·诺伊曼与 Murray 在 30 年代末和 40 年代初开始发展代数方法，相关内容在他的文集 [149]中得到了精要的总结。这种关于随机变量的代数观点，将其表述为可观测量代数，并将期望或态视为线性泛函。冯·诺伊曼和 Murray 通过关于“算子环”的研究（载于 [149]）开创了这一观点；如今，它为分析量子系统和经典系统提供了强大的框架。后续发展包括 Gel’fand 和 Neumark（Naˇımark） [63]以及西格尔 [130], 的工作，这些发展促成了 GNS 构造（GNS 分别代表 Gel’fand、Neumark 和 Segal），并确立了抽象代数与早期希尔伯特空间方法之间的联系

该方法曾用于量子物理学。

尽管已有多种方案试图回应希尔伯特在其第六问题中提出的公理化要求，其中最早的当属冯·诺伊曼本人（另见 [149]），此外还包括例如 [124, 101, 56, 99, 100, 3, 117]等。我们将采取一条更为审慎的路径，以“操作性”的方式探讨随机变量的代数观点：稍微非正式地说，我们只说明如何处理随机变量，而不讨论它们是什么。因此，这种方法旨在抽象地确立一种数学结构的规则，而经典情形（随机变量是可测函数，即构成交换代数或阿贝尔代数）和 QLB 情形（随机变量或可观测量是自伴希尔伯特空间算子）的常见处理方式，便显现为表示。这种操作性方法与早期概率论学者（如伯努利家族）所隐含采用的方法十分相似；事实上，如今大多数从事实务工作的统计学家也采用这种方法。在这些情形下，底层测度空间很少出现，即便出现也是如此；实际工作主要围绕随机变量及其分布展开。

我们的目的是简要介绍从概率理论的代数结构角度看待这一领域的观点，而不深入探讨代数理论；即使在阿贝尔情形下，这种观点也可能为该主题带来不同的视角。我们希望展示，对概率的不同表示的研究可能揭示出不同的特征。这种代数方法也与一种非常几何化的观点相关，并自然引出对非交换代数的考察；非交换代数是研究量子逻辑现象，或经典现象与量子逻辑现象相结合的自然框架。我们不打算尝试从公理出发重新构建概率论（即使仅限于阿贝尔情形），而将以更从容的方式展开讨论；关于这类公理化尝试，参见 [84, 76, 51, 147,148, 149, 85, 124, 101, 56, 99, 100, 1, 3, 4], ，这些尝试大多致力于发展量子概率论。我们也无意采取纯粹主义立场，试图摒弃概率或 σ-代数的概念，而是要将其纳入一种更一般、更深层的结构之中，因此将在适当之处运用测度与积分理论的结果。代数理论还促成了更为细致、深入的分析，帮助我们理解随机变量的“值”究竟是什么，以及如何形式化描述随机变量的观测、测量或样本。

本文的方法是双重的。首先，我们旨在最简单的设定下阐明概率的代数观点，并强调其几何与操作方面。其次，我们通过将该框架应用于量子计算（QC）和量子信息（QI），触及这一框架的意涵，并突出其容纳类量子行为（QLB）的潜力。我们的方法试图尽量减少技术性与一般性的使用，尽管大多仍停留在抽象层面，并力求使表述简单，而非最一般。

本文并未试图做到任何意义上的完整：无论是对于该主题的历史、相关主题的选择，还是参考文献的选取，显然都有许多毋庸置疑的重要贡献未被提及。事实上，相关方面及其开放问题如此之多，以至于在当前看来，完整的综述似乎是不可能的，或者至少极其困难。类似的尝试包括 [26, 104, 96, 39, 71]。不过，我们希望本文能够使读者相信，以不同方式审视这一主题是有价值的，也许还能激发读者进一步查阅文献，甚至在自己的研究中继续探究这一概念。除了在论述中有所省略的内容之外，我们不主张有任何原创性。本文的处理意在比严格论证更具描述性，侧重于关键概念和见解，而非技术细节与证明；后者通常被留给参考文献。尽管这些“景观”明显属于数学范畴——但这并不削弱源自

物理学的贡献——我们的目标是避免数学框架，使不同数学和计算机科学、自然科学及工程学背景的读者都能理解本文的阐述。

本文的安排如下。我们首先在第2节阐明随机变量（RVs）的代数观点，并强调其在处理非交换现象时的重要性。这一视角使得可以将随机变量表示为线性映射或算子，尤其是在由期望所提供的希尔伯特空间结构被纳入考虑之时。由此进一步描述W*代数的性质以及有限维代数的结构。在第3节中，在讨论如何形式地描述观测这一重要问题，并将其与能否独立于观测为事件赋予概率的问题相联系之后——贝尔-科亨-施佩克尔定理对此给出了否定回答——重点转向广义观测，即正算子值测度（POVMs），以及完全正映射与量子信道这一重要主题，后者给出了信息传输的一般描述。代数观点的又一例证是它与克雷洛夫子空间、正交多项式，乃至来自量子力学（QM）的阶梯算子之间的联系，包括产生与湮灭算子以及（相互作用）福克空间；这些内容将再次在仅分析单个随机变量这一最简单设定下加以探讨。量子计算（QC）与量子信息（QI）成为重要主题，可在此框架最简单的纯代数设定下于第4节中加以处理。这里汇集前述发展的要点，用以抽象地定义一个量子处理单元（QPU），并说明如何为这样的量子处理单元编制程序。作为例子，Grover算法在这一抽象设定中得到详细描述。我们以第5节作结。

记号

$\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{N}$：复数、实数、自然数。有限维希尔伯特空间以 $\mathbb{C}$为基域。H：一个（有限维，除非另有说明）复希尔伯特空间。全算子代数为L(H)：$=$ L(H)（有界线性映射）。A：一个幺正 $*$-代数（概率代数）。单位元与零元分别记作1和0。对合为 $\star$ （对于矩阵/算子，它与伴随†一致）。A_{sa}：A中的自伴（“实”）元素：$A_{sa} = \{a \in A : a^\star = a\}$。这些即为可观测量。C $\subseteq$A：一个交换（阿贝尔）$*$-子代数（经典语境）。其交换子为$C' = \{b \in A : ba = ab \ \forall a \in C\}$。极大阿贝尔 $*$-子代数即为极大阿贝尔子代数。a、b、x：A中的一般随机变量；对实随机变量通常有x $\in A_{sa}$ 。x的谱记为 σ(x)（在选定的表示中）。S(A)：A上的态，即正线性泛函$\varpi : A \to \mathbb{C}$，且 $\varpi(1) = 1$。 ϖ 中a的期望为，其中$\cdot,\cdot$是$A^\star \times$A上的对偶配对。

$$\mathbb{E}_\varpi(a) := \varpi(a) = \langle \varpi, a \rangle ,$$

E(A) A 中的效应：E(A) := {e $\in A_{sa} : 0 \le e \le 1$}。（锐事件通常是投影；非锐事件是一般效应。）$D(A)_1$ 密度（有限维）：$D(A)_1 := \{\rho \in A : \rho \succeq 0, \mathrm{tr}(\rho) = 1\}$。对于 A $=$L(H) $\simeq M_d(\mathbb{C})$，态由密度矩阵表示，即 ϖ_ρ(a) $=$ tr(ρa)。tr 表示迹（有限维）。典范忠实内积记作 a $|b_c$（通常由迹诱导，例如矩阵实现中的 a $|b_c = \mathrm{tr}(a^* b)$）。$L(U, V)$ 表示向量空间 U, V之间的线性映射；记作 L(U) $=$L(U, U)。完全正映射／量子信道表现为算子代数上的线性映射。$\Pi_{\mathcal{H}}$ （正算子值测度）、 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{H}}$ （投影值测度）有限结果集 X 上的正算子值测度是映射 $\Pi_{\mathcal{H}} : 2^X \to$E(L(H))，满足 $\Pi_{\mathcal{H}}(X) = I_{\mathcal{H}}$ 以及可数可加性（此处为有限可加性）；记作 $\Pi_{\mathcal{H}}(\{i\}) = E_i$，则有 $E_i \succeq 0$ 和 $\sum_i E_i = I_{\mathcal{H}}$。投影值测度 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{H}}$ 是其投影值的特殊情形。$\mathscr{F}$: C $\to$L(H) 与正算子值测度相关的（线性）观测通道：对于$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C \simeq \mathbb{C}^n$, $\mathscr{F}(\boldsymbol{f}) = \sum_i f_i E_i$。狄拉克记号 $|\psi \in$H, $\psi| := |\psi^\dagger|$，秩一算子 $|\psi\, \phi| \in$ L(H)。n 个量子比特 $H_1 \simeq \mathbb{C}^2$，其计算基为 {$|0$ $|1$}。对于 n 个量子比特：$H_n := (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ 且 L(H_n) $\simeq M_{2^n}(\mathbb{C})$。

约定。 除非另有明确说明，我们均在有限维空间中工作，因此态可用密度（迹）表示，且所有迹（在使用时包括偏迹）都有良好定义。

2 概率的代数表述

接下来我们主要关注数值随机变量（随机变量），因为其他随机变量都可以用这些随机变量来处理。从概率的代数思想出发，聚焦于随机变量以及期望／态，我们首先介绍这种代数语言的基础知识，并给出一些例子。首先要注意的是，代数可以表示为线性映射的代数——正则表示。期望使我们能够引入以内积为基础的范数。由此便得到希尔伯特空间上的线性映射——即第 1 节中提到的 GNS 构造——并且可以运用自伴映射的谱演算。这将引出更多表示，以及新的范数和 L^p 空间。此外，概率中的核心概念——相关性与独立性——也获得了几何诠释。

更深入地考察期望，就必须审视所有可能状态的整体集合。观测或测量自然会引出非交换现象，例如海森堡不确定性关系和贝尔–科亨–施佩克定理。所有这些思想最终都汇聚到状态与效应之间的对偶性这一概念上。

随机变量（RV）的观测值或样本最终将成为对偶空间中的元素，具体而言，其取值属于经过适当定义的随机变量谱。代数结构还涵盖了对随机变量构造多项式这一思想，因此一个关键问题是：能否以及如何将多项式运算推广为适用于随机变量的更一般函数运算。在将概率代数表示为希尔伯特空间上的线性映射时，实随机变量——被视为“真正的”可观测量——对应于自伴算子；于是，计算这些随机变量的函数就成了谱演算问题。

在无限维情形中，要求概率代数为巴拿赫代数或 C*代数（例如，参见 [119, 105, 13, 53, 131, 138, 54, 33, 45, 46, 87, 28]），即可实现谱演算的全纯版本和连续版本；对于冯·诺伊曼代数或 W*代数，还可以采用博雷尔可测谱演算。然而，将注意力限制在有限维代数上，意味着每个随机变量只能取有限多个（谱）值。由于实数有限集上的任意函数都可以用多项式插值，因此多项式函数演算在此完全够用，更高级的构造可以暂且不论。关于有限维线性代数语境下代数的基础信息，可参见 [64]。有限维结合代数的标准参考文献是 [55], ；若聚焦于矩阵代数，则应提及 [75]。

我们也考察如何组合概率系统，具体是考察直和与直积以及张量积中的概率代数。最后，给出此类有限维代数的一般结构——具体而言，是作为矩阵代数直和中的忠实表示。

2.1 基础

正如第1节所述，伯努利家族可被视为概率代数方法的早期倡导者。他们隐含地把随机变量（随机变量）当作数来处理；具体而言，随机变量可以彼此相加，也可以与数相乘以及彼此相乘，并遵循通常的算术法则。

概率代数简介： 用现代数学语言来说 [126, 131],伯努利家族的随机变量（RVs）可以视为向量空间$\mathcal{A}$中的元素。

此外，这些元素还可以彼此相乘——记作$a \cdot b$，其中$a,b \in \mathcal{A}$；不过大多数时候（包括下文，开头几处说明除外），我们只用并置来表示：$ab = a \cdot b$。在经典伯努利情形下，这种乘法是交换的（$a \cdot b = b \cdot a$）。常数，即普通数，表现为一种退化的随机变量。用现代术语来说，这意味着$\mathcal{A}$ 不仅是一个向量空间，还是一个结合的、分配的、交换的（阿贝尔）代数，其单位元1 表示乘法单位元：$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$。

基本思想是：若$a, b \in \mathcal{A}$ 是随机变量，则诸如$2a$、$a + b$以及ab 之类的表达式本身也是有效的随机变量。若$\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ 是$\mathcal{A}$中元素的子集，则$\mathcal{ST} := \mathcal{S} \cdot \mathcal{T} := \{\sum_j s_j t_j \mid s_j \in \mathcal{S}, t_j \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{A}$ 是所有乘积之和所成集合的简写，其中第一个因子属于$\mathcal{S}$，第二个因子属于$\mathcal{T}$。

从历史上看，伯努利家族研究的是现代术语中所谓的期望，即一种平均 过程或均值，拉普拉斯著名地称之为“数学希望”。在较新的物理学术语中，它常被称为态。在数学上，这一期望是$\mathcal{A}$上的线性泛函 ϖ，即对偶空间$\mathcal{A}^\star$中的一个元素。

正如数本身可以是“正”的，随机变量也容许一个偏序$a \geq 0$，其中 $1 \geq 0$ 以及平方$b^2 := bb$ 根据定义是正的。若a 为正，则$\varpi(a)$为非负，因此它是一个正 泛函；此外，ϖ 将单位元$1 \in \mathcal{A}$ 映为 $1 \in \mathbb{R}$，从而使 ϖ 成为一个归一化态。请注意，人们其实应当说 ϖ 是非负的或半正定的，但正如矩阵和算子的情形，或抽象代数$\mathcal{A}$的一般元素$a \in \mathcal{A}$ 那样，我们图省事而只说正。如果其中某一个确实必须为正而不仅仅是非负，我们就说正定。

随机变量至少在交换情形下也具有一种值，可以被观测、测量或采样。从数学上说，这样的观测同样是一个线性泛函 $\omega \in \mathcal{A}^\star$；事实上，它理应满足上述关于态的所有要求。可以将观测态 ω 视为观测时刻的“世界状态”。关键在于，ω 还满足 $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$，这意味着乘积$ab$ 的观测值等于对 a 和 b进行观测所得值的乘积。暂且不区分随机变量的“真实”值与测量其中涉及的不确定性；这一细化将在后文出现。

用现代术语来说，这些条件意味着 ω 是从$\mathcal{A}$ 到基域的一个非零代数同态，也称为特征或纯态。在合理的条件下，这样的特征确实存在——尤其是在有限维代数中。由于ϖ 和 ω 都是$\mathcal{A}^\star$的元素，因此有时写作

$$\varpi(a) = \langle \varpi, a \rangle \quad \text{and} \quad \omega(a) = \langle \omega, a \rangle ,$$

也可以写作 $a(\omega) := \langle \omega, a \rangle$，以强调经典抽样记法。

伯努利家族以实数作为其底层数域。虚数和复数早已为人所知（Cardano 曾用它们求解多项式方程），阿贝尔概率代数也可以仅在实数域上形式化 [126]。然而，秉持佩恩莱韦和阿达马的格言——实数域中连接两个真理的最短路径要经过复数域——人们通常会将实代数$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ 扩展为复代数$\mathcal{A}$。通常定义

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \oplus \mathrm{i}\, \mathcal{A}_{\mathbb{R}},$$

其元素为$a + \mathrm{i}b$，其中a、$b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$，虚数单位为 $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$，并遵循通常的复数运算规则。这一扩展使态和观测能够通过以下方式扩展：

复线性，并为非交换概率铺平了道路；为了处理具有非交换代数的类量子行为（QLB），通常认为有必要考虑复代数。主要关注的实可观测量（使用实样本）恰好是自伴 $\mathcal{A}$的元素，而其他元素则可视为一种便利的“代数完备化”，使理论更加优雅。

为了纳入复共轭 $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^*$，需要在$\mathcal{A}$中引入类似的运算。因此，我们要求存在一个伴随运算 或对合 $\star\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$a \mapsto a^\star$，满足

$$(a^\star)^\star = a, \quad (ab)^\star = b^\star a^\star, \quad (za+b)^\star = z^* a^\star + b^\star, \tag{2.1}$$

对所有$a,b \in \mathcal{A}$ 以及 $z \in \mathbb{C}$ 均成立。具有这种结构的代数称为带对合代数或 *-代数。在许多常见情形下（例如实矩阵代数），存在一种自然的对合（实矩阵情形下为转置），此处暂记为 $\natural\colon \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$，$a \mapsto a^\natural$，其中$a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$；但也可能存在恒等映射这类平凡对合。如果$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$上不存在非平凡对合，则可以对所有$a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$定义$a^\natural = a$。考虑自然对合后，接着定义

$$\big(a + \mathrm{i}\, b\big)^\star := a^\natural - \mathrm{i}\, b^\natural. \tag{2.2}$$

式（2.1）中的第二个等式已经以一种同样适用于非交换代数的形式表述。满足 $=\mathsf{a}^\star$ 的元素称为自伴或厄米元素；而满足 $= -\mathsf{a}^\star$ 的元素则称为反自伴或反厄米元素。常数 1 、 0 是自伴的，任何形如 $\mathsf{a}^\star\mathsf{a}$ 或 $\mathsf{a} + \mathsf{a}^\star$ 的元素都是自伴的。对于观测和态，要求满足 *-线性： $\omega(\mathsf{a}^\star) = \omega(\mathsf{a})^*$以及 $\varpi(\mathsf{a}^\star) = \varpi(\mathsf{a})^*$，从而保证自伴元素的取值为实数。

定义 2.1（态，期望）。 设 A 是一个含幺结合 *-代数（不一定交换）。若线性泛函 $\varpi \in A^\star$ 被称为一个态，则它满足
正性： $\varpi(a^\star a) \geq 0$ 对所有 $a \in A$，且
厄米（自伴）： $\varpi(a^\star) = \varpi(a)^*$。
如果还满足 $\varpi(1) = 1$，ϖ 则是归一化的。当 ϖ 满足 $\varpi(a^\star a) = 0$ 当且仅当$a = 0$时，称态 ϖ 为忠实态。如果对所有 $a,b \in A$ 都有 $\varpi(ab) = \varpi(ba)$，则将 ϖ 称为迹态或迹。

所有归一化态的集合记作$\mathsf{S}(A) \subset A^\star$。对于一个 $\in A$，其在态 ϖ 下的期望记作

$$\mathbb{E}_\varpi(a) := \langle a \rangle_\varpi := \varpi(a) = \langle \varpi, a \rangle .$$

注释 2.2。 在有限维代数 A 中（更一般地，在复数域*-代数中），要求 $\varpi(1) = 1$ 就已经保证 ϖ 是厄米且为正的。

现在我们可以给出定义：

定义 2.3（概率代数）。一个概率代数是一个复数域上的、结合的、分配的、含幺的 *-代数 A（不一定交换），并配备一个归一化态 $\varpi \in \mathsf{S}(A)$。该对象记作元组（A ϖ）。

必须区分概率代数的元素——它们是具有期望、因而构成概率律的随机变量（RV）——与实际的可观测量，后者可以在不同的态下测量。如前所述，只有自伴可观测量和随机变量才能真正被观测并得到实数值。为形式化这一差别，我们先说明 *-同态的含义：

定义 2.4 (* -同态)。 设 B 和 A 是两个复含幺 *-代数。映射线性 $\Phi : B \to A$ 称为*-同态，如果它满足：**乘法保持：** $\Phi(a\,b) = \Phi(a)\,\Phi(b)$ 对所有 $a, b \in B$ 都成立。**对合保持：** $\Phi(a^\star) = \Phi(a)^\star$ 对所有 $a \in B$ 都成立。

有了这些准备，就可以抽象地定义随机变量：

定义 2.5 （随机变量（RV））。 随机变量 $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 被定义为从结合的、分配的含幺 *-代数 $\mathcal{B}$ 到概率代数 $(\mathcal{A}\ \varpi)$ 的 *-同态，参见定义 2.3。

元素 $b \in \mathcal{B}$ ——至少是自伴的那些——因此可称为可观测量。这将可观测量 $b \in \mathcal{B}$ 与态 ϖ 区分开来，后者决定概率律（见定义 2.27）。特别地，态可以改变——例如，当发生测量或抽样（定义 2.6）时，或因新信息而更新时，见例 21 与例 22。形式上，这种改变将概率代数从 $(\mathcal{A}\ \varpi)$ 修改为 $(\mathcal{A}\ \varpi_\beta)$。然而，可观测量 $b \in \mathcal{B}$ 保持不变，尽管态以及由此决定的概率律已经改变。

通常，随机变量就是恒等映射 $R = I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$。在这种情况下，可以将可观测量与随机变量本身等同起来，并将二者都视为$\mathcal{A}$的一个元素。这里的示例中，最常见的就是这种情形。

定义 *2.6*（样本、观测、特征）。样本或观测 $\omega \in S(A) \subset A^\star$ 是一个特征，即从 A 到 $\mathbb{C}$ 的非零 *-同态，参见定义 *2.4*。等价地，它是一个乘法态（且必然归一化）。用 $X(A) \subset S(A) \subset A^\star$表示所有特征构成的集合。一般而言，对于给定的 B，可能出现 $X(B) = \emptyset$的情况，也就是说，不存在特征。对于阿贝尔 *-代数 A，所有特征构成的集合 $X(A)$ 也称为 A 的谱。

谱的概念在非交换概率中至关重要。我们稍后会再讨论它，现在先介绍单个随机变量的谱：

定义 2.7 (谱)。 设 A 是一个含幺代数。对于一个 $a \in A$，a 的谱 定义为

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (a - \lambda 1)\ \textit{is not invertible in}\ \mathcal{A}\}.$$

（关于逆元 b^{-1} 的定义 $b \in \mathcal{A}$，使得 $bb^{-1} = b^{-1}b = 1$，参见定义 *2.12*。）数 $\varrho(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$ 称为谱半径

如果 $\mathbb{C}[a]$ 表示由$a \in \mathcal{A}$ 生成的代数（所有关于a的复系数多项式），我们立即得到：

命题 2.8 （谱与样本）。 如果 ω 是一个非零的 *-特征（即一个观测或样本，参见定义 *2.6*），那么形如 $a - \omega(a)1$ 的元素都不可逆。因此，对任意 $\omega \in X(\mathbb{C}[a])$，有 $\omega(a) \in \sigma(a)$。

证明。若 $c \in A$ 可逆，则有 $1 = \omega(1) = \omega(c\,c^{-1}) = \omega(c)\,\omega(c^{-1})$。因此，$\omega(c) \neq 0$。但对于 $c = a - \omega(a)1$，有 $\omega(c) = \omega(a - \omega(a)1) = \omega(a) - \omega(a)\omega(1) = 0$。因此，$c = a - \omega(a)1$ 不可逆，这意味着 $\omega(a) \in \sigma(a)$。 □

命题2.8 中可以看到一个重要的要点，即诸如 $\omega(a)$ 这样的观测值必须是可观测量 $\sigma(a)$ 的谱中的元素，其中 $a \in \mathcal{A}$。

定义 2.9 (交换子，李代数)。 对于结合代数 A，两个元素的交换子 为

$$[a, b] := ab - ba, \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

这个映射 $[\cdot, \cdot]: A \times A \to A$ 是反对称且非结合的，但对每个自变量都是线性的，也就是说，它是一个乘积。配备这一乘积的向量空间 A 是一个李代数。如果 $[a, b] = 0$，那么 a 与 b 对易。

介绍了基本动机和定义之后，我们转向一些例子——首先聚焦于交换代数。正如 Paul Halmos 所建议的，我们应尽可能多地收集例子；遵循 David Hilbert 的做法，我们从最简单的例子开始。

例 1. 考虑 $\mathbb{C}$，将其视为自身上的复代数，对合由复共轭给出。通过恒等泛函 $\varpi_{\mathbb{C}}(z) = z$定义一个态。这就得到一个交换概率代数。一个样本或观测（即一个特征）就是恒等映射 $\omega_{\mathbb{C}}(z) = z$。

尽管这个代数在某种意义上是“平凡的”，因为它的元素并非真正随机，但它表明该框架并非在处理空集。

例 2 (阿达马代数)。 考虑 $\mathbb{C}^n$，其对合为逐项复共轭。定义两个向量 $\boldsymbol{y} \odot \boldsymbol{z}$ 的乘法 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ 逐分量进行（这称为 阿达马 积，不过显然这一概念可追溯至 Schur [70]）：

$$(\boldsymbol{y} \odot \boldsymbol{z})_j := y_j z_j; \; j = 1, \ldots, n.$$

乘法单位元为 $\boldsymbol{e} = (1, 1, \ldots, 1)$。注意，这同时也是一个内积空间——一个有限维希尔伯特空间——其典范内积为 $\langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z} \rangle_c := \sum_j y_j^* z_j$。因此，对于任意 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$，$\mathbb{C}^n$ 上的每个线性泛函都具有形式 $\boldsymbol{z} \mapsto \langle \boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{z} \rangle_c$，其中$\boldsymbol{r} \in \mathbb{C}^n$。可定义典范态 $\phi_c \in \mathsf{S}(\mathbb{C}^n)$ 为 $\phi_c(\boldsymbol{z}) = {}^1\!/_n \langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{z} \rangle_c$。这是一个交换概率代数，对应于指标集$[n] := \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq n\}$上的均匀分布；向量 ${}^1\!/_n \boldsymbol{e}$ 可称为 $[n]$上的密度或（均匀）离散概率分布。

更一般地，$\boldsymbol{\rho} = (\rho_i)$ 上的任意离散概率分布或密度，在 $[n]$ $(\rho_i \geq 0, \langle \boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{e} \rangle_c = 1)$ 上定义一个态 $\varpi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{z}) = \langle \boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{z} \rangle_c$。样本或观测（特征）的集合由 $\omega_i(\boldsymbol{z}) = z_i = \langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{z} \rangle_c$ 给出，使用标准基向量 $\boldsymbol{e}_i$。

另一种观点是取一个基数为 n 的有限集 X。带逐点运算的函数代数 $F(X \to \mathbb{C})$ 通过任意枚举 $\{x_1, \ldots, x_n\} = X$ 与 $\mathbb{C}^n$ 同构。函数代数 $F(X \to \mathbb{C})$ 也可以看作连续函数代数 $\mathrm{C}(X \to \mathbb{C})$，其中 X 取离散拓扑。

显然，例 1 正是上述内容的 $n = 1$ 版本。

例3 (多项式 *-代数)。 令 $\mathbb{C}[X]$ 为复系数单变量 X 的多项式代数，其中，对合将 $p(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$ 映为$p(X)^* = \sum_{k=0}^n \alpha_k^* X^k$。定义一个态 $\varpi(p(X)) = \alpha_0$，通常记作 $p(0)$。这是一个交换概率代数。

例 4 (对角矩阵代数)。 设 $\mathbb{D}_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$上的对角矩阵代数。对合为逐项复共轭再加转置$(\cdot)^{\mathsf{H}}$。回想一下，$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上的任意线性泛函都具有 $\boldsymbol{D} \mapsto \mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{D})$ 的形式，其中 $\boldsymbol{V} \in$

$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，这是因为 $\langle \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{M} \rangle_F := \operatorname{tr}(\boldsymbol{V}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{M})$ 在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$上定义了弗罗贝尼乌斯 或希尔伯特-施密特内积，使 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 成为一个有限维希尔伯特空间，其子空间（实际上是 *-子代数）为 $\mathbb{D}_n(\mathbb{C})$。

规范态或弗罗贝尼乌斯态 $\phi_F \in S(\mathbb{D}_n(\mathbb{C}))$ 定义为 $\phi_F(\boldsymbol{D}) = \frac{1}{n}\langle \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{D} \rangle_F$，这是一种密度矩阵为 $\frac{1}{n}\boldsymbol{I}$ 的均匀分布。它是一个迹态，参见定义 2.1。对于密度矩阵 $\boldsymbol{R} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho})$，其中 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ a 为离散概率分布，定义态为 $\varpi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{D}) = \langle \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{D} \rangle_F$。观测（特征标）形式为$\omega_i(\boldsymbol{D}) = D_{ii}$。这个代数同构于例 2 中按分量运算的哈达玛代数。

例 5 (投影代数)。 设 $R = \{\boldsymbol{P}_j\}_{j=1,\dots,m}$ 是一组位于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中、包含单位元 $\boldsymbol{I}$ 的交换正交投影。因此 $\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_j^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{P}_j^2$，并且 $[\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{P}_j] = \boldsymbol{0}$。使用与例 ϕ_F 4中相同的弗罗贝尼乌斯态，则 $\mathbb{C}[R]$构成一个有限维交换概率代数。注意，

$$\phi_F(\boldsymbol{P}_i) = \tfrac{1}{n}\,\langle \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{P}_i \rangle_F = \tfrac{1}{n}\,\operatorname{tr}\boldsymbol{P}_i = \tfrac{1}{n}\,\operatorname{rank}\boldsymbol{P}_i.$$

若 $\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{P}_i$ 为正（半定），则记作 $\boldsymbol{P}_i \le \boldsymbol{P}_j$。这在 $\mathbb{C}[R]$ （以及 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$）上构成偏序。若非零投影 $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{P} \in \mathbb{C}[R]$ 满足：对于任意其他投影 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{C}[R]$ ，只要 $\boldsymbol{Q} \le \boldsymbol{P}$，便有 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ 或$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}$，则称 $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{P} \in \mathbb{C}[R]$ 为极小。

若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q} \in \mathbb{C}[R]$ 都是投影，则 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{QP}$也是投影，并且有$\boldsymbol{R} \le \boldsymbol{P}$以及 $\boldsymbol{R} \le \boldsymbol{Q}$。容易看出， $\boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})$ 和$\boldsymbol{R}_Q = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ 也都是投影，且它们彼此正交： $\boldsymbol{R}_P\boldsymbol{R}_Q = \boldsymbol{0}$，并且与 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{PQ}$正交：$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}_Q = \boldsymbol{0}$。注意，这些 $\boldsymbol{S} := \boldsymbol{R}_P + \boldsymbol{R}_Q + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{PQ}$ 之和仍是一个投影。采用命题 2.19中的记号，可将其写作

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \sqcap \boldsymbol{Q}, \quad and \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} \sqcup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}_P + \boldsymbol{R}_Q + \boldsymbol{R}.$$

注意，以这种方式可以找到极小投影 $\{\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_d\} =: B \subseteq \mathbb{C}[R]$，它们两两正交（$\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{R}_j = \delta_{kj}\boldsymbol{R}_k$）——其中 δ_{ij} 是克罗内克-δ ——且满足 $d = \dim(\mathbb{C}[R])$，构成 $\mathbb{C}[R]$的一组基，并且是单位分解： $\sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{I}$。

例 6 (交换矩阵代数)。若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{sa}$ 是自伴的，考虑由 $\boldsymbol{A}$和 $\boldsymbol{I}$生成的交换 *-代数 $\mathbb{C}[\boldsymbol{A}] \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。 取例4中的弗罗贝尼乌斯态，它构成一个交换概率代数。

注 2.10. 任意自伴 $\boldsymbol{A}$ 均可对角化： $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \in \mathbb{D}_n(\mathbb{R})$，其中 $\boldsymbol{U} \in U(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 是某个酉算子。因此，任意函数 $f(\boldsymbol{A})$（尤其是多项式）都具有相同的对角化酉算子。事实上， $\boldsymbol{A}$ 具有谱分解 $\boldsymbol{A} = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{P}_k$，其中$\lambda_k \in \sigma(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}$，且有正交投影 $\boldsymbol{P}_k$投影到 λ_k的特征子空间上。 $\boldsymbol{P}_k$构成一个单位分解（参见例 5）。于是 $f(\boldsymbol{A}) = \sum_k f(\lambda_k)\boldsymbol{P}_k$，并且 $\mathbb{C}[\boldsymbol{A}] = \mathbb{C}[\{\boldsymbol{P}_k\}]$ =张成$\mathbb{C}\{\boldsymbol{P}_k\}$，参见例 6。

在他颇具影响力的专著 [91, 92], 中，柯尔莫哥洛夫从有限样本空间以及仅取有限多个值的随机变量出发。上述例子恰好反映了这一设定，而我们在此也大多停留在这一层面——尤其是在进入非交换领域时——尽管我们有时也会略窥无限维情形。

交换或阿贝尔代数本质上是函数代数，而下面的例7 是例2末尾所描述的哈达玛代数的推广：

例7（函数代数）。 对任意非空集合 $\mathcal{X}$，考虑 $\mathcal{F}(\mathcal{X}\ \mathbb{C})$，即在 $\mathcal{X}$ 上的复值函数所成的向量空间。逐点乘法与复共轭通过逐点运算构成一个交换 *-代数结构。代数单位元是函数 $1\mathrm{l}_{\mathcal{X}} \equiv 1$。若 $\mathcal{X}$ 的基数有限，则这就是例 2 的哈达玛代数，否则这是一个无限维代数。

态可以通过各种方式添加到其中，通常需要对函数增加一些条件，例如可测性或连续性，就像接下来更专门的例子那样。

下一个例子的重要性8 在于展示经典 Kolmogorov 概率可以纳入代数框架。

例 *8*（简单函数代数）。设 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 是一个经典概率空间，其样本空间为 Ω，σ-代数为 $\mathfrak{F}$，概率测度为 $\mathbb{P}$。对每个 $E \in \mathfrak{F}$，令 $1l_{\mathcal{E}}$ 为示性函数。将仅在零测集上不同的示性函数视为相同。定义 $\varpi_{\mathbb{P}}(1l_{\mathcal{E}}) = \mathbb{P}(E)$。将 $\varpi_{\mathbb{P}}$ 线性扩张到 $L_{0s}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) = span_{\mathbb{C}}\{1l_{\mathcal{E}} \mid E \in \mathfrak{F}\}$。与例 *7* 一样，在逐点运算下，这是一个交换 *-代数，且 $\varpi_{\mathbb{P}}$ 是一个态。因此，$L_{0s}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 是一个交换概率 *-代数。

这本质上是例5的无限维类似物，其中$1\mathrm{l}_{\mathcal{E}}$ 的作用类似于投影。若 Ω 具有有限基数，且 $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ 是幂集，则这是例7中的特例2。类似地，对于任意非空集合 Ω，若 $\mathfrak{F}$ 具有有限基数，则可化为例2，因为$\mathrm{L}_{0s}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 是有限维的。通常会对这个代数取完备化，以得到在数学上更便于处理的结构，例如

例 9 (有界随机变量代数)。 类似地，在与例 *8* 相同的可测情形下，$\mathrm{L}_{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ——本质有界可测复函数构成的代数——具有逐点代数运算，并像例 *7*中那样通过共轭定义对合，其态为

$$\varpi_{\mathbb{P}}(f) = \int_{\Omega} f(\omega)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

这是一个 交换概率代数，是例 *8* 在L_{∞}-范数下的完备化 .

当然，$\mathrm{L}_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$——全体可测复函数构成的 *-代数，或者说全体经典随机变量（随机变量）在 Ω 上的 *-代数——规模还要更大，但这里并非每个元素都有有限积分。一个实用的中间结构是:

例 10 (全阶矩随机变量代数)。 定义

$$\mathrm{L}_{\infty-}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{L}_p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}),$$

即每阶矩都有限的那些随机变量。这里 $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 是例 *8* 在 L^p-范数下的完备化，是由截至 p 阶矩有限的随机变量构成的巴拿赫空间。在逐点运算和共轭下，它仍是一个交换 *-代数，与例 *7* 中一样，其态为 $\varpi_{\mathbb{P}}$，与例 *9* 中相同。因此 $\mathrm{L}_{\infty-}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$也是一个交换概率代数。因此， *-代数之间有如下包含关系链

$$\mathrm{L}_{0s}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \subseteq \mathrm{L}_{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \subseteq \mathrm{L}_{\infty-}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \subseteq \mathrm{L}_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}),$$

在有限维情形下，处处取等号。

当$\mathcal{G}$ 为紧拓扑空间时，便会出现另一个重要情形:

例 11 （一致代数）。 设 $\mathcal{G}$ 为紧致的，且 μ 为支撑在 $\mathcal{G}$ 上的有限拉东测度。考虑 $\mathrm{C}(\mathcal{G}\ \mathbb{C})$，即 $\mathcal{G}$ 上连续复值函数的代数。在如例 7 中的逐点运算与共轭下，并配以态

$$\varpi_\mu(\varphi) = \frac{1}{\mu(\mathcal{G})} \int_{\mathcal{G}} \varphi(x)\, \mu(\mathrm{d}x),$$

这是一个交换概率代数。在 $x \in \mathcal{G}$ 处的样本为 $\omega_x(\varphi) = \varphi(x)$。这是 $\mathrm{L}\infty(\mathcal{G}\ \mathfrak{B}, \mu)$的一个子代数，其中 $\mathfrak{B}$ 是 *Borel* σ-代数。如果 $\mathcal{G}$ 的基数有限，则可化为例 2。

最后，我们引入一个存在于任意代数中的交换子代数：

定义 2.11 (代数中心)。 代数 A 的中心 $\mathcal{A}$ 是

$$\mathrm{Z}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \mid [a, b] = 0 \ \textit{for all}\ b \in \mathcal{A}\}.$$

在含幺代数中，我们总有 $\mathbb{C}[1] \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A})$，其中 $\mathbb{C}[1]$ 表示单位元的标量倍。

例 12 (代数中心)。 对于任意概率代数 $\mathcal{A}$，中心 $\mathrm{Z}(\mathcal{A})$ 本身也是一个交换概率代数。如果 $a \in \mathcal{A}$ 是自伴的，则子代数 $\mathbb{C}[a] \subseteq \mathcal{A}$ (关于 a 的所有复系数多项式）也交换（参见注释 2.10）。

最小的交换子代数是 $\mathbb{C}[1]$，它与 $\mathbb{C}$ （例1）同构；从这个意义上说， $\mathbb{C}$ 自然嵌入于每个含幺代数中。

非交换概率代数： 现在我们将上述思想推广到非交换情形 [51, 148, 130, 124, 125, 127, 128, 129, 105, 56, 131, 67, 45, 102,104, 89, 107, 39, 3]。回顾式（2.1），对合的定义方式适用于非交换代数。在这种情形下——通常与类量子行为（QLB）相关——随机变量（RVs）的乘积需要特别注意。请注意，有时我们会将交换代数或阿贝尔代数称为“经典代数”，而将非交换代数称为“QLB代数”（QLB——类量子行为）。

按照 [3]，，可以通过将 a 与 b 的乘积 ba解释为一种时间顺序来加以理解：在这种顺序中，先观测 a，再观测 b。当 $ba = ab$时，可观测量a 和b 是 相容的，这意味着观测顺序无关紧要，并且它们实际上可以同时测量。对合对应于时间反演（方程（2.1））， 因此，如果 a 是自伴的（$a = a^\star$），那么测量便没有额外的“反向”方面——这类随机变量代表了我们感兴趣的基本可观测量。

在这种非交换情形下，除非代数是交换的，否则特征（即取值于 $\mathbb{C}$ 的非零 *-同态）通常无法在整个代数上存在。正如我们将看到的（参见海森堡不确定性关系，定理 3.3），非交换元素 $a,b \in \mathcal{A}$ （其中$[a,b] \neq 0$）彼此不相容，不能被联合观测或测量。

要讨论非交换代数，需要先介绍一些概念和术语，其中大多数都源自矩阵代数。下面简要总结标准定义和术语：

定义 2.12 （基本定义）。 设 A 是一个带有对合 $\star$ 的复结合含幺 *-代数，且 a、b、c、u、v、r、p、e、f $\in A$。我们采用以下记号和术语。

Un以及零元。 乘法单位元为 1，零元为 0 .

幂。 对于 $a \in A$ 与 $n \in \mathbb{N}_0$，递归地定义

$$a^0 := \mathbb{1}, \qquad a^n := a\, a^{(n-1)} \quad \text{for } n > 0.$$

显然，对任意 m、$n \in \mathbb{N}$，均有 $[a^n, a^m] = 0$ 。

由元素生成的代数。 $\mathbb{C}[a] \subset A$ 表示由 a 的所有幂生成的交换子代数。若 $R = \{a_j : j \in J\}$ 是一组未必彼此可易的元素，

$$\mathbb{C}\langle R\rangle \;=\; \mathbb{C}\langle a_j : j \in J\rangle \;\subset\; \mathcal{A}$$

则为由诸 a_j 的所有多项式构成的（可能非交换的）子代数，并保持自变量的次序。若诸 a_j 确实 两两对易，则它们所生成的交换子代数记作 $\mathbb{C}[R] \subset A$。

含幺子代数。 设 $B \subset A$ 为一个子代数，即 B 是一个子空间，且对所有 b、$c \in B$，均有 $bc \in B$。若存在元素 $1_{\mathcal{B}} \in B$，它在 B 上充当单位元（$\forall b \in B : b\, 1_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} b = b$），则称 B 为含幺子代数。注意，$1_{\mathcal{B}} \in B$ 可以不同于 $1 \in A$。

理想。 称 *-子代数 $J \subseteq A$ 为左理想当且仅当 $AJ = J$，为右理想当且仅当 $JA = J$，并称其为双边理想 或简称理想 当且仅当它既是左理想又是右理想。称代数 A 为单的，当且仅当它没有非平凡理想（除 $\{0\}$ 与 A 之外的理想），且 $A^2 := AA \neq \{0\}$。

交换子。 对于子代数 $B \subseteq A$，其交换子 $B' \subseteq A$ 是子代数

$$\mathcal{B}' \;:=\; \{a \in \mathcal{A} : [a, b] = 0 \;\; \text{for all} \;\; b \in \mathcal{B}\}.$$

在含幺代数中，$\mathbb{C}[1] \subseteq B'$。此外，恒有 $Z(A) \subseteq B'$，其中 $Z(A)$ 是 A 的中心，参见定义 *2.11*。注意 $Z(B) = B \cap B' \subset B$，而代数 B' 本身一般不是 B 的子代数。注意到 $B \subseteq B'' := (B')'$。

极大阿贝尔子代数（MASA）。交换的（即阿贝尔的）*-子代数 $C \subseteq A$ 是极大阿贝尔子代数（MASA），当且仅当对于任意满足 $C \subseteq B$ 的阿贝尔 *-子代数 $B \subseteq A$，都有 $B = C$。因此，$C = C'$。

均值与涨落部分。给定一个态 $\varpi : A \to \mathbb{C}$，定义 a 的均值为

$$\bar{a} := \varpi(a)\, \mathbb{1}, \qquad \text{and the fluctuating part } \text{by} \quad \tilde{a} := a - \bar{a}.$$

因此，$a = a + \tilde{a}$。$\mathbb{1}$ 的标量倍数代数为 $A := \mathbb{C}[1]$，而 $\overline{A} := \ker \varpi$ 核是所有零均值元素构成的向量空间。因此，$A = A \oplus A$。将$\mathbb{C}$ 通过 $z \mapsto z\,1$嵌入 A 后，可以将 $A \cong \mathbb{C}$。

正规、自伴与反自伴。$a \in A$ 是正规的，当且仅当 $[a, a^\star] = 0$。它是自伴或厄米的，当且仅当 $a = a^\star$；而 $c \in A$ 是反自伴或反厄米的，当且仅当 $c = -c^\star$。若 a 自伴，则 $c := \mathrm{i}a$ 反自伴。令 $A_{sa} \subseteq A$ 表示自伴元素构成的实向量空间。注意，实部和虚部

$$\Re(b) \;:=\; \frac{1}{2}\big(b + b^\star\big), \quad \Im(b) \;:=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(b - b^\star\big)$$

是自伴的，因此任意元素 b 都可分解为 $b = R(b) + \mathrm{i}I(b)$。因此，$A = A_{sa} \oplus \mathrm{i}A_{sa} =$ 张成空间$\mathbb{C}(A_{sa})$。

可逆元。a 可逆当且仅当存在元素 $b \in A$，使得 $ab = ba = 1$。在这种情况下，$b = a^{-1}$ 是逆元。所有可逆元构成的乘法群记作 $A^\times$。显然，单位元 1 是可逆的（$1^{-1} = 1$），而 0 不是。

酉元。u 是酉算子 当且仅当 $u^\star = u^{-1}$。换言之，$uu^\star = u^\star u = 1$。所有酉元都是正规元，所有酉元构成的乘法保持子群记作 $\mathrm{U}(A) \subset A^\times$。

正元。自伴元 a 称为正，记作 $a \geq 0$，当且仅当 a 可表示为 $a = \sum_j b_j^\star b_j$。正元构成的凸锥记作 $A_+ \subseteq A_{sa}$。由此定义偏序：$a \leq c$ 当且仅当 $c - a \geq 0$。

效应。正元 e 称为效应 当且仅当 $0 \leq e \leq 1$。因此 e 是自伴元，所有效应组成的集合记作 $\mathrm{E}(A) \subset A_+$。

幂等元与投影。$v \in A$ 是幂等元 当且仅当 $v^2 = v$。若 v 还满足自伴条件（$v = v^\star$），则称其为投影。投影集合记作 $\mathrm{P}(A) \subset \mathrm{E}(A) \subset A_+$。两个投影 p_1, p_2 正交当且仅当 $p_1 p_2 = 0$。对于 $p \in \mathrm{P}(A)$，$p^\perp := 1 - p$ 仍是一个投影，且 $pp^\perp = 0$。

极小投影。若投影 p 满足 在某个子集 $P \subseteq \mathcal{A}$ 当且仅当 $p > 0$ 且不存在严格小于它的非零投影 $r \in \mathcal{P}$ 使得 $0 < r < p$。与例 5类似，也可以改述为：如果存在另一个投影 $q \in \mathcal{P}$满足 $q \leq p$，那么 $q = 0$ 或 $q = p$。

等距元与偏等距元。$v \in A$ 称为等距，当且仅当 $v^\star v = 1$ 且 $vv^\star$是一个投影。$f \in A$ 称为部分等距算子，当且仅当 $f^\star f = p$ 是一个投影。在这种情况下，$ff^\star$ 也为一个投影。

有界随机变量。若元素 $a \in A$ 满足存在常数 $C_a > 0$ 使得

$$\varpi\left(b^\star a^\star a\, b\right) \leq C_a^2\, \varpi\left(b^\star b\right) \quad \textit{for all } b \in \mathcal{A}.$$

所有有界随机变量构成的集合记作$\mathrm{B}(A) \subseteq A$，它本身是一个概率子代数。总有 $\mathbb{C}[1] \subseteq \mathrm{B}(A)$。在有限维情形下，$\mathrm{B}(A) = A$，因此所有元素都有界。

内自同构。设 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^\times \subset \mathcal{A}$ 为一个酉算子，则 $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$定义为 $a \mapsto u^\star a u$，它是一个 *-同构，即代数到自身的一个可逆 *-同态（定义 2.4），也就是说，它是一个 *- 自同构。由于 $u^\star a u$ 完全由 *- 代数内部的表达式构成，因此也称为内 *- 自同构。

由定义可轻易推出

命题 2.13。对于任意 $a \in A$，有 $[a, a^\star] = 2\mathrm{i}\,[I(a), R(a)],$，因此 a 正规当且仅当 iff $R(a)$ 和 $I(a)$ 对易。因此，对于自伴 $a \in A_{sa}$，任意 $b \in \mathbb{C}[a]$ 属于交换子代数 $\mathbb{C}[a] \subseteq A$ 的元素都是正规的。

定义 2.14（结构常数）。对于代数 A，设 $B = \{b_j\}_{(j \in J)} \subset A$ 是一个基。那么，基元素 b_i $b_j \in A$ 的任意乘积都可扩张为

$$b_i b_j = \sum_{k \in J} {}^B\gamma_{ij}^k\, b_k.$$

这些 ${}^B\gamma_{ij}^k \in \mathbb{C}$ 称为代数结构常数 [55]，对应于代数 $\mathcal{A}$ 关于基 B。

在实际计算中，了解定义 2.14中的结构常数十分重要，因为它们通过乘积的双线性 [55], 决定了代数的乘法保持结构，并足以计算任意乘积。

注 *2.15.* 对于代数中的有界元素，设其界为 C_a （定义见 $\widehat{\ }$定义 *2.12*），令 $C_a = inf\{C_a \mid C_a$ 是一个界*}*，并令 $I_\varpi = \{a \in A \mid C_a = 0\}$ 为元素构成的理想（参见定义 *2.12*），其中所有可能界的下确界为零。若 $I_\varpi = \{0\}$，则态 ϖ 称为非退化态。否则，当 $I_\varpi \neq \{0\}$ 时，考虑商 *-代数 A/I_ϖ，此时与 ϖ 对应的态是非退化的。

$\widehat{\ }$由于后文（参见命题 *2.61*） $\|a\|_\infty = C_a$ 将用于定义算子范数，因此商构造确保它确实是一个范数。这会从代数中移除 多余的元素。

下面的命题2.16 给出了几个等价的判据，用于描述注2.15中 [98]所述的情形。

命题 2.16. 设$(A\ \varpi)$ 是一个概率代数。则以下陈述等价：

- $C_a = 0$ 或 $a \in \mathcal{I}_\varpi$ *(参见注 2.15)*。
- $\varpi(bac) = 0$ 对所有 b、$c \in A$ 均成立。
- $\varpi(b^\star ab) = 0$ 对所有 $b \in A$ 均成立。

若 A 是阿贝尔的，或态 $\varpi \in \mathsf{S}(A)$ 是迹态，则这些陈述也等价于以下陈述：

- $\varpi(a^\star a) = 0.$
- $\varpi(ab) = 0$ 对所有 $b \in A$。

若 $\mathcal{I}_\varpi \neq \{0\}$，今后我们将默认已进行了备注 2.15 中所述的因子分解，并且在这种情况下A 已替换为 $\mathcal{A}/\mathcal{I}_\varpi$，因此命题 2.16 中的论述仅适用于 $a = 0$。

上述框架将使交换概率中的许多标准构造和概念能够自然地延伸到非交换领域，尽管由于乘积不满足交换律，需要格外谨慎。

后文将会看到，某些概率代数——例如所有有限维概率代数——由其投影 $\mathrm{P}(\mathcal{A})$生成，参见例 5。这些代数也很重要，因为还可以赋予它们额外的诠释，即将一个投影视为一个事件 ——另见例 5和命题 2.19 ——并为其指定一个概率；这种指定也称为玻恩规则：

定义2.17 （概率——玻恩规则）。 在态 $\varpi \in \mathsf{S}(A)$下，观察到由投影 $p \in \mathrm{P}(A)$ 描述的事件的概率定义为

$$\mathbb{P}(p) := \varpi(p) = \mathbb{E}_\varpi(p). \tag{2.3}$$

以下事实可由此以及定义 2.12直接推出：

命题 2.18 （事件）。 由于对于任意正元 $a \geq 0$ 都有 $\varpi(a) = \mathbb{E}_\varpi(a) \geq 0$，这意味着对于 $a \leq b$

$$\varpi(a) = \mathbb{E}_\varpi(a) \leq \varpi(b) = \mathbb{E}_\varpi(b).$$

因此，对于投影 $p \in \mathrm{P}(A)$，有 $p^\perp \in \mathbb{C}[p],$，而由于 $0 \leq p \leq 1$，这意味着

$$0 \leq \mathbb{P}(p) = \varpi(p) = \mathbb{E}_\varpi(p) \leq 1 \quad and \quad \mathbb{P}(p) + \mathbb{P}(p^\perp) = 1.$$

对于一个y 特征 ω 在 $\mathbb{C}[p]$ 上有 $0 \leq \omega(p) = \omega(pp) = \omega(p)\omega(p) \leq 1$，因此

$$either\ \omega(p) = 0\ \ or\ \omega(p) = 1,\ \ i.e.\ \ \sigma(p) \subseteq \{0, 1\}.$$

当常量 $p \equiv 0$ （不可能事件）时，会出现 $\sigma(p) = \{0\}$；当常量 $p \equiv 1$ （必然事件）时，会出现 $\sigma(p) = \{1\}$；对于任意其他（真）投影 $0 < p < 1$，都有 $\sigma(p) = \{0,1\}$。

因此，观测 $\omega(p) = \langle \omega, p \rangle = p(\omega) = 1$ 可以这样解释：事件 p 已经被观测到。这是一个 锐可观测量，毫无疑问，p 已经被观测到。在观测之前，发生这种情况的概率为 $\mathbb{P}(p)$；而观测到对立事件 $p^\perp$ 的概率为 $\mathbb{P}(p^\perp) = 1 - \mathbb{P}(p)$；但是 $p^\perp$ 在$\omega(p^\perp) = p^\perp(\omega) = 0$ 的情况下并未被观测到。

例5 中的论述可以在抽象框架下继续展开：

命题 *2.19*（布尔代数）。设 $R \subset \mathcal{P}(A)$，其中 $R := \{p_j\}\ j \in J$ 是一组可交换投影，包含单位元 *1* — $\forall i, j \in J$： $[p_i, p_j] = 0$，参见例 *5* — 使得 $\mathbb{C}[R] \in A$ 是一个交换概率子代数。对任意投影 $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C}[R])$，将“交”或“且”或“交集”或“下确界”记作 $\sqcap$；将“并”或“或”或“并集”或“上确界”记作 $\sqcup$；将“补”或“否定”记作 $\neg$，定义如下：

$$\begin{aligned} p_1 \sqcap p_2 &:= p_1 p_2; \\ p_1 \sqcup p_2 &:= p_1 + p_2 - p_1 p_2; \\ \neg p_1 &:= p_1^\perp. \end{aligned}$$

那么 $\mathrm{P}(\mathbb{C}[R])$ 连同这些运算构成一个布尔代数，其最大元为1，最小元为0。再加上定义 *2.17*中的概率赋值，这便构成一个基本的柯尔莫哥洛夫概率空间。

要使这个布尔代数成为 σ-布尔代数（当 J 是无限集时），从而使概率空间能够定义在 σ-代数上，需要满足某种完备性；这里不讨论这个问题。但对于有限维代数，当 J 必然是有限基数时，就不需要这一条件，命题 2.19中的构造给出了一个恰当的（有限但无点的）Kolmogorov 概率空间，其中投影与集合代数的元素相对应。当然，众所周知，根据斯通定理，任何这样的布尔代数都同构于某个集合的子集域。

接续注2.10和命题2.19，可以作如下

注 *2.20*（矩阵可观测量、投影测量）。考虑一个可观测量$\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{sa}$ $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$，其谱分解为 $\boldsymbol{A} = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{P}_k$，其中 $\lambda_k \in \sigma(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}$，因此有交换正交投影 $\boldsymbol{P}_k$，它们构成单位分解 $\sum_k \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{I}$，参见注 *2.10*。可能的观测结果是谱中的元素（参见命题 *2.8*），锐观测 $\omega_k(\boldsymbol{A}) = \lambda_k$；观测到 λ_k 的概率为$\mathbb{P}(\boldsymbol{A} = \lambda_k) := p_k = \varpi(\boldsymbol{P}_k) = \mathbb{E}_\varpi(\boldsymbol{P}_k)$。观测 $\omega_k(\boldsymbol{A}) = \lambda_k$所携带的信息，与观测 $\omega_k(\boldsymbol{P}_k) = 1$相同，因为对于 $j \neq k$ 必有 $\omega_k(\boldsymbol{P}_j) = 0$，且我们知道 $\boldsymbol{A}$ 的值为 λ_k。

此类锐观测针对投影 $\omega(\boldsymbol{P})$，也称为投影测量，并且是所有锐观测的基本构件。若 λ_k 为单特征值，因而特征子空间为一维，且具有单位特征向量 $\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{C}^n$，则（极小）投影算子由 $\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^{\mathsf{H}}$给出。在此情形下，该观测可写

为 $\omega_k(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{v}_k^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k$（参见定义2.23）。若为重特征值，其特征子空间 $V_k \subseteq \mathbb{C}^n$ 的维数设为 d，则可找到一个标准正交基$\{\boldsymbol{v}_{k_j}\}_{j=1\ldots d}$，即 V_k的基，从而投影算子可写为 $\boldsymbol{P}_k = \sum_j \boldsymbol{v}_{k_j}\boldsymbol{v}_{k_j}^{\mathsf{H}}$。因此期望值可写为 $\mathbb{E}_{\varpi}(\boldsymbol{A}) = \varpi(\boldsymbol{A}) = \sum_k \lambda_k \mathbb{P}(\boldsymbol{A} = \lambda_k) = \sum_k \lambda_k p_k$。

定义 2.21（投影值测度（PVM））。赋值 $\Pi_M : \quad 2^{\sigma(\boldsymbol{A})} \ni \{\lambda_k\} \mapsto \boldsymbol{P}_{\lambda_k} := \boldsymbol{P}_k \in \mathrm{P}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 是集合 $\sigma(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}$的所有子集上的一个投影值测度（PVM）。它满足

$$\Pi_M(\sigma(\boldsymbol{A})) = \boldsymbol{I}, \quad \textit{and for disjoint } E_1, E_2 \subseteq \sigma(\boldsymbol{A}): \tag{2.4}$$
$$\Pi_M(E_1 \uplus E_2) = \Pi_M(E_1) + \Pi_M(E_2). \tag{2.5}$$

这意味着 $\Pi_M(\emptyset) = \boldsymbol{0}$，而对于不一定互不相交的 $E_1, E_2 \subset \sigma(\boldsymbol{A})$:

$$\Pi_M(E_1 \cup E_2) = \Pi_M(E_1) + \Pi_M(E_2) - \Pi_M(E_1 \cap E_2), \quad \textit{and} \tag{2.6}$$
$$\Pi_M(E_1 \cap E_2) = \Pi_M(E_1)\Pi_M(E_2) = \Pi_M(E_2)\Pi_M(E_1). \tag{2.7}$$

由式（2.7）可知，*PVM* 中的极小投影 $\boldsymbol{P}_{\lambda_k} = \boldsymbol{P}_k$两两正交，且通常彼此对易。因此

$$\mathrm{span}\{\Pi_M(E) \mid E \subseteq \sigma(\boldsymbol{A})\} = \mathbb{C}[\{\Pi_M(E) \mid E \subseteq \sigma(\boldsymbol{A})\}] = \mathbb{C}[\boldsymbol{A}] \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

是 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$的交换子代数。

结合态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$，可得到一个离散测度 $2^{\sigma(\boldsymbol{A})} \ni \{\lambda_k\} \mapsto \mathbb{E}_{\varpi}(\boldsymbol{P}_{\lambda_k}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{P}_{\lambda_k}) = p_k \in \mathbb{R}$。

上述定义中2.21 将投影值测度定义在单点集上$\{\lambda_k\} \in 2^{\sigma(\boldsymbol{A})}$ 是由注2.20中所述的发展所致；通过方程(2.5)，随后便可将其定义在任意子集上 $E \subset \sigma(\boldsymbol{A})$。事实上，$\sigma$-代数 $2^{\sigma(\boldsymbol{A})}$ 也是一种特殊情形:

注 2.22 (在任意 σ-代数上的投影值测度)。定义 *2.21* 中投影值测度的更一般定义是：存在某个集合 σ-代数 $\mathfrak{Y} \subseteq 2^Y$，它由集合 Y的子集构成，使得对于子集 $E_1, E_2 \in \mathfrak{Y}$ 方程*(2.4)*和*(2.5)*成立。

对于有限维代数，如 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，以及任意不交覆盖 $\biguplus_k E_k = Y$、$(E_k \cap E_j = \emptyset, E_k \in \mathfrak{Y})$，显然，方程 $\Pi_M(Y) = \sum_k \Pi_M(E_k) = \boldsymbol{I}$中的和只能包含有限个非零投影。因此，在该方程的投影值测度中只取极小投影（参见定义 *2.12* 和注 *2.20*）（对应于一个极大不交覆盖），便可找到一个有限集 X，使得单点集$\{x\}$、$(x \in X)$与该极大不交覆盖的成员一一对应。由这些单点集生成的 σ-代数 2^X，继而与 $\mathfrak{Y}$一一对应，因此极小投影是单点集$\{x\} \in 2^X$的像。以下将假定处于这种情形。在定义 *2.21* 中，有 $X = \sigma(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}$。

集合 X通常称为结果空间，这意味着当 $\Pi_M(\{x_k\}) = \boldsymbol{P}_{x_k} = \boldsymbol{P}_k$已被观测到时，即对于一次观测 ω，$\omega(\boldsymbol{P}_k) = 1$，该观测的结果为 $x_k \in X$。注意，对于 *PVM*Π_M 中的互相正交投影 $(\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_j = \delta_{jk}\boldsymbol{P}_k)$，根据命题 *2.18*，由 $\omega(\boldsymbol{P}_k) = 1$ 可得，对所有$j \neq k$，$\omega(\boldsymbol{P}_j) = 0$；其中 $\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_{x_j} = \Pi_M(\{x_j\})$。

定义 2.23 (密度矩阵，向量态)。回顾示例 *4* 和*5* 以及弗罗贝尼乌斯态的定义 $\phi_F(\boldsymbol{A}) = {}^1\!/_n \,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，可以看出任何归一化态

（参见定义 2.1） $\beta \in \mathsf{S}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 可写为 $\beta(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A})$。矩阵 $\boldsymbol{R}$必须是自伴、正且具有单位迹： $\beta(\boldsymbol{I}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}) = 1$。这样的矩阵称为密度矩阵。因此，它具有谱分解（参见注 2.10） $\boldsymbol{R} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{r}_j \boldsymbol{r}_j^{\mathsf{H}}$，其单位特征向量为 $\boldsymbol{r}_j$，特征值为 $\alpha_j \geq 0$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}) = \sum_j \alpha_j = 1$。所有此类密度矩阵的集合记作

$$\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) := \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+ \mid \mathrm{tr}\, \boldsymbol{R} = 1\}. \tag{2.8}$$

处理像 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 这样的矩阵代数时，我们可以根据具体情况，用不同的记号表示同一个态；例如，给定 $\boldsymbol{R} \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$，对所有的 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，都有

$$\varpi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}) = \langle \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{A} \rangle_F = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{R}\boldsymbol{A} = n\, \phi_F(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}).$$

对于单特征值 λ_k，注 2.20 中上述观测 ω_k 为 $\omega_k(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}((\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^{\mathsf{H}})\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{v}_k^{\mathsf{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_k$，其密度矩阵为 $\boldsymbol{R}_k = (\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^{\mathsf{H}})$。对于特征子空间为 V_k 的重特征值，存在一个单位向量 $\boldsymbol{w}_k \in V_k$，使得 $\omega_k(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}((\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{H}})\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{w}_k$。因此，与 ω_k 相关联的密度矩阵要么是 $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^{\mathsf{H}}$，要么是 $\boldsymbol{R}_k := \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{H}}$，即一个向量态。在像例 6 中的 $\mathbb{C}[\boldsymbol{A}]$ 这样的阿贝尔矩阵代数上，如果 $\boldsymbol{v}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，那么这样的向量态确实是一个乘法特征。

对于像 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathsf{H}}$ 这样的向量态，人们通常称向量 $\boldsymbol{r}$ 本身为态。事实上，“态”这一名称正源于此，因为向量 $\boldsymbol{r}$ 可以视为某个以 $\mathbb{C}^n$ 为模型的系统的态。

命题 2.24 (密度矩阵集合，混合态)。 密度矩阵集合$\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ (参见定义 2.23) 是闭且凸的。从几何角度来说，它是两个闭凸集的交集，即正锥 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+$ (参见定义 2.12 和例 5) 与超平面 $\mathcal{T} = \{\boldsymbol{Q} \mid \mathrm{tr}\, \boldsymbol{Q} = 1\}$:

$$\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+ \cap \mathcal{T}. \tag{2.9}$$

将秩为 r 的密度矩阵记为 $\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_r = \{\boldsymbol{R} \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \mid \text{秩}\, \boldsymbol{R} = r\}$，其中 $r = 1, \ldots, n$，则有如下不交并

$$\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \biguplus_{r=1}^{n} \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_r. \tag{2.10}$$

$\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 的极端点是秩为一的矩阵

$$\mathrm{ext}(\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))) = \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_1 = \{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathsf{H}} \mid \boldsymbol{r} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{r}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{r} = 1\}, \tag{2.11}$$

它们也称为纯态或向量态。

根据克雷因-米尔曼定理——这也可由2.23 定义中的谱分解得到——一般密度矩阵 $\boldsymbol{R} \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 是向量态或纯态的凸组合 $\boldsymbol{r}_j \boldsymbol{r}_j^{\mathsf{H}} \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_1$，，它通常被称为混合态。

态集$\mathsf{S}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 与密度矩阵$\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$之间存在双射对应，其定义为

$$\mathsf{S}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \ni \varpi_{\boldsymbol{R}} \leftrightarrow \boldsymbol{R} \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \quad \Leftrightarrow \quad \varpi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{R}\boldsymbol{M} \quad \forall \boldsymbol{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

命题 2.25 （投影格于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$）。 投影 $\mathrm{P}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+$构成一个偏序集，其序来自定义 2.12，并可赋予格结构。设 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2 \in \mathrm{P}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 为两个正交投影。该格

结构通过将下确界定义为 $P_1 \sqcap P_2 := inf\{P_1, P_2\} := P_{inf}$ 正交投影 $P_{\inf}: \mathbb{C}^n \to (im\ P_1) \cap (im\ P_2)$，并将上确界定义为 $P_1 \sqcup P_2 := sup\{P_1, P_2\} := P_{\sup}$ 正交投影 $P_{sup}: \mathbb{C}^n \to$ 张成空间$\{(im\ P_1) \cup (im\ P_2)\}$ =张成空间$\{\overline{(im\ P_1) + (im\ P_2)}\}$ 来确立。这些定义推广了命题 2.19 中针对 $P(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 的可交换子集所给出的定义。

显然，$P^\perp = I - P$的否定或补 $P \in \mathrm{P}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$是到 P的核$\ker P$上的正交投影，并且$\ker P \oplus \operatorname{im} P = \mathbb{C}^n$。格中的最大元仍然是 I ——单位元；最小元则是$\mathbf{0}$——零矩阵。这个格记作$\mathbf{L}(\mathrm{P}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})))$。

这个格中的原子（对于原子 $Q \in L(P(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})))$，不存在另一个不同的元素 $P \in L(P(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})))$使得 $0 < P < Q$）是具有形式$Q = rr^{\mathsf{H}}$ 的极小投影，其中 $r \in \mathbb{C}^n$是单位向量，即 $D(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_1 \subset P(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$（命题 2.24）。秩为 $m \leq n$ 的每个投影都可以表示为 $D(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_1$中的 m 个原子投影之和。

根据佐恩引理，任何交换子代数 C（例如由投影值测度生成的阿贝尔代数 $C = span\{\Pi_M(E)\}$，参见定义 2.21）都可以嵌入或扩展为一个极大阿贝尔子代数（MASA，参见定义 2.12）。交换子代数 C 是极大阿贝尔子代数，当且仅当它与例 4 中的对角矩阵交换代数$\mathbb{D}_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$酉等价，即 $\exists U \in U(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})): U^{\mathsf{H}} C U = \mathbb{D}_n(\mathbb{C})$，例如 [94]。

代数的优点在于，所有乘积，尤其是所有幂，都属于该代数。由于态定义在整个概率代数上，这便引出了矩的定义：

定义 2.26 (矩)。 a 的 $n \in \mathbb{N}$ 阶矩 定义为数 $M_n(a) := \varpi(a^n) = \mathbb{E}_\varpi(a^n)$。对于任意有限集的随机变量 $\{a_j\}$ $j = 1 \ldots m$，这些随机变量不必互异，也不必彼此对易，其 n_1、……、$n_m \in \{1, \star\}$、 $m \in \mathbb{N}$ 阶混合矩 定义为 $M_{n_1 \ldots n_m}(a_1, \ldots, a_m) := \varpi(a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m})$；对于非交换代数，元素的排列顺序很重要。

如果两个随机变量 a_1,a_2 满足对所有 n，它们的矩都相同，即 $M_n(a_1) = M_n(a_2)$，记作 $a_1 \overset{m}{=} a_2$，，则称它们矩等价。

定义幂的期望从而得到矩之后，自然可以将这些定义线性地推广到多项式，由此引出随机变量的分布的定义：

定义 2.27 (随机变量的分布)。 对于随机变量 $a \in A$ 和关于一个未知数 X 的多项式 $p \in \mathbb{C}[X]$，可以计算 $\varpi(p(a))$ ——例如借助矩 $M_n(a)$。a 的分布定义为线性映射 $\tau_a : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$: $\tau_a : p \mapsto \tau_a(p) := \varpi(p(a)) = \mathbb{E}_\varpi(p(a))$。

正如定义2.26中对混合矩所做的那样，也可以通过将定义 2.27 推广到联合分布，来定义一组不交换随机变量的分布，但此处不再需要这样做。以下事实显然由线性性得出：

命题 2.28。 矩相等的随机变量具有相同的分布，且它们是矩等价的。

有限维代数中的随机变量总是有界的（参见定义 2.12），这一点很快就会看到，因此下文中将讨论范围限制为有界随机变量更为方便。从定义2.27中对多项式定义的分布律，很快便可得到经典概念中的分布律，即随机变量的分布测度：

定理 2.29 (随机变量的分布律). 对于任意自伴有界随机变量 $a \in \mathcal{A}_{sa}$，存在一个概率测度 μ_a 定义在 $[-C_a, C_a] \subset \mathbb{R}$上，其中 C_a 是随机变量 a的界常数，如定义 2.12 所述（参见命题 2.49）——也称为该随机变量的分布，或者更确切地说是分布（律）——使得对所有 a，都有 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}[X]$：

$$\tau_a(\boldsymbol{p}) = \int_{-C_a}^{C_a} \boldsymbol{p}(x)\, \mu_a(\mathrm{d}x). \tag{2.12}$$

这使我们能够利用连续性，将映射 τ_a 从多项式扩展到区间 $[-C_a, C_a]$，$\tau_a : \mathrm{C}([-C_a, C_a], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 上的连续函数，并对连续函数 φ定义：$\tau_a(\varphi) = \int_{-C_a}^{C_a} \varphi(x)\, \mu_a(\mathrm{d}x)$。

该定理的证明（例如 [104]）可由黎斯-马尔可夫-角谷定理的表示定理和斯通-魏尔施特拉斯定理推出。结合命题 2.28可知，这就是豪斯多夫矩问题，其唯一解为测度 μ_a。

由于此处关注的是有限维代数，其中的所有随机变量不仅自动有界，而且正如备注 2.20中结合即将介绍的命题 2.49所示，这类随机变量的取值属于 $[-C_a, C_a]$中的一个有限子集；而在有限集上，任何分布都可以用多项式插值，因此完全不需要近似。

定义 2.30 （随机变量依分布律或分布收敛）。设 $\{a_n\}$，$n \in \mathbb{N}$ 为随机变量序列。它们 依分布律收敛（分别） 依分布收敛到随机变量 a 当且仅当 τ_{a_n}（$\boldsymbol{p}$）收敛于 τ_a（$\boldsymbol{p}$），对所有 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}[X]$。

以下结论可由线性直接推出：

命题 2.31 （矩与依分布收敛）。序列 $\{a_n\}$ 依分布律（分别为依分布）收敛于随机变量 a，当且仅当对于所有 $m \in \mathbb{N}$，均有 $M_m(a_n)$ 收敛于 $M_m(a)$，其中 $n \to \infty$。

现在介绍一些非交换概率代数的例子。一个非常一般的例子是：

例 13 （交换子）。给定概率代数$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 的概率子代数$\mathcal{A}$，其 交换子$\mathcal{B}'$，参见定义 2.12，是一个可能非交换的概率子代数，$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$。

注意，交换子 $\mathcal{B}'$ 中的元素仅与$\mathcal{B}$中的所有元素对易，但不一定彼此对易。

例 14（矩阵代数）。设 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为复数项矩阵构成的代数。对于 $\boldsymbol{M} = (M_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，取厄米转置 $\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}} = (M_{ij})^{\mathsf{H}} := (M_{ij}^*)^{\mathsf{T}} = (M_{ji}^*)$ 作为对合，参见例 4。正如例 4 中所述，任意线性泛函都可以写成迹的形式：对于某个 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，$\boldsymbol{M} \mapsto tr(\boldsymbol{V}\boldsymbol{M})$。这便诱导出弗罗贝尼乌斯内积或希尔伯特-施密特内积（以及相应的范数）$\langle \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A} \rangle_F = tr(\boldsymbol{B}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A})$，从而使 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 成为有限维希尔伯特空间。

在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上，有一个规范的弗罗贝尼乌斯态 $\phi_F(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{n} tr\ \boldsymbol{M}$，如注 2.20 所述，其中 $\boldsymbol{V} = \frac{1}{n}\boldsymbol{I}$。这是 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上唯一的迹态，参见定义 2.1。它对应于均匀分布。当 $n > 1$ 时，这个非交换概率代数通常没有特征，即在整个代数上没有定义的样本或观测——$X(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$。

对于自伴 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{sa}$，子代数 $\mathbb{C}[\boldsymbol{A}] \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 在注 2.20 中所讨论的是全矩阵代数的交换子代数。在这个交换子代数上存在特征、样本或观测，即 $\mathsf{X}(\mathbb{C}[\boldsymbol{A}]) \neq \emptyset$。它们是纯态，形式为向量态，如定义2.23中所述，并且态向量是 $\boldsymbol{A}$的归一化特征向量。

这是有限维非交换概率代数的一个典型例子。后文将会看到，任意有限维代数都同构于这类代数的直和。由于代数观点不区分同构的表示，有时会直接在这种忠实表示上进行论证。

注记 2.32（矩阵 Schatten 范数）。考虑例14时，请回忆线性代数中的结论：每个矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 都有一个奇异值分解 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\mathsf{H}}$，其中 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathrm{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 是酉算子（$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{U}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$），而 $\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\varsigma})$ 是由非负奇异值 $\boldsymbol{\varsigma} = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)$组成的对角自伴矩阵，$\varsigma_j \in \mathbb{R}_+$。那么对于任意 $p \geq 1$

$$\|\boldsymbol{B}\|_{Sp} := \left(\sum_{j=1}^{n} \varsigma_j^p\right)^{1/p} = \left(\mathrm{tr}\left[(\boldsymbol{B}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{B})^{p/2}\right]\right)^{1/p} \tag{2.13}$$

是一个酉不变范数，定义在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$上，称为Schatten p-范数。将其推广到 $p = \infty$，定义 $\|\boldsymbol{B}\|_{S\infty} := \|\boldsymbol{B}\|_\infty =$ 最大值$\{\varsigma_j \mid 1 \leq j \leq n\}$，即算子范数，其中 $\boldsymbol{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$，这里 $\mathbb{C}^n$ 配备了典范内积（参见例2）。

注意，*Schatten-2*-范数 $\|\boldsymbol{B}\|_{S2} = \|\boldsymbol{B}\|_F$ 等于 *Frobenius* 范数，它源自希尔伯特-施密特内积，该内积使 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 成为希尔伯特空间。范数 $\|\boldsymbol{B}\|_{S1}$ 也称为迹范数或核范数。作为巴拿赫空间，$(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{Sp})$ 与 $(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{Sq})$ 在 $1/p + 1/q = 1$（扩展到 $p = 1, q = \infty$）下互为对偶。算子范数（也称 *Schatten*-∞-范数）满足 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{B}\|_\infty$，并且在此范数下，$(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ 是一个巴拿赫代数（参见定义 *2.60*）。

命题 2.33（作为矩阵代数元素的密度矩阵）。若 $\boldsymbol{C} \subset \mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$）是一个含幺 *-子代数，并将来自 $\mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$）的态限制在 $\boldsymbol{C}$ 上，则 $\boldsymbol{C}$ 成为一个概率代数。同时，$\boldsymbol{C}$ 是有限维希尔伯特空间（$\mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$），$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_F$）的闭子空间；因此存在正交分解 $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^\perp = \mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$），且 $\boldsymbol{C}$ 本身也是一个希尔伯特空间。因此，任意线性泛函 $\beta \in \boldsymbol{C}^\star$ 都可写为$\beta(\boldsymbol{C}) = \langle \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{C} \rangle_F$，其中 $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}$，且存在某个 $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{C}$。

设 $\boldsymbol{R} \in D(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 是一个密度矩阵或混合态 $\boldsymbol{R}$，如定义 *2.23* 中所述，它定义了一个态 $\varpi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}) := tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{M})$，作用于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。那么存在一个分解 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{R}_\perp \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^\perp$，使得对所有 $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}$ 都有 $\langle \boldsymbol{R}_\perp \mid \boldsymbol{C} \rangle_F = 0$。这意味着，对于任意态 $\varpi_{\boldsymbol{R}} \in S(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$，或任意密度矩阵 $\boldsymbol{R} \in D(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$，都存在一个 $\boldsymbol{R}_C := \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_\perp \in \boldsymbol{C}$，使得对所有 $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}$ 都有 $\varpi_{\boldsymbol{R}}|_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}) = \langle \boldsymbol{R}_C \mid \boldsymbol{C} \rangle_F = tr(\boldsymbol{R}_C\, \boldsymbol{C})$。因此，密度矩阵总可以取为子代数中的一个元素，即 $D(\boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{C}$。

下一个例子与例 14 类似，也是一个可能为无限维的非交换概率代数的典型例子。

例 *15*（有界算子代数）。设 H 是一个内积为 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 的复希尔伯特空间，且 $\xi \in H$ 是一个单位向量。对于 $A \in B(H)$ 中的有界线性映射，可将希尔伯特空间伴随定义为共轭，即 $\langle \phi \mid A\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle A^\dagger \phi \mid \psi \rangle H$。采用这一对合运算，$B(H)$ 成为一个含幺 *-代数。回忆一下，配备满足 $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ 和 $\|A^\dagger A\|_\infty = \|A\|_\infty^2$ 的算子范数 $\|A\|_\infty$ 后，巴拿赫空间 $(B(H), \|\cdot\|_\infty)$ 是一个巴拿赫代数（参见定义 *2.60*）。

设 $A_\xi \subseteq B(H)$ 是一个可能非交换、在伴随映射下封闭的含幺复子代数，且 $\xi \in H$ 是一个单位向量。那么，对于 $A \in A_\xi$，可将态定义为 $\varpi_\xi(A) := \langle \xi \mid A\xi \rangle_{\mathcal{H}}$。这是一个可能非交换的概率代数，而态 ϖ_ξ 是所谓向量态的一个例子，也就是说，是一个纯态（参见注 2.20 和命题 2.48）。向量 ξ 通常称为态（向量）——一般指某个系统的态，该系统的可观测量由 A_ξ 描述——这正是"态"这一名称最初的用法。如果 ξ 是自伴算子 $H \in A_\xi \subseteq B(H)$ 的单位特征向量，那么 $\omega_\xi(A) := \langle \xi \mid A\xi \rangle_{\mathcal{H}}$ 是交换子代数 $\mathbb{C}[H] \subseteq A_\xi \subseteq B(H)$ 上的一个特征。稍后，在 GNS 构造定理 2.53 中将会看到，任意态都可以表示成向量态的形式。

命题 2.34（迹）。若空间 H 是有限维的，则可以定义一种唯一的典范忠实态。回忆线性代数中的知识（例如 [64]）：在有限维情形下，对于线性映射代数 $L(H) = B(H)$，存在一个线性泛函 $\tau \in L(H)^*$，使得对 $A, B \in L(H)$，有 $\tau(AB) = \tau(BA)$，且它在相差一个标量因子的意义下唯一。它自动在酉算子或内自同构下保持不变（参见定义 2.12，正如 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上通常的迹一样），因为对于酉算子 $U \in U(L(H))$，有 $\tau(U\dagger AU) = \tau(UU\dagger A) = \tau(A)$。

若将此泛函 τ 在单位元 $I \in L(H)$ 上归一化为 $\dim H$，则称其为迹 $\mathrm{tr}\ I := \tau(I) = \dim H$。它在 $L(H)$ 上诱导的内积为 $\langle A \mid B \rangle_{HS} := \mathrm{tr}(A^\dagger B)$，即希尔伯特-施密特内积。利用它，可以在 $L(H)$ 上定义一个忠实归一化态，我们称之为弗罗贝尼乌斯态或典范态 ϕ_F，类比例 14，即 $\phi_F(A) := \frac{1}{n}\mathrm{tr}\ A = \frac{1}{n}\langle I \mid A \rangle_{HS}$。它是唯一的迹态（参见定义 2.1），并表示一种均匀分布，其密度算子为 $\frac{1}{n} I$。

注 2.35（矩阵表示）。回顾线性代数中的知识（例如 [64]）：在有限维希尔伯特空间的情形下，若 $\dim H = n$，则可取标准正交基 $B = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subset H$，并定义酉映射 $U^B : H \to \mathbb{C}^n$，使得 $U^B(\psi_j) = \boldsymbol{e}_j$；其中 $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{C}^n$ 是典范单位向量，而 $\mathbb{C}^n$ 配备了典范内积 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_c$，如例 2 所示。众所周知，这会诱导出一个 *-同构 $H^B : B(H) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，连接 $L(H) = B(H)$ 与例 14 中的 $L(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，其定义为 $H^B(A) = M = (M_{ij}) = (\langle \psi_i \mid A\psi_j \rangle_{\mathcal{H}})$。

现在很容易看出，如何将注记 2.32 应用于例 14 的有限维情形，即例 15：

注记 2.36 (算子 Schatten 范数)。若 H 是有限维希尔伯特空间，则对于每个算子 $B \in B(H) = L(H)$ 以及任意 $p \geq 1$，都可以定义酉不变的 Schatten-p-范数

$$\|B\|_{Sp} := \left(\mathrm{tr}\left[(B^\dagger B)^{p/2}\right]\right)^{1/p}, \tag{2.14}$$

其中 $(B^\dagger B)^{p/2}$ 必须通过函数演算计算（参见命题 2.77）。

将其扩展到 $p = \infty$，令 $\|B\|_{S\infty} := \|B\|_\infty$，即例 15 中的算子范数。注意，Schatten-2-范数 $\|B\|_{S2} = \|B\|_{HS}$ 等于希尔伯特-施密特内积所诱导的范数，因此 $L(H)$ 成为一个希尔伯特空间。范数 $\|B\|_{S1}$ 又称迹范数或核范数。作为巴拿赫空间，$(L(H)\ \|\cdot\|_{Sp})$ 和 $(L(H)\ \|\cdot\|_{Sq})$ 在 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 下互为对偶。赋予算子范数或 Schatten-∞-范数后，$(B(H)\ \|\cdot\|_\infty)$ 是一个巴拿赫代数（参见定义 2.60）；作为巴拿赫空间，它与巴拿赫空间 $(B(H)\ \|\cdot\|_{S1})$ 的对偶同构。

利用酉算子 $\boldsymbol{U}^{B}$ 以及 *-同构 $\boldsymbol{H}^{B}$（如上文备注 2.35中所定义），现在不难将备注 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中由例 14引出的关于可观测量、定义 2.21中投影值测度、定义 2.23中密度、命题 2.24中所有密度的集合、命题2.33中代数里的密度，以及命题 2.25 中的投影格的相关表述，转换到有限维希尔伯特空间上算子代数 $\mathcal{L}(\mathcal{H})=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的情形。这里不逐一详述，主要要点汇总如下：

推论 2.37（密度算子与投影格）。 设 H 是有限维希尔伯特空间，满足 维数$H=n$，并考虑含幺 *-代数 $L(H)=B(H)$。由于 $L(H)$ 是一个配备希尔伯特-施密特内积的希尔伯特空间，任意态 $\varpi_R\in\mathsf{S}(L(H))$都可以表示为一个密度算子或密度矩阵 $R\in\mathrm{D}(L(H))=\{R\in L(H)_+\mid \operatorname{tr}R=1\}$，其形式为 $\varpi_R(A)=\langle R\mid A\rangle_{HS}=\operatorname{tr}(RA)$，且它们与态集之间存在双射对应。

回顾算子 $A\in L(H)$ 的秩，其定义为 秩 $A=$维数 $A(H)$ =维数$(\operatorname{im}A)$；将秩为 r 的密度算子记为 $\mathrm{D}(L(H))_r$，则有如下不交并

$$\mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))=\biguplus_{r=1}^{n}\mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))_r.$$

$\mathrm{D}(L(H))$ 的极点是秩一算子

$$\operatorname{ext}(\mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))=\mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))_1=\{\langle x\mid\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\,x\mid x\in\mathcal{H},\langle x\mid x\rangle_{\mathcal{H}}=1\},$$

其中 $\left(\langle x\mid\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\,x\right)\colon\ H\ni y\mapsto\langle x\mid y\rangle_{\mathcal{H}}\,x\in H$。它们也称为纯态或向量态，所有其他态则称为混合态；根据克雷因-米尔曼定理，它们都是向量态或纯态的凸组合。同样，单位向量 $x\in H$ 通常称为“态”或“态向量”，这实际上是该术语最初的用法。

纯态$\mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))_1\subset\mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 是秩为一的正交投影，并且是投影格 $\mathbf{L}(\mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))$ 中$\mathcal{L}(\mathcal{H})$的原子，参见命题 *2.25*。每个秩为 $m\le n$ 的投影都可以表示为 m 个属于$\mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))_1$中的投影/纯态之和。

任何阿贝尔子 *-代数 $C\subsetneq L(H)$（例如由投影值测度生成的子代数）都可以嵌入或扩展为一个极大阿贝尔子代数（*MASA*）。当且仅当这样的阿贝尔子 *-代数 C 酉等价于对角矩阵代数 $\mathbb{D}_n(\mathbb{C})\subset\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$（参见例 *4*）时，它才是 *MASA*；也就是说，存在一个酉算子$V\colon\ H\to\mathbb{C}^n$，使得$VCV^{\dagger}=\mathbb{D}_n(\mathbb{C})$。

在进入下一节 2.2中表示这一主题之前，（我们已在注释 2.35中初步介绍过这一主题），不妨先看看如何利用群、张量积等其他数学结构来构造含幺 *-代数的更多例子。

例 16（群代数）。 设 G 是一个离散群，其群运算为 $g\boxtimes h\in G$，其中 g、$h\in G$。考虑 G 上的自由向量空间 $\mathbb{C}G$，即由群元素 $g_j\in G$ 作为基、所有复系数有限形式线性组合构成的集合，其中一般元素形如 $\phi=\sum_{j=1}^{k}z_jg_j$，满足 $z_j\in\mathbb{C}$ 和 $g_j\in G$。在此向量空间上定义对合 $\natural$：对于这样的 ϕ，令其为表达式 $\phi^{\natural}=\sum_{j=1}^{k}z_j^{*}g_j^{-1}$；并定义乘积：对于 $\phi_1=\sum_{i=1}^{k}z_{1i}g_i$、$\phi_2=\sum_{j=1}^{\ell}z_{2j}g_j\in\mathbb{C}G$，令

$$\phi_1\phi_2:=\sum_{i=1,j=1}^{k,\ell}z_{1i}z_{2j}(g_i\boxtimes g_j).$$

这使得 $\mathbb{C}G$ 成为群 G 的群代数 。注意，乘积也可以写成卷积的形式。复数 $\mathbb{C}$ 和群 G 都自然地嵌入到 $\mathbb{C}G$ 中。代数的单位元与群单位元$e \in G$相同，而态可以取为 $\varpi_G(\phi) = \varpi_G(\sum_{j=1}^{k} z_j g_j) = \sum_{g_j=e} z_j$。于是这是一个概率代数。

这是一个有界随机变量的代数。对于有限群 G，这是一个有限维代数；对于交换群 G，这是一个交换代数。

例 17 （张量矩阵代数）。 设 (A_c, ϖ_c)是任意一个带有对合的概率代数，对合记作 $\sharp$ —— 即分量所对应的概率代数。现在考虑 $\mathbb{M}_n(A_c)$，即由 A_c 中的元素构成的矩阵集合。显然，按分量定义加法和复数标量乘法。两个元素的乘法按照复数项矩阵代数的矩阵乘法规则进行：设 $\boldsymbol{X} = (X_{ik})$ 、$\boldsymbol{Y} = (Y_{kj}) \in \mathbb{M}_n(A_c)$，其中 X_{ik}、$Y_{kj} \in A_c$，$i, j, k = 1 \ldots n$，则它们的乘积为

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = (Z_{ij}) = (\sum_k X_{ik} Y_{kj}),$$

如果 $\mathcal{A}_c$ 不是交换的，求和项中因子的顺序就很重要。注意，这种构造也可以记作 $\mathcal{A}_c \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，即张量积代数，稍后将在定义 2.71中予以说明。采用这种观点时，一般元素可表示为 $\boldsymbol{Z} = \sum_k Z_k \otimes \boldsymbol{Z}_k$，其中 $Z_k \in \mathcal{A}_c$ 且 $\boldsymbol{Z}_k \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。

将 $\mathbb{M}_n(A_c)$ 上的对合 $\flat$ 取为某个$\boldsymbol{Z} \in \mathbb{M}_n(A_c)$

$$\flat : \mathbb{M}_n(\mathcal{A}_c) \ni \boldsymbol{Z} = (Z_{ij}) \mapsto \boldsymbol{Z}^{\flat} := (Z_{ji}^{\sharp}) \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A}_c),$$

这与例 4中定义共轭H的做法非常相似，但此处使用 $\sharp$ 代替复共轭 $*$。

为了定义一个态，注意到可以构造一个“均值矩阵”，即对于$\boldsymbol{Z} = (Z^{ij}) \in \mathbb{M}_n(A_c)$，计算$\boldsymbol{Z}^{\varpi_c} := (\varpi_c(Z^{ij})) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，即“约化态”或“偏迹”。在上文的表示$\boldsymbol{Z} = \sum_k Z_k \otimes \boldsymbol{Z}_k \in A_c \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中，这个偏迹为$\boldsymbol{Z}^{\varpi_c} = \sum_k \varpi_c(Z_k) \boldsymbol{Z}_k \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。

如例 14，设 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个自伴正定且迹为单位的矩阵。那么，对于 $Z \in \mathbb{M}_n(A_c)$，_可以将一个态定义为 $\varpi_{(V,\varpi_c)}(Z) := tr(\boldsymbol{V} Z^{\varpi_c}) = \varpi_V(Z^{\varpi_c})$。这是一个非交换概率代数。当 $n > 1$ 时，它通常没有特征，也就是说没有样本或观测。对于 $n = 1$，这只是分量代数 A_c；而对于 $A_c = \mathbb{C}$，这就是例 14。

这个例子本质上是某个未指明的代数 A_c 与$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$的张量积。另一种常见的构造是，取例 2 或例 7–11 中的某个“函数代数”，记作 (F(X) $\varpi_{\mathcal{F}}$)，再与某个未指明的概率代数 (A_v, ϖ_v) 作张量积（参见定义 2.71 ），由此得到取值于 A_v 中的向量或函数。在上文提到的例子中，概率代数 A_v 是 $\mathbb{C}$ （参见例 1）。

例 18 （代数随机场）。 这里以例 11 中的交换代数 $\mathrm{C}(\mathcal{G}, \mathbb{C})$为例，并定义新的代数 $\mathrm{C}(\mathcal{G}, \mathcal{A}_v)$，其元素是取值于 $\mathcal{A}_v$ 的连续函数，代数运算逐点进行。如果$\mathcal{A}_v$ 是交换的，那么这是一个阿贝尔代数；否则就不是。乘法单位元是取常值 $1_{\mathcal{A}_v}$ 的函数，而对合也通过逐点使用$\mathcal{A}_v$ 中的对合以及复共轭来定义。与例 17中引入均值矩阵的方式一样

或者均值矩阵，因此这里也可以定义一个“均值函数”。对于典型元素 $\varphi \in C(G, A_v)$，写作 $\varphi : G \ni x \mapsto \varphi(x) = a(x) \in A_v$，则“均值函数”同样只是应用约化态：$\varphi^{\varpi_v} : G \ni x \mapsto \varphi^{\varpi_v}(a(x)) = \varpi_v(a(x)) \in \mathbb{C}$。这意味着，当 $\bar{G} \subset \mathbb{R}^d$ 是某个空间区域时，可以将 $\varphi \in C(G, A_v)$ 解释为取值于 A_v 的随机场，并将 $\varphi^{\varpi_v} \in C(G\ \mathbb{C})$ 视为其均值场。总均值于是按照 $\varpi_G(\varphi^{\varpi_v}) = \mu(G)^{-1} \int G\ \varphi^{\varpi_v}(x)\ \mu(d\bar{x})$ 计算，参见例 11。

注意到，这一构造也可以记作 $C(G\ \mathbb{C}) \otimes A_v$，即张量积代数，稍后将在定义 2.71 中对此进行解释。一般元素可表示为 $\varphi = \sum_k \phi_k \otimes a_k$，其中 $\phi_k \in C(G\ \mathbb{C})$ 且 $a_k \in A_v$；上文所述的偏迹，即约化态，产生均值函数，其表示为 $\varphi^{\varpi_v} = \sum_k \phi_k \otimes \varpi_v(a_k) = \sum_k \varpi_v(a_k)\, \phi_k \in C(G\ \mathbb{C})$。

狄拉克的狄拉克括号记号： 由狄拉克推广 1939 [52], 这一记号已经广泛应用于与量子行为相关的问题中，因此有必要在此简要提及，因为后文也将使用它。设 $\mathcal{V}$ 为一个复向量空间，且 $\mathcal{V}^*$ 为其对偶空间。对于 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}^*$，对偶配对记作$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v} \rangle := \boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})$，这是一种双线性形式，即对两个自变量都具有线性。

狄拉克提出，对向量 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ 使用一种称为“右矢”的符号 $|\boldsymbol{v}\rangle$，以表示该向量 $|\boldsymbol{v}\rangle \in \mathcal{V}$，甚至对一般向量仅写作 $|\rangle \in \mathcal{V}$，尽管这种用法很少见。一个优点是，右矢内部可以使用任意标签，例如 $|007\rangle$ $|+\rangle$ $|01\rangle$ $|\%\ *\&\rangle$等，而不必使用 $\boldsymbol{v}_{007}, \boldsymbol{v}_{+}, \ldots$。外围的右矢符号清楚地表明，这是 $\mathcal{V}$ 的一个元素。

右矢是单词“bra-c-ket”的后半部分，而其前半部分“左矢”写作 $\langle \boldsymbol{x}|$，它是一个线性形式 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}^*$，即 $\mathcal{V}^* \ni \boldsymbol{x} := \langle \boldsymbol{x}| := \langle \boldsymbol{x}|(\cdot) := \langle \boldsymbol{x}|\cdot\rangle$。它可以与右矢组合，形成“狄拉克括号” $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\rangle$，类似于上文的对偶配对，但有所不同，因为左矢以及整个“狄拉克括号”对第一个自变量是反线性的：对于 $\langle \boldsymbol{z}| = \langle \boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y}|$，其中 $\langle \boldsymbol{x}|$ 与 $\langle \boldsymbol{y}|$ 来自底空间 $\mathcal{V}$，有$\langle \boldsymbol{z}| = \langle \boldsymbol{x}| - \mathrm{i}\langle \boldsymbol{y}|$，因此 $\langle \boldsymbol{z}|\boldsymbol{v}\rangle$ 是一个半双线性形式，对第二个自变量线性、对第一个自变量反线性。注意，当左矢与右矢组合成狄拉克括号时，竖线通常只写一次。

若 H 是一个希尔伯特空间，其半线性内积为 $\mathrm{a}|\mathrm{b}$，其中 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{H}$，那么显然 H 与其对偶 H^* 通过反线性的黎斯映射 $R : \mathrm{H} \ni \mathrm{a} \mapsto \mathrm{a}| := R\mathrm{a} \in \mathrm{H}^*$ 等距同构，从而得到内积 $\mathrm{a}|\mathrm{b} := R\mathrm{a}, \mathrm{b}$。因此，左矢是一个线性映射：$R\mathrm{a} = \mathrm{a}| = \mathrm{a}|\cdot \in \mathrm{L}(\mathrm{H}\ \mathbb{C}) = \mathrm{H}^*$。由此可知，另一个有用的记号是张量积 $|\mathrm{b}\ \mathrm{a}| = |\mathrm{b} \otimes \mathrm{a}| \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$，可写作 $\mathrm{b} \otimes R\mathrm{a}$，它是沿 $|\mathrm{a}$ 投影到张成空间 $\mathrm{span}\{|\mathrm{b}\}$ 上的投影：

$$|b\rangle\langle a| : \mathcal{H} \ni |x\rangle \mapsto \langle a|x\rangle\ |b\rangle \in \mathcal{H}.$$

这种记号通常可以推广到各种张量积。设 $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{H}$，并考虑 H 与自身的张量积，其中初等张量通常写作 $\mathrm{a} \otimes \mathrm{b} \in \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\otimes 2}$。在狄拉克记号中，可以简写为$|\mathrm{a}\ |\mathrm{b} := |\mathrm{a} \otimes |\mathrm{b} = \mathrm{a} \otimes \mathrm{b}$，甚至写成 $|\mathrm{ab} := |\mathrm{a}\ |\mathrm{b}$。例如，考察 $\mathrm{a} \otimes \mathrm{b} \otimes \mathrm{c} \in \mathrm{H}^{\otimes 3}$，它便简写为 $|\mathrm{abc} := |\mathrm{a}\ |\mathrm{b}\ |\mathrm{c} \in \mathrm{H}^{\otimes 3}$。

设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是一个线性映射。那么，对于 c 与 $y = Ax$之间的内积，可以写作：

$$\langle c|y\rangle = \langle c \mid Ax\rangle = \langle c|\, A\, |x\rangle = \langle A^\dagger c \mid x\rangle\,,$$

其中，$A^\dagger \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$ 是 A的伴随。对于上面的特殊情况，即 $A = |\mathrm{b}\ \mathrm{a}|$（其中 $A^\dagger = |\mathrm{a}\ \mathrm{b}|$），令 $\mathrm{y} = A\mathrm{x} = \mathrm{a}|\mathrm{x}\ |\mathrm{b}$，可得：$\mathrm{c}|\mathrm{y} = \mathrm{c}|(|\mathrm{b}\ \mathrm{a}|)\ |\mathrm{x} = \mathrm{c}|\mathrm{b}\ \mathrm{a}|\mathrm{x}$，这展示了这种记法的灵活性与实用性。

在有限维复希尔伯特空间 $\mathbb{C}^n$ 中——其中一个元素 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ 也可以记作 $|\boldsymbol{a}\rangle \in \mathbb{C}^n$ ——对于典范内积 $\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle_c = \boldsymbol{a}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{b}$，里斯映射可以写作 $R: \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}^{\mathsf{H}}$。张量积 $|\boldsymbol{b}\rangle\langle \boldsymbol{a}|$ 等价于表达式 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathsf{H}}: \boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{a}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$。典范基 $\boldsymbol{e}_i$ 也可以简写为 $\boldsymbol{e}_i = |i\rangle$。矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 可以写作 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})_{i,j=1}^n = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\,|i\rangle\langle j|$。

2.2 表示与希尔伯特空间

表示的概念，即将代数$\mathcal{A}$ 表示为某个向量空间$\mathcal{H}$上的线性算子代数$\mathcal{L}(\mathcal{H})$的子代数，在代数概率中具有重要意义。

一般表示：

定义 2.38 (表示)。 设 H 为一个向量空间，$L(H)$ 为 H 上线性映射（算子）的代数。代数 A 的一个表示是将 A 映射到 $L(H)$中的代数同态Υ，即 $A \ni a \mapsto \Upsilon(a) =: \Upsilon_a \in L(H)$。这意味着 $\Upsilon: A \to L(H)$是线性的，并且 $A \ni ab \mapsto \Upsilon_{ab} = \Upsilon_a\Upsilon_b \in L(H)$。子空间 $\operatorname{im}\Upsilon = \Upsilon(A) \subseteq L(H)$ 是 $L(H)$的一个子代数。

对于一个 含幺代数 A，可以得到 $\Upsilon(1) = \Upsilon_1$ 必须在$\operatorname{im}\Upsilon$上像单位元一样作用 .

如果 $\mathcal{A}$是一个 *-代数，且 $\mathcal{H}$ 是一个内积（预希尔伯特）空间（参见例 15），那么 Υ 是一个 *-表示，当它是一个 *-同态时亦然；也就是说，若对所有 $a \in A$ 都有 $\Upsilon(a^*) = \Upsilon_{a^*} = \Upsilon_a^\dagger = \Upsilon(a)^\dagger$，其中 $\Upsilon_{\dagger a} \in L(H)$ 是 Υ_a 的伴随。

若 Υ 是单射，则称该表示为忠实表示。在这种情况下，子代数$\operatorname{im}\Upsilon = \Upsilon(A) \subseteq L(H)$ 与 A 同构。

我们已经遇到过观测或样本，即映到 $\mathbb{C}$ 的非零 *-同态或特征，见定义 2.6。这些是一维表示。其中最自然的一种是正则表示：

定义 2.39 （正则表示）。 设 A 为一个代数。对每个 $a \in A$，定义线性映射 $\Upsilon_a \in L(A)$，对所有 $b \in A$，规定 $\Upsilon_a b := ab$。称同态 $\Upsilon: A \ni a \mapsto \Upsilon(a) = \Upsilon_a \in L(A)$ 为（左）正则表示。

作为一个具体例子，可以将例4 视为例2的正则表示。定义2.39中的正则表示对于含幺代数是忠实的 [55]:

定理2.40 (凯莱)。 每个含幺代数$\mathcal{A}$ 都有忠实表示，例如可通过定义 Υ 中的正则表示得到*2.39*。换句话说，这意味着$\mathcal{A}$与子代数$\operatorname{im}\Upsilon = \Upsilon(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$同构。

证明。 若对于a，$b \in \mathcal{A}$，正则表示（定义2.39）满足 $\Upsilon_a = \Upsilon_b$属于$\mathcal{L}(\mathcal{A})$，那么对于含幺代数 $\Upsilon_a 1 = a1 = a = \Upsilon_b 1 = b$，因此$a = b$；这就证明了正则表示是忠实的。 □

由于此处主要关注 *-表示，所以下文将重点讨论底层向量空间$\mathcal{H}$ 可赋予希尔伯特空间结构的情形，参见定义2.38。为排除许多近乎病态的情形，出于简便考虑，也可以假设该代数是巴拿赫 *-代数（参见定义2.60）。

命题 2.41 (真表示或非退化表示)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫 *-代数，$\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 $\Upsilon: \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 *-表示。那么以下条件等价（参见 *[138]*）：

- 张成空间$\{\Upsilon_a\xi \mid a \in A,\ \xi \in H\}$ 在 H 中稠密。
- 对于任意非零的 $\xi \in H$，都存在一个 $a \in A$ 中的 a，使得 $\Upsilon_a\xi \neq 0$。

如果满足其中任一条件，则称表示 $\Upsilon : A \to L(H)$ 是适当的或非退化。——

在接下来定理 2.53中的 GNS 构造里，态将成为由循环分离向量定义的纯态，因此我们为任意表示定义如下：

定义 *2.42*（循环分离向量）。命题 *2.41* 中的表示 $\Upsilon : A \to B(H)$，其中 H 是希尔伯特空间，称为循环表示（参见例 *15*），当且仅当存在一个单位向量 $\xi \in H$（也称为循环向量），使得轨道 $\{\Upsilon(a)\xi \mid a \in A\} \subset H$ 在 H 中稠密。

单位向量 $\xi \in H$ 称为表示 $\Upsilon : A \to B(H)$当且仅当 对于所有 $a \in A$，若 $\Upsilon(a)\xi = 0$，则 $a = 0$。

注意，循环表示是适当的或非退化的，并且观测（如果存在）是循环的。

定义 *2.43*（不可约表示）。给定命题 *2.41* 中的表示 $\Upsilon : A \to B(H)$，其中 H 是希尔伯特空间，若闭子空间 $K \subset H$ 满足对于所有 $a \in A$，$\Upsilon(a)(K) \subseteq K$，则称 K 是表示 Υ 的不变子空间。在这种情况下，限制 $\Upsilon(a)|_K \in B(K)$ 给出表示 Υ 在希尔伯特空间 K 上的一个子表示。容易看出，正交补 $K^\perp \subset H$ 也是表示 Υ 的不变子空间，因此 $\Upsilon = \Upsilon(a)|_K \oplus \Upsilon(a)|_{K^\perp}$，即表示 Υ 是两个子表示的直和（参见定义 *2.70*）。

如果表示 $\Upsilon : A \to B(H)$ 仅有的不变子空间是 $\{0\}$ 和 H，则该表示称为不可约；否则称为可约。

显然，循环表示（参见定义 2.42）是不可约的。事实上，有 [94]:

定理 2.44（舒尔引理）。对于表示 $\Upsilon : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如命题 *2.41* 中所述，其中 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，不可约性（定义 *2.43*）等价于下列每一陈述：

- 任一单位向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 都是 循环向量，对于 Υ（参见定义 *2.42*）；
- $\Upsilon(\mathcal{A})' = \mathbb{C}[I]$——交换子 $\Upsilon(\mathcal{A})'$（定义 *2.12*），即像 $\Upsilon(\mathcal{A})$ 的交换子，仅为单位元的倍数，这称为 舒尔引理。

Irreducible 表示是一般表示的基本构件 s:

命题 2.45（循环表示之和）。设 $\mathcal{A}$ 为巴拿赫 *-代数（参见定义 *2.60*），$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，并假设 $\Upsilon : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为一个正常的、非退化 *-表示，参见命题 *2.41*。则（参见 *[138]*）它是循环表示的 直和（参见定义 *2.43*），参见定义 *2.42*。

到目前为止，任何有限维代数 $\mathcal{A}$ 显然都同构于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 的一个子代数（见例 14）。

注记2.46（矩阵代数表示）。通常，人们从正则表示定义 *2.39*入手。接下来归结为选择一个基，而一般来说并不存在规范的选择方式。适用于任意代数的一种方法，是使用定义 *2.14*中的结构常数。但在这里，我们将局限于更受限制的情形，即具有底层希尔伯特空间结构的情形，另见例 *15* 以及由此得到的注记 *2.35*。

还有其他方法可以得到矩阵表示 [138]，但这些方法与稍后将在第 2.3 节讨论的结构定理相关。在将上述内容进一步限定到概率代数的情形之前，值得仔细考察态 $\mathsf{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^{+}$。

概率代数的态：在先前的表示结果中，定理 2.40 与注记 2.46，该表示对任意代数均有效，独立于态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$，而该态定义概率。

为了在希尔伯特空间上得到顾及这一点的表示，必须考虑给定的态 ϖ，我们接下来即转向它。考虑对偶空间 $\mathcal{A}^{\star}$（即 $\mathcal{A}$ 的对偶空间）。任意 $\beta \in \mathcal{A}^{\star}$ 定义半双线性形式 b，其定义在 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 上——对第二变元为线性、对第一变元为反线性——并定义线性映射 $B: \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\star}$：

$$\forall a, b \in \mathcal{A}: \; b(a,b) := \beta(a^{\star} b) = \langle \beta, a^{\star} b \rangle =: \langle B a^{\star}, b \rangle \,, \tag{2.15}$$

其中可以回顾，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathcal{A}^{\star} \times \mathcal{A}$ 上的对偶括号。

对于这样的映射 $B \in \mathsf{L}(\mathsf{A}, \mathsf{A}^{\star})$，在自反情形下——其中 $(\mathsf{A}^{\star})^{\star} \cong \mathsf{A}$，如同有限维代数那样——可以将转置或对偶映射 $B^{*} \in \mathsf{L}((\mathsf{A}^{\star})^{\star}, \mathsf{A}^{\star})$ 视为映射 $B^{*} \in \mathsf{L}(\mathsf{A}, \mathsf{A}^{\star}) \cong \mathsf{L}((\mathsf{A}^{\star})^{\star}, \mathsf{A}^{\star})$。映射 $B \in \mathsf{L}(\mathsf{A}, \mathsf{A}^{\star})$ 称为自对偶（有时称为自伴），如果 $B^{*} = B$。作为对定义 2.1 的补充，由此引出

定义2.47。 若 B 是自对偶（或自伴）的，即 $\langle B a^{\star}, b \rangle = \langle B b, a^{\star} \rangle = \langle B b^{\star}, a \rangle^{*}$，则 b 和 β 称为自伴（厄米）的，自伴泛函记作 $A^{sa} \subset A^{\star}$。这意味着，对于自伴的 a，$\beta(a)$ 是实数；对于 $\beta \in A^{sa}$，有 $\beta(A_{sa}) \subseteq \mathbb{R}$。

对于 $\beta \in A^{\star}$，可以定义一个对合 $\natural: \beta \mapsto \beta^{\natural}$，使得对于 $a \in A$，有 $\beta^{\natural}(a) := \beta(a^{\star})^{*}$。对于自伴的 $\beta \in A^{sa}$，有 $\beta^{\natural} = \beta$。

若自对偶的 a B 是正的（$\langle B a^{\star}, a \rangle \geq 0$），则 b 和 $\beta \in A^{sa}$也具有同样性质；若 B 是正定的（对于 $a \neq 0$，$\langle B a^{\star}, a \rangle > 0$），则 b 和 β也具有同样性质。

所有此类正 $\beta \in \mathcal{A}^{sa} \subseteq \mathcal{A}^{\star}$ 构成一个凸锥，即对偶锥 $\mathcal{A}^{+} := \{\beta \in \mathcal{A}^{sa} \,|\, \langle \beta, a \rangle = \beta(a) \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}+\}$，它与正锥 $\mathcal{A}+$对偶，参见定义 *2.12*。

回顾一下，参见定义 *2.1*，自伴且为正的 $\beta \in A^{\star}$ 称为态；如果它还正定，则 β 也称为忠实；若归一化，则 $\beta(1) = 1$。

请注意，式（2.15）中的半双线性形式定义有时会采用相反的约定，即对第一个参数线性，对第二个参数反线性。

命题 2.48（态集的几何）。自伴泛函 $\mathcal{A}^{sa} \subset \mathcal{A}^{\star}$构成一个实向量空间，并且有 $\mathcal{A}^{\star} = \mathcal{A}^{sa} \oplus \mathrm{i}\mathcal{A}^{sa}$ 作为 $\mathbb{R}$上的直和，以及 $\mathcal{A}^{\star} =$ 张成空间 $\mathbb{C}\mathcal{A}^{sa}$，也就是说，任意泛函都是两个自伴泛函的复线性组合，参见定义 *2.12*。

对偶正锥 $A^{+} \subset A^{\star}$ 是生成锥，即 $A^{sa} = A^{+} - A^{+}$ 在 $\mathbb{R}$ 上，且 $A^{\star} = A^{+} - A^{+}$ 在 $\mathbb{C}$上。这意味着，任意元素 $\alpha \in A^{sa}$ 都可以表示为两个正元之差（对应于测度的若尔当分解）：$\alpha = \phi - \psi$，其中 $\phi, \psi \in A^{+}$；因此，任意泛函 $\beta \in A^{\star}$ 都可以表示为 A^{+}中四个正元的复线性组合，参见定义 *2.12*。

满足 $\beta(1) = \langle \beta, 1 \rangle = 1$ 的元素 $\beta \in A^{\star}$ 构成一个超平面 $T \subset A^{\star}$。因此，归一化态集 $S(A) = T \cap A^{+}$ 是一个位于线性流形 T 中的凸集。它的极点称为纯态，其他所有态称为混合态。向量态（参见例 *15*）是纯态；若 $X(A)$ 非空，则特征 $\omega \in X(A) \subset S(A)$ 也是纯态。

关于态集几何的更多信息，请参见 [17]。接下来要做的是定义抽象代数 $\mathcal{A}$ 的迹泛函：

命题 2.49 （$\mathcal{A}$上的迹）。 若 $\mathcal{A}$ 是有限维代数，则有$\mathcal{A} = \mathrm{B}(\mathcal{A})$，因为由定理 *2.40* 可见 $\mathcal{A}$ 同构于$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathcal{A})$ 的一个子代数，即有限维空间上的线性映射，因为在有限维空间上所有线性映射都是有界且连续的 *[120]*。

现在，由与命题 *2.34* 中相同的论证可知，在 $L(A) = B(A)$ 上存在唯一的迹线性泛函 tr，并归一化为 $tr(I_{\mathcal{A}}) = \dim A$。可借助定义 *2.39* 中的忠实正则表示 $\Upsilon : A \to L(A)$，利用该泛函来定义 A 上的迹泛函 $tr_{\mathcal{A}} \in A^{+}$，即令 $tr_{\mathcal{A}}(a) := tr\ \Upsilon_a$，或更形式地，$tr_{\mathcal{A}} := tr \circ \Upsilon$。下文假定 $1/(\dim A)\ tr_{\mathcal{A}} \in S(A)$ 是非退化的（参见注 *2.15*），或相应地为一个忠实态（参见命题 *2.16*）。

对于含幺代数，有 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(1) = \mathrm{tr}(\Upsilon_1) = \mathrm{tr}(I) =$ 维数A。因而，根据注释 *2.2*，对于 *-代数 A，$\phi_c := {}^{1}/_{(\text{维数}\mathcal{A})}\ \mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \in \mathsf{S}(A)$ 是 A 上的忠实典范态。

伴随希尔伯特空间表示： 注释 2.35 和注释 2.46说明了如何将有限维代数映射到矩阵代数。要为含幺 *-代数 $\mathcal{A}$构造一个 *-表示，可以通过希尔伯特空间构造及其相应的表示来实现，这种构造称为 GNS（Gel'fand - Neumark (Naĭmark)) - 西格尔）构造 [63, 130, 54]。

命题 2.50 （伴随希尔伯特空间）。 给定一个概率代数 $(\mathcal{A}\ \varpi)$ 及其忠实态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$，在 $\mathcal{A}$ 上定义一个正定半双线性形式，如式（*2.15*）所示，记作 $\langle a \mid b\rangle_2 := \varpi(a^{\star}b)$，它是一个 内积。

在此内积下，A 成为一个预希尔伯特空间，其希尔伯特空间完备化记为 $H_{\varpi} := \mathrm{L}_2(A\ \varpi)$；如果根据语境可以明确所指的态 $\varpi \in \mathsf{S}(A)$，也可简写为 $\mathscr{H} = \mathrm{L}_2(A)$。这是与概率代数 $(A\ \varpi)$ 相关联的希尔伯特空间。相应的希尔伯特范数记为 $\|a\|_2 := \sqrt{\langle a \mid a\rangle_2}$。

$\tilde{}$定义 *2.12* 中的直和$\bar{A} = A \oplus A$ 变为正交直和，$\tilde{}$正如对于 $A = \mathbb{C}[1]$，$\tilde{a} \in A$，有 $\langle \bar{1} \mid \tilde{a}\rangle_2 := \varpi(1\tilde{a}) = \varpi(\tilde{a}) = 0$。该正交$\widetilde{}$分解可以扩展为 $\mathscr{H} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$，其中 $\mathscr{H} = A = \mathbb{C}[1]$，而 $\bar{\mathscr{H}}$是 A 的 $\tilde{}$完备化。

如果 $\mathcal{A}$ 是有限维的，那么它在所有向量豪斯多夫拓扑下都已完备*[120]*，因此在这种情况下有 $\mathscr{H} = \mathcal{A}$。一般而言，$\mathcal{A} \subseteq \mathscr{H}$是一个稠密子空间，而态 ϖ 可通过连续性延拓到 $\mathscr{H}$。

有限维含幺 *-代数上的一个忠实（但未经归一化的）态$\mathcal{A}$ 是迹泛函 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}^{+}$，它在命题 2.49 中引入。它可用于在 $\mathcal{A}$ 上引入另一种内积：

注记 2.51 （典范关联有限维希尔伯特空间）。对于有限维 *-代数$\mathcal{A}$，根据命题 *2.34*，$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ 上的迹诱导了Hilbert-Schmidt 内积 $\langle\cdot\ \mid\cdot\rangle_{HS}$ 于 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$上。经由迹 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}^{+}$（命题 *2.49* 中针对此有限维情形所考虑者），可引入一个典范内积于 $\mathcal{A}$ 上：

$$\forall a, b \in \mathcal{A} : \ \langle a \mid b\rangle_c := \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(a^{\star}b),$$

使有限维含幺 *-代数 $\mathcal{A}$ 成为一个希尔伯特空间 $(\mathcal{A},\langle\cdot\mid\cdot\rangle_c)$，并将其记为 $\mathcal{H}_c$。于是正则表示（定义 2.39）满足如下关系：对所有 $a,b\in\mathcal{H}_c$,

$$\langle a\mid b\rangle_c=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(a^\star b)=\mathrm{tr}(\Upsilon_{a^\star}\Upsilon_b)=\mathrm{tr}(\Upsilon_a^\dagger\Upsilon_b)=\langle\Upsilon_a\mid\Upsilon_b\rangle_{HS}\,,$$

其中伴随 $\Upsilon_a^\dagger$ 是相对于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_c)$而言的。这意味着 Υ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_c$ 与希尔伯特子空间 $\Upsilon(\mathcal{A})$ 之间的酉映射，后者属于 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ 且配有希尔伯特-施密特内积 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_{HS}$)，参见命题 2.34。

命题 ϕ_c 2.49 中定义的连通规范弗罗贝尼乌斯态在$\mathcal{A}$ 上显然是忠实态，因此命题 2.50 中的所有结论都适用于 $(\mathcal{A}\ \phi_c)$。

不出所料，注 2.36 对例15和注2.32对例14也有适用于有限维 *-代数的版本：

注 2.52（代数 Schatten 范数）。若 $\mathcal{A}$ 是有限维 *-代数，根据命题 2.49，对每个 $b\in\mathcal{A}$ 以及任意 $p\geq1$，都可以定义 Schatten-p-范数

$$\|b\|_{Sp}:=\left(\mathrm{tr}\left[(\Upsilon_{b^\star}\Upsilon_b)^{p/2}\right]\right)^{1/p}=\left(\mathrm{tr}\left[(\Upsilon_b^\dagger\Upsilon_b)^{p/2}\right]\right)^{1/p},\tag{2.16}$$

并将其扩展到 $p=\infty$，定义 $\|b\|_{S\infty}:=\|\Upsilon_b\|_\infty$，即算子范数为 $\Upsilon_b\in\mathcal{B}(\mathcal{A})=\mathcal{L}(\mathcal{A})$。注意，*Schatten-2*-范数 $\|b\|_{S2}=\|b\|_c$ 等于备注2.51中的典范内积所诱导的范数。

范数 $\|b\|_{S1}$ 也称为迹范数或核范数。作为 *Banach* 空间，$(\mathcal{A}\ \|\cdot\|_{Sp})$ 和 $(\mathcal{A}\ \|\cdot\|_{Sq})$ 在 $1/p+1/q=1$ 下互为对偶。赋予算子范数或 *Schatten-*∞-范数后，$(\mathcal{A}\ \|\cdot\|_\infty)$ 是一个巴拿赫代数（参见定义 2.60）。

设 $(\mathcal{A}\ \alpha)$ 是一个概率代数。为了得到忠实的希尔伯特空间表示，需要一个忠实态。为此，定义

$$\varpi=\begin{cases}\alpha & \text{if } \alpha \text{ is faithful.}\\ \phi_c & \text{from Proposition 2.49 otherwise.}\end{cases}\tag{2.17}$$

这就确保了 $\varpi\in\mathsf{S}(\mathcal{A})$ 是一个忠实态。利用式（$\varpi\in\mathsf{S}(\mathcal{A})$ 2.17）中的这个态，并考虑概率代数$(\mathcal{A}\ \varpi)$，现在可以将有限维希尔伯特空间表示表述为基本 GNS（Gel'fand-Neumark（Naĭmark）-西格尔）构造的简化版本 [63, 130, 54]:

定理 *2.53*（有限维 *GNS* 构造）。设 $(A\ \varpi)$ 是一个概率代数，其中所有元素均有界，即 $A=B(A)$——例如，当 A 为有限维时——且具有一个忠实态 $\varpi\in S(A)$。根据命题 *2.50*，通过完备化构造内积为 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_2$ 的希尔伯特空间 $\mathscr{H}$。将其与定义 *2.39* 中的正则表示结合，得到一个忠实 *-表示 $\Upsilon: A\to B(\mathscr{H})$，参见定义 *2.38*，其中 $a^*\mapsto\Upsilon(a^\star)=\Upsilon(a)^\dagger$，且 $\Upsilon(a)^\dagger$ 是关于内积 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_2$的$\Upsilon(a)$的希尔伯特空间伴随。换言之，$A$ 与 $\Upsilon(A)\subseteq L(\mathscr{H})$ *-同构。

在这个相关的希尔伯特空间框架中，请注意，对于 $x\in\mathscr{H}$:

$$\mathbb{E}_2(x):=\varpi(x)=\varpi(1^\star x)=\langle 1\mid x\rangle_2\,,\tag{2.18}$$

其中 ϖ 连续延拓至 $\mathscr{H}$。因此，作为 $\Upsilon(a)1=\Upsilon_a1=a1=a$，可得

$$\mathbb{E}_\Upsilon(\Upsilon_a):=\langle 1\mid\Upsilon_a1\rangle_2\,,\tag{2.19}$$

以定义相应的 向量态 $\mathbb{E}_\Upsilon$ 于 $B(\mathscr{H})$。这意味着，态 $\varpi \in \mathsf{S}(A)$已映射为该表示在相应希尔伯特空间代数中的一个向量 或纯态 $\Upsilon(A) \subset B(\mathscr{H})$，其态向量为 $\xi = 1 \in A \subseteq \mathscr{H}$。请注意，两个随机变量 $a \in A$ 和 $\Upsilon_a \in \Upsilon(A)$ 是矩等价的，$a_m = \Upsilon_a$。

式（$\xi = 1 \in \mathcal{A} \subseteq \mathscr{H}$）中的向量2.19是分离向量，属于 Υ（$\mathcal{A}$）。根据定义2.42，这意味着如果 Υ（a）$1 = 0 = a$，那么 Υ（a）$= \mathbf{0}$，而这只在$a = 0$时成立。

在 $\mathscr{H}$ 上如此构造的正则表示也是一个循环表示（参见定义2.42），因为$\{\Upsilon$（a）$1 = a \mid a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$ 根据定义在 $\mathscr{H}$ 中稠密。向量 $\xi = 1 \in \mathcal{A} \subseteq \mathscr{H}$因此是一个循环单位向量。

可以回想一下，像式（2.19）这样的向量态是 $\mathrm{L}(\mathscr{H})$ 的纯态，因此这是一个纯化的例子，它是通过所谓的“更大希尔伯特空间教会” [134]（另见 [97]）实现的。该方法通过在一个“更大的”希尔伯特空间中作表示来实现，或者更确切地说，通过将其嵌入为一个“更大”代数的子代数 $\Upsilon(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathscr{H})$。对于这样一个态 $\beta(\mathrm{a}) := \xi \mid \Upsilon_a \xi_2$，在上述定理 2.53 中，它被表示为由归一化向量 $\xi \in \mathscr{H}$给出的向量态（如式（2.19）所示）；向量 ξ 本身称为态或态向量（属于某个系统），事实上，这正是“态”一词最初的用法。

定理2.53 中，借助正则表示，从代数 $\mathscr{H}$A本身构造了一个特定的希尔伯特空间。但是，忠实纯表示的概念非常有用，因此人们希望更广泛地使用这一术语：

定义*2.54*（*GNS* 表示）。设给定一个概率代数 $(A \ \varpi)$，以及 $(A \ \varpi)$ 在 $(B(H) \ \omega_\xi)$ 上的忠实表示 $\Psi : A \to B(H)$；其中，如例 *15* 所示，$\omega_\xi \in S(B(H))$ 是 $B(H)$ 上的纯向量态 $\omega_\xi(A) = \langle \xi \mid A\xi \rangle_{\mathcal{H}}$。此外，假设向量 $\xi \in H$ 是希尔伯特空间 H 中 $(A) \subseteq B(H)$ 的循环单位向量。那么，元组 $(\Psi, H \ \xi)$（分别为 $(\Psi, B(H) \ \omega_\xi)$）称为 $(A \ \varpi)$ 的 *GNS* 表示。

对于定理2.53中的 GNS表示，也存在一个作用于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上的矩阵表示，与注2.35相对应；而且不必像注2.46中那样显式使用结构常数。

推论 *2.55*（*GNS*矩阵表示）。对于一个有限维概率代数 $(A \ \varpi)$，其上有一个忠实态 $\varpi \in S(A)$，并赋予命题 *2.50* 中的希尔伯特空间结构，且采用定理 *2.53* 中的表示，则现在可以使用注 *2.35* 中的表示 $H^B : L(H) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，定义为 $H^B(a) = M = (M_{ij}) = (\langle b_i \mid ab_j \rangle_2) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，其中 $B = \{b1, \ldots, b_n\} \subset \mathscr{H}$是 $\mathscr{H}$的标准正交基，且 $n = dim_{\mathbb{C}} A$ 是 A 的复维数。这定义了底层的酉映射 $U^B : H \to \mathbb{C}^n$，其中 $U^B(b_j) = e_j \in \mathbb{C}^n$。

鉴于定义 i 中 $A = A_{sa} \oplus A_{sa}$ 的事实，显然 A_{sa} 的实维数也为 维数$_{\mathbb{R}} A_{sa} = n$。因此，可以选取一组基，使其基向量全都是自伴的，$b_j = b_j^\star$，从 $b_1 = 1 \in \mathbb{R}[1] \subseteq A_{sa}$ 开始，再用 A_{sa} 中的 $\{b_2, \ldots, b_n\}$ 补全，得到标准正交自伴实基 $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset A_{sa}$ =张成空间$_{\mathbb{R}} B$。这最终给出了 A = 张成空间$_{\mathbb{C}} B$ 的一组复数基，它同时是标准正交且自伴的，其中 $\varpi(b_1) = 1$ 和 $\varpi(b_j) = 0$ 对于 $j > 1$。

备注中的矩阵代数表示 *2.35* 因此是一个忠实 *-表示，H^B 是从 $\mathcal{A}$ 到 $H^B(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$的单射 *-代数同态（*-单同态），并且 $\mathcal{A} \cong H^B(\mathcal{A}) \cong \Upsilon(\mathcal{A})$ 是 *-同构的。

在定理 2.53中，直到这里，通过公式（2.17）确保了态$\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$ 是忠实的，即使概率代数 α 的原始态 $(\mathcal{A}\ \alpha)$ 并不忠实。定理 2.53 表明，GNS 构造随后给出了一个忠实、循环的（参见定义2.42），因而不可约的（参见定义 2.43）表示。

如果原态 α of (A α) 不忠实，那么若构造半双线性形式 $\mathsf{a}\ |\mathsf{b}_{\alpha} = \alpha(\mathsf{a}^{\star}\mathsf{b})$，它就不是内积，因为它不是正定的 $\|\cdot\|_2$ 也就不是范数，因而不能用于在命题 2.50 中为 A 定义希尔伯特空间结构。对于这种不忠实的态 α，若在式 (2.17) 中选择了 $\varpi = \phi_c$，则 $\mathscr{H}$ =H_c 上的内积与该态 α所定义的概率结构无关。我们可以继续采用 $\mathsf{L}(\mathsf{H}_c)$ 上的这种表示，并使用密度 $\boldsymbol{R} \in \mathsf{D}(\mathsf{L}(\mathsf{H}_c)$ 计算期望（参见推论 2.37）。但代数 $\Upsilon(\mathsf{A}) \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{H}_c)$ 中存在非零元 $\Upsilon_b \neq 0$，它们可能几乎处处（a.s.）为零，因为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}\Upsilon^{\dagger}\mathsf{b}\ \Upsilon_b) = \alpha(\mathsf{b}^{*}\mathsf{b})$ 可能为零。

另一方面，若态 α不忠实，并且有意在式 (2.17) 中选取$\varpi = \alpha$，则这意味着由 $\mathsf{J}_{\varpi} = \{\mathsf{a} \in \mathsf{A} \mid \varpi(\mathsf{a}^{\star}\mathsf{a}) = 0\} \subset \mathsf{A}$ 定义的子空间——实际上它是代数 A 中的一个左理想——是非平凡的，即 $\mathsf{J}_{\varpi} \neq \{0\}$。$\mathsf{J}_{\varpi}$ 中的元素正如上文所述几乎必然为零。结合注 2.15 与命题 2.16，其中所有最小界常数为零的元素所构成的理想 $\mathsf{I}_{\varpi} = \{\mathsf{a} \in \mathsf{A} \mid \sup_{x \neq 0}\{\varpi((\mathsf{ax})^{\star}\mathsf{ax})\} = 0\}$ 被假定已经商掉，注意 $\mathsf{a} \in \mathsf{I}_{\varpi}$ 蕴含 $\mathsf{a} \in \mathsf{J}_{\varpi}$（取 $\mathsf{x} = 1$），即 $\mathsf{I}_{\varpi} \subseteq \mathsf{J}_{\varpi}$。

为了得到一个希尔伯特空间，使这些几乎必然为零的元素被宣布等价于零，可以将 J_{ϖ} 商掉，转而考虑商空间 $\mathscr{H}_{\varpi} := \mathrm{cl}(\mathsf{A}/\mathsf{J}_{\varpi})$，其中闭包取自诱导的商范数。在 $\mathscr{H}_{\varpi}$ 上由 $\varpi = \alpha$ 诱导的半双线性形式此时是正定的，因而定义了一个内积，并且 $\mathscr{H}_{\varpi}$ 中的元素由几乎必然相等来定义。由于 J_{ϖ} 是左理想，$\mathsf{A}/\mathsf{J}_{\varpi}$ 上的左乘法是良定义的，因此可以仿照定理 2.53 的后续做法，经由由左正则表示（定义 2.39）诱导的 *-同态 Υ_{ϖ} : $\mathsf{A} \to \mathsf{L}(\mathsf{A}/\mathsf{J}_{\varpi})$ 构造一个 *- 表示。注意，该 *- 表示 Υ_{ϖ} 不是单射，因而也不忠实，但仍可如推论 2.55 那样为 $\Upsilon_{\varpi}(\mathsf{A})$ 找到一个 *-同构矩阵表示。

在无限维情形下不存在迹泛函，因此也不存在类似 ϕ_c 的典范态来实现忠实表示。这里可以采用直和 $\mathscr{H} := \bigoplus_{\varpi \in \mathcal{E}} \mathscr{H}_{\varpi}$，其中 $\mathcal{E} = \mathrm{ext}(\mathsf{S}(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$ 的纯态，即态集的极端点；可以证明，每个纯态都对应一个作用在 [138, 94] 上的不可约 GNS 表示 $\mathscr{H}_{\varpi}$（参见定义 2.43），从而实现作用在 $\mathscr{H}$上的忠实 *-表示。

态与密度：基于 GNS 构造的表示依赖于态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$，并产生一个纯向量态；而前一种表示则将迹用作一般的线性泛函，这种做法只有在有限维情形下才可行。在后一种基于迹的情形中，所考虑的态由一个密度矩阵 （参见定义 2.23、命题 2.24和命题2.33）或密度算子（参见推论 2.37）表示。在有限维情形下，密度的概念可以推广到抽象情形。

在命题 2.48 中，态集被刻画为$\mathcal{A}^{\star}$的子集，即所有线性泛函构成的空间。在有限维情形下，甚至有 $\mathcal{A} = \mathcal{H}$，而希尔伯特空间结构使我们能够在代数本身中找到一个与$\mathsf{S}(\mathcal{A})$等价的对象。

推论 2.56 （密度作为代数元素、密度集合与态表征）。 若概率代数$\mathcal{A}$ 是有限维的，则作为向量空间，它与备注 *2.51*中构造的希尔伯特空间 同构。

因此，对于任意线性泛函 $\alpha \in \mathcal{A}^\star$，存在一个元素$a_\alpha \in \mathcal{A}$ 使得 $\alpha(b) = \langle a_\alpha \mid b\rangle_c = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(a_\alpha^\star b)$ 对所有$b \in \mathcal{A}$均成立，其中使用了备注$\mathcal{A}$中引入的基于迹的典范内积，见备注*2.51*。

将 A 中的密度元定义为 $D(A) = \{r \in A_+ \mid tr_{\mathcal{A}} r = 1\}$，它们也称为代数密度。任意态 $\varpi_r \in S(A)$ 都可以写成 $\varpi_r(b) = tr_{\mathcal{A}}(rb)$，其中 $r \in D(A)$。现在可以很容易地将推论 *2.37* 中的陈述转换到这一抽象情形，因此这里无需详细列出。

态$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}^\star$ 与密度$\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$ (参见推论 *2.56*)一一对应：

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \ni \varpi_r \leftrightarrow r \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$$
$$\forall a \in \mathcal{A} : \varpi_r(a) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(ra).$$

命题 *2.48* 中态凸集 $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ 的刻画 现在可以很容易地转化为密度集合的刻画；它是一个紧凸集，即闭凸锥$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{S}$与超平面$\mathcal{A}_+$ 的交集 $\mathcal{S} = \{r \in \mathcal{A}_{sa} \mid \mathrm{tr}\, r = 1\}$。

显然，推论 2.56 对于具体的含幺 *-子代数$\mathcal{B} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 或 复数域 $\subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$的重述方式很清楚，而且此前已有部分阐述（参见定义 2.23，以及命题 2.24 和命题 2.33，或推论 2.37），因此这里无需重复。推论 2.56的陈述还可以从另一个角度来看，通过一种论证，将其简化到有限维代数这一当前情形 [67]:

推论 2.57 (泛函的拉东–尼科迪姆定理)。 设 A 是有限维含幺 *-代数，且 $\alpha \in A^+ \subset A^\star$ 是自伴且正定的，即是一个忠实的未归一化态。设 $\beta \in A^\star$ 是任意泛函。则存在 $B \in L(A)$ 中的一个元素，使得对于任意 $a \in A$，都有 $\beta(a) = \alpha(Ba)$。 B 称为 β 关于 α 的拉东-尼科迪姆 导数，也记作 $B = \mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\alpha$。

若 β 是自伴且正（定）的，则 B也如此。此外，若 β 是归一化的 ($\beta(1) = 1$, 因此 $\beta \in \mathsf{S}(A)$ 是一个态），则有 $\alpha(B1) = 1$，也就是说， B 是 α的一个密度。

迹 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \in A^+$ 是这样一个自伴且正定的泛函，因此，对于态 $\beta \in \mathsf{S}(A)$，拉东–尼科迪姆导数 $R = \mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\,\mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \in \mathrm{D}(A)$ 是一个密度，使得对任意 $a \in A$，都有 $\beta(a) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(Ra)$。注意，也可以将其写成对称形式： $\beta(a) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(R^{1/2} a R^{1/2})$。

关于密度的最后一个结果已在推论 2.56 中陈述。因此，在有限维代数 $\mathcal{A}$上的迹这一情形下，推论 2.57 只是从另一个角度看待一个众所周知的事实。因此，正如有限维情形中任意态都可以通过密度表示一样，处理态时通常更倾向于采用这种方法，尤其是在使用具体表示时，例如作为 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 或$\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

注 2.58 (Radon-Nikodým定理)。 这一来自推论 *2.57* 的结果可以扩展到无限维代数的情形 *[67]*, 但泛函 β 必须相对于 α以某种绝对连续的方式存在（此处不予定义）。这将推论 *2.57* 与经典*Radon-Nikodým*定理联系起来（例如 *[29]*）。可以将其视为这样一个结果：它把对偶空间的凸正锥中测度／泛函之间的关系（参见命题 *2.48*）转化为原空间的正函数／算子，或分别转化为代数中的元素，即原空间凸正锥中的元素。

收敛： 从这些希尔伯特表示出发，内积 $\langle\cdot\,|\cdot\rangle_2$在 $\mathscr{H} := \mathrm{L}_2(\mathcal{A}\ \varpi)$ 上——当态 ϖ 忠实时，它是 $\mathcal{A}$ 的完备化；否则，它是 $\mathcal{A}/\mathcal{J}_\varpi$ 的完备化——诱导出范数 $\|\cdot\|_2$，借此可以为随机变量定义一种比目前所讨论的更强的收敛概念：

定义 2.59 （均方收敛）。 给定一个序列 $\{a_n\}$， $n \in \mathbb{N}$ 属于 $\mathscr{H}$，称其均方收敛——或以均方根（*RMS*）收敛——到$x \in \mathscr{H}$当且仅当 $\|a_n - x\|_2 \quad \to 0$。

稍后将把这一概念推广到 2 以外的其他幂。

在继续定义 $\mathcal{A}$上的一致范数之前，现在该介绍一些关于赋范代数的定义了，例如参见 [105, 131, 13, 45, 46, 87, 86, 33, 34, 120, 138,139, 140, 28, 152, 94]:

定义 2.60 （赋范代数）。 设 A 是一个 *-代数，其向量空间 A 上定义了一个范数。

- 若范数 $\|\cdot\|$ 满足 $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$ 对所有 a、$b \in A$ 都成立，则代数 A 称为赋范代数。这意味着，不仅向量空间运算，代数乘法在范数拓扑下也连续。
- 此外，如果 A 是赋有范数 $\|\cdot\|$ 的巴拿赫空间，则称其为一个巴拿赫代数。
- 如果巴拿赫代数$\mathcal{A}$ 满足命题*2.61*中的等式（*2.20*），即满足所谓的C*-等式： $\|a^\star a\| = \|a^\star\|\,\|a\| = \|a\|^2$ 对所有$a \in \mathcal{A}$均成立，则称其为C*-代数。
- 如果$\mathcal{A}$ 满足等式（*2.20*），则其范数完备化是一个C*-代数，记作C*($\mathcal{A}$)。
- 一个幺正C*-代数，作为巴拿赫空间，它是对偶空间，即存在一个巴拿赫空间 B，使得 $A \cong B^*$，称为W*-代数或冯·诺伊曼代数，

注意，对于有限维赋范 *-代数，有$\mathcal{A} = \mathrm{C}^*(\mathcal{A}) = \mathrm{B}(\mathcal{A})$，并且$\mathcal{A}$ 也是一个C*-代数。

希尔伯特空间上的表示导出

命题 2.61 ($\mathcal{L}(\mathscr{H})$上的一致范数)。对于有限维 *-代数 $\mathcal{A}$，定理 *2.53* 中的忠实希尔伯特 *-表示表明 $\Upsilon(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathscr{H}) = \mathcal{B}(\mathscr{H})$与 $\mathcal{A}$ *-同构。

在有限维情形下，空间 H 上 $L(\mathscr{H})$ 中的所有线性映射都是有界的*[120]*, 因此，所有 $a \in A$ 都是有界的，即 $A = B(A)$。因此，可以像注 *2.15* 中那样，取定义 *2.12* 中所有可能界常数 C_a 的下确界 C_{ra} ，并将其记为 $\|a\|_\infty$。这是 $L(\mathscr{H})$ 上的一致范数或算子范数，即 $\|a\|_\infty := \|\Upsilon_a\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H})}$，因此它是 A 上的一个范数。注意， $\|a\|_\infty = \|a\|_{S^\infty}$，参见注 *2.52*。

由这些希尔伯特 *-表示可知，对于 $a,b \in \mathcal{A}$ ，有 $\|ab\|_\infty \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty$，因为这在 $\mathcal{L}(\mathscr{H})$中成立：$\|\Upsilon_a \Upsilon_b\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H})} \leq \|\Upsilon_a\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H})} \|\Upsilon_b\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H})}$。这使得 $\mathcal{A}$ 成为一个 赋范代数，参见下文定义 *2.60* 。此外，它还满足

$$\|a\|_\infty^2 = \|aa^\star\|_\infty = \|a\|_\infty \|a^\star\|_\infty\,, \tag{2.20}$$

因为这对 $L(\mathscr{H})$成立。这些结果表明，乘法和共轭 $a \mapsto a^\star$ 在一致范数下是连续的。

利用命题 $\|\cdot\|_\infty$ 中定义的度量 2.61，现在可以定义一种更强的收敛概念：

定义 2.62 (一致收敛)。 给定有界巴拿赫概率代数 $A = \mathrm{B}(A)$中的一个序列 $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ，若它几乎一致收敛到 $x \in$ 复数域*(A) ，当且仅当 $\|a_n - x\|_\infty \quad \to 0$。

根据定义 2.59和定义 2.62 可立即得到

命题 *2.63*（一致收敛到均方根收敛）。若有界巴拿赫概率代数 $A = B(A)$ 中的序列 $\{a_n\}$，$n \in \mathbb{N}$ 几乎一致收敛到 $x \in$ 复数域$^*(A)$，则它也在均方意义下收敛到 $x \in$ 复数域$^*(A) \subseteq \mathscr{H}$，参见定义 *2.59*。对于有限维情形，请回忆 $A = B(A) =$ 复数域$^*(A) = \mathscr{H}$作为集合是相同的。

相关性与独立性： 根据命题 | 所给出的内积（现在简记为 $\langle a \rangle$）和希尔伯特空间 $\mathscr{H} = \mathrm{L}_2(\mathcal{A})$ 2.50，可以定义概率论中的一些其他已知量：

定义 2.64（相关性、协方差）。对于 a、$b \in A$，它们的内积 $\langle a \mid b \rangle$ 也称为它们的相关性。

回顾定义*2.12* 和定理 *2.53* 中随机变量分解为均值和零均值波动部分的表示，$a = a + \tilde{a}$，以及相应的直和分解 $\mathscr{H} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$，容易看出，对所有 a，$b \in \mathscr{H}$，都有 $\left\langle a \mid \tilde{b} \right\rangle = 0$，因此该直和分解是一个正交直和。由此可得勾股定理

$$\|a\|_2^2 = \|\bar{a}\|_2^2 + \|\tilde{a}\|_2^2 = \mathbb{E}_2(a)^2 + \mathrm{var}_\varpi(a) = \varpi(a)^2 + \mathrm{var}_\varpi(a),$$

其中，量 $\mathrm{方差}_\varpi(a) := \|\tilde{a}\|_2^2$ 称为随机变量 a 的方差（在态 ϖ 中）。对于两个随机变量 $a,b \in \mathscr{H}$，它们零均值部分的内积称为它们的协方差：

$$\mathrm{cov}_\varpi(a,b) := \left\langle \tilde{a} \mid \tilde{b} \right\rangle = \left\langle a - \bar{a} \mid b - \bar{b} \right\rangle = \langle a - \mathbb{E}_2(a)1 \mid b - \mathbb{E}_2(b)1 \rangle . \tag{2.21}$$

如果 $\mathrm{协方差}_\varpi(a,b) = 0$，则两个随机变量不相关；从几何上看，这意味着 $\tilde{a}$ 和 b正交，或者说两个子空间 $\mathrm{张成空间}_{\mathbb{C}}\tilde{a}$ 和 $\mathrm{张成空间}_{\mathbb{C}}b$ 正交，也记作$\left\langle \mathrm{张成空间}_{\mathbb{C}}\tilde{a} \mid \mathrm{张成空间}_{\mathbb{C}}\tilde{b} \right\rangle = \{0\}$。

两个概率子代数$\mathcal{B},\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 不可能正交，因为它们都包含 $1_{\mathcal{A}}$。但相关的思想——它们的零均值部分正交——可由（参见 [75]）

定义 2.65 (互补性)。设 B、$C \subset A$ 为概率子代数。若对于 $b \in B$ 和 $c \in C$，有协方差$_\varpi(b,c) = 0$，则称它们互补 或拟正交。

独立性是概率论中的另一个重要概念：

定义 2.66（独立性）。两个随机变量 a，$b \in \mathcal{A}$ 独立，当且仅当它们对易（$[a, b] = 0$），且它们生成的概率子代数（$\mathbb{C}[a]$ 和 $\mathbb{C}[b]$）互补（参见定义 *2.65*）。

更一般地，两个概率子代数 $\mathcal{B}$、$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 独立，当且仅当它们对易（$[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \{0\}$），并且互补或拟正交（参见定义 *2.65*）。

可以将其写成如下形式：对于所有 $b \in B$、$c \in C$，均有

$$\varpi(bc) = \mathbb{E}_2(bc) = \varpi(b)\varpi(c) = \mathbb{E}_2(b)\mathbb{E}_2(c). \tag{2.22}$$

这种独立性有时也称为张量独立性 *[26, 27]*.

这意味着，对于式（2.22）中的独立因子，态的作用如同乘法态，或称特征。显然，上述定义 2.66可自然推广到两个以上的随机变量或子代数。

由独立性的定义 2.66 可直接推出：

命题 2.67。 假设子代数 $\mathcal{B}$、$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 相互独立。此外，设$b \in \mathcal{B}$，$c \in \mathcal{C}$。关系式 *Eq.(2.22*也可以表述为：

$$\varpi(b) = 0 \quad and \quad \varpi(c) = 0 \qquad implies \qquad \varpi(bc) = 0. \tag{2.23}$$

对于任意三个随机变量 a、$b \in B$ 和 $c \in C$，有

$$\mathbb{E}_2(acb) = \varpi(acb) = \varpi(c)\varpi(ab) = \mathbb{E}_2(c)\mathbb{E}_2(ab). \tag{2.24}$$

现在进一步假设，概率代数 $A = \mathbb{C}\langle B,C\rangle$ 由独立子代数 B、$C \subset A$ 生成。这意味着，限制 $\varpi|_{\mathcal{B}}$ 和 $\varpi|_{\mathcal{C}}$能够确定态 ϖ。

和与积： 考虑以某种方式相互作用的不同系统时，我们会进一步考虑如何组合概率代数以得到新的概率代数，以及如何从概率角度解释这种组合。

定义 2.68 (直积)。 给定两个概率代数 B 和 C，其态分别为 ϖ_b和 ϖ_c，对合分别为 $\natural$和 $\flat$，考虑它们的直积 $A = B \times C$。它是一个向量空间，其元素记作$(b, c) \in A$，其中 $b \in B$ 且 $c \in C$。

现在定义一个（阿达马）积：

$$(b_1, c_1) \odot (b_2, c_2) := (b_1 b_2, c_1 c_2) \quad for\ b_1, b_2 \in \mathcal{B},\ c_1, c_2 \in \mathcal{C},$$

带有单位元 $1_{\mathcal{A}} := (1_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{C}})$且对合 $\natural$定义为 $(b, c)^{\natural} := (b^{\sharp}, c^{\flat})$。

对于给定的 $0 < \alpha < 1$，可以定义态 $\varpi_\alpha(b, c) := \alpha\varpi_b(b) + (1-\alpha)\varpi_c(c)$，从而得到一个新的概率代数 $A = B \times C$。B 和 C 自然嵌入 A 中，分别作为形如 $(b\ 0_{\mathcal{C}})$ 和 $(0_{\mathcal{B}}, c)$ 的元素。

显然，可以将此推广到两个以上的因子。例 2可视为例 n 的 fold 直积1。

只需实质上改变记号，定义 2.68中的相同构造也可用于直和 $\mathcal{A}_{\oplus} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$；有限个乘积和有限个加数会产生同构代数。

定义 2.69 (直和)。给定两个概率代数 B、C，其态为 ϖ_b、ϖ_c，对合为 $\sharp$ 和 $\flat$，考虑它们的直和 $A = B \oplus C$。它是一个向量空间，其元素记作 $b \oplus c \in A$，其中 $b \in B$ 且 $c \in C$。

现在定义一种乘积——仍记作并置——如下：

$$(b_1 \oplus c_1)(b_2 \oplus c_2) := (b_1 b_2 \oplus c_1 c_2) \quad for\ b_1, b_2 \in \mathcal{B},\ c_1, c_2 \in \mathcal{C},$$

其单位元为 $1_{\mathcal{A}} = (1_{\mathcal{B}} \oplus 1_{\mathcal{C}})$，对合 $\natural$定义为 $(b \oplus c)^{\natural} := (b^{\sharp} \oplus c^{\flat})$。

对于给定的 $0 < \alpha < 1$，可以定义态 $\varpi_\alpha(b \oplus c) := \alpha\varpi_b(b) + (1-\alpha)\varpi_c(c)$，从而得到一个新的概率代数 $A = B \oplus C$。B 和 C 自然嵌入为如下形式的元素：$(b \oplus 0_{\mathcal{C}})$，以及 $(0_{\mathcal{B}} \oplus c)$。

对于有限个直和项，显然关系 $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \ni b \oplus c \mapsto (b, c) \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$给出了上文提到的代数 *- 同构。值得注意的是，在这两种情况下（直积和直和），嵌入的两个子代数 $\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ 彼此对易，而子代数$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$ 有时称为A 的扇区。这一构造可解释为一种混合：以概率 α 选择代数$\mathcal{B}$，以概率 $(1-\alpha)$ 选择代数$\mathcal{C}$。

考虑这类直积和直和上的映射，以下内容将很有用：

定义 2.70（映射的直和）。若 $B \in L$（B）和 $C \in L$（C）分别是 B 和 C 上的线性映射，则直和 $B \oplus C \in$（L（B）$\oplus L$（C）$\subset L$（$B \times C$）记作

$$on\ \ \mathcal{B} \times \mathcal{C}:\ B \oplus C : (b, c) \mapsto \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = (Bb, Cc)\ \ or \tag{2.25}$$

$$on\ \ \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}:\ B \oplus C : (b \oplus c) \mapsto (Bb \oplus Cc). \tag{2.26}$$

为了超越混合这一概念，并表达两个组合分量在同一系统中相互作用这一思想，我们使用

定义 2.71 (代数的张量积**)**。给定两个含幺 *-代数 B、C，其对合分别为 $\sharp$ 和 $\flat$，考虑它们的张量积$A = B \otimes C$。它是一个由形如 $\sum_{j=1}^{m} z_j (b_j \otimes c_j) \in A$ 的元素构成的向量空间，其中 $b_j \in B$、$c_j \in C$，且 $z_j \in \mathbb{C}$是形如 $b \otimes c$ 的初等张量的线性组合。现在在初等张量上定义一个双线性乘积（对每个分量均为线性）——仍以并置表示——如下：

$$(b_1 \otimes c_1)(b_2 \otimes c_2) := (b_1 b_2 \otimes c_1 c_2)\ \ for\ b_1, b_2 \in \mathcal{B},\ c_1, c_2 \in \mathcal{C},$$

并通过线性性将其扩展。单位元为 $1_{\mathcal{A}} := 1_{\mathcal{B}} \otimes 1_{\mathcal{C}}$，$A$ 上的对合 $\natural$ 定义为 $(b \otimes c)^{\natural} := b^{\sharp} \otimes c^{\flat}$，再通过线性性扩展。这便在 A 上定义了含幺 *-代数结构。

不难看出，如何将这一做法推广到更多张量因子。代数$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$表示组分系统——$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$ 的元素分别是各自组分系统的随机变量，而$\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 的元素则是组合复合系统的随机变量。通过将组成代数$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$ 分别识别为$\mathcal{A}$中的生成且相互对易的子代数$\mathcal{B} \otimes \mathbb{C}[1_{\mathcal{C}}]$ 和 $\mathbb{C}[1_{\mathcal{B}}] \otimes \mathcal{C}$，可以将它们嵌入复合代数$\mathcal{A}$；其中的元素分别由$b \otimes 1_{\mathcal{C}}$和 $1_{\mathcal{B}} \otimes c$这类初等张量构成。

定义 2.72 (张量态——相关与纠缠**)**。设有态 ϖ_b、ϖ_c，它们分别定义在复合系统概率代数 $A = B \otimes C$ 的组分 B、C 上。

给定组分上的态 ϖ_b、ϖ_c，可以在 A 上定义复合态 ϖ_a，如下所示：

$$\varpi_a(b \otimes c) := \varpi_b \otimes \varpi_c (b \otimes c) = \varpi_b(b)\varpi_c(c), \tag{2.27}$$

并通过线性将其延拓到整个 A。这称为 A 上的乘积态。若 $\varpi_a = \varpi_b \otimes \varpi_c$，则代数 $B \otimes \mathbb{C}[1_{\mathcal{C}}]$ 与 $\mathbb{C}[1_{\mathcal{B}}] \otimes C$ 是独立的；且代数 B 与 C 相对于 ϖ_a 称为不相关。

在此情形

$$\varpi_a = \sum_j \alpha_j\, \varpi_{b,j} \otimes \varpi_{c,j}; \quad 0 \le \alpha_j \le 1; \quad and \sum_j \alpha_j = 1, \tag{2.28}$$

其中 $\varpi_{b,\ j}$ 与 $\varpi_{c,\ j}$ 分别是 B 或 C 上的态——这称为可分态，即乘积态的凸组合——态 $\varpi_a \in \mathsf{S}(A)$称为经典相关。否则该态称为纠缠。

另一方面，设 $\varpi_a \in \mathsf{S}(A)$ 为复合概率代数 $A = B \otimes C$ 上的任意态。由于代数 B、C 自然嵌入 A，分别形如 $b \otimes 1_{\mathcal{C}}$（其中 $b \in B$）以及$1_{\mathcal{B}} \otimes c$（其中 $c \in C$），故可通过设定

$$\varpi_{b,r}(b) := \varpi_a(b \otimes 1_{\mathcal{C}}), \quad and \tag{2.29}$$

$$\varpi_{c,r}(c) := \varpi_a(1_{\mathcal{B}} \otimes c); \tag{2.30}$$

并通过线性延拓，分别定义 B 和复数域上的约化态。

这些定义在分量上的态 $\varpi_{b,r} \in \mathsf{S}(B)$, $\varpi_{c,r} \in \mathsf{S}$(复数域)，产生了所谓的偏迹，它们分别是线性映射 $\varpi_{\mathcal{B}} \in L(A,$ 复数域$)$ 和 $\varpi_{\mathcal{C}} \in L(A, B)$，其定义如下：对于一个初等张量 $b \otimes c \in A = B \otimes$ 复数域

$$\varpi_{\mathcal{B}}(b \otimes c) := \varpi_{b,r}(b)c \in \mathcal{C}, \quad \varpi_{\mathcal{C}}(b \otimes c) := \varpi_{c,r}(c)b \in \mathcal{B}, \tag{2.31}$$

并通过线性性将其扩展到整个 A。

同样，如何将其扩展到更多张量因子显而易见。这是将概率描述扩展到代数图景中的一种方式。不相关情形的解释是：当两个组分系统$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$ 组合在一起时，它们之间没有相互作用。反过来说，这意味着相互作用的组分系统不能将式（2.27）中的乘积态作为全局复合态。在经典相关情形下，式（2.28）是乘积态的凸组合 [150, 81]，这一点很重要。事实上，如果允许 $\alpha_j \in \mathbb{C}$，那么 A 上的任意线性形式 $= \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 都可以用这种方式表示。其解释是，存在一个经典概率分布——由 α_j 给出——从不相关情形 $\varpi_{b,j} \otimes \varpi_{c,j}$ 中选取一种。值得注意的是，如果代数 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{C}$ 之一是阿贝尔或交换的，那么复合代数A 上的每个态都是可分的，或是经典相关的。

在定义 2.66 中已经指出，这种独立性的概念与张量积密切相关；事实上，定义 2.71 给出的张量积正是这种独立性的典型例子 [27]。实际上，有

命题 *2.73.* 若两个（或多个）子代数 B、$C \subset A$ 生成 $A = \mathbb{C}\langle B, C\rangle$，且它们如定义 *2.66* 所述张量独立，则可以找到一个表示，将该代数表示为定义 *2.71* 所述的张量积。这意味着存在一个 *-同构 $\Phi : A \to D$，其中概率代数 $D = E \otimes F$ 满足 E 和 F 独立；此外，还有 $\Phi(B) = E$ 和 $\Phi(C) = F$。

最理想的性质由方程（2.22）给出，或者等价地由方程（2.23）和（2.24）给出。但也可以通过另一种乘积来实现，例如 [145, 74,104, 103, 136], ，即自由积。它由泛性质定义，与张量积类似。在这种情况下，对自由随机变量，类似于方程（2.22）的性质便定义了自由独立性。请注意，在 [26, 27] 中证明了，张量积和自由积是仅有的两种满足关于独立性概念的特定要求的构造。自由积及其相关发展超出了本文的范围，因此我们仅对此作以上简要介绍。

既然推论2.56中已确立态与密度之间的一一对应关系以及迹，那么不妨简要探讨一下张量积定义 2.71 ，以及定义2.31中公式（2.72）抽象引入的偏迹主题。

注 2.74 （复合迹与偏迹：）。考虑定义 *2.72* 中概率代数 $A = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$，其密度为 $r_b \in \mathrm{D}(\mathcal{B})$ 和 $r_c \in \mathrm{D}(\mathcal{C})$。对应公式（2.27）的复合积态，对于初等张量 $b \otimes c \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$，定义如下

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}\Big((r_b \otimes r_c)(b \otimes c)\Big) := \mathrm{tr}_{\mathcal{B}}(r_b b)\ \mathrm{tr}_{\mathcal{C}}(r_c c), \tag{2.32}$$

然后再通过线性扩展。这个乘积态意味着相应的密度为 $r_a = r_b \otimes r_c \in \mathrm{D}(A)$，即一种乘积密度。

与式（2.28）类似，若密度 $r_a \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ 给定为

$$r_a = \sum_j \alpha_j \, r_{b,j} \otimes r_{c,j}; \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1; \quad \textit{and} \ \sum_j \alpha_j = 1, \tag{2.33}$$

其密度分别为 B 或 C 上的 $r_{b,j}$ 和 $r_{c,j}$（乘积密度的凸组合），这称为可分离密度，而 B 和 C 称为经典相关。否则，该密度称为纠缠。

另一方面，给定复合概率代数 $A = B \otimes C$ 上的密度 $r_a \in \mathrm{D}(A)$，类比方程（2.29）和（2.30），定义约化密度或边缘分布 $r_{b,r} \in \mathrm{D}(B)$ 和 $r_{c,r} \in \mathrm{D}(C)$，要求对所有 $b \in B$ 和 $c \in C$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{B}}(r_{b,r}\, b) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(r_a(b \otimes 1\!\!1_{\mathcal{C}})), \quad \textit{and} \tag{2.34}$$
$$\mathrm{tr}_{\mathcal{C}}(r_{c,r}\, c) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(r_a(1\!\!1_{\mathcal{B}} \otimes c)). \tag{2.35}$$

这些约化密度 $r_{b,r}$ 和 $r_{c,r}$ 在分量上产生了所谓（此时确实是）偏迹，作为线性映射 $\mathrm{tr}_{p,\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 分别为 $\mathrm{tr}_{p,\mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$，其定义方式类似于方程（2.31）：对于初等张量：

$$\mathrm{tr}_{p,\mathcal{B}} : \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \ni b \otimes c \mapsto \mathrm{tr}_{p,\mathcal{B}}(b \otimes c) := \mathrm{tr}_{\mathcal{B}}(r_{b,r} b)\, c \in \mathcal{C}, \quad \textit{and} \tag{2.36}$$
$$\mathrm{tr}_{p,\mathcal{C}} : \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \ni b \otimes c \mapsto \mathrm{tr}_{p,\mathcal{C}}(b \otimes c) := \mathrm{tr}_{\mathcal{C}}(r_{c,r} c)\, b \in \mathcal{B}, \tag{2.37}$$

然后再通过线性性扩展。

再次可以明显看出，如何将备注2.74 改写为关于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 或 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$的具体幺正 *-子代数，因此这里无需赘述。

2.3 有限维代数的结构

根据命题 2.61，我们已经看到，在 $\|\cdot\|_\infty$-范数是 $\mathcal{A}$ 的忠实 *-表示的算子范数。由于有限维的 $\mathcal{A}$ 在所有豪斯多夫向量空间拓扑下都是完备的 [120]，，因此赋予范数后，它便成为一个巴拿赫空间。范数与乘法结合后，得到各种赋范代数 [105, 131, 13, 45, 46, 87, 86, 33, 34, 120, 138, 139, 140, 28]，，这些代数已在定义2.60中给出。这里我们主要关注 W*-代数。

W*-代数或冯·诺依曼代数： 根据备注2.52，可以回想起在有限维情形下，算子范数等于 Schatten-∞-范数 $\|\cdot\|_{S\infty}$。

推论 2.75。 作为巴拿赫空间，$(\mathcal{A}\ \|\cdot\|_{S\infty})$ 是对偶空间 $(\mathcal{A}\ \|\cdot\|_{S1})$。根据定义 2.60，它因此是一个 W*-代数。

通常，“冯·诺依曼代数”这一名称专指$\mathcal{L}(\mathscr{H})$的子代数，而“W*-代数”则用于抽象的概念。回顾一下，对于任意希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，$\mathcal{B}(\mathscr{H})$ 都是冯·诺依曼代数或W*-代数。并且，由定理 Υ2.53 和命题 2.61中的忠实希尔伯特 *-表示，有限维概率代数 $\mathcal{A}$ 在范数意义下 *-同构于一个冯·诺依曼子代数 $\Upsilon(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathscr{H})$。

赋范代数通常十分重要，因为它们具有丰富的函数演算，尤其是巴拿赫代数、C* 代数和 W* 代数中的函数演算。特别是对于代数 $a \in \mathcal{A}_{sa}$ 中的自伴元素，人们希望能够计算 $f(a)$，其中 f 是定义在实数轴某个子集上的、可能取复数值的函数，例如指数函数、平方根、绝对值或示性函数 $1\!\!1_{\mathcal{E}}$，其定义域为

$\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$。这种函数演算使我们能够从一般代数和赋范代数上的多项式，推广到巴拿赫代数上的全纯函数，再到 C* 代数上的连续函数，最后到 W* 代数上的博雷尔可测函数。

幸运的是，正如已经多次指出的那样（例如注2.10），在有限维代数上，这一切都归结为多项式演算，因为自伴元素的谱——等价于有限维空间上的线性映射——仅由有限个点组成，并且在 $\mathbb{R}$ 的有限子集上，任何函数都可以写成多项式。

此外，现在正是汇集迄今隐藏在某些假设中的若干结果之时，即注2.15 与命题 2.16，并审视命题2.49中假设的意义，以及展示它们的相互依赖关系，参见 [153, 105]。

命题 *2.76*（半单代数）。设 A 为有限维含幺 *-代数；则给定命题 *2.49* 中所定义的迹 $tr_{\mathcal{A}} \in A^\star$，对每个 $a \in A$，定义泛函 $\alpha_a : A \ni b \mapsto \alpha_a(b) := tr_{\mathcal{A}}(ab) = tr_{\mathcal{A}}(\Upsilon_a b) \in \mathbb{C}$。理想

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \alpha_a \text{ vanishes identically}\} \subseteq \mathcal{A}$$

称为该代数的（雅各布森）根基。它也可以定义为 *[105]*：

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid (1 + ba) \text{ is invertible for any } b \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}.$$

当$\mathrm{rad}(A) = \{0\}$时，代数 A 称为半单。

以下陈述等价：

- A 是半单的。
- A 有一个忠实态。
- A 是一个W*-代数。
- 迹 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}^\star$ 是非退化的，参见注记 *2.15*。
- 在 $\mathcal{A}$上的归一化迹泛函是忠实态，参见命题 *2.16*。
- $\mathcal{A}$ 在某个希尔伯特空间上具有忠实 *-表示，参见定理 *2.53*。

换言之，迄今为止以及下文中，我们都假定代数 $\mathcal{A}$是半单的，而命题 2.76 列出了若干等价性质。正如注记 2.15中已经指出的，如果 $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$，即代数 $\mathcal{A}$ 不是半单的，那么商含幺 *-代数 $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ 是半单的。下文中，如果 $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ 是非平凡的，我们将再次默认取这个商。

这里汇集了一些关于这类有限维半单 W*-代数的结果：

命题 *2.77*（一般有限维 *W*-代数）。设 $(A\ \varpi)$ 为具有（一致）范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的有限维 *W*-概率代数，且 a、$a_1, a_2 \in A_{sa}$ 自伴随，b、x、$y \in A$ 为一般元素，$c \in A$ 正规（参见定义 *2.12*）。则

- 对于定义在包含正规元 c 的谱 $\sigma(c) \subseteq J$的定义域 $J \subseteq \mathbb{C}$ $(f : J \to \mathbb{C})$ 上的复值函数 f，存在 $g = f(c) \in A$；
- 对于此类函数，存在谱映射 $\sigma(f(c)) = f(\sigma(c)) \subset \mathbb{C}$；
- 对于这样的正规元 $c \in A$，存在唯一的单射 *-同态 $\Psi : \mathrm{C}(\sigma(c)) \to A$，它将谱上的复连续函数映入代数 A，使得 $\Psi(1_{\sigma(c)}) = 1 \in A$ 且 $\Psi(\mathrm{id}_{\sigma(c)}) = c$，其中 $\mathrm{id}_{\sigma(c)} : z \mapsto z$是 $\sigma(c) \subset \mathbb{C}$ 上的恒等函数；
- 特别地，可以求正元的平方根，以及任意元素的绝对值 或模：$|x| := (x^\star x)^{1/2} \in A_+ \subset A_{sa}$；

- $a_1 \le a_2$ 意味着 $b^\star a_1 b \le b^\star a_2 b$ 对任意 $b \in A$ 成立，$|x| \le |y|$ 意味着 $\|x\|_\infty \le \|y\|_\infty$，并且 $0 \le a_1 \le a_2$ 意味着 $0 \le a_1^\beta \le a_2^\beta$ 对任意 $0 \le \beta \le 1$ 成立；
- 若 a_1 可逆且 $0 < a_1 \le a_2$，则 a_2 可逆，且 $0 < a_2^{-1} \le a_1^{-1}$；
- 给定绝对值，可以定义正部 $a_+ := \frac{1}{2}(|a| + a) \in A_+$，以及负部 $a_- := \frac{1}{2}(|a| - a) \in A_+$，使得 $a = a_+ - a_-$，且 $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$；这也称为Jordan-Hahn 分解；
- 给定绝对值，可以得到极分解 $b = g|b|$，其中 $g \in \mathcal{A}$ 是一个部分等距算子（参见定义 2.12）；
- 每个 $a \in A_{sa}$ 都有谱分解：

$$a = \sum_{\lambda_k \in \sigma(a)} \lambda_k p_{\lambda_k}, \tag{2.38}$$

其中 $\lambda_k \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$ 以及一组完备的互相正交投影 $p_{\lambda_k} \in \mathbb{C}[a]$ $(p_{\lambda_k} p_{\lambda_j} = \delta_{kj} p_{\lambda_k})$，使得 $\sum_{\lambda_k \in \sigma(a)} p_{\lambda_k} = 1$ ——一个单位分解。映射

$$\Pi_A : 2^{\sigma(a)} \ni \{\lambda_k\} \longrightarrow p_{\lambda_k} \in \mathrm{P}(\mathcal{A}) \tag{2.39}$$

称为抽象投影值测度（PVM），参见定义 2.21、注 2.22、注 2.90 和注 2.91。代数 A 包含谱分解中的所有投影 $p_k \in P(A)$，事实上，它们可由拉格朗日多项式显式给出，参见注 2.10：$p_{\lambda_k} = \prod_{j \ne k} (a - \lambda_j 1)(\lambda_k - \lambda_j)^{-1}$。正如定义 2.21 所述，该 PVM 生成交换子 W^* 代数 $span\{p_{\lambda_k} \mid \lambda_k \in \sigma(a)\} = \mathbb{C}[\{p_{\lambda_k}\}] = \mathbb{C}[a]$；
- 由于代数 A 中任意元素都是两个自伴元之和，从上述谱分解可清楚看出，代数 A 由其投影 $P(A)$ 生成：$A = span_{\mathbb{C}} P(A)$；投影 $P(A)$ 可赋予命题 2.25 中所述的格结构，而该格结构在交换子集上与命题 2.19 中的格结构一致。此格记为 $L(P(A))$。由于 A 是有限维的，可以从 $P(A)$ 中提取极小投影（参见定义 2.12）$M = \{p \in P(A) \mid p \text{ 是极小的}\}$，使得 $A = span_{\mathbb{C}} M$。任何由 PVM 生成的交换子 W^* 代数都可以扩充为或嵌入到一个极大阿贝尔子代数（MASA）中；

- 双交换子定理（冯·诺伊曼）：希尔伯特 *-表示 $\Upsilon(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathscr{H})$ 的像是W*-子代数，属于W*-代数$\mathcal{L}(\mathscr{H})$，且它等于自身的双交换子(参见定义2.12)：

$$\Upsilon(\mathcal{A}) = \mathrm{W}^*(\Upsilon(\mathcal{A})) = (\mathrm{W}^*(\Upsilon(\mathcal{A})))'' = (\Upsilon(\mathcal{A}))'' \subset \mathcal{L}(\mathscr{H}).$$

根据定理2.53中的忠实希尔伯特空间 *-表示，这些陈述大多只是线性代数中的众所周知的事实，可以通过忠实表示迁移到W*-代数$\mathcal{A}$中；这里唯一的例外可能是双交换子定理，参见 [149, 119, 138, 139, 140, 87, 86, 120, 28]。

利用绝对值，可以定义更多范数及其相应的度量：

定义 2.78 (L_p-空间)。设 $(\mathcal{A}\ \varpi)$ 是一个有限维概率代数。若态 $\varpi \in S(\mathcal{A})$ 不是忠实的，则用第 $\mathcal{A}$ 节中的 $\mathcal{A}/\mathcal{J}_\varpi$ 所述方法替换 2.2。对于 $1 \le p < \infty$，定义 L_p-范数：对 $b \in \mathcal{A}$，定义为

$$\|b\|_p := \sqrt[p]{\varpi(|b|^p)} = \mathbb{E}_\varpi(|b|^p)^{\frac{1}{p}} = \varpi((b^\star b)^{p/2})^{\frac{1}{p}}. \tag{2.40}$$

注意这与 *Schatten-p-*范数类似，参见注 *2.52*。定义 A 在这些范数下的完备化：$L_p(A,\varpi) = cl_p(A)$，即 L_p-巴拿赫空间。对于 $p=2$，这重述了定义 *2.42*。对于 $p=\infty$，定义 $L_\infty(A,\varpi) = cl_\infty(A) = C^*(A) = B(A) \equiv W^*(\Upsilon(A))$，其中 $\|a\|_\infty = \|a\|_\infty$ 是 $L(A)$ 的算子范数（参见注 *2.52*）；这是一个代数。

这些范数下的收敛称为在 p阶均值下的收敛。如例*10*所示，可以构造

$$\mathrm{L}_{\infty-}(\mathcal{A},\varpi) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{L}_p(\mathcal{A},\varpi),$$

这仍然是一个代数。

注意，对于 p 的L_p范数，也可以不借助谱演算，通过式（2.40）中的最后一个表达式来定义。

一般而言，对于 $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$，有如下包含关系（自然连续嵌入）：

$$\mathrm{L}_\infty(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{L}_{\infty-}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{L}_q(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{L}_2(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{L}_p(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{L}_1(\mathcal{A}),$$

$L_q(\mathcal{A})$ 是 $L_p(\mathcal{A})$ 的对偶空间。这段简短的探讨旨在说明如何在非交换情形下引入这些 L_p 空间。然而，在有限维情形下，$L_p(\mathcal{A})$ 作为向量空间都相同，且都等于 $\mathcal{A}$，但它们各自带有不同的范数或度量。尽管如此，由于有限维空间上的所有向量空间拓扑都等价，因此在这种情形下，所有 p 阶均值收敛也都等价。

如果该代数还具有阿贝尔性或交换性，例如作为某个可能是非交换概率代数 $\mathcal{A}$ 的阿贝尔子代数 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，则还可以进一步说明：

命题 2.79（阿贝尔W^*-代数）。除命题 *2.77* 中的假设外，假设 $\subseteq\mathcal{A}$ 是交换的或阿贝尔的，但不一定是 W^*-子代数。那么

- 阿贝尔或交换概率子代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 可以嵌入一个极大阿贝尔子代数，即 *MASA*（参见定义 *2.12*），而事实上它就是其交换子 $\mathcal{C} = \mathcal{B}\prime$，即 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}\prime = \mathcal{C} = \mathcal{B}\prime\prime \subseteq \mathcal{A}$，参见命题 *2.77*。该 *MASA*$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$是一个$W^*$-子代数，因为它满足命题 *2.77*中的冯·诺伊曼双交换子定理；
- 每个元素 $b \in B$ 都是正规元素；
- 谱 $\Omega := \mathsf{X}(B) = \mathrm{ext}\mathsf{S}(B)$ 非空、弱-*紧，其极端点（纯态）构成态的弱-*紧凸集 $\mathsf{S}(B) \subset B^*$。任一元素 $\omega \in \Omega$ 都是一个 *-代数同态 $\omega : B \to \mathbb{C}$（一个样本）；
- *(克莱因-米尔曼)* 态集$\mathsf{S}(B)$ 是谱的凸包的闭包：$\mathsf{S}(B) = \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\mathsf{X}(B)$;
- 对于 $b \in B$，有 $\lambda \in \sigma(b)$ 当且仅当存在一个 $\omega \in \Omega : \omega(b) = \langle \omega, b\rangle = b(\omega) = \lambda$。换言之，映射（滥用记号，再次记为 b）$b : \Omega \to \sigma(b) \subset \mathbb{C}$ 由 $b : \omega \mapsto b(\omega)$ 给出，它是连续且满射的；
- *(盖尔范德-诺伊马克)* 有 $\mathcal{B} \cong \mathrm{C}(\Omega)$，即该代数同构于由 所有连续的定义在弱-*紧 *Hausdorff* 空间 $\Omega = \mathsf{X}(\mathcal{B})$上的复值函数构成的代数。这类代数见例 *11*。这个同构称为 盖尔范德变换；
- 两个阿贝尔 W^*-代数 C_1, C_2 *-同构当且仅当 其谱 $\Omega_1 = \mathsf{X}(C_1)$ 和$\Omega_2 = \mathsf{X}(C_2)$ 同胚。

- *(黎斯-马尔可夫-角谷定理)* 由于 $\varpi \in \mathsf{S}(B) \subset B^*$ 是 $B \cong \mathrm{C}(\Omega)$上的正连续泛函，因此存在一个拉东概率测度 $\mu_\varpi \in \mathrm{C}(\Omega)^*$，使得对所有 $a \in B$，均有

$$\langle \varpi, a\rangle = \varpi(a) = \int_\Omega a(\omega)\, \mu_\varpi(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega \langle \omega, a\rangle\ \mu_\varpi(\mathrm{d}\omega).$$

- 反过来，任意拉东概率测度 $\nu \in \mathrm{C}(\Omega)^*$ 都能以这种方式导出一个态$\varpi_\nu \in \mathsf{S}(B)$。这也可以表述为$\mathsf{S}(B) = \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\mathsf{X}(B)$，并且它建立了$\mathsf{S}(B)$ 与 $\Omega = \mathsf{X}(B)$上的拉东概率测度之间的对应关系；

- *(冯·诺伊曼)*存在一个 $a \in B_{sa}$，使得任意 $c \in B$ 都是 a 的一个函数 $f_c : c = f_c(a)$；如果 B 是有限维的，这个函数可以表示为 $a \in B_{sa}$中的一个关于 a 的多项式。该 a 具有谱分解 $a = \sum_{\lambda_j \in \sigma(a)} \lambda_j p^{\lambda_j}$，其中 p^{λ_j} 彼此可交换且互相正交，是极小投影，即一个投影值测度；

- 存在一个投影值测度 $M = \{p_j\}_{(j=1\ldots m)}$，由互相正交的极小投影组成，且这些投影构成单位分解，使得 $B = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} M$。这些投影可以取为上文 $a \in B_{sa}$ 对应的投影，$p_j = p^{\lambda_j}$。

有限维 W* 代数的结构：这里的想法是将任意有限维概率代数分解为更简单的部分，这是一个不使用态的纯代数结果。这可以看作环的韦德伯恩–阿廷定理的一个版本。这些更简单的部分就是因子，即具有单的、亦即平凡中心的代数：

定义 2.80 （因子）。一个 W*代数 $\mathcal{A}$ 称为因子，当且仅当其中心（参见定义 *2.11*）是平凡的，即它仅由乘法单位元的标量倍组成：$\mathrm{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}[1]$。

对任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，注意到 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个因子。注意 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个因子，实际上是 I_n 型因子，例如参见 [87, 86, 33, 34, 138, 139, 140, 28]。不久将会清楚，任意有限维因子本质上都是这种形式。接下来，代数中心中的极小投影将起决定性作用。

定理 2.81 (极小投影的作用)。设 A 是有限维幺正 W*-代数。有限维 W*-代数中的任意理想 $I \subseteq A$ 都具有形式 $I = qAq = Aq$，其中 $q \in \mathrm{Z}(A)$ 是某个中心投影，且 $q \in C$ 在 I 1_I 上充当乘法单位元。

设 $p \in Z(A)$ 是代数中心中的一个极小投影。则理想 $C := pAp = Ap = \{pap \mid a \in A\} \subseteq A$ 是一个因子，其中心为 $Z(C) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p\} = \mathbb{C}[1_C]$，参见 *[138, 71]*。这样的因子 C 与一个全矩阵代数 *-同构 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$，或者与 $L(K)$ 同构，其中 $\dim K = m$，另见定理 *2.84*。维数 $m = \dim K$ 是极大阿贝尔子代数 $B \subseteq C$ 的维数，参见 *[138]*，，这表明因子 C 的维数满足 $\dim C = m^2 = \dim \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$。

注意，由于 $p \in \mathrm{Z}$(复数域) 在定理 2.81 中是极小的，根据该定理的第一部分，复数域 没有非平凡的子理想，因此是单的，参见定义 2.12。此外，定理 2.81中的那些 *-同构是在 $\mathbb{C}^m$ 或 $\mathcal{K}$上的表示；而作为全矩阵代数的 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$或全算子代数 $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ 没有非平凡的真不变子空间（参见定义 2.43），因此这个因子的表示是 不可约的。

定理 2.82 (因子分解)。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限维幺正 W*-代数，其中心为$\mathrm{Z}(\mathcal{A})$。该交换子*-代数的谱（参见定义*2.6*），，

Ω = 复数域(Z($\mathcal{A}$))是一个有限集，设为 $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$。对于每个 $k \in 1, \ldots, K$，令 $p_k \in$ P(Z($\mathcal{A}$)) 为满足 极小中心投影 的条件 $p_k(\omega_j) = \delta_{kj}$，参见 *[138]*。

有 $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$，并且对于复数域$_k = \mathcal{A}p_k = p_k\mathcal{A}p_k$，代数分解为若干因子——实际上是单理想——如下：$\mathcal{A} = \oplus_{k=1}^{K}$复数域$_k$，参见定理 *2.81*。

每个因子 复数域$_k$ 都与一个全矩阵代数 *-同构 $\mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C})$，或者与 $\mathcal{L}(\mathcal{K}_k)$ * 同构，其中维数 $\mathcal{K}_k = m_k$，参见定理 *2.81*。因此可得以下 *-同构

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus_{k=1}^{K} \mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{k=1}^{K} \mathcal{L}(\mathcal{K}_k). \tag{2.41}$$

总的来说，这些 *-同构是在 $\oplus_{k=1}^{K} \mathbb{C}^{m_k}$ 或 $\oplus_{k=1}^{K} \mathcal{K}_k$上的双射 *-表示，即不可约表示的直和（参见定义*2.43*）。每个 $\mathbb{C}^{m_k}$ 或$\mathcal{K}_k$ 都是不可约不变子空间，而直和则体现了该代数的内在对称性。

正如我们先前在备注 2.46 中所见，任何有限维代数都可以表示为矩阵子代数，而有限维概率代数同构于某个有限维希尔伯特空间上的冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{L}(\mathscr{H})$（参见定理 2.53），或者是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的矩阵子代数（参见推论 2.55），因此需要指出，定理 2.81中的 *-同构和表示并非通过 GNS 构造得到，而是通过所谓的 矩阵单位得到，参见 [138]。

在定理 2.82 中，代数 A 满足 dim A $= n = \sum_{k=1}^{K}$ dim C$_k$ $= \sum_{k=1}^{K} m_k^2$ as dim $\mathbb{M}_{m_k} = m_k^2$，表示作用在 $\mathbb{C}^m = \oplus_{k=1}^{K} \mathbb{C}^{m_k}$ 上，并且具有 $m = \sum_{k=1}^{K} m_k$。从某种意义上说，对于给定的代数 A，这是可能的 m 最小的表示。另一方面，在定理 2.53 中表示的 GNS 构造里，正则表示作用在 $\mathscr{H}$ 上，且 dim $\mathscr{H}$ = dim A $= n$，位于 $\mathscr{H}$的算子代数中，其中 dim L($\mathscr{H}$) $= n^2$。

因此，比较定理2.53中的 GNS 构造与定理 2.82中的因子表示，对于相应的希尔伯特空间，有 $n =$ 维数$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{K} m_k^2 \geq m = \sum_{k=1}^{K} m_k$；并且如同这一关系中，等号仅当所有 $m_k = 1$时成立，这又是膨胀，也即“更大希尔伯特空间教会”的一个例子。对于代数而言，差异甚至更大，因为 维数 $\mathcal{L}(\mathscr{H}) = n^2 > n =$ 维数$\mathcal{A}$。不过，GNS 构造的优点之一是存在循环分离向量，即“纯化”。

如何将此转化为冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 或含幺 *-子代数$\mathcal{M} \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，是相当显然的；在这些具体代数上，表示的重数 会介入，并且同构可通过酉等价加以细化。

定理 *2.83*（因子分类）。设 *H* 为 n 维希尔伯特空间，并设冯·诺伊曼子代数 *F* $\subseteq$ *L(H)* 是中心为 $\mathbb{C}[I_{\mathcal{H}}]$ 的因子。则 *H* 酉等价于两个有限维希尔伯特空间 *K* $\otimes$*N* $\equiv$*H* 的希尔伯特张量积——维数 *K* $= m$，维数 *N* $= \ell$ 且 $n = m\ell$——使得因子 *F* 酉等价于 *L(K)* $\otimes \mathbb{C}[I_{\mathcal{N}}]$，例如参见 *[39, 71]*。此处 $I_{\mathcal{N}}$ 是 *N* 上的单位元。因子 *F*（作为 *-代数）与 *L(K)* *-同构。交换子 *F′* 酉等价于$\mathbb{C}[I_{\mathcal{K}}] \otimes$ *L(N)*。

含有极小投影（参见定义 2.12）的因子归类为 I 型因子。此外还有 II 型和 III 型因子，此处无需讨论。显然，任何形如 B(K) 的因子（其中 K 为希尔伯特空间）都是 I 型，因为极小投影是一维投影，即 $|\xi\,\xi| \in$ P(B(K))，其中$|\xi \in$ K 是单位向量。更准确地说，若 dim K $= \ell$，则 B(K) 称为 I 型$_\ell$ 因子，$\mathbb{M}_\ell(\mathbb{C})$ 也如此。定理 2.83 在更广泛的语境下成立：

定理 2.84 (Murray- 冯·诺伊曼)。 如果 W*-代数 $\mathcal{A}$ 是 I 型 因子，则它与 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 同构，其中 K 是某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，例如 *[88]*。

由于所有有限维含幺 *-代数都与某个$\mathcal{L}(\mathcal{K})$ 上的子代数 *-同构，其中$\mathcal{K}$ 是有限维希尔伯特空间（参见定理 2.53和定理 2.82），因此任何有限维因子都是 I 型I 因子。定理 $\mathcal{F}$ 中的因子 2.83是 I 型I$_m$因子，定理 $\mathcal{C}$ 2.81中的因子也是如此。

通过选取一组标准正交基（参见推论 2.83 ，将定理 2.46）中的抽象希尔伯特空间情形转化为矩阵（参见注 2.55），即可得到矩阵表示：

推论 2.85 (矩阵代数因子)。 设矩阵 *-子代数 $M \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个中心为 $\mathbb{C}[\boldsymbol{I}_n]$的因子，其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵。则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，使得

$$\boldsymbol{U}\mathcal{M}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[\boldsymbol{I}_\ell],$$

其中 $\boldsymbol{I}_\ell \in \mathbb{M}_\ell(\mathbb{C})$ 是 $\ell \times \ell$ 单位矩阵，且 $n = m\,\ell$；例如参见 *[39]*。对于交换子 $M' \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，有 $\boldsymbol{U}M'\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \mathbb{C}[\boldsymbol{I}_m] \otimes \mathbb{M}_\ell(\mathbb{C})$。

现在将上述结果用于子代数[138, 152, 39, 71], 中心中的投影，以对应于定理2.82：

定理 *2.86*（希尔伯特空间因子分解）。设 $Q \subseteq L(H)$ 是有限维希尔伯特空间 H 上的含幺冯·诺伊曼子代数。回顾一下，中心 $Z(Q) \subseteq Q$（参见定义 *2.11* 和例 *12*）是一个交换的冯·诺伊曼子代数，由一组彼此正交的极小投影构成的投影值测度 $M = \{P_k\}_{(k=1,\ldots,K)}$ 张成，参见命题 *2.79*、定义 *2.21* 和注 *2.90*。令 $H_k := P_k(H) = \mathrm{im}\, P_k$，于是 $H = \bigoplus_{k=1}^{K} H_k$ 是一个正交直和。

对于每个 $k = 1, \ldots\ldots, K$，构造冯·诺伊曼子代数$\mathcal{F}_k := P_k\mathcal{Q}P_k \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_k)$根据定理*2.81*，它们都是因子。于是$\mathcal{Q} = \bigoplus_{k=1}^{K}\mathcal{F}_k$ （参见定义*2.69*），即因子代数的直和。

由定理*2.83* 可知，每个$\mathcal{H}_k \equiv \mathcal{K}_k \otimes \mathcal{N}_k$ 都酉等价于两个希尔伯特空间的张量积，因此

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{K} \mathcal{H}_k \equiv \bigoplus_{k=1}^{K} \big(\mathcal{K}_k \otimes \mathcal{N}_k\big). \tag{2.42}$$

此外，将因子$\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_k)$ 视为作用在$\mathcal{H}_k$上的代数，由定理*2.83*可知，它酉等价于$\mathcal{L}(\mathcal{K}_k) \otimes \mathbb{C}[I_{\mathcal{N}_k}]$。因此

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{k=1}^{K} \mathcal{F}_k \equiv \bigoplus_{k=1}^{K} \big(\mathcal{L}(\mathcal{K}_k) \otimes I_{\mathcal{N}_k}\big). \tag{2.43}$$

证明。从下式可以很快看出空间分解：

$$\mathcal{H} = I_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=1}^{K} P_k(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=1}^{K} \mathrm{im}\, P_k = \bigoplus_{k=1}^{K} \mathcal{H}_k.$$

代数分解可由下式推出：

$$\mathcal{Q} = I_{\mathcal{H}}\mathcal{Q}I_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{k=1}^{K} P_k\right) \mathcal{Q} \left(\sum_{j=1}^{K} P_j\right) = \sum_{k,j=1}^{K} P_k\mathcal{Q}P_j = \bigoplus_{k=1}^{K} P_k\mathcal{Q}P_k,$$

如同 $P_kP_j = \delta_{kj}P_k$，并且对于 $k \neq j$ 有 $P_k\mathcal{Q}P_j = \mathcal{Q}P_kP_j = \{\mathbf{0}\}$。因此它约化为$\bigoplus_{k=1}^{K} P_k\mathcal{Q}P_k = \bigoplus_{k=1}^{K}\mathcal{F}_k$。 □

这　如今很容易转化为矩阵的图像和语言，例如参见 [39]　　：

推论 *2.87*（矩阵因子分解）。设 $M \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为一个幺正 *-子代数。设 $Z = Z(M)$ 为其中心，以及极小投影的一个投影值测度（参见定义 *2.21*） $M = \{\boldsymbol{P}_k\}_{k=1}^K \subset Z$，使得 Z = 张成空间 M。根据定理 *2.81*，每个 $\boldsymbol{P}_k M \boldsymbol{P}_k$ 是一个因子，且 $M = \oplus_{k=1}^K \boldsymbol{P}_k M \boldsymbol{P}_k$，因此存在一个酉矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，使得

$$\boldsymbol{U}\mathcal{M}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \left(\oplus_{k=1}^K \mathcal{M}_k\right), \tag{2.44}$$

其中每个 $\mathcal{M}_k \subseteq \mathbb{M}_{n_k}$ 都是同构于 $\boldsymbol{P}_k \mathcal{M} \boldsymbol{P}_k$ 的因子，$n_k = \operatorname{tr} \boldsymbol{P}_k$，并且 $n = \sum_{k=1}^K n_k$。由推论 *2.85* 可知，可以选取 $\boldsymbol{U}$ 使得每个

$$\mathcal{M}_k = \mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[\boldsymbol{I}_{\ell_k}], \quad with \quad n_k = m_k \ell_k. \tag{2.45}$$

等价地，每个 $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}$ 根据式（*2.44*）变换后，具有分块对角形式

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_K \end{bmatrix} = \bigoplus_{k=1}^K \boldsymbol{A}_k, \tag{2.46}$$

其中 $\boldsymbol{A}_k \in \mathcal{M}_k \subseteq \mathbb{M}_{n_k}(\mathbb{C})$，并且根据式（*2.45*），对于某些 $\hat{} \ \boldsymbol{A}_{m_k} \in \mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

$$\boldsymbol{A}_k = \hat{\boldsymbol{A}}_{m_k} \otimes \boldsymbol{I}_{\ell_k} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{A}}_{m_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\boldsymbol{A}}_{m_k} \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

注释 2.88 (重数)。根据定理 *2.81*和定理*2.82*，该分解是通过*-同构实现的。但请注意，根据推论 *2.87*中最后两个方程（*2.46*）和（*2.47*），对于随机变量 $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{sa}$，谱 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 中的一个值——一个特征值，因而也是样本或观测中可能出现的值——必须出现在方程（$\sigma(\boldsymbol{A}_k)$ 中的某个 $\boldsymbol{A}_k \in \mathcal{M}_k \subseteq \mathbb{M}_{n_k}$ 里。方程（*2.46*）表明，该特征值的重数至少为 ℓ_k。

该重数 ℓ_k 是通过酉等价建立的，其依据是底层希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k$，分别为 $\mathbb{C}^{n_k}$；这是一种更精细的 *-同构形式。重数 ℓ_k 是表示的一个特征，此处为 *GNS* 表示，参见定理 *2.53*；而维数 m_k 是抽象代数的内在性质$\mathcal{A}$，与任何表示无关。

这些类似的分解，即定理 2.43中的方程（2.86），推论 2.87中的方程（2.44）和（2.46），以及定理2.41）2.82中的方程，都以类似的方式表明了代数中的内部对称性。关于这一点的更多信息，例如参见 [58] 及其中的参考文献。本文不再进一步讨论这一主题，仅作几点说明；通过查看方程（2.41）以及方程（2.44）–（2.47），即可轻松理解这些说明。从方程（2.41）可见，每个 $\mathbb{C}^{m_k}$ 在 $\mathbb{C}^m = \oplus_{k=1}^K \mathbb{C}^{m_k}$ 中都是一个不可约不变子空间，而这种分解体现了代数 $\mathcal{A}$的内在对称性。

在变换形式下的方程(2.44)–(2.47)中，有 $\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^K \mathbb{C}^{n_k}$；由方程(2.46)显然可知，每个 $\mathbb{C}^{n_k}$ ——它是其中一个因子的表示的载体 $\mathcal{M}_k$ ——在所有 $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}$作用下均不变。这是方程(ℓ_k)中形式的一个放大版本（放大因子为 ℓ_k），它源自将代数表示或实现为某个“更大”的全代数 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^n$上的子代数。这正是备注2.88中提到的重数的成因，因为方程(2.45)和(2.47)表明

因子的表示在相应的$\mathcal{M}_k$上的表示还可能进一步约化为至多 ℓ_k 个重复的相同的不可约表示或该因子$\mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C})$的实现，如 $\mathbb{C}^{n_k} = \bigoplus_{j=1}^{\ell_k} \mathbb{C}^{m_k}$。

请注意，到目前为止，这些结构结果完全没有用到代数上的一个可能的态，而该态承载着概率信息。

注 2.89 (概率结构解释)。 回顾定义 *2.68*中直积的构造，以及定义 *2.69*中与之等价的直和构造，可以看出，上述分解正是这些构造，即代数的直和，事实上是因子的直和。回顾这一构造的解释，在定义 *2.69* 之后曾指出，这正是所谓的混合。它等价于对经典的、即交换代数进行抽样，然后决定后续操作采用哪个直和项。

还可以回想一下，在上述定理 *2.82* 的式 *(2.41)* 中，每个直和项 $C_k = p_k A p_k$ 都是一个因子，由代数中心中的一个极小投影 $p_k \in Z(A)$ 产生，参见定理 *2.81*。现在，若 $\varpi \in S(A)$是代数当前的态，那么直和中的每个因子 C_k 都以概率 $\alpha_k = \varpi(p_k)$ 被选中。显然，由于中心中的极小投影构成一个单位分解，$\sum_k p_k = 1$，因此有 $\sum_k \alpha_k = 1$。

投影测量：前文表明，在描述概率代数时，投影具有重要作用，尤其是当我们认识到，在有限维情形下，它们总是 W*-代数。这些代数由其投影生成，因此此处正是讨论与投影测量相关的扩展测量概念的恰当时机。

在定义 2.21 中，已经在特殊的 W*-代数 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$上引入了投影值测度（PVM）的概念，也在命题 2.77中于抽象框架下作了介绍。事实证明，这些概念描述了最基本的测量。这一发展也同样适用于推论 *2.55*中表示 A 的子代数。接下来，需要将其转化为定理 2.53中由 GNS 构造得到的希尔伯特空间表示，该表示作用于有限维希尔伯特空间 $\mathscr{H}$。随后，在命题 2.77中将其推广到抽象的 W*-代数。。

注 2.90 （投影测量与投影值测度（PVM）——希尔伯特空间设定）。 考虑投影值测度（*PVM*），在希尔伯特空间设定下，与定义 *2.21* 类似的定义可表述如下：根据谱理论（例如 $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})_{sa}$，每个自伴 *[131]*都具有类似于式（*2.38*）的谱分解：

$$A = \sum_{\lambda_k \in \sigma(A)} \lambda_k P_{\lambda_k}, \tag{2.48}$$

其中 P_{λ_k} 是到特征子空间 $\mathscr{H}_{\lambda_k} \subseteq \mathscr{H}$上的正交投影；它可表示为 A的多项式（参见命题 *2.77*）。这些正交且两两正交的投影构成一个投影值测度（*PVM*），并且如定义*2.21*和命题 *2.77*中所述，生成一个等于 $\mathbb{C}[A]$的交换子代数。每个这样的交换子代数都可以通过将投影值测度（*PVM*）中的投影分解为极小投影，扩展为或嵌入到一个极大阿贝尔子代数（*MASA*）中。

和之前一样，可能的锐观测是谱 $\sigma(A)$中的元素，例如 $\omega_k(A) = \lambda_k$ 以概率 $p_k := \varpi(P_{\lambda_k})$ 发生，其中某个 $\omega_k \in \mathsf{X}(\mathbb{C}[A])$称为投影测量或锐观测。这样的锐观测是一个特征 $\omega_k \in \mathsf{X}(\mathbb{C}[A])$，因此

必须是$\mathsf{S}(\mathbb{C}[A])$的一个极点。在有限维情形下，这些都具有形式$\omega_k(A) = \mathrm{tr}(|\psi_k\rangle\langle\psi_k| A)$，对应一个向量态，其中 $\psi_k \in \mathscr{H}$是 A的单位特征向量，即$A\psi_k = \lambda_k\psi_k$。如前所述，单位向量 ψ_k 通常也称为态或态向量，这是该概念最初的含义，即以$\mathscr{H}$为模型、其可观测量由 A（分别由 $\Upsilon(A)$ 描述的系统，已经过测量或处于态 ψ_k。

如前所述，式（2.48）中的这类两两正交投影构成单位分解，并形成一个投影值测度

$$\Pi_H : 2^X \ni \{x\} \mapsto P_x \in \mathrm{P}(\mathcal{B}(\mathscr{H})), \tag{2.49}$$

其中 $\sigma(A)$ 已替换为有限集 X，参见注 2.22。如果进行观测$\omega_x(P_x) = 1$，则可以说结果是 $x \in X$。

注 2.91（抽象投影值测度（PVM））。考虑一个可观测量 $a \in A_{sa}$，$a^\star = a$，其谱分解如式（2.38）所示。可能的观测结果是谱 $\sigma(a)$ 中的元素，例如 $\omega_k(a) = \lambda_k$，其概率为 $p_k := \varpi(p_{\lambda_k})$，其中$\omega_k \in X(\mathbb{C}[a])$。在这种情况下，已知对于投影值测度$\sigma(a) \supset \{\lambda_k\} \mapsto p_{\lambda_k} \in P(A)$ 中相应的投影，有 $\omega_k(p_{\lambda_k}) = 1$，而对于所有其他投影，则有 $\omega_k(p_{\lambda_j}) = 0$，对于 $\lambda_j \neq \lambda_k$（这些是锐观测）。因此，知道 $\omega_k(p_{\lambda_k}) = 1$——也就是说，由 p_{λ_k} 编码的事件为真，或者系统处于被 p_k 覆盖的态——等价于知道 a 的值为 λ_k。对投影值测度中的投影进行这类锐观测，又称为投影测量或投影观测。

一个更一般的投影值测度（PVM）是如下映射

$$\Pi_X : 2^X \ni \{x\} \mapsto \Pi_X(\{x\}) = p_x \in \mathrm{P}(\mathcal{A}), \tag{2.50}$$

满足定义 2.21 和注 2.22中列出的要求，即

$$\sum_{x\in X} p_x = 1_{\mathcal{A}}, \quad \textit{and} \quad \forall x, y \in X : \; p_x\, p_y = \delta_{xy}\, p_x. \tag{2.51}$$

并且，如定义 2.21、命题 2.77和注 2.90中所述，该投影值测度生成一个交换子代数

$$\mathrm{span}\{\Pi_X(\{x\}) \mid x \in X\} = \mathbb{C}[\{\Pi_X(\{x\})\}] \subseteq \mathcal{A}.$$

每个这样的交换子代数都可以通过将投影值测度中的投影分解为极小投影，扩展为或嵌入到一个极大阿贝尔子代数中。

注释 2.92。命题 2.25 将一个原子锐观测与一个向量态（即纯态）联系起来；现在，这一结果已推广到与投影值测度（PVM）相关联的锐观测（参见定义 2.21、注 2.90 中的式 (2.90)、命题 2.77，以及注 2.91 中前述的式 (2.50)）。也就是说，可以谈论由投影 $P_x \in P(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 或 $P_x \in P(B(\mathscr{H}))$ 或 $p_x \in P(A)$ 表示的事件为真或为假。观测锐事件 p_x 意味着 $x \in X$ 必然已经发生。

作为一个同时关联代数结构与投影值测度的最终结果，我们可以看看格里森定理。回想命题 2.77，有限维 W* 代数 $\mathcal{A}$ 由其投影 $\mathrm{P}(\mathcal{A})$生成。由此便产生一个问题：态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$ 是否由其在投影上的行为决定？在经典概率中，也就是对于阿贝尔代数，答案是肯定的。格里森定理对一般情形给出了肯定答案，参见例如 [36]:

定理 2.93 (格里森)。 设 $\mathcal{H}$ 是一个有限维希尔伯特空间，且 维数$\mathcal{H}$ >2，考虑由所有线性映射构成的代数 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$，以及由所有投影 $\mathbf{L}(\mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))$ 构成的格 $\mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ (参见命题*2.25*)。

函数 $\gamma : \mathrm{P}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H})) \rightarrow [0,1]$ 具有这样的性质：对于任意给定的投影值测度

$$\Pi_X : 2^X \ni \{x\} \mapsto P_x \in \mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

定义在一个有限集上 X，类似于注记*2.90* 以及式（*2.51*），由式（*2.51*）可得 $\sum_{x\in X} \gamma(\Pi_X(\{x\})) = 1$，并且对任意子集 $S \subseteq X$，有

$$\gamma(\sum_{x\in S} \Pi_X(\{x\})) = \sum_{x\in S} \gamma(\Pi_X(\{x\})) \tag{2.52}$$

——这意味着它在 X 以及投影值测度 Π_X上定义了一个概率测度，即$\mathbb{P}(\{x\}) := \mathbb{P}(P_x) = \gamma(P_x)$ 如命题*2.18* 中关于布尔代数的结果，类似于命题*2.19*，可以扩展为态 $\gamma \in \mathsf{S}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$。

反过来，一个态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 会在任意投影值测度上诱导出一个概率测度Π_X，并且在 X 上，其定义为 $\mathbb{P}(\{x\}) := \mathbb{P}(\Pi_X(\{x\}(\Pi_X(\{x\})) \in [0,1]$在按命题*2.19*所述方式生成的布尔代数上。

显然，对于任何有限维概率代数，只要其因子分解中不含有与$\mathcal{L}(\mathcal{K})$ 且 维数$\mathcal{K}$ $= 2$ (类型为 I_2 的因子) 同构的因子，该定理也成立，参见定理 2.86 和定理 2.82)

态和投影值测度的结构化表示： 前文从基本定理 2.86 出发，证明了有限维代数的一般结构是因子的直和。该定理针对 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的子代数，其中$\mathcal{H}$ 是有限维希尔伯特空间；由此也得到了推论 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中矩阵子代数的结论2.87，并给出了式（2.46）中的显式公式；此外，定理 2.82也将结果推广至一般抽象代数。忠实表示和 GNS 构造方面的基本结果——定理2.53和推论 2.55——是上述结论的基础。

迄今为止，为描述概率内容而引入的两个概念，一方面是作为一般“是—否”问题系统的投影值测度，另一方面是用于对这些问题产生期望的态。重要的是，态可以通过由适当归一化的迹给出的典范内积来刻画——在有限维空间上，这本质上是唯一的迹态（参见定义 2.1）——并与代数中的元素，即所谓的密度矩阵或算子相对应，详见命题2.33、推论 2.37以及推论 2.56。命题 2.48 中关于态的几何的普遍结果同样适用于密度矩阵集合，参见 [17, 93]。

为简单起见，下面的讨论针对有限维代数 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中的矩阵表示展开，2.87 中对此作了详细说明，并在方程（2.46）和（2.47）中给出了明确公式。随后，将其转换为希尔伯特空间表示，或以抽象代数表述形式给出，都是例行工作。

推论 2.94 （密度矩阵的结构）。 设（$\boldsymbol{M} \subseteq \mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$） $\varpi_{\boldsymbol{R}}$） 为一个概率代数。表示子代数 $\boldsymbol{M}$ 中态 $\varpi_{\boldsymbol{R}} \in \mathsf{S}$（$\boldsymbol{M}$） 的密度矩阵 $\boldsymbol{R} \in \mathrm{D}(\boldsymbol{M})$ 可通过酉变换化为分块对角形式

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{R}_K \end{bmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{K} \boldsymbol{R}_k, \tag{2.53}$$

其中每个 $\boldsymbol{R}_k \in \mathbb{M}_{n_k}(\mathbb{C})_+$。结合推论 2.45中的等式 2.87，对于这些矩阵中的每一个，都有进一步的分块对角形式，且对角块相同 $\hat{}$ $\boldsymbol{R}_{m_k} \in \mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C})_+$

$$\boldsymbol{R}_k = \hat{\boldsymbol{R}}_{m_k} \otimes 1\!\!1_{\ell_k} \boldsymbol{I}_{\ell_k} = \frac{1}{\ell_k} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{R}}_{m_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\boldsymbol{R}}_{m_k} \end{bmatrix}, \tag{2.54}$$

对于 $n = \sum_k n_k$，以及所有 k： $n_k = m_k \ell_k$。此处进行了缩放，使得$\hat{}$tr $\boldsymbol{R}_k = \operatorname{tr} \boldsymbol{R}_{m_k}$。

根据推论 2.87，式 (2.53) 的形式来自式 (2.44) 中代数的直和， $\boldsymbol{UMUH} = \oplus_{k=1}^{K} \boldsymbol{M}_k$；其中每个 $\boldsymbol{M}_k \subseteq \mathbb{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ 都是一个因子，且酉等价于 $\boldsymbol{P}_k \boldsymbol{M} \boldsymbol{P}_k$；其中 $\boldsymbol{P}_k \in \boldsymbol{Z(M)}$，且 $n_k = \boldsymbol{tr}\ \boldsymbol{P}_k$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的中心中的一个极小投影。在注 2.89 中，概率解释是，这对应于一项经典实验：以 $\alpha_k = \boldsymbol{\varpi_R(P_k)}$ 的概率选择要激活哪个直和项。由此，我们可以得出结论：

$$\alpha_k = \boldsymbol{\varpi}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{P}_k) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_k) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}_k \boldsymbol{R} \boldsymbol{P}_k) = \operatorname{tr} \boldsymbol{R}_k = \operatorname{tr} \hat{\boldsymbol{R}}_{m_k}.$$

这种代数结构适用于所有密度 $\boldsymbol{R} \in \mathrm{D}(\mathcal{M})$，现在可以与命题 2.33 中展示的线性代数结构结合起来。密度矩阵集合被证明是不同秩的密度的互不相交并集， $\mathrm{D}(\mathcal{M}) = \uplus_{r=1}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M})_r$，其中$\mathrm{D}(\mathcal{M})_r$ 是秩为 r 的密度矩阵。

现在可以从 D(M) 的几何结构来理解这种组合结构。命题 2.48 指出，态 $\boldsymbol{\varpi} \in \mathrm{S(A)} \subset \mathrm{A}^{+} \subset \mathrm{A}^{sa} \subset \mathrm{A}^{\star}$ 属于对偶正锥 A^{+}。由于态是自伴的，因此都可以在实空间 A^{sa}中表示。所以，归一化条件 $\boldsymbol{\varpi}, 1 = 1$ 确定了一个超平面 $\mathrm{T} \subset \mathrm{A}^{sa}$；因此 $\mathrm{S(A)} = \mathrm{A}^{+} \cap \mathrm{T}$。应当注意，这个超平面与子空间$\mathbb{R}[1] \subset \mathrm{A}^{sa}$正交。由命题 2.33 可知，对于任意$\boldsymbol{\varpi} \in \mathrm{S(A)}$的矩阵表示，都存在唯一的密度矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\varpi}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{sa}$。密度矩阵必须为正且归一化，因此 $\mathrm{D}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+ \cap \{\boldsymbol{R} \mid \operatorname{tr} \boldsymbol{R} = 1\}$同样位于正锥与超平面的交集上。再次注意，超平面 $\{\boldsymbol{R} \mid \operatorname{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}) = 1\}$垂直于一维子空间（即直线） $\mathbb{R}[\boldsymbol{I}] \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{sa}$。

3 代数概率的发展

迄今为止，讨论的重点主要是这一主题的代数方面，只需涉及极少的解析概念。通过聚焦于有限维代数，大多数分析困难都得以避免。如今已经明确，代数观测量可能观测到的值是其谱中的元素。因此，要处理连续分布随机变量，相应的表示映射必须是无限维希尔伯特空间上的算子。而要处理无界随机变量，则必须研究无限维希尔伯特空间上的无界算子，以及由此可能带来的所有困难。对此领域感兴趣的读者可参阅近期出版的专著 [121] 及其中的参考文献。

这里我们继续讨论有限维概率代数中的观测。非交换性会带来一些出人意料的后果，例如海森堡不确定性关系和贝尔–科亨–斯佩克定理[1] 。

[1]它通常被称为柯亨-施佩克定理。但事实证明，约翰·斯图尔特·贝尔实际上早在1966年就证明了该定理，比西蒙·科亨和恩斯特·施佩克早了一年。

从作为样本或特征的观测（参见定义 2.6），以及它们的推广——投影值测度（PVM，参见注 2.20、命题 2.77和注 2.91）出发，我们在第 *3.1* 节考察赋值。这些运算可视为信息传输的例子。第 *3.2* 节简要介绍了更一般化的测量或观测，即正算子值测度（POVM）。由此，我们简要探讨如何对一般的信息传输进行建模，这一概念称为量子信道。这也是一种建模方式：将来自经典系统——交换概率代数——的输入信息传递至一般的、可能非交换的系统，以对 QLB 效应进行建模；再将此信息传输至其他此类系统，最后在经典系统中读出或输出（通过 POVM 测量）。另一个重要主题是根据观测所提供的信息更新概率和期望值；这也可以通过信道的图景来处理。

最后，我们会探讨经典概率论的一个主题，其中可以运用代数概率的方法，从而对图、反应网络、随机游走和马尔可夫链等问题产生新的见解。这就是所谓的经典对易随机变量的量子分解。在第 3.3 节中，为了分析的目的，这些随机变量被嵌入福克空间上的非对易算子代数中。

3.1 观测与赋值

在定义 2.6 中，我们定义了交换*-子代数 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 中元素的观测；结果表明，它们是乘法保持态$\mathsf{X}(\mathcal{C})$，即 *-代数同态。由于其像 $\mathbb{C}$ 是交换的，因此显然，在一般情况下，非交换概率代数上不存在非零的一维 *-代数同态。因此，人们可能会尝试减少一些要求 [124], ，至少在 $\mathcal{A}_{sa}$上定义一个类似的函数，从而引出赋值这一概念。

定义 3.1（观测与取值）。自伴随机变量 $a \in A_{sa}$ 在某个态 $\alpha \in \mathsf{S}(A)$ 中具有确定值；若满足以下任一等价条件，原则上即可对其进行观测。

1. $\mathrm{var}_\alpha(a) = 0$ ——该态无色散；*2.* α 是纯态，参见命题*2.48*；*3.* $\alpha(a^2) = \alpha(a)^2$。

1.)与3.)等价这一点显然可由 $\mathrm{var}_\alpha(a) = \alpha((a - \alpha(a)1)^2) = \alpha(a^2) - \alpha(a)^2$, 得出；至于其与2.)的等价性，参见例如 [124]。由3.)和 $\alpha(1) = 1$ ——后者在此由 $\alpha \in \mathsf{S}(A)$推出，但对任何合理的取值赋予都应要求这一条件——通过与命题 2.8 中相同类型的论证可得 $\alpha(a) \in \sigma(a)$，也就是说，“取值”必须属于该随机变量的谱。回顾一下，参见命题 2.48，特征 $\omega \in \mathsf{X}(A)$——若 $\mathsf{X}(A)$ 非空——显然满足3.)，因而也满足其他条件。

回顾命题 2.18 中特征对投影的作用可知，对于投影 $p \in \mathsf{P}(A) \subset A_{sa}$，有 $0 \leq \alpha(p) = \alpha(p^2) = \alpha(p)^2$, ，因此 $\alpha(p)$ 只能取两个值之一：$\alpha(p) = 0$ 或 $\alpha(p) = 1$，这与特征的情形相同。根据命题 2.8 可知，这两个值也是投影 p 的谱中唯一的值，$\sigma(p) \subseteq \{0,1\}$。

一组自伴随机变量在某个态中具有联合确定值 α，当且仅当它们联合生成的代数存在一个满足定义3.1的态。由此可以得到以下定理 [124, 79]:

定理 3.2。一组可观测量／随机变量在某个态中具有联合确定值 $\alpha \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$ ——这取决于该组可观测量和态——当且仅当它们相容，也就是说当且仅当它们对易。由定义*3.1*可知，在这种情况下 α 必为纯态。在交换概率代数上，纯态就是特征。

从另一个角度看待这一主题，可以引入所谓的 不确定性关系，参见[132]；该关系最初由海森堡提出，后经罗伯逊改写，再由薛定谔扩展 [123]，，在等式（3.1）右侧加入第二项，如此处根据定义2.64所示：

定理 3.3 (海森堡不确定性关系)。 设 A 是一个含幺 *-代数。对于任意态 $\alpha \in \mathsf{S}(A)$ 以及任意两个自伴随机变量 a、$b \in A_{sa}$，有

$$\operatorname{var}_\alpha(a)\ \operatorname{var}_\alpha(b) \geq \left|\frac{\alpha([a,b])}{2}\right|^2 + \left|\Re(\operatorname{cov}_\alpha(a,b))\right|^2 . \tag{3.1}$$

定理 3.3 是柯西–施瓦茨不等式的推论。从等式（3.1）可以看出，除非 $\alpha([a,b]) = 0$，例如 a 和 b 对易且其协方差的实部为零，否则两个随机变量不可能在同一个态中同时具有确定值。回想定义 2.64，若 $\alpha \in \mathsf{X}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{S}(\mathcal{A})$ 是一个特征——这种情形通常只存在于交换代数中——则其协方差为零，方差也为零，任何交换子的值亦为零，即对所有 $a、b \in \mathcal{A}$，都有 $\alpha([a,b]) = 0$。因此在这种情况下，等式（3.1）两边均为零；这就是经典情形。

最后两个定理，即定理 3.2和定理 3.3，实际上告诉我们：为随机变量赋予确定值的态（参见定义 3.1）必须是纯态（定理 3.2），并且它们所适用的随机变量必须对易或相容。因此，为了描述一组相容随机变量的观测，人们总可以考虑交换概率子代数 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，即它们所生成者。在这样的交换代数上存在特征，这些特征是纯的，并且满足不确定性关系式（3.1）（出自定理 3.3），该关系恒等成立，从而两边均为零。这样的交换或阿贝尔概率子代数 $\mathcal{C}$ 被称为经典语境，因为它所描述的情形是：所有相关随机变量可以同时被观测／测量，或同时具有确定值，且不确定性关系被恒等满足。

这些阿贝尔子代数可以赋予由集合包含给出的偏序。概率代数 $\mathcal{A}$ 的、按集合包含排序的阿贝尔子代数偏序集称为其 经典语境。对于每一个这样的交换或阿贝尔概率子代数 $\mathcal{C}$，都有 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$，即它嵌入其交换子中（参见定义 2.12）；由于该交换子再次是阿贝尔的，根据佐恩引理可知存在极大阿贝尔子代数（参见定义2.12），并且每一条包含关系链都有一个极大元，即这样一个极大阿贝尔子代数。因此，任何一个这样的经典语境，作为阿贝尔或交换概率子代数 $\mathcal{C}$，都可以嵌入某个极大阿贝尔子代数，而该极大阿贝尔子代数实际上就是它的交换子 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{A}$，参见定义 2.12 和命题 2.79。

显然，某个阿贝尔子代数 $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ 可能同时是两个（或更多）不同极大阿贝尔子代数的子集，例如 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$，而它们并不对易，$[\mathcal{B},\mathcal{C}] \neq \{0\}$。但是，在每个阿贝尔子代数（$\mathsf{X}(\mathcal{B})$ 和 $\mathsf{X}(\mathcal{C})$）（经典语境）上给出观测的特征可能彼此不同。

因此可能出现的问题——由于给出每个阿贝尔子代数上的值或观测的特征可能彼此不同——是：某个可观测量／随机变量 $x \in \mathcal{S}$ 会因在哪个更大的语境（即 $\mathcal{B}$或$\mathcal{C}$）中考虑子代数 $\mathcal{S}$ 而取不同的值。但另一方面，人们会期望，如果

随机变量 x “具有一个值”，则该值是同一个值，独立于语境。因此更精确地说，若设 $\omega_b \in \mathrm{X}(\mathcal{B})$ 是一个特征，而 $\omega_c \in \mathrm{X}(\mathcal{C})$ 是另一个特征；那么问题便是，能否避免对某个 $x \in \mathcal{S}$ 出现 $\omega_b(x) \neq \omega_c(x)$。

但是，由于能够为随机变量赋予确定值的特征在非交换代数上通常并不存在，人们便退而求其次。要赋予确定值，需要一个泛函，其至少定义在所有“实”可观测量上，$\mathcal{A}_{sa} \subset \mathcal{A}$，满足条件1.)或3.)，见定义3.1 [115]:

定义 3.4 （赋值）。 一个赋值 $\upsilon : A_{sa} \to \mathbb{R}$ 是一个泛函，对于相容的 $a, b \in A_{sa}$（即 $[a, b] = 0$）以及 z、$w \in \mathbb{C}$，满足：

1. $\upsilon(za + wb) = z\upsilon(a) + w\upsilon$
(b);2. $\upsilon(ab) = \upsilon(a)\upsilon(b)$;3. $\upsilon(1) = 1$.

本质上，赋值必须表现得像特征，但仅限于彼此交换的自伴随随机变量；另一方面，它必须定义在所有的$\mathcal{A}_{sa}$ 上，才能被视为赋予一个确定的“值”。由定义3.4中的1.)与2.)容易推出$\upsilon(p(a)) = p(\upsilon(a))$ 对任意多项式$p \in \mathbb{C}[X]$成立；因此，对于有限维代数，这对任意函数而不仅是多项式都成立，并且在温和条件下，对于大多数无限维代数，几乎所有合理函数也可建立这一结论。

回顾定义 3.1 及其后的讨论，我们在那里证明，投影 $\mathrm{p} \in \mathrm{P(A)}$ 所能取的唯一值属于它的谱 $\sigma(\mathrm{p}) = \{0, 1\}$。而且，任何自伴 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}_{sa}$ 都由其谱投影通过谱分解（参见命题 2.77）确定，因此这对任何此类自伴 a 也成立。因此，赋值泛函必须是无色散的，并且应有$\upsilon(\mathrm{a}) \in \sigma(\mathrm{a})$。由此，这样的赋值就能为整个 $\mathrm{A}_{sa} \subset \mathrm{A}$ 赋予“确定值”。然而遗憾的是，一般而言这是不可能的 [115, 35], ，这正是下一个定理的内容

定理 3.5 (贝尔–科亨–斯佩克定理)。 若 $A = L(H)$ 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，且 维数$H > 2$，则 A_{sa} 上不存在赋值。

这当然也包括所有包含与$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 同构的子代数的代数，其中 $\dim\mathcal{H} > 2$ (该子代数是 I 型因子$_n$ ，且 $n > 2$)；在这种情况下，无法为所有随机变量赋予确定值，因为其取值取决于语境。

尽管这个定理是在量子力学领域中推导出来的，但其表述和证明只涉及非阿贝尔概率代数，而且属于初等线性代数，只是组合方面稍显复杂。不过，它揭示了交换概率代数与非交换概率代数之间的差异有多么巨大。

该定理的证明通过构造一个反例来完成，也就是说，对于满足 $\dim\mathcal{H} = 3$ 的希尔伯特空间，构造 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的交换子代数，以表明赋值不可能存在。对于 $\dim\mathcal{H} = 3$，如前所述，反例相当复杂。不过，为了说明这一思路，当 $\dim\mathcal{H} = 4$ 时，可以给出一个简单得多的反例。

按照最初提出的构造 [40], 取 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$ 并定义 18 个向量$|j\rangle \in \mathbb{C}^4 (j = 1, \ldots, 18)$，见表 1 和 2，并定义投影到这些向量所张成的一维子空间上的正交投影：

$$\boldsymbol{P}_j := \frac{1}{\langle j \mid j \rangle} |j\rangle \langle j| . \tag{3.2}$$

$\vert 1\rangle$	$\vert 2\rangle$	$\vert 3\rangle$	$\vert 4\rangle$	$\vert 5\rangle$	$\vert 6\rangle$	$\vert 7\rangle$	$\vert 8\rangle$	$\vert 9\rangle$
$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

表1：向量 $\vert 1\rangle$至 $\vert 9\rangle$

$\vert 10\rangle$	$\vert 11\rangle$	$\vert 12\rangle$	$\vert 13\rangle$	$\vert 14\rangle$	$\vert 15\rangle$	$\vert 16\rangle$	$\vert 17\rangle$	$\vert 18\rangle$
$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$

表2：向量 $\vert 10\rangle$ 至 $\vert 18\rangle$

现在将这些投影排列成九个投影值测度， Π_1 至 Π_9，如表3所示。排列方式使得每个投影值测度都包含四个原子投影。容易验证，每个投影值测度中生成这些投影的向量彼此正交，因此这些投影本身也彼此正交。如前文多次提及的，参见定义 2.21、命题 2.77以及备注 2.91之后的讨论，每个投影值测度都会生成 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4) \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{C})$的一个交换子代数，即一个经典语境。

关于赋值，在定义后面的解释中已经指出，3.4 赋值只能取随机变量谱中的值。对于任意正交投影 $\boldsymbol{P}$，都有 $\sigma(\boldsymbol{P}) = \{0, 1\}$，而对于投影值测度 $\sum_j \boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{I}$，显然，在由九个投影值测度之一生成的每个子代数中，三个投影必须取值为零，一个必须取值为一。因此，如果在表3 中用赋值的值替换投影，那么每一列（经典语境）都必须有三个零和一个一。因此，表*3* 中应有九个3一，每列一个，共为奇数。

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7	Π_8	Π_9
$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_6$
$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_7$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_8$	$\boldsymbol{P}_7$	$\boldsymbol{P}_8$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_9$	$\boldsymbol{P}_9$
$\boldsymbol{P}_{10}$	$\boldsymbol{P}_{11}$	$\boldsymbol{P}_{10}$	$\boldsymbol{P}_{12}$	$\boldsymbol{P}_{13}$	$\boldsymbol{P}_{14}$	$\boldsymbol{P}_{15}$	$\boldsymbol{P}_{11}$	$\boldsymbol{P}_{13}$
$\boldsymbol{P}_{15}$	$\boldsymbol{P}_{12}$	$\boldsymbol{P}_{16}$	$\boldsymbol{P}_{17}$	$\boldsymbol{P}_{14}$	$\boldsymbol{P}_{18}$	$\boldsymbol{P}_{16}$	$\boldsymbol{P}_{17}$	$\boldsymbol{P}_{18}$

表3：投影值测度1至9

另一方面，可以很快验证，在表 3 中，每个投影都出现了 两次，显然分别属于不同的投影值测度（PVM），也就是不同的经典语境。如果$\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$存在赋值函数，那么赋值必须独立于该投影所属的经典语境（由投影生成的阿贝尔子代数）。因此，表 *3* 中应有偶数个 1，这就与上一段中的陈述矛盾。因此，我们可以推断， $\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$上不存在赋值函数；任何包含与 $\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$同构的子代数的代数上也不存在赋值函数。

这意味着，只要代数足够大，就无法避免出现上述那种情况： $\omega_b(x) \neq \omega_c(x)$

因此，随机变量无法被赋予确定值。这意味着，随机变量$x \in \mathcal{A}_{sa}$的取值取决于其语境，也就是说，取决于它恰好嵌入在哪个子代数中。从经典的角度来看，这些事实令人不安；但另一方面，在量子信息和量子计算中，我们可以利用它们。

3.2 广义观测与信道

作为下文的动机，回想一下，对于表示某个事件的投影$q \in P(A)$，定义 2.17 中将$\mathbb{P}(q) := \mathbb{E}(q)$定义为锐观测到该事件的概率（$\omega(q) = 1$）。现在假设事件 q 无法被精确地或锐利地观测到，但观测对立事件$q^\perp = 1 - q$时，有一小概率α会误认为观测到了 q。于是，记录到观测 q 的事件为$e_1 := \alpha q^\perp + (1-\alpha)q$，而对立事件为$e_0 = 1 - e_1 = \alpha q + (1-\alpha)q^\perp$。对于$0 < \alpha < 1$，这些不是锐事件。

不难看出$0 \leq e_1 \leq 1$，因此$e_1, e_0 \in E(\mathcal{A})$是效应（参见定义2.12），这是一个正算子值测度（POVM）的简单例子。

正算子值测度（POVM）：将这一简短的动机推广开来，我们通过使用效应描述非锐事件，而非用投影描述锐事件，从而定义一种更一般的测量：

定义 3.6（正算子值测度（POVM））。设A是一个有限维概率代数，且$(X, \mathfrak{X})$是一个可测空间，其底集为X，σ-代数为$\mathfrak{X}$。若映射$\Pi_{POVM} : \mathfrak{X} \ni E \mapsto \Pi_{POVM}(E) := e_E \in E(A)$满足

$$\Pi_{POVM}(X) = 1, \quad \text{and for disjoint } E_1, E_2 \in \mathfrak{X}: \tag{3.3}$$

$$\Pi_{POVM}(E_1 \uplus E_2) = \Pi_{POVM}(E_1) + \Pi_{POVM}(E_2), \tag{3.4}$$

则称其为正算子值测度（*POVM*）。这意味着$\Pi_{POVM}(\emptyset) = 0$。

这是对之前讨论过的锐测量——投影值测度（PVM）——的推广。投影值测度可以视为 POVM 的一种特殊情况；可以说，PVM 或投影分别是锐的正算子值测度或效应。现在，事件由正算子$0 \leq \Pi_{\mathrm{POVM}}(E) = e_E \leq 1$来描述。关于通过投影定义事件的概率的定义*2.17*，现在推广为概率$0 \leq p_E = \mathbb{E}(e_E) \leq 1$，即记录观测到事件$e_E$或结果$E \in \mathfrak{X}$的概率。

对于一个观测ω，命题2.18 已证明，对投影的观测或样本只能是零或一，$\omega(p) \in \sigma(p) \subseteq \{0, 1\}$，这可以解释为假和真。对于正算子值测度，观测可以是任意概率，$0 \leq \omega(e_E) \leq 1$。一种可能的解释是，这是事件$e_E$，或结果$E \in \mathfrak{X}$已被记录为发生的概率。

正算子值测度进而通过如下赋值，在σ-代数$\mathfrak{X}$上定义一个概率分布

$$\mathbb{P}_{\mathrm{POVM}} : \mathfrak{X} \ni E \mapsto \mathbb{P}_{\mathrm{POVM}}(E) := \mathbb{P}_{\mathrm{POVM}}(e_E) := \mathbb{E}(e_E) \in [0, 1]. \tag{3.5}$$

这个概率赋值推广了定义2.17中此前针对投影给出的唯一赋值，并可视为扩展的玻恩规则。

由于投影是效应的一种特殊情形，$P(\mathcal{A}) \subset E(\mathcal{A})$这使得定义2.21、方程(2.39)和(2.49)，以及注释2.91 中定义的投影值测度成为这里抽象定义的正算子值测度的

抽象定义的正算子值测度的一种特殊情形。显然，也可以与抽象情形平行地，为迄今为止讨论的两个代数 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$（分别为 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$）具体表述这一概念。

注 3.7 （任意 σ-代数上的正算子值测度）。 对于有限维代数 $\mathcal{A}$ 中的投影值测度，只需考虑有限结果集 X 及其 σ-代数 2^X即可，参见注 *2.22*。正算子值测度则不同，因为结果空间 X 以及 σ-代数 $\mathfrak{X}$可能是无限的。显然，还必须纳入某种类似于 σ-可加性的性质。不过，为简便起见，并且由于这并不改变此处的论述，下文将直接假定 X 是有限集，且 σ-代数为 $\mathfrak{X} = 2^X$，与此前对投影值测度的处理相同。

还需注意，正算子值测度的集合在算子值测度的向量空间中构成一个凸锥，而归一化要求式（*3.3*）在该向量空间中定义了一个线性流形。因此，归一化正算子值测度位于正锥与该线性流形的交集中；这与命题 *2.48*所确立的态的几何非常相似。

这个集合显然是凸的——因此归一化正算子值测度的凸组合仍是正算子值测度——并且可以证明，极端点恰好是那些结果空间 X 有限 *[43]*的正算子值测度。由此可得到与用纯态表示密度矩阵相类似的表示定理。

同样，类比于用拉东-尼科迪姆导数来处理态与泛函的情形（参见注记*2.58*），这里也存在类似的可能性 *[43]*，这一主题超出了本书的范围。

格里森定理2.93表明，一个函数若对$\mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 中的每一个投影值测度都指定一个概率分布，则可以延拓为一个态；该定理对正算子值测度也有类似结论，参见例如 [36]:

定理 3.8 （格里森——正算子值测度）。 设 H 为有限维希尔伯特空间，并考虑所有线性映射构成的代数 $L(H)$，以及所有效应构成的集合 $\mathrm{E}(L(H))$。

一个函数 $\gamma\colon \mathrm{E}(L(H)) \to [0,1]$，对于任意给定的正算子值测度

$$\Pi_{POVM} : 2^X \ni \{x\} \mapsto E_x \in \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

定义在一个有限集 X上，类似于方程*(3.3)*和*(3.4)*中的定义*3.6*，可得 $\sum_x \gamma(\Pi_{POVM}(\{x\})) = 1$ ——这意味着它满足方程*(2.52)*的等价形式，并在 X 以及正算子值测度 Π_{POVM}上定义了一个概率测度，即 $\mathbb{P}(\{x\}) := \mathbb{P}(E_x) = \gamma(E_x)$，如方程*(3.5)*中所示——可以扩展为一个态 $\gamma \in S(L(H))$。

反之，任何态都会在正算子值测度上诱导出一个概率测度，这一点已在方程*(3.5)*中陈述过。

注释3.9。 推广注释*2.92*，可以观察到，我们在注释*2.90*中首先将锐观测与原子投影联系起来，随后将其推广为与投影值测度相联系的锐观测，现在则可以讨论一个由非锐事件表示的效应$e \in \mathrm{E}(\mathcal{A})$，其具有一个概率 $\mathbb{E}(e)$ 被记录为真的。

如果 $\omega \in S(A)$ 是一个实际观测或样本，即某个交换子概率代数 $C \subseteq A$ 的特征 $X(C)$，使得 $\Pi_{POVM}(\{x\}) \in C$，那么$\mathbb{P}_\omega(e_x) := \omega(e_x) = \langle \omega, e_x \rangle = e_x(\omega) \in [0,1]$，其值不只是像投影值测度那样取 $\{0, 1\}$，可以看作事件 e_x （即 $x \in X$）已被登记为已观测到的概率；而 $\mathbb{P}_{POVM}(e_x) := \mathbb{E}(e_x)$ 则可解释为事件 e_x （即$x \in X$）将被观测到的概率。

效应与状态的对偶性：正如前文所述，在概率代数 A 中，我们从可观测量 $A_{sa} \subset A$ 与态 $S(A) \subset A^\star$ 之间的对偶性出发，因此对于可观测量 $x \in A_{sa}$ 和态 $\varpi \in S(A)$，该态中可观测量的期望为 ϖx as $\mathbb{E}_\varpi(x) = \varpi(x) = \varpi, x$。这里最后一个表达式是 $A^\star \times A$ 上的对偶配对 $\cdot, \cdot$。在例 15 中，$L(H)$ 上的迹是在有限维空间 H 上定义的；通过 $L(A)$ 中的正则表示，命题 2.49 引入了 A^2 上的典范忠实内积 $\cdot \mid \cdot_c$。仿照密度矩阵的发展脉络（命题 2.24 和推论 2.37），推论 2.56 引入了密度元 $D(A) \subset A_+$，使得对于每个态 $\varpi \in S(A)$，都存在与之对应的密度元 $r_\varpi \in D(A)$，二者一一对应，因此可以用典范内积写作

$$\mathbb{E}_\varpi(x) = \varpi(x) = \langle \varpi, x \rangle = \langle r_\varpi \mid x \rangle_c \quad \text{on } S(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}_{sa} \quad \text{resp.} \quad D(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}_{sa}. \tag{3.6}$$

在计算概率时（参见定义 2.17），最初 $x \in P(\mathcal{A})$ 必须是一个投影。将其推广到投影值测度后，方程（3.6）便展示了态（或密度）与投影值测度之间产生概率的对偶性：

$$\mathbb{P}_\varpi(x) = \langle \varpi, x \rangle = \langle r_\varpi \mid x \rangle_c \quad \text{on } S(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{A}) \quad \text{resp.} \quad D(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{A}). \tag{3.7}$$

上文中，这一做法又被推广到了正算子值测度；此时，观测或样本 $\omega \in X(\mathbb{C}[x])$不会产生像 1 或 0 那样明确的结果，而只能给出事件已被观测到的概率。因此，借助态与密度之间的对应关系 $\varpi \leftrightarrow r_\varpi$，以及 $\omega \leftrightarrow r_\omega$，便可观察到这些对偶关系

$$\mathbb{P}_\varpi(x) = \langle \varpi, x \rangle = \varpi(x) = \langle r_\varpi \mid x \rangle_c \quad \text{on } S(\mathcal{A}) \times E(\mathcal{A}) \quad \text{resp.} \quad D(\mathcal{A}) \times E(\mathcal{A}); \tag{3.8}$$

$$\mathbb{P}_\omega(x) = \langle \omega, x \rangle = x(\omega) = \langle r_\omega \mid x \rangle_c \quad \text{on } X(\mathbb{C}[x]) \times E(\mathbb{C}[x]). \tag{3.9}$$

只考察效应，似乎就足以讨论样本或观测发生前的概率（方程（3.8）），以及某事已被观测到的概率（方程（3.9））。值得注意的是，在效应集合 $E(\mathcal{A})$中，承载主要信息的是偏序与正性（即序向量空间的结构）；它们保留了概率的取值范围及序关系。稍后讨论量子信道时还会再次探讨这一主题。效应集合的这一结构经过抽象和推广，形成了效应代数 ——例如参见 [65, 66, 24] 及其中的参考文献——用以描述一般类型的可观测量。进而，这成为广义概率理论的基础（例如参见 [82, 78, 111]），这类理论以方程（3.8）和（3.9）中展示的对偶结构为出发点。

也就是说，效应 x 属于一个偏序集，通常是有序向量空间 E 的子集，并且它们位于“区间” $0 \leq x \leq 1$中，其中 $0 \in E$ 是不可能事件，也是向量空间的原点；“序单位” $1 \in E$ 是必然事件；上述区间是一个凸集，因此效应的凸组合仍然是一个效应。这尤其意味着，效应是正的，即 $x \in E_+$。只要效应之和不超过序单位，就允许将效应相加；换言之，x_1与 x_2 之和是一个效应，当且仅当 $x_1 + x_2 \leq 1$。另一方面，态 ϖ属于效应的对偶空间 $E^\star$，而对偶性（一个双线性形式） $p = \varpi, x$ 应解释为在态 $\varpi \in E^\star$中观测到该效应的概率$0 \leq p \leq 1$。因此，态必须是正的且归一化，即 $\varpi, x \geq 0$（几何上是 $E^\star$中的一个锥），并且 $\varpi, 1 = 1$（几何上是 $E^\star$中的一个超平面），从而概率满足 $0 \leq p = \varpi, x \leq 1$；态集也像效应一样是凸的。这些简单的规定足以赋予概率。在此，我们不再沿这一方向深入，而是停留在目前所建立的框架内。

正算子值测度（正算子值测度）和正映射： 尽管正算子值测度的概念是对投影值测度的推广，其中的元素是投影而不只是效应，但事实证明，这两个概念密切相关。以下“Neumark(Naˇımark) 膨胀定理”正是对此的说明，也是“更大希尔伯特空间教会”的另一个例子；它通常在希尔伯特空间框架中表述，参见例如 [110, 77]。

定理3.10 (Neumark(Naˇımark))。 设$\mathcal{H}$ 为有限维希尔伯特空间，且$\Pi_{\mathcal{H}}: \ 2^X \ \rightarrow \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 为定义*3.6*中所定义的正算子值测度。

则存在另一个有限维希尔伯特空间$\mathcal{K}$、一个等距 $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})\,(V^\dagger V = I_{\mathcal{H}})$，以及一个投影值测度 $\Psi_{\mathcal{K}}: \ 2^X \ \rightarrow \mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$ 如针对矩阵代数在定义*2.21*中所定义，在命题*2.77*（参见式*(2.39)*）中以纯代数形式表述，并针对希尔伯特空间在注记*2.90*（参见式*(2.49)*）中加以阐明，使得

$$\forall E \in 2^X: \quad \Pi_{\mathcal{H}}(E) = V^\dagger \, \Psi_{\mathcal{K}}(E)\, V. \tag{3.10}$$

式(3.10)表明，一个正算子值测度在更大的空间上、分别在更大的代数中膨胀后，实际上是一个投影值测度；换言之，正算子值测度是投影值测度的压缩。另一种说法是，该正算子值测度已被“提升”为一个投影值测度。若$\{x\} \subset X$ 处的正算子值测度取值是效应 $\Pi_{\mathcal{H}}(\{x\}) = E_x \in \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，则存在一个投影 $\Psi_{\mathcal{K}}(\{x\}) = P_x \in \mathrm{P}(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$，使得 $E_x = V^\dagger P_x V$。也可以说，存在一个带有锐可观测量 P_x的系统$(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$，但人们只能看到其中一部分，即$V^\dagger(\mathcal{L}(\mathcal{K})) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$。

这种表示的形式 $E_x = V^\dagger P_x V$称为*Kraus*形式 [150],，而映射 V ——它不一定是等距映射——称为 Kraus 映射。注意，这也可以写成

$$E_x = V^\dagger P_x V = (P_x V)^\dagger (P_x V) = K_x^\dagger K_x, \tag{3.11}$$

with Kraus 算子 $K_x = P_x V \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$，满足 $\sum_{x\in X} K_x^\dagger K_x = \sum_{x\in X} E_x = I_{\mathcal{H}}$.

正算子值测度可以看作一种机制，用于将一般概率代数中的概率信息转移到集合 X 上的概率分布，如式（3.5）所示。这种信息转移称为信道。为了更一般地讨论信道，我们先从一个与前述定理3.10相关的例子开始。

例19（观测通道）。设 X 是一个有限集， $n = |X|$ 是其基数。作为$\mathbb{C}^X \cong \mathbb{C}^n$，考虑复数域 $= \mathbb{C}^n$，即例*2*中的交换哈达玛代数。对于给定的正算子值测度 $\Pi_{\mathcal{H}}: \ 2^X \ \rightarrow \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，如前述定理*3.10* 所示，以及 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^n$， $\Pi_{\mathcal{H}}(\{i\}) = E_i$，定义映射

$$\mathscr{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad by \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i \, E_i.$$

这是一个线性映射 $\mathscr{F} \in L(\text{复数域}, L(H))$，它将

- 单位元 $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1) \mapsto \mathscr{F}(\boldsymbol{e}) = \sum_i E_i = I_{\mathcal{H}}$ 映射为单位元；
- 伴随元 $\boldsymbol{w}^\star$ 映射为伴随映射 $\mathscr{F}(\boldsymbol{w}^\star) = \sum_i w_i^* \, E_i = \big(\sum_i w_i \, E_i\big)^\dagger = \big(\mathscr{F}(\boldsymbol{w})\big)^\dagger$，也就是说，它是 *-线性的；
- 正 $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{f} \in$ 复数域$_+$ 映射为正 $0 \leq \mathscr{F}(\boldsymbol{f}) = \sum_i f_i \, E_i \in L(H)_+$；
- 效应 $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{e}$ 映射为效应 $0 \leq \mathscr{F}(\boldsymbol{g}) = \sum_i g_i \, E_i \leq I_{\mathcal{H}}$；
- 并且可以写成克劳斯形式：由于 $E_i \in \mathrm{E}(L(H)) \subset L(H)_+$，根据定义，它可以写成 $E_i = G_i^\dagger G_i$，其中有某个 $G_i \in L(H)$（例如 $G_i = E_i^{1/2}$），因此 $\mathscr{F}(\boldsymbol{f}) = \sum_i f_i \, E_i = \sum_i G_i \, f_i \, G_i^\dagger$。

这个映射将复数域 C 中的效应（可能的测量）映射为 $L(H)$ 中的效应，在那里可以用某个态 $\varpi \in \mathsf{S}(L(H))$计算其概率：对于 $f \in \mathrm{E}(C)$，有$\mathbb{P}(f) = \varpi(\mathscr{F}(f)) = \langle \varpi, \mathscr{F}(f) \rangle$。特别地，选取 $e_i = (\delta_{ij})$，即 $\mathbb{C}^n$ 中的标准单位向量，可得 $p_i = \mathbb{P}(e_i)$，这是 $X = \{1, \ldots, n\}$ 上的概率分布。

Th我们定义对偶映射 $\mathscr{F}^* \in L$（L（H）*、C^*），按照通常方式将其定义为 $\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \in L$（$H$）*，通过

$$\left\langle \mathscr{F}^*(\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}), g \right\rangle = \left\langle \varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, \mathscr{F}(g) \right\rangle = \varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\mathscr{F}(g)) = p_g,$$

人们将态 $\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \in \mathsf{S}$（$L$（$H$））转移为态 $\mathscr{F}^*$（$\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$）$=:$ $\alpha_{\mathcal{H}} \in \mathsf{S}$（$C$），该态将概率 $0 \leq p_g = \alpha_{\mathcal{H}}$（$g$）$\leq 1$ 赋予事件/效应 $g \in \mathsf{E}$（C）。这是因为 $\mathscr{F}^*$ 同样是 *-线性的、正的，并且保持状态：

$$1 = \left\langle \varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, I_{\mathcal{H}} \right\rangle = \left\langle \varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, \mathscr{F}(e) \right\rangle = \left\langle \mathscr{F}^*(\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}), e \right\rangle = \langle \alpha_{\mathcal{H}}, e \rangle .$$

如果态 $\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ 由密度算子 $R \in \mathsf{D}$（L（H））表示，即$\varpi_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$（$A$）$= \mathrm{tr}\ RA$，则可以利用 $C = \mathbb{C}^n$ 和 L（H）上的希尔伯特空间结构定义伴随映射 $\mathscr{F}^\dagger$：L（H）$\to C$，使得对于 $X \in L$（H）和 $x \in \mathbb{C}^n$：

$$\begin{aligned} \langle X \mid \mathscr{F}(x) \rangle_c &= \mathrm{tr}\Big(X^\dagger \mathscr{F}(x)\Big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(X^\dagger E_i) x_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(E_i^\dagger X)^* x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(G_i^\dagger G_i X)^* x_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(G_i X G_i^\dagger)^* x_i = \Big(\mathscr{F}^\dagger(R)\Big)^{\mathsf{H}} x = \Big\langle \mathscr{F}^\dagger(X) \mid x \Big\rangle_{\mathbb{C}^n} . \end{aligned}$$

因此 $\mathscr{F}^\dagger(X) = [tr(G_1 X G_1^\dagger) \ldots, tr(G_n X G_n^\dagger)]^{\mathsf{T}} = [tr(XE_1) \ldots, tr(XE_n)]^{\mathsf{T}}$。不难看出，这将密度算子映射到离散概率分布 $\mathscr{F}^\dagger(R) = \rho = [tr(RE_1) \ldots, tr(RE_n)]^{\mathsf{T}} = \sum_{i=1}^n tr(RE_i) e_i \in D$(复数域)，并且 $1 = tr\ R = tr(RI) = tr\Big(R\mathscr{F}(e)\Big) = \Big(\mathscr{F}\dagger(R)\Big) He = \rho^{\mathsf{H}} e$，即它保迹。

回顾一下，映射 $\mathscr{F}$: 复数域$\to \mathcal{L}(\mathcal{H})$、其对偶 $\mathscr{F}^*$ 以及其伴随 $\mathscr{F}_\dagger$都是 *-线性、正的，并且满足

- $\mathscr{F}$(E(复数域)) $\subseteq$ E($\mathcal{L}(\mathcal{H})$)，并且 $\mathscr{F}(e) = I_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$($\mathscr{F}$保单位)（幺正）；
- $\mathscr{F}^*$(S($\mathcal{L}(\mathcal{H})$)) $\subseteq$ S(C)，即 $\mathscr{F}^*$是保持状态的；
- $\mathscr{F}_\dagger$(D($\mathcal{L}(\mathcal{H})$)) $\subseteq$ D(C)，且 $\mathscr{F}_\dagger$是迹保持（TP）的。

对 $\mathscr{F}$ 保持单位元，以及对 $\mathscr{F}^*$ 保持状态、对 $\mathscr{F}_\dagger$ 保持迹，是一体两面。这些性质显然足以允许对效应 E(C)（在C中）赋予概率，正如上文“效应与状态的对偶性”部分刚刚讨论的那样。这是将体现于态中的概率信息传递到另一个系统。

因此，不再对由 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 给出的系统进行观测，而是对由 C 定义的系统进行观测。*-线性、正性与迹保持这些性质足以做到这一点。在定义 2.4 （第2节）中，我们看到 *-同态可用于此，参见推论 3.16。但此处的要求更弱，该映射不必是乘法保持的，只需保持正性与单位元。顺便指出，在极端情形下，若上述正算子值测度 $\Pi_{\mathcal{H}}$：$2^X \to \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 实际上是投影值测度，则映射 $\mathscr{F}$ 便会成为一个*-同态。

如前所述，一般情形下的这种映射称为信道。它将信息从由$\mathcal{L}(\mathcal{H})$描述的系统传递到以哈达玛代数复数域 $= \mathbb{C}^n$为模型的系统，即一个经典的交换或阿贝尔概率代数。映射 $\mathscr{F}$ 是海森堡 图像中的信道——请注意，它的方向似乎是反的——而

其对偶 $\mathscr{F}^*$ 和伴随 $\mathscr{F}^\dagger$ 则沿着信息传输的方向指向前方，它们将态从 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 传递到复数域，是薛定谔 图像中的信道。

现在给出此类信道所需的形式化定义：下文中，设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 为有限维含幺 *-代数。

定义 3.11（正映射）。若对所有正元 $a \in A_+$，$\mathscr{P}(a) \in B_+$ 仍为正元，即 $a \geq 0_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathscr{P}(a) \geq 0_{\mathcal{B}}$，则称 *-线性映射 $\mathscr{P} \in L(A, B)$ 为正映射。

定义 3.12（单位元与迹保持）。若 *-线性映射 $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是保单位映射（*UP*），或幺正，或随机，当且仅当 $\mathscr{P}(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$。

若对所有 $b \in B$，均有 $\mathrm{tr}_{\mathcal{B}} b = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}\left(\mathscr{P}^\dagger(b)\right)$，则称 *-线性映射 $\mathscr{P}^\dagger \in L(B, A)$ 为保迹映射（*TP*），或称双随机映射。

由此已经可以一般性地证明例19.中的一些性质。

命题3.13。设 $\mathscr{P} \in L(A,B)$ 是一个 *-线性映射。则以下两个陈述等价：

- 海森堡绘景：$\mathscr{P}$ 是正且保单位（幺正）的；
- 薛定谔绘景：$\mathscr{P}_\dagger$ 是正且保迹的。

此外，$\mathscr{P}$ 正性意味着它是单调的，即若 $a_1 \leq a_2$ 则 $\mathscr{P}(a_1) \leq \mathscr{P}(a_2)$；例如，参见 *[77]*。

完全正映射：给定两个 *-线性正映射 $\mathscr{P}$: A ›复数域 和 $\mathscr{Q}$: B ›D，我们希望考虑复合系统 $\mathscr{P}\otimes\mathscr{Q}$: (A⊗B) ›(C⊗D)，参见定义 2.71。理想情况下，如果分量映射 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{Q}$ 是正映射，那么映射 $\mathscr{P} \otimes \mathscr{Q}$ 也应当是正的。对于非交换代数而言，这是一个非平凡的要求；反例表明，遗憾的是这并非总是成立，例如参见 [46, 86, 138, 150, 107, 77, 152, 39, 151, 114]。仅有正性还不够。幸运的是，只需考虑 B = D = $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $\mathscr{Q} = \boldsymbol{I}_n$ (复数域(ℂ)中的单位元)，就能检验这一性质是否普遍成立。这相当于与一个“什么也不做”的辅助系统进行张量积或“相互作用”。

定义 3.14（完全正映射）。一个 *-线性映射 $\mathscr{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ *-线性映射 $\mathscr{P}_n : \mathcal{A} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$（参见例 *17*）定义如下 $\mathscr{P}_n = \mathscr{P} \otimes \boldsymbol{I}_n$。

正 *-线性映射 $\mathscr{P} : A \rightarrow B$ 是 n-正的 当且仅当 $\mathscr{P}_n$ 是正的。它是完全正的 *(CP)*，当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$，它都是 n-正的。

完全正迹保持 *-线性映射通常简称为 $CPTP$ 映射；它们的伴随映射（即完全正单位保持映射）通常简称为 $CPUP$ 映射。它们满足信道中成功传输信息所需的所有条件。稍加思考即可看出（例如参见 [152]）

推论 3.15（CP 映射与复合的几何）。从一个 *-代数 A 到另一个 *-代数 B 的 *CP* 映射集，作为 $L(A,B)$ 的子集，是一个尖凸锥。因此，*CP* 映射的凸组合仍然是 *CP* 映射。单位保持（*UP*）和迹保持（*TP*）性质在 $L(A, B)$ 中定义了线性流形，因此在凸组合下也保持不变。

设 $\mathscr{P}$: $A \rightarrow B$ 与 $\mathscr{Q}$: $B \rightarrow C$ 为两个 *-线性完全正映射。则 $\mathscr{R} = \mathscr{Q} \circ \mathscr{P}$ 是一个 *-线性完全正映射。若 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{Q}$ 均为保单位（相应地，均为迹保持），则 $\mathscr{Q} \circ \mathscr{P}$ 亦然。

一些基本结果如下所示

推论 3.16 （若干完全正映射）。 非零 *-同态（参见定义 2.4）$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是完全正且保单位的，参见 [46]。因此每个样本$\omega \in \mathsf{X}(\mathcal{A})$， $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$，是完全正且保单位的，参见定义 2.6。

一个 *-线性正映射 $\mathscr{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，其中$\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 为阿贝尔或交换的，则该映射是完全正，参见 [86, 152]。因此，每个态 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$， $\varpi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$，都是 完全正 且 保单位，参见定义 2.1。

下面汇总一些 CP 映射的性质 [46, 86, 138, 150, 107, 77,152, 39, 151, 114, 15]。

推论 3.17 (CPUP 映射的柯西-施瓦茨不等式)。 设 A 为有限维含幺 *-代数，并设 $\mathscr{T} \in L(A)$ 为一个 *-线性完全正保幺映射。则有

$$\forall a \in \mathcal{A} : \quad \mathscr{T}^{\dagger}(a^{\star})\mathscr{T}^{\dagger}(a) \leq \mathscr{T}^{\dagger}(a^{\star}a). \tag{3.12}$$

例如，参见 [152, 15]。注意， $\mathscr{T}^{\dagger}$ 是 *-同态 当且仅当 等式（3.12）始终成立。

若存在一个 CP 映射 $\mathscr{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ 使得 $\mathscr{R} \circ \mathscr{T} = \mathscr{I}_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$ ($\mathcal{L}(\mathcal{A})$ 上的恒等映射)，则 $\mathscr{T}$ 是一个内部 *-自同构（参见定义 2.12）。

请注意，这些结果表明，上述动机示例 $\mathscr{F}$ 中的映射完全正且保单位，而这一点也可由其克劳斯形式得出。

命题 3.18 (克劳斯形式)。 设 H 和 K 是有限维希尔伯特空间，且 $K \in L(K, H)$ 是一个线性映射。那么， * -线性映射 $\mathscr{T}: L(H) \to L(K)$，由下式以克劳斯形式给出：

$$\mathscr{T} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \mathscr{T}(A) = K^{\dagger}AK \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \tag{3.13}$$

是完全正，参见 [46, 86, 138, 150, 77, 152]。它保单位当且仅当 $K^{\dagger}K = I_{\mathcal{K}}$($K$ 是等距映射）。它保迹当且仅当 $KK^{\dagger} = I_{\mathcal{H}}$。映射 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 常称为克劳斯映射或克劳斯算子。

注意，当 $K^{\dagger}K = I_{\mathcal{K}}$ 和 $KK^{\dagger} = I_{\mathcal{H}}$ 均成立时， $K \in L(K,H)$ 是酉算子，希尔伯特空间同构（$K \cong H$)），且 $\mathscr{T}$是含幺 *-代数 $L(H)$与 $L(K)$之间的 *-同构，参见 [15]。

结合推论 3.15，可知保单位 Kraus 映射的凸组合是完全正且保单位的。这引出

推论 3.19 (一般 Kraus 形式)。 设 H 和 K 是有限维希尔伯特空间，且 $X \supseteq \{x\} \mapsto K_x \in L(K,H)$ 是一组线性映射（X 为有限集），满足

$$X \supseteq \{x\} \mapsto \Pi_{K,X}(\{x\}) = F_x = K_x^{\dagger}K_x \in \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{K})) \tag{3.14}$$

是一个正算子值测度（特别是 $\sum_x F_x = I_{\mathcal{K}}$）。那么

$$\mathscr{T}_X : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \mathscr{T}_X(A) = \sum_{x \in X} K_x^{\dagger}AK_x \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \tag{3.15}$$

是一个复数域PUP映射的克劳斯形式。其伴随映射是一个 CPTP 映射，可写为克劳斯形式 $b \quad y$

$$\mathscr{T}_X^{\dagger} : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \ni B \mapsto \mathscr{T}_X^{\dagger}(B) = \sum_{x \in X} K_x B K_x^{\dagger} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.16}$$

注意，正算子值测度中的效应 $F_x \in \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$ （参见公式(3.14)）可以有多种分解方式，因为 Kraus 算子 $K_x \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 并非唯一。若$U_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是酉算子，那么 $Q_x = U_x K_x$ 也是 Kraus 映射，且 $F_x = Q_x^\dagger Q_x = K_x^\dagger U_x^\dagger U_x K_x = K_x^\dagger K_x$。当 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ 时，一个简单的选择是 $K_x = F_x^{1/2}$，因为 $F_x \in \mathrm{E}(\mathcal{L}(\mathcal{K})) \subset \mathcal{L}(\mathcal{K})_+$。

在上述希尔伯特空间中选取基，将代数表示为矩阵代数的子代数（如第2.2节所述）后，完全正性的判据便转化为检查一个矩阵的正性：

定理 3.20 (Choi)。 设$\boldsymbol{Q}: \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 是一个线性映射，并设 $\boldsymbol{E}_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$是一个除1 位于$(i,j)$位置外其余元素全为零的矩阵 —— 它们是 $\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中的标准单位向量。那么 $\boldsymbol{Q}$ 是完全正映射，当且仅当Choi矩阵

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{Q}} = (\boldsymbol{I}_{n\times n} \otimes \boldsymbol{Q})\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{E}_{ij} \otimes \boldsymbol{E}_{ij}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{E}_{ij} \otimes \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{E}_{ij}) \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{C}) \tag{3.17}$$

是正的，参见 [44]。

现在我们可以陈述完全正映射与张量积相关的结论了 ed:

命题3.21 (张量积与完全正映射)。 设 $\mathscr{P}: A \to C$ 和 $\mathscr{Q}: B \to D$ 是两个 *-线性完全正映射。那么复合系统映射

$$\mathscr{P} \otimes \mathscr{Q} : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$$

是 *-线性且完全正的。如果 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{Q}$ 都保单位，那么 $\mathscr{P} \otimes \mathscr{Q}$也保单位。

如果复数域 $= D$ 是阿贝尔或交换 *-代数，那么在初等张量 $a \otimes b \in A \otimes B$ 上定义的映射$\mathscr{R}: (A \otimes B) \to C$ 为

$$\mathscr{R}(a \otimes b) := \mathscr{P}(a)\mathscr{Q}(b)$$

是完全正的，并且当 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{Q}$ 都保单位时，它也保单位；例如，参见 [138]。

完全正映射是代数之间的 *-线性算子；当这些代数表示为算子代数$\mathcal{L}(\mathcal{H})$的（子）代数时，它们就是这些算子空间之间的映射，因此有时也称为超算子。因此，建立能够将这些超算子表示为正规算子的方法十分重要。命题3.18 中的 Kraus 形式可视为朝这一方向迈出的首个重要成果，因为它将超算子 $\mathscr{T}$ 表示为普通的线性希尔伯特空间算子。接下来将介绍其他一些此类表示结果。

完全正映射的完整刻画由以下 Stinespring 扩张给出

定理 3.22 (Stinespring)。 设 A 是有限维含幺 *-代数，H 是有限维希尔伯特空间，且 $\mathscr{P}: A \to L(H)$ 是一个完全正 *-线性映射。

那么存在一个有限维希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 以及一个含单位 *-同态$\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ (参见定义 2.4)，以及一个线性映射 $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$，使得

$$\forall a \in \mathcal{A}: \quad \mathscr{P}(a) = V^\dagger \Phi(a)\, V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}); \tag{3.18}$$

例如，参见 [46, 86, 138, 150, 107, 77, 152, 39, 151, 114]。如果 $V^\dagger V = I_{\mathcal{H}}$ (即 V 是等距映射)，那么 $\mathscr{P}$ 是保单位的。

在特殊情形下，$A = L(J)$，其中 J 是有限维希尔伯特空间，且 $\mathscr{P}: L(J) \to L(H)$ 是完全正且 *-线性的，存在一个有限维希尔伯特空间 E，使得 $K = J \otimes E$，并且对于式（3.18）中的同态 Φ，可以取 $\Phi: L(J) \ni A \mapsto (A \otimes I_{\mathcal{E}}) \in L(K) = L(J \otimes E)$。那么

$$\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{J}): \quad \mathscr{P}(A) = V^{\dagger}(A \otimes I_{\mathcal{E}})V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.19}$$

$$\textit{and dually } \forall R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}): \quad \mathscr{P}^{\dagger}(R) = \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(VRV^{\dagger}) \in \mathcal{L}(\mathcal{J}). \tag{3.20}$$

The 映射 $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ 通常称为 Stinespring映射或 Stinespring 算子。

式（3.18）表明，*-线性完全正映射经过适当的扩张——即扩张到合适的更大空间，或更大的代数中——实际上就是一个 *-同态；换句话说，*-线性完全正映射是一个 *-同态的压缩。也可以说，这个完全正映射被“提升”为了一个同态。这又是“更大希尔伯特空间教会”主题的另一个例子。还请注意它与定理 3.10 的相似之处。式（3.18）的另一种解读是，它表明任何 *-线性 CP 映射都可以表示为 *-同态（推论 3.16）和 Kraus映射（命题 3.18）的组合。

正如命题 3.18 后的讨论所述，由推论3.15 可知，这类保单位 Stinespring扩张的凸组合仍然是完全正、*-线性且保单位的。下面给出推论 3.19 的一种逆命题：

推论 3.23 (Kraus, Choi)。 设 H、J 为有限维希尔伯特空间，且 $\mathscr{Q}: L(J) \to L(H)$ 是一个 *- 线性完全正映射。则存在有限多个线性映射 $V_j \in L(H, J)$，使得

$$\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{J}): \quad \mathscr{Q}(A) = \sum_j V_j^{\dagger} A V_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}); \tag{3.21}$$

即 $\mathscr{Q}$ 可写成克劳斯形式，参见 *[44, 152]*。其伴随可由方程*(3.16)*得出。

$\mathscr{Q}$ 保单位 当且仅当 $\sum_j V_j{}^{\dagger} V_j = I_{\mathcal{H}}$（即 $\{j\} \mapsto V_j^{\dagger} V_j$ 是一个正算子值测度），且 $\mathscr{Q}$ 保迹 当且仅当 $\sum_j V_j V_j{}^{\dagger} = I_{\mathcal{J}}$。

方程(3.21)中这一表示的重要性在于，映射 $\mathscr{Q}: \mathcal{L}(\mathcal{J}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$将希尔伯特空间上线性映射的代数之间的映射，转化为希尔伯特空间本身上的映射来处理，正如方程(3.19)和(3.20)所示。

以下定理 3.24 比较了不同的 CP 映射，参见 [25]:

定理 *3.24*（*CP* 映射的 *Radon–Nikodým* 定理）。与定理 *3.22* 中一样，设 A 为有限维含幺 *-代数，H 为有限维希尔伯特空间，且 $\mathscr{P}: A \to L(H)$ 是完全正 *-线性映射。由式 *(3.18)* 可知，存在有限维希尔伯特空间 K 和含单位 *-同态 $\Phi: A \to L(K)$（参见定义 *2.4*），以及线性映射 $V \in L(H,K)$，它将 H 映至 K，使得

$$\forall a \in \mathcal{A}: \quad \mathscr{P}(a) = V^{\dagger} \Phi(a) V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

设 $\mathscr{T}: A \to L(H)$ 是另一个 *CP* *-线性映射。那么存在自伴正算子 $R \in L(K)_+$，它属于子代数 $\Phi(A) \subseteq L(K)$的交换子 $\Phi(A)'$，使得

$$\forall a \in \mathcal{A}: \quad \mathscr{T}(a) = V^{\dagger} R \Phi(a) V = (R^{1/2} V)^{\dagger} \Phi(a) (R^{1/2} V) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.22}$$

算子 $R \in L(K)_+$ 可视为 $\mathscr{T}$相对于 $\mathscr{P}$的拉东–尼科迪姆导数，而 $\mathscr{T}$的Stinespring 算子 是 $R^{1/2} V \in L(H, K)$。

注 3.25。 这里值得指出，在比较态与泛函，以及比较正算子值测度时，会出现一些普遍的结构相似性。回顾命题 *2.48* 中所述的态的几何，它位于对偶正锥 $\mathcal{A}^+$中；正如注 *3.7*中所观察到的，正算子值测度也呈现出类似的模式。在这两种情况下，比较正锥中的不同元素都会导出拉东-尼科迪姆型结果——对于泛函，是推论 *2.57* ；对于正算子值测度，则是注 *3.7* 。注*2.58*已指出，拉东-尼科迪姆型陈述将这一点转化为正算子或代数元素，也就是说，转化为原空间凸正锥中的元素。

在定理 *3.24* 中，我们可以看到类似的模式。根据推论 *3.15*，完全正映射构成一个正锥，而上述定理告诉我们，比较$\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{T}$的结果如何转化为代数 $R \in \mathcal{L}(K)_+$中的一个正元。

根据定理 3.22 可以推出 [112, 75] 关于压缩性以及正保迹映射的谱 [152] 的一些结果。这些结果可以与通常佩龙-弗罗贝尼乌斯理论中的类似结果进行比较；例如，在考察马尔可夫链时，这些结果就很重要。首先，我们需要

定义 3.26 (压缩性)。 设 U、V 为配备某个范数的向量空间，且 $\mathscr{F} \in L(U, V)$ 为一个线性映射。若其满足

$$\forall a, b \in \mathcal{U}: \ \|\mathscr{F}(a) - \mathscr{F}(b)\|_{\mathcal{V}} \leq \|a - b\|_{\mathcal{U}} . \tag{3.23}$$

则 $\mathscr{F}$ 称为非扩张，或简称压缩；更准确地说，是相对于范数组合(U $\|\cdot\|$*{v9*)、(V $\|\cdot$ *{v15*)而言。

命题 *3.27*（完全正映射的压缩性）。设 A、B 为有限维含幺 *-代数，并配备基于迹的典范内积，以及 *Schatten-*p*-*范数 $\|a\|_{S_p} = (tr_A |a|^p)^{1/p} = (tr_A(a^\star a)^{p/2})^{1/p}$ ，其中 $a \in A$；B 上也类似，参见注 *2.52*。为简单起见（有些结论在更一般的情形下也成立），设 $\mathscr{T} \in L(A, B)$ 是 *CPTP* 映射。等价地，设其伴随 $\mathscr{T}\dagger \in L(B, A)$ 是完全正保单位映射，参见命题*3.13*。

那么 $\mathscr{T}$ 在 迹范数 （即 压缩，在 *Schatten-1* 范数（即在式（1-范数）中，等式（*3.23*）两边均使用该范数），但 不一定 在其他任意 *Schatten-*p*-*范数下均如此，其中 $p > 1$。特别地，迹 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 是 *Schatten-1* 压缩的。

对偶地，其伴随完全正保单位映射 $\mathscr{T}\dagger \in L(B, A)$ 在 *Schatten-*∞*-*范数下是压缩的（也就是说，式 *(3.23)* 两侧都应使用 *Schatten-*∞*-*范数），但对于 $p < \infty$，它不一定在其他任何 *Schatten-*p*-*范数下都是压缩的。如果映射 $\mathscr{T} \in L(A, B)$ 还具有幺正性，那么式 *(3.23)* 对所有 $p \geq 1$ 都成立，即 $\mathscr{T}$ 及其伴随 $\mathscr{T}^\dagger$ 在所有 *Schatten-*p*-*范数下，对于 $1 \leq p \leq \infty$ 都是压缩的。

命题 3.28 （Perron–Frobenius 性质）。 沿用命题 *3.27* 中的相同记号和假设，并进一步假设 $=\mathcal{A}$，为简便起见，再假设 $\mathscr{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ 是一个 *-线性 *CPTP* 映射。由线性代数可知， $\mathscr{T}$及其伴随 $\mathscr{T}^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ——其中 $\mathcal{A}$ 配备基于迹的典范内积（参见命题 *2.49*）——具有相同的谱， $\sigma(\mathscr{T}) = \sigma(\mathscr{T}\dagger)$，因此具有相同的谱半径（参见定义 *2.7*），在此情形下满足：

$$\varrho(\mathscr{T}) = \varrho(\mathscr{T}^\dagger) = 1, \tag{3.24}$$

也就是说，特征值全都位于 $\mathbb{C}$中的单位圆内，而正性意味着它们要么为实数，要么成共轭复数对出现。单位圆上的所有特征值 $\lambda \in \sigma(\mathscr{T})$ ——即所谓的周边谱，其中 $|\lambda| = 1$ ——都是半单的，也就是说，几何重数与代数重数相等。

由于 $\mathscr{T}$ 被假设为正且保迹，其伴随 $\mathscr{T}^\dagger$ 是正的且幺正（参见命题 3.13），这意味着 $\mathscr{T}^\dagger(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$，因此 $\mathbb{1} \in A_+$ 是 $\mathscr{T}_\dagger$ 的一个正定特征向量，其特征值为 $\lambda = 1 \in \sigma(\mathscr{T}_\dagger) = \sigma(\mathscr{T})$。

由于 $\mathscr{T} \in L(A)$ 显然是连续的，并且保迹意味着对于闭凸集 $\mathrm{D}(A)$ 有 $\mathscr{T}(\mathrm{D}(A)) \subseteq \mathrm{D}(A)$，布劳威尔不动点定理蕴含存在一个不动点（一个密度）$r_* \in \mathrm{D}(A) \subset A_+$，满足 $\mathscr{T}(r_*) = r_*$。因此，这是 $\mathscr{T}$对应特征值 $\lambda = 1 \in \sigma(\mathscr{T})$的一个正特征向量。

以下两个陈述等价：

- $\mathscr{T}$是不可约的，即对于任意投影 $p \in \mathrm{P}(A)$，若有 $\mathscr{T}(pAp) \subseteq pAp$，则 $p = 0$ 或 $p = \mathbb{1}$。
- $\lambda = 1 \in \sigma(\mathscr{T})$是一个单特征值，$\mathscr{T}(r_*) = r_*$是$\mathrm{D}(A)$中的唯一不动点，并且$r_*$是一个正定特征向量（即 $0 \notin \sigma(r_*)$，或者$\mathrm{tr}_A(a^\star r_* a) = 0$仅当$a$为 $= 0$时）。不可约的 *CPTP*映射 $\mathscr{T} \in L(A)$ 意味着
- 周边谱中的所有特征值 λ （即 $|\lambda| = 1$）都是单的，并且它们是单位根，即具有以下形式：$\lambda_k = \gamma^k$，其中 $k = 0, \ldots\ldots, m-1$，且 $\gamma = \exp(2\pi \mathrm{i}/m)$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$。
- 存在一个酉算子$u \in \mathrm{U}(A)$，使得 $\mathscr{T}_\dagger(u^k) = \gamma^k u^k$，其中 $k = 0, \ldots\ldots, m-1$。

信道 经过前面的准备，我们现在可以讨论量子信道，参见 [150, 107,77, 152, 39, 151, 114]。信道是将概率信息从一个概率代数传递到另一个概率代数的数学形式化。

定义 3.29 （信道）。 从概率代数 A 到概率代数 B 的信道，在海森堡绘景中是一个 *-线性、完全正且保单位的映射（*CPUP*） $\mathscr{P}: B \to A$，最重要的是将 B 的效应（或正算子值测度和投影值测度）映射为 A 的效应。对偶地，同一个信道在薛定谔绘景中的伴随是一个 *-线性、完全正且保迹的映射（*CPTP*） $\mathscr{P}^\dagger: A \to B$，本质上是将 A 上的密度映射为 B 上的密度。

信道是非常灵活的对象，可用于在代数概率中对许多概念或操作进行建模或描述。人们在量子信息和量子计算的背景下研究信道。我们已经在推论 3.16 中看到了一些 CPTP 映射的例子——根据前述定义3.29，这些映射对信道进行了建模。我们还在命题 3.18 中看到过以 Kraus形式构造完全正映射的方法——这与完全正映射的结构定理密切相关，参见定理 3.22和推论 3.23——以及命题 3.21 中的并行复合和推论 3.15中的串行复合。

进一步讨论与信息传输相关的主题（如编码、《熵》和信道容量）超出了本文的范围。感兴趣的读者可查阅相关文献，例如： [150, 107, 77, 152, 39, 151, 114], 以及其中的参考文献。

例 20 (一些有用的信道)。 为展示信道这一概念的多样性，下面给出一些例子，它们均涉及有限维代数之间的 *-线性 *CPTP* 或 *CPUP* 映射。

正映射与阿贝尔代数： 我们已经见过一个例子，即定义域或值域包含阿贝尔代数（或经典代数）的正 *-线性映射，参见推论 3.16；这些映射都是完全正。

态： 作为 $\mathsf{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^+$，它们是从代数 $\mathcal{A}$ 到 $\mathbb{C}$ （交换代数，参见推论 3.16）的正幺映射，因而是信道。

经典输出： 诸如 $\mathscr{F}$ 来自示例 19 的可观测量也是此类例子；输出——一个经典输出——并不只是 $\mathbb{C}$ （如同态一样）的代数，而可以是任意经典的、阿贝尔的或交换的代数 $\mathcal{C}$ （参见推论 3.16），并且映射（在海森堡绘景中） $\mathscr{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ 可以通过一个 正算子值测度来实现。回顾一下，投影值测度有时也称为 冯·诺依曼测量，是一种 锐利的（极端）正算子值测度变体，其中集合中的所有映射都是互相正交投影。

经典输入： 类似地，一个幺正、正的 *-线性映射 $\mathscr{I}$，其像是任意经典的（阿贝尔或交换）代数 $\mathcal{C}$ ，是完全正的，参见推论 3.16。这样的信道在海森堡绘景中可解释为从 经典输入 到一般系统 $\mathcal{A}$，即 $\mathscr{I}: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$。

***-同态：** 我们之前已经遇到过一些其他例子，即 *-同态（定义 2.4），它们保单位。斯廷斯普林扩张定理3.22表明，任意量子信道都可以用 *-同态来建模。如果这样的 *-同态是 *-同构，那么它就是一个可逆量子信道，也可以反向用作量子信道。

样本或特征： 作为X(复数域) $\subset \mathsf{S}$(复数域)，这些也都是态（定义2.6），并且根据推论 3.16，它们是量子信道，同时也是映入代数 $\mathbb{C}$的 *-同态。

自同构： *-同态的一种特殊情形是内部可逆*-同构（量子信道），例如形式为 $\mathscr{S}: \mathcal{A} \ni a \mapsto uau^\star \in \mathcal{A}$ 的 *- 自同构（酉变换或对称），其中 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$ 是酉算子。这类内部 *-自同构通常表示系统固有的对称性，其中对称群由酉算子的一个子群表示。此处不再展开讨论，例如参见 [58]。它们也可能表示一种量子计算，参见第 4节。

酉等价：希尔伯特空间之间的这类变换有些相似。设 H 和 K 是维数相同的有限维希尔伯特空间，并且有酉算子 $U: H \to K$。这类酉算子在 $L(H)$ 与 $L(K)$ 之间建立 *-同构，因而也建立可逆量子信道：对于 $A \in L(H)$，其在 $L(K)$ 中的像 $UAU^\dagger \in$ 可写成克劳斯形式（参见命题 3.18 ）。若 $H = K$，这就是自同构的一种具体形式。

扩张：扩张是将概率代数 A 与另一个概率代数 B 作张量化，其中 B 的密度为 $r_B \in D(B)$，参见推论 3.21。在海森堡绘景中，这是一个完全正且保单位映射 $\mathscr{E}: A \otimes B \to A$，它在初等张量 $a \otimes b \in A \otimes B$ 上定义为$\mathscr{E}(a \otimes b) = tr_B(r_B b)\, a$，并通过线性延拓定义。其在薛定谔绘景中的伴随是 CPTP 映射 $\mathscr{E}\dagger: A \to A \otimes B$；对于态 $r_A \in D(A)$，该映射由张量化 $\mathscr{E}\dagger(r\, A) = r_A \otimes r\, B \in D(A \otimes B)$ 给出。

限制： 海森堡绘景中的 限制是一个完全正保单位映射 $\mathscr{R}: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$，它简单地表示为 $\mathscr{R}(a) = a \otimes 1_{\mathcal{B}}$。薛定谔绘景中的伴随映射是一个 CPTP 映射 $\mathscr{R}^\dagger: \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A}$，这正是偏迹，如方程（2.29）所示 ——

以及（2.30）在定义2.72中，以及备注2.74中的方程（2.34）和（2.35）：如果 $r_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \in \mathrm{D}(A \otimes B)$ 是张量积 $A \otimes B$ 上的一个态，那么 A 上对应的约化态由 $r_{red,\mathcal{A}} = \mathscr{R}^{\dagger}(r_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \text{迹}_{\mathcal{B}} r_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \in \mathrm{D}(A)$。

组合：组合完全正且保单位映射的一种可能方式是完全正且保单位映射的凸组合，参见推论3.15。可以注意到，完全正且保单位映射在几何上与态具有非常相似的结构：它们是锥与线性子流形的交集。其伴随映射也具有同样的性质，其几何结构与密度矩阵相似。

组合量子信道的另一种非常重要的方式是级联完全正且保单位映射，参见推论3.15；并且，正如上文所述，所有量子信道都可以通过这种方式，由少数几个基本构件构建而成，即扩张、限制以及 *-同构或酉变换。

条件期望：这是一个简化的讨论，因为根据具体要求，复数域*-或W*-代数中的条件期望可能不存在，也可能不唯一，例如参见 [143, 142, 141, 67, 68, 7, 88, 118, 154, 155] 及其中的参考文献。幸运的是，对于有限维代数，情况比较简单 [67, 68, 7, 107, 152, 75]。设 $(\mathcal{A}\ \varpi)$ 是一个带有忠实态的有限维概率代数 $\varpi \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$，并且 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个概率子代数。

定义 3.30。 满足以下条件的正幺映射 $\mathscr{E} \in L(A, B)$

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B} : \mathscr{E}(ba) = b\,\mathscr{E}(a), \tag{3.25}$$

称为以子代数 B 为条件的 ϖ-条件期望 [75]，。有时也记作 $\mathscr{E}_{\mathcal{B}}$，甚至记作 $\mathscr{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$，通常还记作 $\mathbb{E}(\cdot|B)$。

有些作者有时会采用略有不同、但最终等价的条件。有限维代数的情形之所以简单，是因为$\mathcal{B}$在所有向量空间拓扑下已经是完备的。$\mathscr{E}$ 的一些性质汇总于下述

定理 3.31。 在有限维代数的情形下（且不止于此），条件期望映射 $\mathscr{E}$ 存在 且 唯一；实际上，它是正交投影 $P_{\mathcal{B}}$ [67, 68, 7, 75]，将 $\mathcal{A}$ 投影到 $\mathcal{B}$ 上，所依据的是相关的希尔伯特空间内积 ϖ，参见命题 2.50。它也可以描述为自然恒等嵌入 $\mathscr{J} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$的伴随 $\mathscr{E} = P_{\mathcal{B}} = \mathscr{J}^{\dagger}$。

因此，映射 $\mathscr{E}$ 的算子范数小于单位元（即它是一个压缩映射），当代数赋予希尔伯特 $\|\cdot\|_2$-范数时如此；当代数赋予 *Schatten*-∞-范数时，它也为压缩映射（参见命题3.27）（参见注释2.52）。此外，它是完全正且保单位（*CPUP*），因此是一个信道。它还满足

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b, c \in \mathcal{B} : \mathbb{E}(bac) = \mathbb{E}(b\,\mathscr{E}(a)\,c), \tag{3.26}$$

$$\mathscr{E}(bac) = b\,\mathscr{E}(a)\,c. \tag{3.27}$$

由此很容易得出：条件期望 $\mathscr{E}(a)$ 使损失函数 $\Lambda_a(b) := \|a - b\|_2^2$ 在 $\mathcal{B}$ 上达到最小，因此有勾股定理

$$\|a\|_2^2 = \|a - \mathscr{E}(a))\|_2^2 + \|\mathscr{E}(a)\|_2^2, \quad \text{and the Galerkin orthogonality} \tag{3.28}$$

$$0 = \langle b \mid a - \mathscr{E}(a)\rangle_2 \quad \forall b \in \mathcal{B}. \tag{3.29}$$

有两种特殊的子代数值得特别说明：

- If $\mathcal{B} = \mathbb{C}[1_{\mathcal{A}}]$, then $\mathbb{E}(a \mid \mathbb{C}[1_{\mathcal{A}}]) = \mathbb{E}(a)\, 1_{\mathcal{A}} = \bar{a}$.
- If $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, then $\mathbb{E}(a \mid \mathcal{A}) = \mathscr{I}(a) = a$, where $\mathscr{I} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ is the identity.

仪器：这是对例19中可观测量的一种细化。其中考虑了一个完全正且保单位映射 $\mathscr{F}$ ： 复数域 $\mathcal{L}(H)$，其中复数域 $\cong C(X)$ 是交换代数。根据命题 2.79，任意交换或阿贝尔 W^*-代数 C 都可以用这种方式表示，其中 $X = X(C)$ 是特征（即样本）的集合。下文将使用这种表示。对于有限维的 C， $X = X(C)$ 是一个有限集，且 $n = |X| \in \mathbb{N}$；因此 $C \cong C(X)$ $\cong \mathbb{C}^X \cong \mathbb{C}^n$ ，其单位元为 $1_{\mathcal{C}} = [1, \ldots, 1]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^X \cong \mathbb{C}^n$，标准单位向量为 $\boldsymbol{e}_x \in \mathbb{C}^X$ ，所有分量均为零，只有位置 $x \in X$ 处为 1——这就是例 2 中的哈达玛代数。

例19 中的可观测量将概率信息从代数$\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 传递到经典交换（或阿贝尔）代数 复数域 $\cong \mathbb{C}^n$。为了追踪观测后的系统 $\mathcal{A}$（例如 [150, 107, 152, 151], ）的变化，我们必须将代数 $\mathcal{A}$ 作为输出的一部分，或者更一般地，将一个可能不同的概率代数 $\mathcal{B}$纳入其中。在许多情况下，它可以与 $\mathcal{A}$相同，也可以是子代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$，并表示与仪器相互作用后的观测系统；在海森堡绘景中，该仪器是一个 *-线性完全正且保单位映射

$$\mathscr{G} : \mathcal{C} \otimes \mathcal{B} \ni (\boldsymbol{f} \otimes b) \mapsto \mathscr{G}(\boldsymbol{f} \otimes b) = \sum_{x \in X} f_x G_x(b) \in \mathcal{A}, \tag{3.30}$$

与 $\boldsymbol{f} = [\ldots, f_x \ldots]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^X$ 相乘，然后利用线性性展开。这里每个 $G_x : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 都是一个~~*~~-线性完全正映射，而保持单位元要求$\mathscr{G}(1_{\mathcal{C}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{A}}$。这也得到 $\mathscr{G}(1_{\mathcal{B}}) = \sum_{x \in X} G_x(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{A}}$，其中边缘映射 $\mathscr{G} := \sum_x G_x \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ 是完全正且保单位的；它体现了忽略系统在复数域上的输出时，系统所发生的变化。注意，这些映射定义了该观测的正算子值测度：$g_x := G_x(1_{\mathcal{B}}) \in \mathbb{E}(\mathcal{A})$。若该正算子值测度实际上是投影值测度，则这种设置称为冯·诺伊曼 仪器。

薛定谔绘景中信道 $\mathscr{G}$ （式（3.30）） 的伴随为 $\mathscr{G}^\dagger$ ： $\mathcal{A} \to$ 复数域 $\otimes \mathcal{B}$，定义为

$$\mathscr{G}^\dagger(r_{\mathcal{A}}) = \sum_{x \in X} \boldsymbol{e}_x \otimes G_x^\dagger(r_{\mathcal{A}}), \tag{3.31}$$

其中 $G_x^\dagger$ ： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 G_x的伴随，且 $\boldsymbol{e}_x \in \mathbb{C}^X$ 是典范单位向量。若没有观测提供的信息，仪器的相互作用会导致态发生变化，新的态在 复数域 $\otimes \mathcal{B}$ 上由式（3.31）给出

$$r_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}} = \mathscr{G}^\dagger(r_{\mathcal{A}}) = \sum_{x \in X} \boldsymbol{e}_x \otimes r_{\mathcal{B},x} = \sum_{x \in X} \boldsymbol{e}_x \otimes G_x^\dagger(r_{\mathcal{A}}). \tag{3.32}$$

通过取偏迹，可得到边缘密度——无需知道观测结果即可预测。在复数域 C 上，它是向量 $\boldsymbol{\rho}_{marg} \in \mathbb{C}^X$ ，其分量为 $\rho_x = tr_{\mathcal{B}} r_{\mathcal{B}} x = tr_{\mathcal{A}}(r_{\mathcal{A}} g_x)$；在 B 上，则为 $r_{B,marg} = \mathscr{G}\dagger(r_{\mathcal{A}}) := \sum_x r_{\mathcal{B}} x$。另一方面，假设观测结果为 $y \in X$，即已观测到效应 g_y 。这意味着在 C 上， $\cong \mathbb{C}^X$ 后验密度（即观测密度）由向量 $\boldsymbol{\rho}_{obs} = \boldsymbol{e}_y$给出，即观测 / 特征$\omega_y(\boldsymbol{f})$ 的密度 $= f_y$。此外，这表明在方程 (3.31) 和 (3.32) 中，只有 $x = y$ 项非零。

上文的边缘密度 $r_{\mathcal{B},marg}$ 现在与 $\boldsymbol{\rho}_{obs}$不一致，因为它必须仅与 $r_{\mathcal{B},y} = G_y^\dagger(r_{\mathcal{A}})$成正比；而迹保持要求其迹为单位迹：

$$r_{\mathcal{B},post} = \frac{1}{\operatorname{tr} r_{\mathcal{B},y}} r_{\mathcal{B},y}. \tag{3.33}$$

此式（*3.33*）称为广义的 吕德斯或 吕德斯-冯·诺伊曼规 *le.*

可以证明， *[150],* 任意量子信道都可以由 级联（参见推论 *3.15*）构造而成，所用的操作包括 *-同态或 *-同构——酉变换是其特殊情形——以及扩张和限制。从某种意义上说，这也是 *Stinespring* 扩张定理 *3.22* 的内容。

量子信道的概念，即信息的噪声传输，除了其他用途外，也可用于描述马尔可夫链 [16, 15]；事实上，任何马尔可夫链都可以用量子信道来描述。

仪器与观测：在可能的量子信道列表中，最后一个例子——仪器——值得更仔细地考察。在那里，我们在海森堡绘景中引入了边缘映射，它会“忘掉”观测，其表达式为式（3.30）： $\mathcal{G}(\mathfrak{b}) = \mathcal{G}(1_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{b}) = \sum_{x\in X} G_x(\mathfrak{b})$，其中 $G_x \in \mathrm{L}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$ 是完全正的。此前已经指出，这些映射定义了观测的正算子值测度： $\mathfrak{g}_x := G_x(1_{\mathcal{B}}) \in \mathrm{E}(\mathrm{A})$。反过来，给定一个类似 $\mathcal{T} = \sum_x \mathcal{T}_x$ 的完全正映射，且其中所有 $\mathcal{T}_x$ 都是完全正的，如何找出所有可能的观测？由于将用到 Stinespring 膨胀定理 3.22，以下内容将针对算子代数 [150] 来表述。其结果在某种意义上类似于推论 2.57 中的拉东-尼科迪姆版本，并且显然与定理 3.24 有关：

定理 *3.32*（*CP* 映射之和的拉东-尼科迪姆定理）。设 H、J 为有限维希尔伯特空间， X 为有限集，且 $\mathcal{T}_x : L(J) \to L(H)$ $x \in X$ 为 *-线性完全正映射，并令 $\mathcal{T} = \sum_{x\in X} \mathcal{T}_x$。在定理 *3.22* 的式 *(3.19)* 的 *Stinespring* 形式中，令$V \in L(H, J \otimes E)$ 为 $\mathcal{T}$ 的 *Stinespring* 算子，使得

$$\overline{\mathcal{T}} : \mathcal{L}(\mathcal{J}) \ni A \mapsto \overline{\mathcal{T}}(A) = V^\dagger(A \otimes I_{\mathcal{E}})V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

那么存在唯一确定的正算子值测度， $X \supset \{x\} \mapsto E_x \in \mathrm{E}(L(E))$，使得

$$\forall x \in X : \mathcal{T}_x(A) = V^\dagger(A \otimes E_x)V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.34}$$

当 E 为一维时，由式 (3.34) 可以得到一个有趣的结论，因为此时 $\mathrm{E} \cong \mathbb{C}$，从而 $(\mathrm{J} \otimes \mathrm{E}) \cong \mathrm{J}$。此时式 (3.34) 写作 $\mathcal{T}_x(A) = V\dagger(p_x A)V$，也就是说，它是克劳斯形式（参见推论 3.19 和命题 3.18），且只有一项。定理 3.32 于是告诉我们， $p_x \in [0, 1]$ 且 $\sum_x p_x = 1$，也就是说，将$\mathcal{T} = V\dagger AV$分解为完全正映射 $\mathcal{T}_x$ 的唯一方式是取 $\mathcal{T}$ 的正倍数，而 $\boldsymbol{\rho}_X = [\ldots, p_x, \ldots]^\intercal$ 是 X上的概率分布。此外，在 $\mathcal{T}$是信道并因而为幺正的情况下，其伴随（式 (3.20)）是保迹的，于是 $V^\dagger V = I_{\mathcal{H}}$ ，且 V 是等距映射。特别是在 $\mathrm{J} = \mathrm{H}$ 的情况下，单位元 $\mathcal{I}$ 和对称都具有这种单项克劳斯形式。这导致

推论 3.33（无扰动——无信息）。 与之前一样，设 $C \cong \mathbb{C}^X$ 和 H，令 $\mathcal{N}: C \otimes L(H) \to L(H)$ 为一个仪器，使得 $\mathcal{N}(1_{\mathcal{C}} \otimes A) = \mathcal{N}(A) = U^\dagger AU$

具有酉映射 $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$。则 $\mathscr{N}_\dagger(R) = \overline{URU^\dagger}$是一个酉全局态变换。特别地，对于 $U = I_\mathcal{H}$，这意味着 $\mathscr{N}$和 $\mathscr{N}_\dagger$ 都是单位元，因此通过与仪器的相互作用，该态不会受到扰动。

对于分解 $\mathscr{N} = \sum_{x\in X} \mathscr{N}_x$，此处的定理 3.32 指出，存在一个 唯一的 概率分布 $\boldsymbol{p}_X = [\ldots, p_x, \ldots]^\mathsf{T}$ 定义在 X 上，使得 $\mathscr{N}_x = p_x\mathscr{N}$。因此，该概率 p_x 与 密度算子 $R \in \mathrm{D}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$无关，因此无法提供关于 R 的任何信息。

这意味着，如果坚持认为由$\mathcal{L}(\mathcal{H})$表示的系统不受扰动，那么在 X 上只有一个概率分布，它由映射 $\mathscr{N}_x$ 唯一决定，而与态或密度算子无关（无论$\mathcal{L}(\mathcal{H})$上的态或密度算子为何）；也就是说，这种观测无法提取任何信息。

更新与条件期望：在接下来的例 21 中，我们将探讨仪器通道与条件期望通道之间的联系。为此，我们将更仔细地考察仪器通道 $\mathscr{G}\colon \mathsf{C} \otimes \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ 的一个特殊情形。为简便起见，我们考虑 $\mathsf{B} = \mathsf{A}$，且与该仪器关联的正算子值测度、可观测量 $\{x\} \mapsto \mathsf{g}_x = G_x(1_\mathcal{B}) \in \mathsf{E(A)}$ 在概率代数 A 上实际上是一个投影值测度。这意味着 $\{\mathsf{g}_x\} \subset \mathsf{P(A)}$ 实际上是互相正交投影，并且我们得到一个冯·诺伊曼仪器，同时还有 $|X| \leq \dim \mathsf{A}$。

例 *21*（由仪器更新）。为了让这个例子更加具体，可以假设 A 上的投影值测度来自对某个可观测量 $c \in A_{sa}$ 的观测，即来自其谱分解 $c = \sum_j \lambda_j p_j$，其中谱投影 $p_j \in P(A)$，参见命题 *2.77* 和注 *2.91*。因此，我们将把投影值测度的标记从 $x \in X$ 改为 $j = 1, \ldots, n$，其中 $n \leq \dim A$。此投影值测度与 $C \cong \mathbb{C}^n$ 上的投影值测度相结合，后者以标准单位向量 e_j 作为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准投影值测度。这相当于从仪器张量积上的投影值测度 $\{j\} \mapsto e_j \otimes p_j \in P(C \otimes A)$ 开始。我们还希望式（*3.30*）中的 *CP* 映射 $G_x \in L(A)$ 的取值为 $G_j(1_A) = g_j = p_j \in P(A)$。它们可以写成克劳斯形式 $G_j : A \ni b \mapsto G_j(b) = p_j b p_j \in A$，从而得到正确的结果。这类映射是自伴的，因此式（*3.31*）中的 $G_j^\dagger = G_j$。这也使得边缘映射 $\mathscr{G} = \sum_x G_x$ 是自伴的，即 $\mathscr{G} = \mathscr{G}^\dagger$，而 $\mathscr{G}$及其伴随都是完全正且保单位的，并且都是 *CPTP*。

这些边缘映射预测观测之前的态 / 密度，或是不考虑观测时的态 / 密度。它们在每个位置 $j \in [n]$ 处由 $\boldsymbol{\rho}_{marg} = [\ldots, \rho_j, \ldots]^\mathsf{T}$给出，其中

$$\rho_j = \mathrm{tr}_\mathcal{A}\left[(e_j^\mathsf{H} \otimes p_j^*)\mathscr{G}^\dagger(r_\mathcal{A})\right] = \sum_{i=1}^n \left[(e_j^\mathsf{H} e_i)\,\mathrm{tr}_\mathcal{A}(p_j^* p_i r_\mathcal{A} p_i)\right]$$
$$= \mathrm{tr}_\mathcal{A}(r_\mathcal{A} p_j) = \mathbb{E}_{r_\mathcal{A}}(p_j) = \mathbb{P}_{r_\mathcal{A}}(p_j). \quad (3.35)$$

在与可观测量相互作用后，若不考虑观测所提供的信息，A 上预测的边缘密度在薛定谔绘景中为

$$r_{marg} = \overline{\mathscr{G}}^\dagger(r_\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^n G_j^\dagger(r_\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^n p_j\, r_\mathcal{A}\, p_j. \quad (3.36)$$

用于预测的信息流如图所示。1。

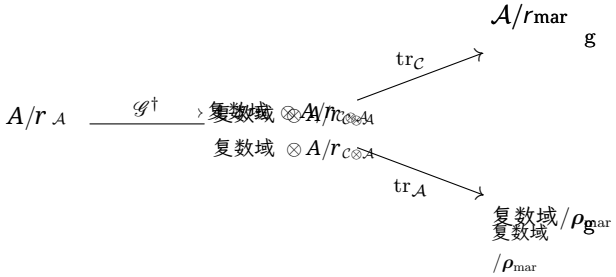


图 1：薛定谔绘景／相互作用产生的信息流

与式（3.36）对偶的海森堡绘景中，可观测量 $a \in \mathcal{A}_{sa}$仅因与仪器相互作用而发生的变化（不考虑或评估观测所提供的信息），由式（3.30）可得

$$a_{marg} = \overline{\mathscr{G}}(a) = \sum_{j=1}^{n} G_j(a) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, a\, p_j. \tag{3.37}$$

注意到，$\mathscr{G}$ 及其伴随 $\mathscr{G}^\dagger$ 均满足定理3.32中的假设，这意味着每个 G_j （分别是 $G_J^\dagger$ ）都可以用带有 *Radon-Nikodým* 效应的 *Stinespring* 形式来描述。

现在假设某个 $k \in [n] = \{1, \ldots, n\}$ 是观测的结果，即观测到了投影 $p_k = G_k(1_{\mathcal{A}}) \in \mathrm{P}(A)$ 。因此，$C = \mathbb{C}^n$ 上的观测／样本由纯态／秩一观测密度 $\rho_{obs} := e_k \in \mathrm{D}(\mathbb{C}^n)$,特征 $\omega_k \in \mathsf{X}(\text{复数域})$ 的密度表示，以及 $\omega_k(f) = f_k$ 给出。

由此可知，现在式（ $\rho_{marg} \in \mathcal{C}$ 3.35）中的预测密度与观测不一致，因此必须改为观测到的密度ρ_{obs}。这也意味着，式（$r_{marg} \in \mathcal{A}$ 3.36）中的预测边缘密度与观测不一致，必须进行调整，以纳入观测所提供的信息。

考虑到已观测到 $k \in [n]$ 这一信息，方程(3.36) 和 (3.37) 中只有 $j = k$这一项非零。对于密度而言，这意味着后验密度r_{post}在$\mathcal{A}$上必须与 $G_k^\dagger(r_{\mathcal{A}}) = p_k\, r_{\mathcal{A}}\, p_k$成正比。迹保持要求，基于观测信息条件化的后验密度因此由所谓的吕德斯或冯·诺依曼—吕德斯规则方程(3.33) 给出

$$r_{post} = \frac{1}{\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}\, G_k^\dagger(r_{\mathcal{A}})}\, G_k^\dagger(r_{\mathcal{A}}) = \frac{1}{\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(r_{\mathcal{A}} p_k)}\, p_k\, r_{\mathcal{A}}\, p_k = \frac{1}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)}\, p_k\, r_{\mathcal{A}}\, p_k, \tag{3.38}$$

通过观察可知，$\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(p_k r_{\mathcal{A}} p_k) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(r_{\mathcal{A}} p_k) = \mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)$。

从方程(3.38) 可直接看出，方程(3.36) 中的先验密度$r_{\mathcal{A}} \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$由于观测而发生改变（通过投影），改变幅度尽可能小——仅改变到与观测所包含的新信息相一致的程度——从而得到后验密度，这也将其与定理3.31联系起来。在海森堡绘景中，方程 (3.37) 中也只有 $j = k$ 这一项非零，因此可观测量a 变为

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto G_k(a) = p_k\, a\, p_k = a_{post} \in \mathcal{A}. \tag{3.39}$$

这里已经可以注意到，为了纳入关于发生了与仪器相互作用，或既发生相互作用又进行了观测这一信息而进行的更新，有两种不同的表达形式：一种是海森堡绘景方程(3.37)和(3.39)，其中可观测量、投影值测度和效应发生改变，而态则保持不变

；另一种是薛定谔绘景方程(3.36)和(3.38)，其中态（即密度）发生改变。

两种方法得到相同的概率，也对应相同的更新，例如由方程(3.36)和(3.37)可得，对所有 $r_{\mathcal{A}} \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ 和 $a \in \mathcal{A}_{sa}$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(r_{\mathrm{marg}}\, a) = \operatorname{tr}(\overline{\mathscr{G}}^{\dagger}(r_{\mathcal{A}})\, a) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(G_j^{\dagger}(r_{\mathcal{A}})\, a) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr} p_j\, r_{\mathcal{A}}\, p_j\, a \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr} r_{\mathcal{A}}\, p_j\, a\, p_j = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(r_{\mathcal{A}}\, G_j(a)) = \operatorname{tr}(r_{\mathcal{A}}\, \overline{\mathscr{G}}(a)) = \operatorname{tr}(r_{\mathcal{A}}\, a_{\mathrm{marg}}). \quad (3.40)\end{aligned}$$

略显令人不安的是，可观测量的变化方程(3.39)作为映射 $G_k : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是完全正的，却不保单位 ($G_k(1_{\mathcal{A}}) = p_k$)，因此不符合信道范式，无法涵盖纳入观测信息后的更新。

修正这一点的一种方法，是采用上文在可能信道示例列表中讨论过的条件期望概念，重新定义 $G_k : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，其中子代数尚待定义 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$。这里的条件事实 是，将对投影值测度（PVM）($\{j\} \mapsto p_j$)进行观测，而与该 PVM 所定义仪器的相互作用会带来新信息，这些新信息意味着可观测量需要更新，即方程(3.39)。在下一个例22中，这一切都纳入子代数的定义 $\mathcal{B}$，以便应用定义 3.30。

概率代数中的条件期望是一个活跃的研究课题，例如参见 [143, 142, 141, 67, 68, 7, 88, 118, 154, 155] 及其中的参考文献。要求可以设定得非常严格，以致在无限维代数中，只有在特定情况下才存在条件期望，参见 [118]；幸运的是，对于有限维代数，条件期望确实存在，而且甚至有相当明确的描述 [152]。关于吕德斯规则方程(3.38)和(3.44)是否是表述条件期望方程(3.43)的正确方式，也可参见 [41, 42, 109, 69, 113]及其中的参考文献。

例 22 (以条件期望更新)。 方程($\mathscr{E}_{\mathcal{B}}(a)$ 中的条件期望 *3.25*)某个可观测量 $a \in A_{sa}$ 将是该可观测量和用于对其进行条件化的投影值测度 $\{j\} \to p_j \in \mathrm{P}(A)$ 的函数。因此，若观测到 p_j ，这个子-*-代数可取为由形如 $p_j\, b\, p_j \in (p_j\, A\, p_j) =: B_j$ 的表达式生成的子代数，其中任意 $b \in A$ 均可。这样，对于任意 $b \in A$，都保留了该函数的所有可能性，同时确保自伴元素 $a \in A_{sa}$ 被映射为自伴元素 $p_j\, a\, p_j \in B_{j,sa}$。

注意到，对于 $j \neq m$ ，子代数 $B_j = p_j A p_j$ 与 $B_m = p_m A p_m$ 是正交的。因此

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j \subset \mathcal{A}$$

会是一个候选子代数，但它太大了。人们只需要 $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ 中由形如 $\sum_{j=1}^{n} p_j\, b p_j$ 的表达式生成的子代数，见式(*3.37*)，其中每一求和项都具有相同的 $b \in \mathcal{A}$ 位于中间。因此可以令

$$\mathcal{B} := \mathbb{C}\left\langle \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j\, b\, p_j \mid b \in \mathcal{A} \right\} \right\rangle \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{A}. \quad (3.41)$$

因此显然， $\mathscr{J} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$，其中 $\mathscr{J}(\sum_{j=1}^{n} p_j\, r\, p_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, r\, p_j \in \mathcal{A}$ 是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{A}$ 的恒等嵌入。根据定理 *3.31* 可以看出，它的伴随 $\mathscr{E}_{\mathcal{B}} := \mathscr{J}^{\dagger}$，即到 $\mathcal{B}$ 上的正交投影，正是所求的条件期望。

请注意，这些表达式与 $\mathscr{G} = \mathscr{G}^\dagger$ 上文例21 中所用的表达式相同；这里不会使用它们，因为它们可能造成混淆。原因在于，例21 采用的观点是，信息流通过一个保迹映射从 A 流向 $C \otimes B \subset C \otimes A$；而这里我们使用幺正条件期望 $\mathscr{E}_{\mathcal{B}} : A \to B$，因此信息流沿着保迹映射 $\mathscr{J} = \mathscr{E}_{\dagger\mathcal{B}} : B \to A$ 的方向，也就是说，观测中的信息将传递到整个代数 A 中。

对于可观测量 $a \in A_{sa}$，条件期望的表达式

$$\mathbb{E}(a|\mathcal{B}) := \mathscr{E}_{\mathcal{B}}(a) = \mathscr{J}^\dagger(a) = a_{marg} = \sum_{j=1}^{n} p_j \, a \, p_j \in \mathcal{B} \tag{3.42}$$

包含了与仪器相互作用之后、观测带来新信息之前的信息。它涵盖了观测可能产生的所有可能性，也就是说，任何 a 在观测到某个 p_k 之后可能如何更新。它在薛定谔绘景中的伴随就是前面提到的嵌入 $\mathscr{J} = \mathscr{E}^\dagger{}_{\mathcal{B}} = \mathbb{E}^\dagger(\cdot|\mathcal{B}) : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$。整体情况如图2所示。

$$\mathcal{A} \xleftarrow{\mathbb{E}^\dagger(\cdot|\mathcal{B})} \mathcal{B} \xleftarrow{\mathrm{tr}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \otimes \mathcal{B} \xleftarrow{\mathrm{tr}^\dagger_{\mathcal{B}}} \mathcal{C}$$

图 2：由相互作用引起的条件期望诱导的信息流

观测到某个 p_k 之后——这表示一个纯态／特征 ω_k 在复数域上——由于获得了新信息，式（$j = k$ 3.41）中只剩下项，这就变成了投影（参见式（3.39））

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto \mathbb{E}(a|\mathcal{B}_k) := p_k \, a \, p_k = a_{post} \in \mathcal{B}_k, \tag{3.43}$$

与式（3.42）中的条件期望相反，这可以称为后条件期望，因为它是在将条件信息纳入考虑之后得到的。不过它通常也称为条件期望，有时会因此混淆所指的是式（3.42）还是式（3.43）。注意，由于 $\mathbb{E}(1_{\mathcal{A}}|\mathcal{B}_k) = p_k = 1_{\mathcal{B}_k}$，式（3.43）中的映射是完全正且保单位的。

观测 p_k带来的新信息之后，代数上的新状态最终可以通过方程(3.43的伴随得到，即嵌入

$$\mathcal{B}_k \ni r_{post} = \frac{1}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)} \, p_k \, r_{\mathcal{A}} \, p_k \mapsto \mathbb{E}^\dagger(r_{post}|\mathcal{B}_k) = \frac{1}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)} \, p_k \, r_{\mathcal{A}} \, p_k \in \mathcal{A}, \tag{3.44}$$

这证实了吕德斯规则方程(3.38)。随后，这个后验密度定义了 $\mathcal{A}$ 上的一个新状态，该状态与观测 p_k带来的新信息一致。因此，吕德斯规则方程(3.38)和(3.39)可以从条件期望以及观测之后的更新角度来理解。在经典交换概率中，这与贝叶斯定理相关，通常称为贝叶斯更新。在非交换概率中也可以沿用这一术语，尽管在这种情况下贝叶斯定理通常并不成立 [42, 2, 69, 113, 3, 4], ，而且它也不是更新的依据。

用这个新密度在 $\mathcal{A}$ 上计算的期望，根据方程(3.38) 和 (3.39)，为

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \ni a \mapsto \mathbb{E}(a|p_k) := \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}[r_{post} a] &= \frac{1}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)} \, \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}[p_k r_{\mathcal{A}} p_k a] \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)} \, \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}[p_k r_{\mathcal{A}} p_k p_k a p_k] = \mathrm{tr}_{\mathcal{B}}[r_{post} a_{post}] \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

这可以称为条件化期望，因为它是在考虑了条件事件的新信息之后得到的期望。泛函$\mathbb{E}(\cdot|p_k) \in \mathsf{S}(A)$ 是反映这一点的新状态 。注意，在这个新态中，p_k 是一个必然事件，因为 $\mathbb{E}(p_k|p_k) = \frac{1}{\mathbb{P}_{r_A}(p_k)} \mathrm{tr}_A[p_k r_A p_k p^k] = \frac{1}{\mathbb{P}_{r_A}(p_k)} \mathrm{tr}_A[r_A p_k] = 1$。

式（3.45）的最后一种情形如图3所示。

$$\mathcal{A} \xleftarrow{\mathbb{E}^\dagger(\cdot|\mathcal{B}_k)} \mathcal{B}_k \xleftarrow{\mathrm{tr}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}_k \xleftarrow{\mathrm{tr}^\dagger_{\mathcal{B}_k}} \mathcal{C} \xleftarrow{\omega_k^\dagger} \mathbb{C}$$

图3：由观测引起的、条件期望所诱导的信息流 n

还可以注意到，根据推论 2.57，条件化期望态 $\mathbb{E}(\cdot|p_k) \in S(A)$ 相对于先验状态 $\mathbb{E}(\cdot)$ 具有拉东–尼科迪姆导数 $C := d\mathbb{E}(\cdot|p_k)/d\mathbb{E}(\cdot) \in L(A)$，从而对所有 $a \in A$，有 $\mathbb{E}(a|p_k) = \mathbb{E}(Ca)$。$C$ 的显式形式可在 [152] 中找到。

本例22 表明，与仪器的相互作用——经由条件期望——以及观测——经由条件化期望——都可以纳入信道范式。还可以注意到，信息流如何从仪器相互作用（见图2）或观测 ω_k 流向可观测量的原始代数$\mathcal{A}$，见图3。

还可以补充一点，在这两种情况下，即图2和图3中的情况，映射回原代数 A 的最后一步都是恒等嵌入，因此纯粹是形式上的。这是因为根据方程 (3.42) 和 (3.43)，所有元素 a $\in$ A 都会更新并映射到 A 的一个子代数中。具体而言，在方程 (3.42) 中，这只是由仪器相互作用所致（图2），映射的目标是子代数 B；而在有额外观测的情况下（图3），根据方程 (3.43)，映射的目标则是子代数 B_k。并且，如方程 (3.36)、(3.38) 和 (3.44) 所示，相应的密度 $\mathrm{r}_{\mathrm{marg}} \in$ B 和 r post $\in \mathrm{B}_k$ 也属于相应的子代数，从而可以根据方程 (3.40) 和 (3.45) 给出概率。因此，后续任何操作都可以直接从其中一个概率子代数继续进行：如果尚未考虑观测信息，则从 B 出发；如果已经考虑，则从 B_k 出发。原概率代数 A $\supset$B $\supset$ B_k 过于庞大，之后不再需要。

条件概率：如同定义2.17中，条件概率将基于条件期望。前文已经提到，这一概念仍存在争议，例如参见 [143, 67, 68, 7, 88, 118, 154, 155] 及其参考文献。

问题在于，吕德斯规则方程（3.38）与（3.44）是否是表述条件期望方程（3.43）以及基于它的条件概率的正确方式，例如参见 [41, 42,109, 69, 113]。如同许多向更广领域的推广一样，在推广某一构造时，往往不可能保留其全部性质。显然，为了考虑以许多情况下所谓的数据同化形式出现的新信息，需要这样一个概念，例如参见 [61], ；但另一方面，贝叶斯定理在非交换情形中并不成立 [42, 69, 113, 3, 4]。这可被视为交换概率论与非交换概率论之间的决定性差异 [2]。

采用定义2.17的类似方法，可以定义一种可能称为条件概率 的概率，方法是使用由式 $\mathbb{E}(\cdot|p_k) \in \mathsf{S}(\mathcal{A})$ 给出的3.45式中的新态。对于 $q \in \mathrm{P}(\mathcal{A})$ ，可以像定义 2.17中那样定义概率：

$$\mathbb{P}(q|p_k) := \mathbb{E}(q|p_k). \tag{3.46}$$

并且，当q 与p_k 对易时，它的表现就像经典柯尔莫哥洛夫条件概率一样，如下所示

$$[q,p_k]=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(q|p_k)=\frac{1}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)}\,\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}[p_k r_{\mathcal{A}} p_k q p_k]=\frac{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(qp_k)}{\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(p_k)},$$

以及 $\mathbb{P}_{r_{\mathcal{A}}}(qp_k)$ 可视为 联合概率 q、$p_k \in \mathrm{P}(\mathcal{A})$。但如果它们不对易且不相容，就不存在联合概率，并且某些性质会丧失；例如 [69] 及其中的参考文献对此有详尽讨论。

在此语境下，值得注意的是，经典柯尔莫哥洛夫条件概率具有一项独特性质。换言之，给定定义在 σ-代数 $\mathfrak{F}$ 上的经典概率测度 $\mathbb{P}$，以及两个事件 A、$B \in \mathfrak{F}$，按通常方式通过比值 $\mathbb{P}(A|B) := \mathbb{P}(A\cap B)/\mathbb{P}(B)$ 并利用联合概率$\mathbb{P}(A\cap B)$定义的经典条件概率，其特征在于它是定义在整个 $\mathfrak{F}$ 上的唯一概率测度；对于 $A \subseteq B$，以 B 为条件只涉及对初始概率测度重新归一化；即 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A\cap B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(B)$。

现在假设 $\mathrm{A} = \mathrm{L}(\mathrm{H})$，其中 H 是有限维希尔伯特空间，$\dim \mathrm{H} > 2$，密度算子 $R \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$，并令 L(P(A)) 为所有正交投影构成的格，参见命题 2.25。此外，令 $P \in \mathrm{P}(\mathrm{A})$ 为一个正交投影，并考虑子格 $\mathrm{L}(\leq P) := \{Q \in \mathrm{P}(\mathrm{A})\ Q \leq P\} \subset \mathrm{L}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))$，它由所有小于或等于 P 的投影构成。注意，对于 $Q \in \mathrm{L}(\leq P)$，有 $Q \leq P$，因此可得 $QP = PQ = Q$，于是所有 $Q \in \mathrm{L}(\leq P)$ 都与 P 对易。于是有 [41, 69]:

定理 *3.34*（吕德斯条件概率的存在唯一性）。在上述设定下，假设 $\mathbb{P}_R(P) = \mathbb{E}_R(P) = \mathit{tr}(RP) \neq 0$（参见定义*2.17*）。仿照经典定义以及公式 *(3.46)* 中的定义，对任意 $Q \in \mathit{L}(\leq P)$，定义函数 $\mathit{Pr}(Q) := \mathbb{P}_R(Q)/\mathbb{P}_R(P) = \mathbb{P}_R(QP)/\mathbb{P}_R(P)$；显然，这只是对初始概率测度 $\mathbb{P}_R(Q)$ 的重新归一化。

那么，$\mathit{Pr}(\cdot)$ 在 A 的所有 $\mathit{P(A)}$ 上有唯一的扩张 $\mathbb{P}_R(\cdot|P)$，它由 A 上由条件化期望给出的态（参见公式 *(3.45)*） $\mathbb{E}(\cdot|P) \in \mathit{S(A)}$ 导出——因此满足公式 *(2.52)*——其密度算子 R_P 由吕德斯规则（参见公式 *(3.38)*） $R_P := PRP/\mathbb{P}_R(P)$ 给出，使得对于所有 $Q \in \mathit{P(A)}$

$$\mathbb{P}_R(Q|P) = \mathbb{E}_R(Q|P) = \mathrm{tr}(R_P Q) = \frac{\mathrm{tr}(PRPQ)}{\mathbb{P}_R(P)}. \tag{3.47}$$

显然，该定理也适用于任何有限维概率代数：其因子分解中不含与$\mathcal{L}(\mathcal{K})$ 同构且满足 维数$\mathcal{K} = 2$ （I 型因子 I_2）的因子，参见定理 2.82 和定理 2.86。

定理 3.34 常被视为足以支持如下定义条件概率的理由：如公式 (3.46) 所示，以公式 (3.45) 中的条件期望为基础。然而，正如前面所指出的，由于非交换性，一些可加性会丧失，而且贝叶斯定理不再成立——原因之一是并非在所有情况下都能表述联合概率 [2, 3, 4] ——因此，有时会有人提出一种听起来颇为极端的观点 [69]，即实际上不存在适用于非交换情形的、完全可行的条件概率定义。这里我们不再进一步讨论这一问题。

信道-状态对偶： 下一个结果建立了信道与希尔伯特空间上的普通线性映射之间的一一对应关系，与前面提到的结果相似；事实上，它与定理 3.20、定理 3.22和推论 3.23密切相关。这里给出一个较简单的版本；关于这一主题的各种变化形式及其不同版本，参见 [62]。

定理 3.35 (Jamiołkowski-Choi)。 设 H（其维数为$H = n$，且标准正交基为 $\{|v_j\rangle\}_{j=1}^{n}$）和 K（其维数为$K = m$）是两个有限维希尔伯特空间，并设$\mathscr{Q}$： $L(H) \rightarrow L(K)$ 是一个线性映射（超算子）。记为——

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} |v_j\rangle \otimes |v_j\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

$H^{\otimes 2}$ 中的一个（最大纠缠）单位向量，而 $\boldsymbol{P} = |W\rangle\langle W|$ 是投影到其子空间上的正交投影算子。于是

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{L}(\mathcal{K})) \ni \mathscr{Q} \mapsto \boldsymbol{Q} = (\mathscr{Q} \otimes I_{\mathcal{H}})\boldsymbol{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}) \tag{3.48}$$

是这些映射空间之间的线性同构 $\mathscr{Q} \mapsto \boldsymbol{Q}$ 。

逆映射 $\boldsymbol{Q} \mapsto \mathscr{Q}$ 通过将一个 $\boldsymbol{Q} \in L(K \otimes H)$ 映射到

$$\mathscr{Q} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \mathscr{Q}(A) = n \operatorname{tr}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Q}(I_{\mathcal{K}} \otimes A^{\dagger})) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}). \tag{3.49}$$

请注意，Jamiołkowski-Choi 定理 3.35 中的同构不仅适用于量子信道，也适用于任意 $\mathscr{Q} \in$ L(L(H), L(K))。这一同构的重要性在于，它使我们能够通过考察双部系统 K $\otimes$ H 的“正规”希尔伯特空间算子 Q $\in$ L(K $\otimes$H)，读出映射 $\mathscr{Q} \in$ L(L(H), L(K)) 的性质。这些性质之间的对应关系汇总于表4。

算子 $\boldsymbol{Q}$	映射 $\mathscr{Q}$	性质
$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\dagger}$	$\mathscr{Q}(A^{\dagger}) = \mathscr{Q}(A)^{\dagger}$	厄米，*-线性
$\boldsymbol{Q} \geq 0$	CP	（完全）正性
$\operatorname{tr}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Q}) = {}^{1}\!/_{m}\, I_{\mathcal{K}}$	$\mathscr{Q}(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{K}}$	幺正、单位保持（UP）
$\operatorname{tr}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{Q}) = {}^{1}\!/_{n}\, I_{\mathcal{H}}$	$\mathscr{Q}^{\dagger}(I_{\mathcal{K}}) = I_{\mathcal{H}}$	迹保持（TP）

表4：性质的对应关系

可以看出，要使映射成为信道 $\mathscr{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}),\mathcal{L}(\mathcal{K}))$，它必须具备表4中间列所列出的所有性质。这意味着，与之对应的希尔伯特空间算子$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H})$ 具备表4第一列所列出的所有性质。

推论3.36 (信道-状态对偶)。 现在假设 $\mathscr{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}),\mathcal{L}(\mathcal{K}))$ 是一个完全正且单位保持映射（*CPUP*），即一个信道，检查表4第二列中的所有条目。这意味着，与之对应的希尔伯特空间算子$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H})$ 满足表4第一列中的所有条目。

首先请注意，表4 的第四行和第五行表明，偏迹$\operatorname{tr}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Q})$和 $tr_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{Q})$ 分别是定义在$\mathcal{L}(\mathcal{K})$ 和 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$上的密度算子。此外，

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}) = \operatorname{tr}_{\mathcal{K}}(\operatorname{tr}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Q})) = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}}(\operatorname{tr}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{Q})) = 1.$$

结合表4第一列中的其他性质，可以清楚地看出，相应的希尔伯特空间算子 $Q \in L(K\otimes H)$ 是希尔伯特空间 $K \otimes H$ 上的密度算子。因此，方程(3.48)和(3.49)实现了系统 $L(K)$ 与 $L(H)$ 之间的信道对偶，以及由密度算子表示的复合系统 $L(K \otimes H)$ 上的态之间的对偶，这就是所谓的信道-状态对偶。

3.3 相互作用福克空间与量子分解 n

本小节旨在将一个由交换随机变量构成的代数，即经典代数，嵌入到一个更大的非交换代数中，这有助于分析这些随机变量。为简单起见，这里只考察一个随机变量；尽管如此，仍能展现这一主题的特点。福克空间、正交多项式、Krylov 子空间和兰乔斯方法之间将会建立联系。这些方法为图、反应网络、随机游走和马尔可夫链等各种经典主题带来了新的视角。若要了解更全面的综述，请参见 [102]。

福克空间与阶梯算子：以下思想源于量子物理学，用于描述所谓的第二量子化。为引入并阐释这一概念，下面会使用一些物理学术语。给定一个希尔伯特空间 J，用来描述某类基本粒子的态或模，则福克空间定义为 F (J) := $\bigoplus_{k\geq 0}$ K$_k$，其扇区为 K$_k$:= J $^{\otimes k}$，例如参见 [15]。这就是可区分粒子或模的全福克空间，也称玻尔兹曼福克空间。在这个非相互作用福克空间中，每个张量幂（即扇区）都配备由张量幂自然诱导的内积，直和也同样如此。一维空间 J $^{\otimes 0}$ $\cong$ $\mathbb{C}$ 常建模为 span$_{\mathbb{C}}$ Ψ_0，其中假定单位向量 Ψ_0 与 J 正交，并称为真空向量。对于费米子或玻色子等基本粒子，为满足泡利不相容原理或体现单个玻色子的不可区分性，分别采用反对称张量积构造费米福克空间，或采用对称张量积构造玻色福克空间。对称张量积（即玻色福克空间）导出高斯测度 [83], ，另请参见定理 3.43。

作为态，可以取向量或纯态 $\varpi_{\Psi_0}(A) := \Psi_0 \mid A\Psi_0$（也称为真空态），它对应于 $A \in$ L(F(J))，由此得到一个概率代数 (L(F(J)) ϖ_{Ψ_0})，其 GNS 表示为 (F (J) Ψ_0)。该概率代数中的一组重要算子是阶梯算子，即产生算符 A^+ 及其伴随——湮灭算符 $A^- = (A^+)^\dagger$，以及数算子 N。后者最容易描述，且在福克空间的所有变体中都相同：每个扇区 K$_n$ （或张量幂 J $^{\otimes n}$ ）都是一个特征子空间；对于 $\psi_n \in$ K$_n$ ，定义 $N\psi_n := n\psi_n$。在这一谱分解中，其他对角算子也很容易描述：设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一个实数序列，则数算子的算子函数 $^{\alpha}N($ N) 也在每个扇区 K$_n$上定义为 $^{\alpha}N\psi_n := \alpha_n\psi_n$。类似地，通过这样的函数演算，在每个扇区 K$_n$ 上定义对角算子 ($^{\alpha}$ $N + I$ ψ_n) := $\alpha_{n+1}\psi_n$。

产生和湮灭算符分别是阶梯算符和移位算符。新模 $\chi \in \mathcal{J}$的产生算符定义在每个扇区 $\mathcal{K}_n = \mathcal{J}^{\otimes k}$ 上，对初等张量$\psi_n = \bigotimes_{k=0}^{n} \varphi_k$ （其中 $\varphi_k \in \mathcal{J}$且 $\psi_0 = \varphi_0 = \Psi_0$）定义为 $A^+(\chi)$: $\mathcal{K}_n \ni \psi_n \mapsto \psi_n \otimes \chi \in \mathcal{K}_{n+1}$。类似地，它的伴随，即湮灭算符，对于 $n = 0$ 定义为 $A^-(\chi)$ $\Psi_0 = 0$ ，而对于 $n > 0$ 则定义为 $A^-(\chi) : \mathcal{K}_n \ni \bigotimes_{k=0}^{n} \varphi_k \mapsto \langle \chi \mid \varphi_n \rangle \ \bigotimes_{k=0}^{n-1} \varphi_k \in \mathcal{K}_{n-1}$。

这些阶梯算子针对每个扇区$\mathcal{K}_n$ 中的某个模或态 $\chi \in \mathcal{J}$ 以类似的方式定义，不受模态数影响，并使用扇区 $\mathcal{K}_n = \mathcal{J}^{\otimes n}$上自然的、与模态数无关的内积；这体现了非相互作用特征。

当 dim J = 1时，即 J = span{Ψ_1}，所有张量幂及扇区 J $^{\otimes n}$ =span{$\Psi_1^{\otimes n}$} 也都是一维的。因此，为了简便起见，可以直接取一个可分希尔伯特空间 H 作为 F (J) 的酉等价替代物，其中 H 是 span{$\Psi_0, \Psi_1, \ldots$} 的闭包，且这些 {Ψ_n} 构成一个正交序列，并令 K$_n$:= span{Ψ_n}，例如参见 [6, 80, 108]；这样就无需不必要地处理张量

积。

单模相互作用福克空间： 如上所述，这里仅考虑由一维扇区构成的单模相互作用福克空间的特殊情形，但在分析单个随机变量时仍然很有用，参见例如 [6, 8, 9, 12, 80, 108]，其中展示了每个 n-粒子扇区或 -模扇区上的内积和阶梯算子的定义是如何改变的，从而将相互作用纳入其中。

定义 3.37 （雅可比序列）。 设 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个非负实数序列，满足 $\lambda_0 = 1$，并具有如下性质：如果对于某个 $m_0 \geq 0$ 有 $\lambda_{m_0+1} = 0$，则这意味着对于所有 $n > m_0$都有$\lambda_n = 0$ 。这称为雅可比序列。如果存在这样的 $m_0 \in \mathbb{N}$ ，则称该序列为有限型；否则称为无限型 $(m_0 = \infty)$。

首先，将使用一个雅可比序列来定义福克直和中每个扇区上的相互作用内积。

定义 3.38 (单模相互作用福克空间)。 如上所述，具体的单模相互作用福克空间最简单的定义方式是：取一个复数域上的无限维可分希尔伯特空间 H，其内积为 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$，并取一个完备正交系 $\{\Psi_0, \Psi_1, \ldots\}$；对 $n \in \mathbb{N}_0$，令相应的直和项（即扇区）为 K_n ：=张成空间$\{\Psi_n\}$。通常也便于通过设定 $\Psi_{-1} = 0$ 以及 K_{-1} = 张成空间$\{\Psi_{-1}\}$ =$\{0\}$ 来扩展这一空间。

设 $\{\lambda_n\}$ 是定义 *3.37* 中的一个雅可比序列。扇区$\mathcal{K}_n$ 上的内积定义为：对于 $n \geq 0$ 和 ξ_n, $\eta_n \in \mathcal{K}_n$ ，其定义如下

$$\langle \xi_n \mid \eta_n \rangle_n := \lambda_n \langle \xi_n \mid \eta_n \rangle_{\mathcal{H}} . \tag{3.50}$$

假设正交系中的 Ψ_n 均已归一化，使得 $\langle \Psi_n \mid \Psi_n \rangle_n = 1$。设 m_0 为定义 *3.37* 中的扩展自然数，它表示对于 $\{\lambda_n\}$ ，雅可比序列是有限型还是无限型。那么代数直和

$$\Gamma := \bigoplus_{n=0}^{m_0} \mathcal{K}_n, \tag{3.51}$$

一个在每个扇区上配备内积式（*3.50*）的预希尔伯特空间，给出直和内积 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\Gamma$，并定义基本的单模相互作用全 Fock 空间。

定义 3.39 （数算子与阶梯算子）。 设 $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一新的雅可比序列，它依赖于雅可比序列 $\{\lambda_n\}$ （见定义 *3.38* ），其定义为 $\omega_0 = 1$，且对于$n > 0$: $\omega_n = \lambda_n/\lambda_{n-1}$；约定在情形 $0/0$ 下取 $\omega_n = 0$。

在代数 $L(\Gamma)$ 中，数算子 N 与针对实数序列 $\alpha = \{\alpha_n\}$ 的对角算子 ${}^{\alpha}N$按上文在每个扇区 K_n 上定义——每个扇区 K_n 均为一个特征子空间——由

$$N : \mathcal{K}_n \ni \Psi_n \mapsto n\, \Psi_n \in \mathcal{K}_n; \tag{3.52}$$

$$^{\alpha}N : \mathcal{K}_n \ni \Psi_n \mapsto \alpha_n\, \Psi_n \in \mathcal{K}_n; \tag{3.53}$$

$$note\ also\ \ ^{\alpha}(N + I) : \mathcal{K}_n \ni \Psi_n \mapsto \alpha_{n+1}\, \Psi_n \in \mathcal{K}_n. \tag{3.54}$$

阶梯算子，即产生与湮灭算子 $B^+, B^- \in L(\Gamma)$，现将模态数的相互作用考虑在内，它们在每个扇区上的定义为

$$B^+ : \mathcal{K}_n \ni \Psi_n \mapsto \sqrt{\omega_{n+1}}\, \Psi_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}; \tag{3.55}$$

$$B^- : \mathcal{K}_n \ni \Psi_n \mapsto \sqrt{\omega_n}\, \Psi_{n-1} \in \mathcal{K}_{n-1}. \tag{3.56}$$

算子 N, ${}^{\alpha}N$ 和$(N+I)^{\alpha}$ 是自伴的，而阶梯算子 B^{+}和 B^{-} 互为伴随映射。

注意，我们通常从一个雅可比序列$\{\omega_n\}$出发，如定义 3.39中那样，并通过 $\{\lambda_n\}$ 为定义 3.38 定义雅可比序列 $\lambda_0 = 1$和 $\lambda_n := \lambda_{n-1}\omega_n$ 对于 $n>0$；由此得到 $\lambda_n = \prod_{k=0}^{n}\omega_k$。

定义 3.40 (单模相互作用 Fock 概率代数)。 取定义 *3.38* 中的基本单模相互作用全 *Fock* 空间，以及定义 *3.39* 中的阶梯算子，将四元组 $\mathit{\Gamma}_{\{\lambda_n\}} := (\mathit{\Gamma}, \Psi_0, B^-, B^+)$ 称为与雅可比序列 $\{\omega_n\}$ 相关联的相互作用 *Fock* 系统。

$(L(\mathit{\Gamma})\ \varpi_{\Psi_0})$ 称为关联的相互作用 *Fock* 概率代数，其 *GNS* 表示为 $(\mathit{\Gamma}, \Psi_0)$。通常只考虑由 B^-、B^+ 和 N 生成的代数。

一个简单的推论是：

命题 3.41. 设 $\mathit{\Gamma}_{\{\lambda_n\}}$ 为一个相互作用 *Fock* 系统。定义相应的雅可比序列 $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}$，根据定义*3.39*，并用 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 表示同一序列，但 $\widetilde{\omega}_0 = 0$除外。则

$$B^+B^- = {}^{\widetilde{\omega}}N, \quad \text{and} \quad B^-B^+ = {}^{\omega}(N+I). \tag{3.57}$$

此外，对所有 $n \geq 0$，成立：

$$(B^+)^n\,\Psi_0 = \sqrt{\omega_n \cdots \omega_0}\,\Psi_n = \sqrt{\lambda_n}\,\Psi_n\,, \quad \textit{so that} \quad \left\|(B^+)^n\,\Psi_0\right\|_{\mathit{\Gamma}} = \sqrt{\lambda_n}\,. \tag{3.58}$$

注意，对于序列 $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$，它由 $\gamma_0 := \omega_1$ 给出，而对 $n>0$ 则由$\gamma_n := \omega_{n+1} - \omega_n$给出，由此可以描述相互作用的对易关系

$$[B^-, B^+] = B^-\,B^+ - B^+\,B^- = {}^{\gamma}N. \tag{3.59}$$

改变概率分布并定义雅可比序列的一种方法，是“形变”对易关系 [32]:

定义 3.42 (q-形变对易关系). 对于 $-1 \leq q \leq 1$，根据定义 *3.39* 将 q-Fock 概率代数的相应雅可比序列定义为 $\{\omega_0 = 1,\ \omega_n = [n]^q\}$ （其中对于 $n>0$，表达式 $[n]^q := \sum_{k=0}^{n-1} q^k$ 为 q-高斯数），且 $\{\lambda_n = \prod_{k=0}^{n}\omega_k\}$ 对于 $n \geq 0$，从而得到 q-形变对易关系

$$B^-\,B^+ - q\,B^+\,B^- = I.$$

特殊情形包括

$q = 1$ — **玻色单模 Fock 概率代数** 满足正则交换关系 *(CCR)*：$B^-\,B^+ - B^+\,B^- = [B^-, B^+] = I$。*Jacobi* 序列明确为 $\{\omega_n\} = \{1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$（对于 $n>0$: $\omega_n = n$），即属于无限型。

$q = 0$ — **自由单模福克概率代数** 由自由交换关系定义：$B^-\,B^+ = I$。对于所有 $n \geq 0$，雅可比序列显式为 $\omega_n \equiv \lambda_n \equiv 1$，即它属于无限型。

$q=-1$ **— 费米子单模福克概率代数** 由规范反对易关系 ***(CAR)*** $B^{-}\,B^{+}+B^{+}\,B^{-}=I$ 生成，得到相应的福克概率空间$\mathit{\Gamma}_{\{\lambda_n\}}\cong\mathbb{C}^{2}$ ——一个量子比特。雅可比序列显式为 $\{\omega_0=\omega_1=1,\omega_2=\omega_3=\cdots=0\}$ 和 $\{\lambda_0=\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=0\}$，即它们属于有限型。通过恒等对应 $\mathit{\Gamma}_{\{\lambda_n\}}\cong\mathbb{C}^{2}$，可得

$$\Psi_0=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \Psi_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad B^{+}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B^{-}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

在简要讨论正交多项式和各种多项式代数之前，现在已经可以指出一些令人惊讶的结果 [80, 108]。

定理 *3.43*（q-福克矩）。对于定义 *3.42* 中的单模相互作用 q-福克概率代数，记福克空间为 $\mathit{\Gamma}(q)$，并将阶梯算子视为 q 的函数：$B^{+}(q)$ 和 $B^{-}(q)$。现在考虑随机变量 $Z(q):=B^{+}(q)+B^{-}(q)\in L(\mathit{\Gamma}(q))$，以及它生成的子 *-概率代数 $\mathbb{C}[Z(q)]$ 。

在定义 *3.42* 的特殊情形下，随机变量 $Z(q)\in\mathbb{C}[Z(q)]$ 与某些众所周知的分布矩等价：

玻色 $q=1$ **情形：** 标准正态高斯随机变量 γ 和 $Z(1)$矩等价：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp(-x^{2}/2)\ \sim\ \gamma\quad\overset{m}{=}\quad Z(1).$$

自由 $q=0$ **情形：** 服从维格纳半圆律 的随机变量 $-2\leq\upsilon\leq 2$ 与 $Z(0)$ 矩等价：

$$\frac{1}{2\pi}\,\sqrt{4-x^{2}}\ \sim\ \upsilon\quad\overset{m}{=}\quad Z(0).$$

费米 $q=-1$ **情形：** 伯努利（-1，+1）随机变量 β 与 $Z(-1)$ 矩等价：

$$\frac{1}{2}\,(\delta_{-1}(x)+\delta_{+1}(x))\ \sim\ \beta\quad\overset{m}{=}\quad Z(-1).$$

正交多项式： 这是一个经典主题，现简要回顾一些众所周知的事实：设 ν 是实数轴 $\mathbb{R}$ 上的一个博雷尔概率测度，并且具有任意阶的矩。利用该测度，定义通常的复数域 $\mathbf{L}_2(\mathbb{R},\ \nu)$-空间，以及相应的内积和范数：

$$\mathbb{E}_\nu(f)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\nu(\mathrm{d}x),\quad \langle f\mid g\rangle_{\mathrm{L}_2}=\mathbb{E}_\nu(f^{*}\,g),\ \text{ and }\ \|f\|_{\mathrm{L}_2}=\sqrt{\mathbb{E}_\nu(f^{*}\,f)}.$$

考虑单项式函数 $1\!\!1_{\mathbb{R}},\ x,\ x^{2},\ \ldots,\ x^{n}\cdots\in\mathbf{L}_2(\mathbb{R},\ \boldsymbol{u})$，并从常值函数 $1\!\!1_{\mathbb{R}}$开始执行 *Gram*-施密特 正交化过程，从而得到$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_{\mathrm{L}_2}$-正交多项式函数 $P_n(x)\in\mathbf{L}_2(\mathbb{R},\ \boldsymbol{u})$。它们归纳定义为 $P_0(x)=1\!\!1_{\mathbb{R}}$，并且对于 $n>0$ 有

$$P_n(x)=x^{n}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\langle P_j\mid x^{n}\rangle_{\mathrm{L}_2}}{\langle P_j\mid P_j\rangle_{\mathrm{L}_2}}\,P_j(x).\tag{3.60}$$

便于设定 $P_{-1}\equiv 0$。类似于定义 3.37，我们定义

定义 *3.44*（雅可比-*Szegö* 系数或参数）。设 $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一对实数序列，使得根据定义 *3.37*，$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}$ 是一个雅可比序列，并且 $\alpha_0 = 1$。如果 $\{\omega_n\}$ 是有限型，且具有某个 $m_0 \in \mathbb{N}_0$，则假设对于所有 $n > m_0+1$，$\alpha_n = 0$。这样一对序列称为有限型雅可比-*Szegö* 系数或雅可比-*Szegö* 参数。否则，雅可比-*Szegö* 系数或雅可比-*Szegö* 参数称为无限型。

下文将用到一些关于正交多项式的著名事实：

定理3.45（正交多项式）。给定一个概率测度 ν，其所有矩如上所述，相应的多项式如式（*3.60*）所示，定义 m_0 为 $1+m_0 = |\text{支撑集}\,\nu|$（扩展数值 $|\text{支撑集}\ \nu|$ 表示该测度的支撑集的基数）；若 $m_0 \in \mathbb{N}$，则称测度 ν 为 有限型；否则称为 无限型。那么

1. 对于无限型测度，所有多项式函数 $1\!\!1_{\mathbb{R}}$，x，x^2，……，x^n，…… 线性独立；而对于有限型测度，多项式函数 $1\!\!1_{\mathbb{R}}$，x，……，x^{m_0} 彼此独立，且式（*3.60*）中的 *Gram-Schmidt* 正交化过程在 m_0 处终止。

2. 多项式函数 $P_n(x) = x^n + \ldots$ 是次数为 $n \in \mathbb{N}_0$ 的首一多项式。它们彼此正交，即对于 $0 \le n,\ k \le m_0$：$\langle P_n \mid P_k \rangle_{\mathrm{L}_2} = \delta_{nk} \prod_{j=1}^{n} \omega_j = \delta_{nk}\lambda_n$，参见定义 *3.39*。

3. 存在 Jacobi-Szegö 系数 $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}$ $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n\}$ *(*参见定义 *3.44)*，其类型相应为有限或无限，并且对于 $0 \le n \le m_0$

$$x\,P_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}\,P_n(x) + \omega_n\,P_{n-1}(x). \tag{3.61}$$

Jacobi-Szegö 系数由 *Gram-Schmidt* 正交化过程方程*(3.60)*以及前一项中的正交关系完全确定。

4. 此外，$\alpha_1 = \mathbb{E}_\nu(x)$和 $\omega_1 = \mathbb{E}_\nu((x-\alpha_1)^2) = \text{方差}_\nu(x)$。当 ν是对称的（即 $\nu(-\mathrm{d}x) = \nu(\mathrm{d}x)$）时，所有奇数阶矩都为零，即 $\mathbb{E}_\nu(x^{2k-1}) = 0$ 对于 $k \in \mathbb{N}$。若所有奇数阶矩都为零，则对于 $n > 0$，有 $\alpha_n = 0$。

将 $\mathscr{P} := \mathrm{P}(\mathbb{R}, \nu) \subset \mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \nu)$ 记为由所有多项式函数构成的预希尔伯特空间，其内积仍与 $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \nu)$ 上的内积相同。显然，上述多项式函数 $\{P_n\}$ 是 $\mathscr{P}$ 的正交基。引入归一化多项式函数 $\{Q_n\}$，其定义为 $Q_n = P_n/\sqrt{\lambda_n}$，则三项递推关系方程(3.61)写作如下（仍$Q_0 = 1\!\!1_{\mathbb{R}}, Q_{-1} \equiv 0$）：对于所有满足 $0 \le n \le m_0$ 的 n：

$$x\,Q_n(x) = \sqrt{\omega_{n+1}}\,Q_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}\,Q_n(x) + \sqrt{\omega_n}\,Q_{n-1}(x). \tag{3.62}$$

推论 3.46（q-Fock 多项式）。在定理 q 中所考察的单模 *3.43-Fock* 概率代数的特殊情形下，正交多项式$\{P_n\}$ 是众所周知的：**对于玻色** $q = 1$ **情形：**它们是“概率论中的”Hermite 多项式。

对于自由 $q = 0$ **情形：**即为第二类修正 Chebyshev 多项式。**对于费米** $q = -1$ **情形：**它们就是常函数和一次函数，正如

空间只有二维。

酉等价： 回忆一下多项式代数 $\mathbb{C}[X]$ 来自例 3。根据定义 2.39，注意 $\mathbb{C}[X]$在 $\mathcal{L}(\mathbb{C}[X])$ 中照常通过正则表示给出表示

$$\Upsilon:\ \mathbb{C}[X]\ni p\mapsto \Upsilon_p\in\mathcal{L}(\mathbb{C}[X]),\quad \text{where} \tag{3.63}$$
$$\Upsilon_p:\ \mathbb{C}[X]\ni q\mapsto pq\in\mathbb{C}[X]. \tag{3.64}$$

命题3.47 （概率代数——多项式）。 设$(A\ \varpi)$ 是一个概率代数，且 a 是一个 $\in A_{sa}\cap \mathrm{B}(A)$ 中的有界观测量。为简便起见，令 $\mathscr{R}:=\mathbb{C}[X]$ 和$\mathscr{S}:=\mathbb{C}[a]$。定义一个单射 $V:\mathscr{R}\ \rightarrow\mathscr{S}$，将 $1\equiv X^0\in\mathscr{R}$ 映射为 $1\in\mathscr{S}$；进一步，对 $n>0$，定义相应的幂

$$V:\ \mathscr{R}\ni X^n\mapsto a^n\in\mathscr{S}, \tag{3.65}$$

也就是说，将形式单项式映射为 a 的相应幂。a 的分布 τ_a （参见定义 2.27）可用于定义一个态 $\mathbb{E}_{\tau_a}(p):=\tau_a(p)=\varpi(p(a))$，其定义在 $\mathscr{R}=\mathbb{C}[X]$上。将 $\mathscr{S}=\mathbb{C}[a]\subseteq A$ 视为一个预希尔伯特空间，其内积取自 $\varpi\in S(A)$；同样，将 $\mathscr{R}=\mathbb{C}[X]$ 视为一个预希尔伯特空间，其内积取自上述由 τ_a导出的态。于是，式 (3.65) 中的映射 V 可扩展为希尔伯特空间完备化之间的酉映射：$V:\ \mathscr{R}=\overline{\mathbb{C}[X]}^{\tau_a}\ \rightarrow \overline{\mathbb{C}[a]}^{\varpi}=\mathscr{S}$。

根据定理 2.53，$L(\mathscr{S})$ 上与之对应的态为 $\mathbb{E}_{\Upsilon,\varpi}(\Upsilon_x)=\langle 1\mid \Upsilon_x 1\rangle_2=:\mathbb{E}_{\overline{\varpi}}(x)=\varpi(x)$。对于表示方程(3.63)和(3.64)，在$L(\mathscr{R})$上，对应的态为 $\mathbb{E}_{\Upsilon,\tau_a}(\Upsilon_p)=\langle X^0\mid \Upsilon_p X^0\rangle_{\tau_a}=\mathbb{E}_{\tau_a}(p)$。

概率代数 $(\mathbb{C}[X],\tau_a)$ 有一个*GNS*表示（参见定义 2.54），其作用于$(\mathscr{R},X^0)$；概率代数 $(\mathbb{C}[a],\overline{\varpi})$ 在 $(\mathscr{S},1)$上有一个*GNS*表示。

现在，取随机变量的分布律 μ_a，其中随机变量为 $a\in\mathcal{A}_{sa}$。根据命题 2.29，它是 $\mathbb{R}$上的一个概率测度，且具有有限阶矩，并将其用于定理 3.45 $\nu=\mu_a$所述的构造。

与方程 (3.63) 和 (3.64) 中的 $\mathbb{C}[X]$ 完全类似，多项式函数空间 $\mathscr{P}=\mathrm{P}(\mathbb{R},\nu)$ 也可通过正则表示映射 Y表示为 $\mathrm{L}(\mathscr{P})$ 中的 $\mathscr{P}\ \rightarrow\mathrm{L}(\mathscr{P})$。注意，对于 $f\in\mathscr{P}$，可在 $\mathrm{im}\ Y\subset\mathrm{L}(\mathscr{P})$ 上定义一个态：$\mathbb{E}_{Y,\nu}(Y_f):=1\!\!1_{\mathbb{R}}\mid Y_f\,1\!\!1_{\mathbb{R}}\rangle_{\mathrm{L}_2}=\mathbb{E}_\nu(f)$。因此，概率代数 $\mathscr{P}=\mathrm{P}(\mathbb{R},\nu)=\mathrm{P}(\mathbb{R},\mu_a)$ 在 $(\mathscr{P},1\!\!1_{\mathbb{R}})$ 上有一个 GNS表示。在 $m_0\in\mathbb{N}_0$且测度 ν 为有限型的有限维情形下，$\mathscr{P}=\overline{\mathscr{P}}=\mathrm{L}_2(\mathbb{R},\nu)$。

命题 3.48 (多项式表示)。 定义一个单射 $R:\ \mathscr{P}\ \rightarrow\mathscr{R}=\mathbb{C}[X]$，将 $1\!\!1_{\mathbb{R}}\in\mathscr{P}$ 映射到 $1\equiv X^0\in\mathbb{C}[X]$，并且对 $0<n\le m_0$ 取相应的幂

$$R:\ \mathscr{P}\ni x^n\mapsto X^n\in\mathscr{R}=\mathbb{C}[X], \tag{3.66}$$

即将多项式函数映射为相应的形式多项式。

映射 R 在式(3.66)中可以扩展为希尔伯特空间完备化上的酉映射，即 $R:\overline{\mathscr{P}}=\mathrm{cl}_\nu\mathscr{P}\ \rightarrow\overline{\mathscr{R}}=\mathrm{cl}_{\tau_a}\mathscr{R}$。

对于多项式函数 $f\in\mathscr{P}=\mathrm{P}(\mathbb{R},\nu)$，令 $R(f)=f\in\mathscr{R}$为一个形式多项式。那么，$M=Y\circ R^{-1}:\ \mathscr{R}\ \rightarrow L(\mathscr{P})$ 是子代数 $\mathscr{R}\subseteq\mathbb{C}[X]$ 在 $L(\mathscr{P})$中的一个表示。特别地，$M_X:=M(X)$ 是与多项式函数 $f\in\mathscr{P}$ 乘以多项式函数 $x\in\mathscr{P}$等价的线性映射：

$$M_X:\ \mathscr{P}\ni f(x)\mapsto xf(x)\in\mathscr{P}. \tag{3.67}$$

接下来，我们将从不同角度考察归一化三项递推关系 Eq.(3.62)，并建立一些酉等价。

命题 3.49 (相互作用福克空间——多项式函数)。 设概率测度 ν 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且所有矩均有限。设其诱导的 *Jacobi-Szegö* 系数为$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}$ $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n\}$ 如定理 *3.45*所述，并考虑方程（*3.62*）中的标准正交多项式。对于定义 Γ 中方程（*3.51*）所述的准希尔伯特单模相互作用福克空间，取雅可比序列 $\{\lambda_n = \prod_{k=0}^{n} \omega_k\}$，该序列由测度 ν的 *Jacobi-Szegö* 系数定义。定义一个映射

$$U : \Gamma \longrightarrow \mathscr{P} \quad via \quad U : \Psi_n \mapsto Q_n;\ 0 \le n \le m_0. \tag{3.68}$$

该映射保持正交性和长度，因此可以扩展为希尔伯特空间完备化之间的酉映射，即 $U : \Gamma = \mathrm{cl}_{\Psi_0}\Gamma \ \ \rightarrowtail \mathscr{P}$。

注意，定理 3.43中的三种情形下，概率测度均为对称测度，因此所有奇数阶矩都为零，并且 $\alpha_n = 0$ 对于 $n > 0$。否则，除定义 3.55和（3.56）中的产生与湮灭算子外，还需要在单模相互作用福克空间 Γ上引入另一个算子，即 保持算子

$$B^o := {}^{\alpha}(N + I) \in \mathcal{L}(\Gamma), \tag{3.69}$$

数算子的函数 $N \in \mathcal{L}(\Gamma)$，已在定义3.39中的式（3.54）中引入。由此可设

$$C^+ := UB^+U^\dagger \in \mathcal{L}(\mathscr{P}), \tag{3.70}$$
$$C^- := UB^-U^\dagger \in \mathcal{L}(\mathscr{P}), \tag{3.71}$$
$$C^o := UB^oU^\dagger \in \mathcal{L}(\mathscr{P}), \tag{3.72}$$

从而定义与B^+， B^-， B^o 相对应的创建、湮灭和保持算子（CAP 算符），作用于 $\mathcal{L}(\Gamma)$ 上。类似地，在 $\mathcal{L}(\mathscr{R})$ 中定义相应的 CAP 算符

$$A^+ := R\,C^+\,R^\dagger,\ A^- := R\,C^-\,R^\dagger,\ A^o := R\,C^o\,R^\dagger \in \mathcal{L}(\mathscr{R}), \tag{3.73}$$

以及 $\mathcal{L}(\mathscr{S})$ 中的 CAP 算符

$$D^+ = V\,A^+\,V^\dagger,\ D^- = V\,A^-\,V^\dagger,\ D^o = V\,A^o\,V^\dagger \in \mathcal{L}(\mathscr{S}). \tag{3.74}$$

命题 3.50 （算子三项递推）。借助式（*3.62*）和式（*3.67*）重写：

$$M_X\,Q_n(x) = C^+\,Q_n(x) + C^o\,Q_n(x) + C^-\,Q_n(x) \in \mathscr{P}, \tag{3.75}$$

由此可见

$$Y_x = M_X = C^+ + C^o + C^-. \tag{3.76}$$

This 称为 ***RV*** $x \in \mathscr{P}$ 的量子分解。类似地 ,

$$\Upsilon_X = A^+ + A^o + A^- \in \mathcal{L}(\mathscr{R}), \tag{3.77}$$
$$\Upsilon_a = D^+ + D^o + D^- \in \mathcal{L}(\mathscr{S}), \tag{3.78}$$

分别是随机变量 $X \in \mathbb{C}[X] = \mathscr{R}$ 的量子分解 $\in \mathbb{C}[和] = \mathscr{S}$；例如参见 *[6, 12, 8, 9]*。

命题 3.51 (等价随机变量)。 已确立以下随机变量之间的矩等价关系和等式：

$$a \in \mathcal{A} \overset{m}{=} x \in \mathscr{P} \overset{m}{=} X \in \mathscr{R} \overset{m}{=} Z := B^{+} + B^{o} + B^{-} \in \mathcal{L}(\Gamma)$$
$$\overset{m}{=} Y_x = M_X \in \mathcal{L}(\mathscr{P}) \overset{m}{=} \Upsilon_X \in \mathcal{L}(\mathscr{R}) \overset{m}{=} \Upsilon_a \in \mathcal{L}(\mathscr{S}). \quad (3.79)$$

阶梯算符与 CAP 算符方法以及相互作用福克空间已被多位作者用于研究正交多项式，也包括多变量乃至无限多个变量的情形，例如参见 [6, 8, 9, 12, 80, 116, 108, 5, 59, 49, 10, 11]。本节提及的技术利用命题 3.50 中的量子分解，以及将经典随机变量嵌入由产生、湮灭和数算符（分别也称为 CAP 算符）生成的更大非交换代数中，已用于随机力学中（不断增长的）图的谱分析 [80, 108], [20], 以及其他多种经典课题 [21]。有关这些数学联系的历史评述，请参见 [10], ；有关进一步的发展与推广，请参见 [11]。

有限雅可比矩阵与 Favard 引理：考虑 $\mathscr{P}$ 上的三项递推关系 Eq.(3.62)，并取 $n+1$ 维子空间 $\mathscr{P}_n \subseteq \mathscr{P}$ 中的基 $\{Q_k\}_{k=0}^{n}$，该子空间在 Q_n 之后截断。于是，$\boldsymbol{e}_0 = [1, 0, \ldots, 0]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 对应于起始向量$Q_0 = 1\!\!1_{\mathbb{R}}$，而其余典范基向量 $\boldsymbol{e}_n$ 对应于 Q_n。设 $\boldsymbol{M}_x$ 为该基下乘法算子 M_X Eq.(3.67) 的矩阵表示。那么$\mathscr{P}_n = \mathscr{K}(\boldsymbol{M}_x, \boldsymbol{e}_0, n)$ 是由对称算子 M_X 以起始向量 $\boldsymbol{e}_0 \equiv Q_0 = 1\!\!1_{\mathbb{R}}$ 经历 n 步生成的 Krylov 子空间。通过截断进行近似——实际上即强制令 $Q_{n+1} = 0$ ——可在 $\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathscr{P}_n$ 上得到由 Jacobi-Szegö 系数组成、用于在该基下表示并近似 M_X 的著名三对角雅可比矩阵 $\boldsymbol{M}_x$:

$$M_X \approx \boldsymbol{M}_x = \boldsymbol{T}_{J,n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\omega_1} & & & \\ \sqrt{\omega_1} & \alpha_2 & \sqrt{\omega_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{\omega_{n-1}} & \alpha_n & \sqrt{\omega_n} \\ & & & \sqrt{\omega_n} & \alpha_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

这本质上也是著名的 Lanczos 算法的结果——此处无需重述该算法——该算法用于近似对称算符（如 M_X）的谱，例如参见 [60]。此外，要计算三对角矩阵的谱，有一些非常有效的数值算法，例如参见 [60]。可以注意到，Lanczos 算法生成 Krylov 子空间以及式（3.80）中的表示时，实际上计算出了 Jacobi-Szegö 系数 ($\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}$ $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n\}$)。具有有限阶矩的概率测度与 Jacobi-Szegö 系数之间的关系，无论在一维还是多维情形下，都是所谓的 Favard 引理（此处仅陈述一个简单版本）的内容，例如参见 [48, 5, 108, 49]及其中的参考文献：

定理 3.52。 （法瓦尔）对于实数轴上的任意概率测度 ν，只要其任意阶矩均有限，就存在与之对应的 *Jacobi-Szegö* 系数 ($\boldsymbol{\omega} = \{\omega_n\}$ $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n\}$)，且该映射为满射。

另一方面，给定两个这样的 *Jacobi-Szegő* 参数序列——换句话说，给定一个满足类似于以下三项递推关系的多项式序列

式（3.61），其中系数是定义3.44 中的 *Jacobi-Szegő* 参数——则在多项式代数上存在一个态，由一个概率测度 ν 在 $\mathbb{R}$上给出，该测度具有所有有限阶矩；三项递推关系中的多项式在由该态诱导的内积下正交。

4 量子处理器单元建模（量子处理器单元)

4.1 预备知识

量子计算是一门新兴且迅速发展的领域，它运用量子力学原理进行计算 [107]。其理念是，利用量子计算机解决某些类型的问题，比使用经典计算机更高效。实际使用的设备——量子计算机——由一些分量构成，这些分量的物理可观测量代数是非交换的。这些分量的基本形式是具有有限个离散量子态的量子力学系统；它们通常只有两种状态，称为量子比特，即量子比特，它们是量子计算中的基本信息单位。量子计算机由一定数量的相互作用的量子比特组成 $n \geq 1$，并通过所谓的量子门进行操作，由此构成实际的量子算法。

量子比特与经典计算机中使用的传统比特相似，但它们可以处于两种状态的叠加态，这意味着它们能够同时表示多个值。这种固有的并行性使量子计算机能够比经典计算机快得多地执行某些类型的计算，例如对大数进行因数分解以及搜索大型数据库。量子计算有许多潜在应用，包括但不限于密码学、优化、模拟和机器学习。

当前最先进的技术由含噪中等规模量子（NISQ）设备所定义。NISQ（含噪中等规模量子）计算机是一种仍处于开发阶段的量子计算机，尚不具备人们期望的更先进量子计算机所拥有的某些能力。这是因为这些早期量子计算机容易受到错误、噪声及其他问题的影响，进而影响其性能和准确性。它们是含噪量子比特，会受到退相干的影响，也就是说，随着时间推移，它们会因与环境相互作用（例如热涨落、电磁噪声或其他误差来源）而失去其纠缠量子态的性质；此外，它们的量子纠错能力有限，量子门速度仍然较慢，量子比特数量仍相当有限，而且缺乏量子算法。

量子处理器单元（QPU）是量子计算机中的一种硬件组件，负责执行实际计算。它由一个或多个量子处理器组成，负责执行量子指令，并根据量子门进行计算；量子门是量子电路（也称为量子代码）的基本构件。QPU 是量子计算机的 核心组件，因为它负责执行使量子计算成为可能的计算。需要注意的是，QPU 仍在开发中，相关研究也在持续进行，以提升其性能和能力。但对于量子算法而言，QPU 的具体类型并不重要，因为算法仅涉及量子门的抽象代数性质。因此，量子算法的表示独立于 QPU 的实际硬件实现，这与经典算法的表示独立于其硬件实现类似

经典计算机和 CPU（中央处理器）的。

4.2 从代数概率到量子计算

下文将广泛使用狄拉克 bra-ket 记号，该记号已在第 2.1 节末尾作过说明。从以上对 QPU 非常粗略的描述可以推断，根据量子力学规则，一个量子比特可由复数域上二维希尔伯特空间 H（dim H $=2$）的有界算子代数（参见例 15）描述。更准确地说，可观测量是完整有限维算子代数 L(H) 中的自伴元素 $\mathrm{L(H)}_{sa}$；其中，取一组由两个正交单位向量构成的基 $B=\{|0\rangle \ |1\rangle\}$，其张成空间为 H $B=$，这两个向量分别对应量子比特处于置位状态（$|1\rangle$）和未置位状态（$|0\rangle$）。显然，如例 15 和推论 2.37 所述，这些单位向量，或者更准确地说，相应的密度算子 $|0\rangle\langle 0|$ 和 $|1\rangle\langle 1|$，定义了 $\mathrm{D(L(H))}_1$ 中的纯态（参见命题 2.24）。

通常通过如下方式设置计算基，将 $\mathcal{H}$ 与 $\mathbb{C}^2$ 对应起来：

$$|0\rangle := \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad |1\rangle := \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

如备注2.35所述，这给出了单量子比特代数 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 在 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$上的一个 *-同构矩阵表示；后者在例 14 中有所描述，其希尔伯特-施密特内积基于迹及相应的弗罗贝尼乌斯态，更多细节见例 4–6。该矩阵代数的密度矩阵和向量态在定义 2.23中有所描述，而表示所有可能态的密度矩阵集合则见命题2.24。

在量子处理器中，$n>1$ 个量子比特会在执行量子算法时于量子寄存器中相互作用。根据定义 2.71，适用于这种情况的代数是单量子比特代数的 n重张量积：$\mathcal{Q} := (\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))^{\otimes n} = \mathbb{M}_{2^n}(\mathbb{C})$，即希尔伯特空间 $\mathbb{C}^N$上的矩阵代数，其中 $N=2^n$。元素$A \in \mathcal{Q}$ 通常表示为单量子比特矩阵$A = \bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_k$的张量积，其中 $\boldsymbol{A}_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$。

量子算法通过操纵量子比特来解决特定类型的问题，并使量子计算能够应用于广泛的领域。该过程的具体实现取决于所要解决的问题，可能涉及使用经典电信号或其他技术操纵量子比特。根据这一点以及前文关于 NISQ 计算机的论述，可以推知，整个过程包括从经典世界向量子设备输入信息（见第3.2节示例20的经典输入通道）、计算（考虑上述所有误差来源的一般信道，即 CPUP 映射，参见定义3.29），以及向经典世界输出信息（见示例20 的经典输出通道，详见示例19），通常通过正算子值测度（POVM）实现（参见定义3.6）。

但要描述量子算法，并不需要处理实际的量子处理器（QPU），而可以考虑一个理想的量子处理器；在此，计算通道可视为由酉变换实现的内部 *-自同构（参见例20），根据量子力学规则，它是一个可逆通道；有关这一点，另请参见斯廷斯普林扩张定理3.22。类似地，无须考虑一般的正算子值测度（POVM），只需考虑投影值测度（PVM）的理想化版本（参见定义2.21以及第2.3节末关于投影测量的部分）；另请参见奈马克扩张定理3.10。

这里涉及两个互补的普适性结论：（i）通过 QR/Givens 型分解，$SU(2)$(分别是 $U(2)$）子群在 $SU(2^n)$(分别是 $U(2^n)$)的二能级嵌入具有精确普适性；（ii）将有限稠密$SU(2)$ 门集通过相同的嵌入提升后进行离散化／编译（例如通过 Solovay–Kitaev 定理）。关于基于几何嵌入的表述，以及相关的普适性和离散化结果，请参阅[57]。

密度矩阵 $\mathrm{D}(\mathcal{Q})$是态集合 $\mathsf{S}(\mathcal{Q})$的一一表示，已在定义 2.23中描述。根据命题 2.24，回顾式（2.10），可知密度矩阵集合是不相交并集，由秩为 r =1，.....， N的密度组成：

$$\mathrm{D}(\mathcal{Q}) = \biguplus_{r=1}^{N} \mathrm{D}(\mathcal{Q})_r,$$

其中 $\mathrm{D}(\mathcal{Q})$的极点也称为纯态，是秩为一的密度（参见式（2.11））

$$\mathrm{ext}(\mathrm{D}(\mathcal{Q}) = \mathrm{D}(\mathcal{Q})_1 = \{|\Psi\rangle\langle\Psi| \ : \ |\Psi\rangle \in \mathbb{C}^N, \ \langle\Psi \mid \Psi\rangle = 1\}.$$

根据式（4.1）中的基的选择以及狄拉克 bra-ket 记号， $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{2^n} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ 的标准正交基可由 $\mathbb{C}^2$的基向量的张量积生成。这些基向量为

$$\begin{aligned} |00\ldots00\rangle = |0\rangle|0\rangle\ldots|0\rangle|0\rangle = |0\rangle\otimes|0\rangle\otimes\cdots\otimes|0\rangle\otimes|0\rangle\,; \ |00\ldots01\rangle = |0\rangle|0\rangle\ldots|0\rangle|1\rangle\,; \\ |00\ldots010\rangle = |00\ldots0\rangle|1\rangle|0\rangle\,; \quad \ldots \quad ; |11\ldots10\rangle = |11\ldots1\rangle|0\rangle\,; \ |11\ldots11\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

显然，式（4.2）中的基向量 $|x_0x_1\ldots x_{n-1}$（其中对所有 $0 \le i \le n-1$， $x_i \in \{0, 1\}$）是整数 $0 \le k \le N-1$ 的二进制表示 $(k)_2$，其中 $(k)_2 = x_0x_1\ldots x_{n-1}$。因此，我们可以将每个以整数标记的右矢 $|k$与式（4.2）中的典范向量 $|(k)_2 \in \mathbb{C}^{2^n}$ 关联起来。不难看出，集合 $\{|k : \ k \in \mathbb{Z}_{2^n}\}$ 是 $\mathbb{C}^{2^n}$ 的典范基；这只需将张量积按字面理解为克罗内克积即可。

如前所述，对于这里的输出通道，我们要使用投影值测度（参见定义 2.21），它由式（4.2）中与单位向量相关联的投影构成：

$$\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}_{2^n} \ni k \mapsto P_k := |k\rangle\langle k| \in \mathrm{P}(\mathcal{Q}). \tag{4.3}$$

不难看出，$\{P_k\}$ 是彼此交换（实际上是正交）的极小投影，它们构成一个投影代数（参见例 5），甚至构成一个 N维的极大阿贝尔自伴代数 (极大阿贝尔子代数，参见定义 2.12) $\mathcal{M}$: =张成空间$\mathbb{C}\{P_k\} = \mathbb{C}[\{P_k\}] \subset \mathcal{Q}$。这个交换子代数是输出/测量/观测的经典语境，参见第 3.1节。

这些投影可以视为事件，表示比特模式 $(k)_2$ $=x_0x_1\ldots x_{n-1}$；并且（参见命题 2.18），对于态 ϖ_ρ，其密度矩阵为 $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$，根据玻恩规则（参见定义 2.17），观测到这些事件的概率为

$$\mathbb{P}(P_k) = \varpi_\rho(P_k) = \mathrm{tr}\,\rho P_k = \langle k|\,\rho\,|k\rangle\,. \tag{4.4}$$

它们构成 通常构成一个布尔代数，根据命题2.19 （经典输出 ）.

注 4.1 （量子处理器 — 相互作用福克空间）。 现在我们将其与第 *3.3* 节中的相互作用福克空间联系起来。定义一个 有限型雅可比序列 （参见定义 *3.37*） :

$$\forall k \ \textit{with}\ 0 \le k \le N-1 : \ \lambda_k = 1; \quad \textit{and}\ \forall j \ge 0 : \ \lambda_{N+j} = 0. \tag{4.5}$$

利用这个雅可比序列式（4.5），构造单模相互作用福克空间（参见定义 3.38），其扇区为 扇区 $\mathcal{K}_k$ =张成空间$\{|k\rangle\}$，其中 $0 \leq k \leq N-1 = 2^n - 1$。此设定由此定义了自伴数算符 $N \in \mathcal{Q}$ （参见定义 3.52 中的式（3.39）），其作用为 $N|k\rangle = k|k\rangle \in \mathcal{K}_k$，其中 $0 \leq k \leq N-1 = 2^n - 1$。因此，它具有如下谱分解（参见注2.10）

$$N = \sum_{k=0}^{N-1} k \, |k\rangle \langle k| \tag{4.6}$$

和$(N + I)$ 生成（参见例6）极大阿贝尔子代数$\mathcal{M} = \mathbb{C}[N] = \mathbb{C}[\{P_k\}] \subset \mathcal{Q}$。

阶梯算子，即产生与湮灭算符 B^+， B^-，由定义3.39中的方程（3.55）和（3.56）定义，可以视为使量子寄存器的二进制表示分别递增和递减。

定义 4.2 (n量子比特数字量子计算机)。 一个 n 量子比特数字量子计算机是一个二元组$(A \ \varpi_{\rho_0})$，其中 $A \in M_{sa} \subset Q$ 是一个非奇异可观测量，它表示该数字量子计算机，并定义如下：

$$A = \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_k \, |k\rangle \langle k| \,, \tag{4.7}$$

具有互不相同的非零特征值 $\lambda_k \neq \lambda_s$ 对应于 $k \neq s$，这样的可观测量生成（参见例6）极大阿贝尔子代数$\mathcal{M} = \mathbb{C}[A] \subset \mathcal{Q}$。

事件 $\{A = \lambda_k\}$ 对应于可观测量

$$P_{\{A=\lambda_k\}} = |k\rangle \langle k| = P_k, \tag{4.8}$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}_{2^n}$。

注意，由公式（$N+I$） $\in \mathcal{M}_{sa} \subset \mathcal{Q}$ 在注4.1中的公式（4.6）导出，其特征值为 $\lambda_k = k + 1$ 对于 $k \in \mathbb{Z}_{2^n}$ 而言，是这样的一个可观测量。

MASA M 的观测 $\omega \in$X(M)（参见定义 2.6）也可以用极大阿贝尔子代数 M（参见注 2.20）的极小一维投影 $\{\mathrm{P}_k\} \subset$ P(M) 表示。这是因为它们也是纯态（事实上是乘法态，即特征）的密度矩阵 $\{\mathrm{P}_k\} \subset$ D(M)。当观测到事件 $\mathrm{P}_k = |k\,k|$ 时，对于具有如公式（4.7）所示谱分解 $\mathrm{A} = \sum_{j=0}^{N} \mu_j \, |j\,j|$ 的 $\mathrm{A} \in$ M，它们的形式为

$$\omega_k(A) = \mathrm{tr}(P_k A) = \langle k| A |k\rangle = \sum_{j=0}^{N} \mu_j \, |\langle k \mid j\rangle|^2 = \mu_k, \tag{4.9}$$

如$\langle k \mid j\rangle = \delta_{k,\ j}$。这也自然给出 $\omega_k(P_j) = \delta_{k,\ j}$。

命题 4.3。 设 $|u\rangle \in \mathbb{C}^N$ 是一个单位向量，且 $\varpi_\rho \in \mathrm{S}(Q)$ 是一个密度矩阵为$\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{D}(Q)$ 的量子态。那么，考虑秩一可观测量 $A = |u\rangle \langle u|$,

$$\varpi_{\boldsymbol{\rho}}(A) = \varpi_{\boldsymbol{\rho}}(|u\rangle \langle u|) = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\rho} A = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho} \, |u\rangle \langle u|) = \langle u| \, \boldsymbol{\rho} \, |u\rangle \,. \tag{4.10}$$

此外，若 $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})_1$是一个纯态，其中 $\boldsymbol{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$ 对应某个单位向量$|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^N$，则（参见式（4.4））

$$\varpi_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(|u\rangle \langle u|) = (\langle \Psi \mid u\rangle)^2 = \cos^2 \theta_{\Psi,u}, \tag{4.11}$$

其中 $\theta_{\Psi,\ u}$ 是向量 $|\Psi\rangle$ 和 $|u\rangle$ 之间的角。

这意味着，量子随机变量 2.27的分布（参见定义 $A = |u\rangle\langle u| \in \mathcal{Q}_{sa}$ 在此纯态下得到的分布（参见命题 2.29），由式（4.11）给出

$$\mathbb{P}_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}\left(|u\rangle\langle u| = 1\right) = \left(\langle\Psi \mid u\rangle\right)^2 = \cos^2\theta_{\Psi,u}, \tag{4.12}$$

因此

$$\mathbb{P}_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}\left(|u\rangle\langle u| = 0\right) = \sin^2\theta_{\Psi,u}. \tag{4.13}$$

下面是一个关于线性代数的简单练习：

命题 *4.4.* 设 $\varpi_\rho \in S(Q)$ 是由密度矩阵 $\boldsymbol{\rho} \in D(Q)_r$ 表示的量子态，其中某个 $r = 1$、2、……、N. 满足上述条件。那么，对于任意酉矩阵 $U \in U(Q)$，都有（参见例 20）$U\boldsymbol{\rho}U^{\mathsf{H}} \in D(Q)_r$ 是一个新的秩为-r 的密度矩阵，它由 U 给出的信道/内自同构变换得到。

类似地，若 $A \in \mathcal{Q}_{sa}$ 是一个可观测量，则 UAU^{H} 仍是一个可观测量。此外，在态 ϖ_ρ 下，UAU^{H} 的概率律与态 $\varpi_{U\rho U^{\mathsf{H}}}$ 下 A 的概率律相同。

上述命题 4.4 使我们可以引入下一个定义。首先，考虑映射 $\mathscr{N}$来表示量子处理器的一步操作：

$$\mathscr{N} : \mathrm{U}(\mathcal{Q}) \times \mathrm{D}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathcal{Q}), \quad \mathscr{N}(U, \boldsymbol{\rho}) := U\boldsymbol{\rho}U^{\mathsf{H}}. \tag{4.14}$$

根据命题4.4，$\mathscr{N}$ 定义良好。对于每个固定的$U \in \mathrm{U}(\mathcal{Q})$，映射 $\mathscr{N}_U := \mathscr{N}(U,\cdot)$ 称为与由 U 定义的酉矩阵/内自同构相关联的量子通道，参见例20。

定义 4.5（量子代码）。对于由密度矩阵表示的固定量子态 $\varpi_{\rho_0} \in \mathsf{S}(\mathcal{Q})$ $\boldsymbol{\rho}_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$，量子代码或量子算法是一个有限序列 $U_0, U_1, \ldots, U_\ell \in \mathrm{U}(\mathcal{Q})$，其中 $U_0 = I$ 是单位矩阵，而 ℓ 是量子代码的长度。量子代码用于通过以下方式，使用式*(4.14)*中定义的信道，对量子态密度矩阵进行量子计算：$\boldsymbol{\rho}_0$

$$\boldsymbol{\rho}_\ell = \mathscr{N}_{U_\ell}(\mathscr{N}_{U_{\ell-1}}(\cdots\mathscr{N}_{U_1}(\mathscr{N}_{U_0}(\boldsymbol{\rho}_0))\cdots)). \tag{4.15}$$

一个 n 量子比特数字量子计算机在获得量子代码 $U_0, U_1, \ldots, U_\ell \in \mathsf{U}(\mathcal{Q})$ 后，按如下方式运行：

1. 量子计算机初始化为态 ϖ_{ρ_0}。

2. 将量子处理单元 $\mathscr{N}$应用于量子态 ϖ_{ρ_0}，该量子态由密度矩阵表示 $\boldsymbol{\rho}_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$，方法是使用量子代码 $U_0, U_1, \ldots, U_\ell \in \mathrm{U}(\mathcal{Q})$，并按照定义 4.5 中的式(4.15)，将其变换为新的量子态 ϖ_{ρ_ℓ}，该量子态由密度矩阵表示 $\boldsymbol{\rho}_\ell \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$。

3. 对可观测量 $A \in \mathcal{M}_{sa}$ 根据定义 4.2 进行测量——或者说，在由其谱分解定义的投影值测度上进行测量——时，所处的量子态为ϖ_{ρ_ℓ}。因此，由该 n量子比特数字量子计算机给出的量子代码的结果，服从量子随机变量 A 在态 ϖ_{ρ_ℓ}下的分布：

$$\mathbb{P}_{\rho_\ell}(A = \lambda_j) = \varpi_{\rho_\ell}(P_j) = \langle j|\,\boldsymbol{\rho}_\ell\,|j\rangle = \langle j|\,U_\ell\cdots U_1U_0\boldsymbol{\rho}_0U_0^{\mathsf{H}}U_1^{\mathsf{H}}\cdots U_\ell^{\mathsf{H}}\,|j\rangle\,, \tag{4.16}$$

对于每个 $j \in \mathbb{Z}_{2^n}$。对于观测本身，如果事件 P_k 被观测到，根据公式（4.9）可得 $\omega_k(A) = \lambda_k$。

注 4.6。 量子计算机通常使用由密度矩阵 $\boldsymbol{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0| \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})_1$ 给出的纯初始态 $\varpi_{\boldsymbol{\rho}_0} \in \mathrm{S}(\mathcal{Q})$ 。

量子随机变量的分布（参见定义 2.27）$A \in \mathcal{M}_{sa}$ 在此纯态中由根据方程（4.11）给出的分布刻画（参见命题 2.29）（另见方程（4.12）和（4.13），命题 4.3），即

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\rho}_0}(A = \lambda_k) = \mathbb{P}(P_k) = (\langle 0 \mid k\rangle)^2 = \delta_{0,k}, \quad k \in \mathbb{Z}_{2^n}. \tag{4.17}$$

因此，量子算法的前几个步骤通常旨在进行态制备，以便为量子算法获得合适的起始态。

接下来，我们举例说明一个可以使用数字量子计算机解决的搜索问题。

4.3 Grover 算法

Grover 算法是一种量子算法，它只需对函数进行 $O(\sqrt{N})$ 次求值，就能以高概率找到黑箱函数中产生特定输出值的唯一输入，其中 N 是该函数定义域的大小。Grover 算法是量子算法优于最佳经典算法、可实现二次加速的一个例子。

考虑由所有长度为 n 的二进制字符串组成的集合 $\{0,1\}^n$。设 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 是一个函数，它对除一个输入以外的所有输入都取相同值，这个特殊输入称为标记元素。Grover 算法的目标是找到一个量子代码，即 $U_0, U_1, \ldots, U_\ell$，使其提供酉矩阵 $U_f := U_0 U_1 \cdots U_\ell$，该矩阵作用于量子态 $\varpi_{\boldsymbol{\rho}_0} \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})_1$，使得 $\varpi_{U_f \boldsymbol{\rho}_0 U_f^\dagger}$ 成为一个量子态，测量得到标记元素的概率很高。

量子计算机从纯态 $\varpi_{\boldsymbol{\rho}_0} \in \mathrm{D(Q)}_1$ 开始，该态由 $\boldsymbol{\rho}_0 = |0\,0|$ 给出。随后，量子代码 U_f 按照关系 $\mathrm{U}_f\,|0\,0|\,\mathrm{U}_f^\dagger$ 作用于密度矩阵 $\boldsymbol{\rho}_0$。由命题 4.4 可知，$\mathrm{U}_f\,|0\,0|\,\mathrm{U}_f^\dagger$ 仍然是秩一密度矩阵，因此存在一个单位向量 $|\Psi$，使得 $\mathrm{U}_f\,|0\,0|\,\mathrm{U}_f^\dagger = |\Psi\,\Psi|$。为了解决这个问题，我们将寻找一个酉矩阵 U_f，满足 $\mathrm{U}_f^\dagger = \mathrm{U}_f$，使得 $\mathrm{U}_f\,|0\, = |\Psi$。

假设 $a \in \mathbb{Z}_{2^n}$ 是标记元素。那么我们希望找到一个单位向量 $|\Psi\rangle$，使得

$$\mathbb{P}_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(A = \lambda_a) = \varpi_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(|a\rangle\langle a|) = |\langle\Psi \mid a\rangle|^2 = 1 - \varepsilon$$

对某个 $\varepsilon > 0.$ 成立。这个单位向量 $|\Psi\rangle$ 就是 Grover 算法的解。它定义了一个量子态 $\varpi_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}$，使得随机量子变量 A 的分布为

$$\mathbb{P}_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(A = \lambda_a) = 1 - \varepsilon \ \text{ and } \ \mathbb{P}_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(A \neq \lambda_a) = \varepsilon.$$

为此，我们先取酉算子（且自伴）的矩阵 $U_1 = \boldsymbol{H}^{\otimes n}$，其中

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

是 Hadamard 矩阵。因此，不难看出

$$|\Psi_1\rangle := U_1\,|0\rangle^{\otimes n} = \boldsymbol{H}^{\otimes n}\,|0\rangle^{\otimes n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle\,.$$

注意，

$$\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A=\lambda_s)=|\langle\Psi_1\mid s\rangle|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\right)^2=\frac{1}{2^n}\quad\text{for all}\quad s\in\mathbb{Z}_{2^n}.$$

现在，量子随机变量 A 在态 $\varpi_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}$ 下、密度矩阵为 $|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|=U_1|0\rangle^{\otimes n}\langle 0|^{\otimes n}U_1$ 时，其分布在集合$\mathbb{Z}_{2^n}$上服从离散均匀分布。这是一种态制备。注意，

$$|\Psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_{2^n}\\k\neq a}}|k\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}|a\rangle+\sqrt{\frac{2^n-1}{2^n}}|a_\perp\rangle,$$

其中

$$|a_\perp\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n-1}}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_{2^n}\\k\neq a}}|k\rangle,$$

是一个与 $|a\rangle$正交的单位向量。由于 $\theta_{\Psi_1,a}+\theta_{\Psi_1,a_\perp}=\frac{\pi}{2}$，我们有

$$\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A=\lambda_a)=|\langle\Psi_1\mid a\rangle|^2=\frac{1}{2^n}=\cos^2\theta_{\Psi_1,a}=\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp},$$

and

$$\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A\neq\lambda_a)=|\langle\Psi_1\mid a_\perp\rangle|^2=\left(\sqrt{\frac{2^n-1}{2^n}}\right)^2=1-\frac{1}{2^n}=\cos^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}.$$

因此，我们可以写成

$$|\Psi_1\rangle=\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle+\cos\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a_\perp\rangle.$$

接下来考虑酉（且自伴）矩阵 $W_1=I-2|a\rangle\langle a|$，其中 I 是单位矩阵。于是我们有

$$W_1|a\rangle=-|a\rangle\quad\text{and}\quad W_1|\Psi_1\rangle=|\Psi_1\rangle-\frac{2}{\sqrt{2^n}}|a\rangle=|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle.$$

类似地，我们取酉（且自伴）矩阵 $W_2=2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|-I,$，得到

$$W_2|\Psi_1\rangle=|\Psi_1\rangle\quad\text{and}\quad W_2|a\rangle=\frac{2}{\sqrt{2^n}}|\Psi_1\rangle-|a\rangle=2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|\Psi_1\rangle-|a\rangle.$$

从几何上看，在不变二维子空间 张成空间$\{|a\rangle\quad|a_\perp\rangle\}$ 中，预言机反射 W_1 和扩散反射 W_2 复合为一次旋转 $U_2=W_2W_1$，每次迭代都会增大标记态上的振幅；见图 4。

最后，酉算子（且自伴）矩阵 $U_2=W_2W_1$ 使我们得以得到

$$\begin{aligned}
|\Psi_2\rangle:=W_2W_1|\Psi_1\rangle&=W_2\left(|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle\right)\\
&=|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}\left(2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|\Psi_1\rangle-|a\rangle\right)\\
&=\left(1-4\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}\right)|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle\\
&=\left(1-2\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}-2\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}\right)|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle\\
&=\left(\cos 2\theta_{\Psi_1,a_\perp}-2\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}\right)|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle\\
&=\left(\cos 2\theta_{\Psi_1,a_\perp}-(1-\cos 2\theta_{\Psi_1,a_\perp})\right)|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle\\
&=(2\cos 2\theta_{\Psi_1,a_\perp}-1)|\Psi_1\rangle-2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a\rangle.
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\langle \Psi_2 \mid a\rangle &= \left(1-4\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}\right)\langle\Psi|\,|a\rangle - 2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}\\ &= \left(1-4\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}\right)\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp} - 2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}\\ &= -4\sin^3\theta_{\Psi_1,a_\perp} - \sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}\\ &= -2\sin\theta_{\Psi_1,a_\perp}(\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}+1).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|}(A=\lambda_a) &= |\langle\Psi_2\mid a\rangle|^2\\ &= 4\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}(\sin^2\theta_{\Psi_1,a_\perp}+1)^2\\ &= 4\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A=\lambda_a)(\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A=\lambda_a)+1)^2,\end{aligned}$$

因此，量子随机变量 A 在态 $\varpi_{|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|}$ 下的分布满足

$$\mathbb{P}_{|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|}(A=\lambda_a) > 2^2\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A=\lambda_a) = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

显然,

$$\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A\neq\lambda_a) < 1-\frac{1}{2^{n-2}}.$$

因此，量子代码 U_2 通过关系 $U_2U_1\boldsymbol{\rho}_0U_1U_2$, 作用于矩阵密度 $U_1\boldsymbol{\rho}_0U_1$ ，从而得到一个测量到标记元素概率很高的量子态。

由于我们可以写成

$$|\Psi_2\rangle = \sin\theta_{\Psi_2,a_\perp}|a\rangle + \cos\theta_{\Psi_1,a_\perp}|a_\perp\rangle,$$

其中

$$\sin^2\theta_{\Psi_2,a_\perp} = \mathbb{P}_{|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|}(A=\lambda_a) \quad\text{and}\quad \cos^2\theta_{\Psi_2,a_\perp} = \mathbb{P}_{|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|}(A\neq\lambda_a),$$

取 $|\Psi_3\rangle = U_2|\Psi_2\rangle = U_2^2U_1|0\rangle^{\otimes n}$ 并以类似方式继续推导，可得一个态$\varpi_{|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|}$ ，其A的分布满足

$$\mathbb{P}_{|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|}(A=\lambda_a) > 2^2\mathbb{P}_{|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|}(A=\lambda_a) > 2^4\mathbb{P}_{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}(A=\lambda_a) = \frac{1}{2^{n-4}}.$$

按照这种方式，在第 k 步，我们得到一个单位向量 $|\Psi_k\rangle = U_2^kU_1|0\rangle$，它给出一个态 $\varpi_{|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|}$ ，其中A 的分布满足

$$\mathbb{P}_{U_2^kU_1\boldsymbol{\rho}_0U_1U_2^k}(A=\lambda_a) > 2^{2k}\mathbb{P}_{U_1\boldsymbol{\rho}_0U_1}(A=\lambda_a) = \frac{1}{2^{n-2k}}.$$

因此，我们可以陈述以下命题。

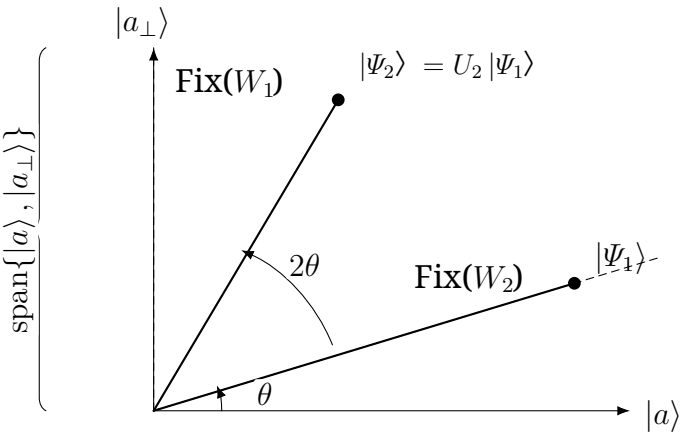
命题4.7。 对于 $k\geq 1$，考虑量子代码

$$U_0, U_1, \overbrace{U_2,\ldots,U_2}^{k-times}, \tag{4.18}$$

其中 $U_0=I$， $U_1=\boldsymbol{H}^{\otimes n}$和 $U_2=W_2W_1$是复数域$\mathrm{U}(2^n)$中的自伴矩阵。则在量子比特数字量子计算机$(A\varpi_{|0^n\rangle\langle 0^n|})$ 中运行量子代码式（*4.18*）的结果，是量子随机变量A在最终态$\varpi_{U_2^kU_1\rho_0U_1U_2^k}$下的分布，该分布满足

$$\mathbb{P}_{U_2^kU_1\rho_0U_1U_2^k}(A=\lambda_a) > 2^{2k}\mathbb{P}_{U_1\rho_0U_1}(A=\lambda_a) = \frac{1}{2^{n-2k}}.$$

此外，给定 $\varepsilon>0$，测量得到标记元素的概率 $a\in\mathbb{Z}_{2^n}$ 大于 $1-\varepsilon$，当 $k=\lceil\frac{n}{2}\rceil$时。这种放大机制是图*4*所示的平面旋转。



$W_1 = I - 2|a\rangle\langle a|$(预言机相位翻转)$W_2 = 2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| - I$(关于平均值的反演)$U_2 = W_2W_1$ 是在张成空间$\{|a\rangle \ |a_\perp\rangle\}$中的一次旋转。

图4：Grover 算法在不变的二维子空间*span*{〉 $|a_\perp\rangle$}中的几何策略。预言机 W_1 和扩散算子 W_2 是反射；它们的复合$U_2 = W_2W_1$ 产生旋转，旋转角为 2θ，从而提高测量到标记态的概率。

5 结论

本文简要探讨了代数概率，主要限于有限维情形，从而避开了许多分析困难。本文表明，概率论中的经典交换或阿贝尔情形可以纳入代数框架，因此可以看出这是一种更一般的理论（例如 [26, 39, 111, 117]）。

这种代数观点也为研究随机矩阵和张量场提供了自然的方法。在这些对象中，随机变量不一定要对易，而其谱的行为才是有趣的研究对象；这是一个鲜明地兼具分析与代数特征的概念，用通常的测度论背景来处理要复杂得多。与此相关的一个领域在这里仅作了简要介绍，那就是与自由概率有关的一切。我们只为感兴趣的读者提供了 [145, 74, 104, 103] 相关指引。

第 2 节的内容本质上主要是线性代数，虽然其中有些知识有时并不广为人知。令人惊讶的是，当随机变量不再对易时会发生什么，而这也带来了与第 3 节所阐释的经典情形之间显著的差异。特别是，本节介绍了关于信道的重要观点，信道是对信息传输的形式化描述。在掌握了这些背景知识后，第 4 节将简要介绍量子计算，并说明它如何依赖于前文的内容。作为量子算法的一个例子，我们将较为详细地讲解 Grover算法。

关于这些主题中的任何一个，都还有很多内容可以进一步探讨。我们对代数概率的阐述稍微详细一些，而对以此为基础的主题则简略得多；若要继续探讨基础问题，[2, 3, 4]这些主题很可能是不错的延伸方向和进一步学习的起点。在应用领域，尤其是量子计算（例如 [107]）和量子信息（例如 [150, 107, 77, 152, 151,114]），正在涌现许多新进展。

我们希望这些笔记让读者得以一窥概率的代数处理，以及随机变量的非交换性所带来的差异。同样，我们也希望通过这组关于代数概率的发展与应用的简短介绍，激发读者的一些兴趣。这样，读者或许已经对代数概率有了初步了解，也知道如果想进一步探索，可以从何处继续。

致谢

本出版物中报告的研究由德国科学基金会（DFG）提供部分经费支持（HGM），此外还获得了盖-吕萨克-洪堡研究奖，并受益于在维也纳埃尔温·薛定谔研究所的驻留。

参考文献

[1] L. Accardi，数学能否帮助解决量子理论的诠释问题？，Nuovo Cimento B 110 (1995)，685–721，doi:10.1007/BF02741475。[2] , 量子概率：历史综述，载于《代数结构上的概率》（G. Budzban、P. Feinsilver 与 A. Mukherjea 编），《当代数学》第261卷，美国数学会，2000，第145–160页，doi:10.1090/comm/261/04138。[3] , 量子概率与希尔伯特第六问题，Trans. R. Soc. A 376 (2018)，20180030，doi:10.1098/rsta.2018.0030。[4] , 经典概率与量子概率的新挑战，《熵》24 (2022)，1502，doi:10.3390/e24101502。[5] L. Accardi、A. Barhoumi 与 A. Dhahri，d-不定元中的正交多项式理论与 $\mathbb{C}^d$上的三对角对称相互作用 Fock 空间理论之等同，无限维分析、量子概率及相关主题 20 (1995)，第1期，1750004–1 – 1750004–55，doi:10.1142/S0219025717500047。[6] L. Accardi 与 M. Bożejko，相互作用 Fock 空间与概率测度的高斯化，无限维分析、量子概率及相关主题 1 (1998)，第4期，663–670，doi:10.1142/S0219025798000363。[7] L. Accardi 与 C. Cecchini，冯·诺依曼代数中的条件期望与 Takesaki 的一个定理，Journal of Functional Analysis 45 (1982)，第2期，245–273，doi:10.1016/0022-1236(82)90022-2。[8] L. Accardi、H. Kuo 与 A. Stan，通过典范相伴的相互作用 Fock 空间刻画概率测度，无限维分析、量子概率及相关主题 7 (2004)，第4期，485–505，doi:10.1142/S0219025704001736。[9] ,用产生算子、湮灭算子与中性算子表述的概率测度，载于《量子概率与无限维分析：从基础到应用》（M. Schürmann 与 U. Franz 编），QP-PQ XVIII，世界科学出版社，2005，第1–11页，doi:10.1142/9789812702104_0001。[10] L. Accardi 与 Y.-G. Lu，量子理论从经典概率中的涌现：历史起源、发展与开放问题，《随机分析期刊》1 (2020年)，第4期，9，doi:10.31390/josa.1.4.09。[11] ,与递增希尔伯特空间滤过及广义 Jacobi 三对角关系相联系的量子理论，《随机分析期刊》2 (2021)，第1期，4，doi:10.31390/josa.2.1.04。[12] L. Accardi 与 M. Nahni，相互作用 Fock 空间与多变量正交多项式，第192–205页，世界科学出版社，2003，doi:10.1142/9789812705242_0005。

[13] W. Arveson，《C^*-代数导论》，施普林格，1976年。

[14]M. Ashtiani 和 M. A. Azgomi，《决策与认知中的类量子方法综述》，《数学与社会科学》75（2015），49–80，doi:10.1016/j.mathsocsci.2015.02.004。[15] S. Attal，《量子噪声理论讲义》，可从以下网址获取：http://math.univ-lyon1.fr/~attal/chapters.html。[16] S. Attal，《马尔可夫链与动力系统：开放系统的视角》，《随机分析通讯》4（2010），第4期，523–540。[17] G. Aubrun 和 S. J. Szarek，《Alice and Bob Meet Banach：渐近几何分析与量子信息论的交汇》，Mathematical Surveys and Monographs，第223卷，美国数学会，2017年。[18] B. E. Baaquie，《量子金融》，剑桥大学出版社，2004年。[19] ，《经济学与金融学中的数学方法和量子数学》，施普林格，2020年，doi:10.1007/978-981-15-6611-0。[20] J. C. Baez 和 J. D. Biamonte，《随机力学的量子技术》，arXiv: 1209.3632 [quant-ph]，2019年，arXiv:1209.3632，doi:10.48550/arXiv.1209.3632。[21] F. Bagarello，《经典系统的量子动力学：数算子的应用》，约翰·威立父子公司，2012年。[22] ，《社会、生态和生物科学中的量子概念》，剑桥大学出版社，2019年，doi:10.1017/9781108684781。[23] S. M. Barnett，《量子信息论》，牛津大学出版社，2009年。[24] H. Barnum 和 A. Wilce，《凸操作理论中的信息处理》，《理论计算机科学电子札记》270（2011），第1期，3–15，doi:10.1016/j.entcs.2011.01.002。[25] V. P. Belavkin 和 P.Staszewski，《完全正映射的拉东–尼科迪姆定理》，《数学物理报告》24（1986），49–55，doi:10.1016/0034-4877(86)90039-X。[26]A. Ben Ghorbal 和 M. Schürmann，《非交换概率论的代数基础》，技术报告 Prépublication 99/17，E. Cartan研究所，南锡，1999年，可从以下网址获取：https://www.researchgate.net/publication/2841404_On_the_Algebraic_Foundations_of_Non-Commutative_Probability_Theory。[27] ，《随机独立性的非交换概念》，《剑桥哲学学会数学会报》133（2002），531–561，doi:10.1017/S0305004102006072。[28] B. Blackadar，《算子代数——C*代数与冯·诺伊曼代数理论》，《数学科学百科全书》第122期，施普林格，2006年，doi:10.1007/3-540-28517-2。[29] A. Bobrowski，《概率与随机过程的泛函分析》，剑桥大学出版社，2005年。

[30] M. Born、W. Heisenberg与P. Jordan，《论量子力学 II》，《物理学杂志》35（1926年），557–615，doi:10.1007/BF01379806。[31] M. Born与P. Jordan，《论量子力学》，《物理学杂志》34（1925年），858–888，doi:10.1007/BF01328531。[32] M. Bożejko、B. Kümmerer与R. Speicher，q-高斯过程：非交换与经典方面，《数学物理通讯》185（1997年），129–154。[33] O. Bratteli与D. W. Robinson，《算子代数与量子统计力学》，第2版，第1卷，施普林格，1987年。[34] ，《算子代数与量子统计力学》，第2版，第2卷，施普林格，1997年。[35] C. Budroni、A. Cabello、O. Gühne、M. Kleinmann与J. Åke Larsson，柯亨-施佩克语境性，arXiv: 2102.13036 [quant-ph]，2023年，arXiv:2102.13036，doi:10.48550/arXiv.2102.13036。[36] P. Busch，量子态与广义可观测量：格里森定理的一个简单证明，arXiv: 9909073 [quant-ph]，2003年，arXiv:9909073，doi:10.48550/arXiv.quant-ph/9909073。[37] J. R. Busemeyer，面向社会与行为科学家的量子概率导论，《社会科学定性数学——文化动态研究的数学模型》（伦敦）（L. Rudolph编），社会表征的文化动态，劳特利奇，2013年，第41–69页。[38] J. R. Busemeyer与P. D. Bruza，《认知与决策的量子模型》，剑桥大学出版社，2012年。[39] C. Bény与F. Richter，量子理论的代数方法：有限维指南，arXiv: 1505.03106 [quant-ph]，2020年，arXiv:1505.03106，doi:10.48550/arXiv.1505.03106。[40] A. Cabello、J. M. Estebaranz与G. García-Alcaine，贝尔-科亨-施佩克尔定理：一个含18个向量的证明，《物理快报 A》212（1996年），183–187。[41] G. Cassinelli与N. Zanghì，量子力学中的条件概率 I. 相对于单一事件的条件化，《新物理学杂志》73 B（1983年），第2期，237–245，doi:10.1007/BF02721792。[42] ，量子力学中的条件概率 II. 可加条件概率，《新物理学杂志》79 B（1984年），第2期，141–154，doi:10.1007/BF02748966。[43] G. Chiribella、G. M. D'Ariano与D. Schlingemann，有限维量子测量的重心分解，《数学物理学杂志》51（2010年），022111，doi:10.1063/1.3298681。[44] M.-D. Choi，复矩阵上的完全正线性映射，《线性代数及其应用》10（1975年），285–290。[45] J. B. Conway，《泛函分析教程》，第2版，施普林格，1990年。

[46] K. R. Davidson，《C*-代数实例》，美国数学会，1996年。[47] P. C. W. Davies与J. R. Brown，《原子中的幽灵：量子物理学奥秘讨论》，剑桥大学出版社，1986年。[48]A. Dhahri与A. Dhahri，论多维法瓦尔引理，arXiv: 1310.8170 [math.FA]，2014年，arXiv:1310.8170，doi:10.48550/arXiv.1310.8170。[49] A. Dhahri、N. Obata与H. Yoo，多元正交多项式：量子分解、亏秩与测度的支撑，《数学分析与应用杂志》485（2020年），123775，doi:10.1016/j.jmaa.2019.123775。[50] P. A. M. Dirac，量子力学基本方程，《英国皇家学会会刊A：数学、物理与工程科学》109（1925年），642–653，doi:10.1098/rspa.1925.0150。[51] ，《量子力学原理》，牛津大学出版社，1930年。[52] ，量子力学的一种新记法，《剑桥哲学学会会刊》35（1939年），第3期，416–418，doi:10.1017/S0305004100021162。[53] J. Dixmier，《C*-代数》，北荷兰数学文库，第15卷，北荷兰出版社，1977年。[54]R. S. Doran与V. A. Belfi，C*代数的刻画：盖尔范德-奈马克定理，CRC出版社，1986年。[55] Y. A. Drozd与V. V. Kirichenko，《有限维代数》，施普林格，1994年，doi:10.1007/978-3-642-76244-4。[56] G. G. Emch，《统计力学与量子场论中的代数方法》，约翰·威立父子公司，1972年。[57] A. Falco、D. Falco-Pomares与H. G. Matthies，由 $U(2^n)$中李群嵌入得到的基本量子门：几何、普适性与离散化，2026年，arXiv:2601.17936（v1，2026年1月25日），arXiv:2601.17936。[58]A. Fässler与E. Stiefel，《群论方法及其应用》，伯克豪瑟，1992年。[59]G. Filipuk、W. Van Assche与L. Zhang，多重正交多项式的阶梯算子与微分方程，arXiv: 1204.5058 [math.CA]，2018,arXiv:1204.5058，doi:10.48550/arXiv.1204.5058。[60] B. Fischer，《对称线性系统的基于多项式的迭代方法》，工业与应用数学学会，2011年。[61] D. C. Freemann、D. Giannakis、B. Mintz、A. Ourmazd与J. Slawinska，算子代数中的数据同化，arXiv: 2206.13659 [math.ST]，2022年，arXiv:2206.13659，doi:10.48550/arXiv.2206.13659。[62] M. Frembs与E. G. Cavalcanti，Choi–Jamiołkowski同构的若干变式，《物理学杂志A：数学与理论》57（2024年），265301，doi:10.1088/1751-8121/ad5394。

[63] I. M. Gel'fand 和 M. Neumark（Naĭmark），将赋范环嵌入希尔伯特空间算子环，Rec. Math. [Mat. Sbornik]N.S. 12(54)（1943），第2期，197–217，参见：http://mi.mathnet.ru/sm6155.[64] W. H. Greub，《线性代数》，施普林格，1975年，doi:10.1007/978-1-4684-9446-4.[65] S. Gudder，《凸结构与效应代数》，《理论物理国际期刊》38（1999），3179–3187，doi:10.1023/A:1026678114856.[66] S. Gudder、S. Pulmannová、S. Bugajski 和 E. Beltrametti，《凸线性效应代数》，Reports on Mathematical Physics 44（1999），第3期，359–379，doi:10.1016/S0034-4877(00)87245-6.[67]S. P. Gudder 和 R. L. Hudson，《非交换概率论》，《美国数学会汇刊》245（1978），1–41，doi:10.1090/S0002-9947-1978-0511398-0.[68] S. P. Gudder，《量子力学中的随机方法》，North Holland，1979年。[69] I. Guerra Bobo，《关于量子条件概率》，Theoria: An International Journal for Theory, History and Foundations of Science 28（2013），第1期，115–137。[70] W. Hackbusch，《张量空间与数值张量微积分》，施普林格，2012年，doi:10.1007/978-3-642-28027-6.[71] D. Harlow，《由量子纠错推导 Ryu-Takayanagi公式》，arXiv：1607.03901 [hep-th]，2016年，arXiv:1607.03901，doi:10.48550/arXiv.1607.03901.[72] E. Haven 和 A. Khrennikov，《量子社会科学》，剑桥大学出版社，2013年。[73] W. Heisenberg，《关于运动学与力学关系的量子理论诠释》，《物理学杂志》33（1925年），879–893，doi:10.1007/BF01328377.[74] F. Hiai 和 D. Petz，《半圆律、自由随机变量与熵》，Mathematical Surveys and Monographs，第77卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[75] ，《矩阵分析与应用导论》，Mathematical Surveys and Monographs，施普林格，2014年，doi:10.1007/978-3-319-04150-6.[76] D. Hilbert、J. von Neumann 和 L. Nordheim，《论量子力学的基础》，Math. Ann. 98（1928年），1–30，doi:10.1007/BF01451579.[77]A. S. Holevo，《量子系统、信道与信息》，第2版，Texts and Monographs in Theoretical Physics，德古意特出版社，2019年，doi:10.1515/9783110642490-202.[78] F. Holik、C. Massri、A. Plastino 和 M. Sáenz，《统计理论中的广义概率》，Quantum Rep. 3（2021），389–416，doi:10.3390/quantum3030025.[79] R. B. Holmes，《几何泛函分析及其应用》，施普林格，1975年。[80] A. Hora 和 N. Obata，《量子概率与图的谱分析》，理论与数学物理，施普林格，2007年，doi:10.1007/b11501497。

[81]*M. Horodecki*、*P. Horodecki* 和 *R. Horodecki*，《混合态纠缠与量子通信》，《量子信息》，现代物理学施普林格丛书，第*173*卷，施普林格，*2001*年，第*151–195*页。[82] *P. Janotta* 和 *H. Hinrichsen*，《广义概率理论：什么决定了量子理论的结构？》，*arXiv*：*1402.*6562 [*quant-ph*]，*2014*年，arXiv:1402.6562，doi:10.48550/arXiv.1402.6562。[83] *S. Janson*，《高斯希尔伯特空间》，剑桥大学出版社，*1997*年，doi:10.1017/CBO9780511526169。[84] *P. Jordan*，《量子力学的一种新基础》，《物理学杂志》*40*（*1927*年），*809–838*，doi:10.1007/BF01390903.[85] *P. Jordan*、*J. von Neumann* 和 *E. Wigner*，《量子力学形式体系的一种代数推广》，《数学年刊》*35*（*1934*），第*1*期，*29–64*，doi:10.2307/*1968117*。[86] *R. V. Kadison* 和 *J. Ringrose*，《算子代数基础：高级理论》，第*2*卷，美国数学会，*1997*年。[87] ，《算子代数基础：初等理论》，第*1*卷，美国数学会，*1997*年。[88] *R. V. Kadison*，《非交换条件期望及其应用》，《当代数学》*365*（*2004*），*143–180*。[89] *A. Khrennikov*，《无处不在的量子结构》，施普林格，*2010*年。[90] ，《开放系统、量子概率与逻辑：用于生物学、认知和决策中的类量子建模》，《熵》*25*（*2023*），*886*，doi:10.3390/e25060886.[91] *A. N. Kolmogoroff*，《概率论基础》，施普林格，*1933*年。[92] *A. N. Kolmogorov*，《概率论基础》，*Chelsea*出版社，*1950*年。[93]*S. Kremminger*，《量子态集合的几何方面》，硕士论文，因斯布鲁克大学，*2022*年，学士论文，参见：https://www.uibk.ac.at/mathematik/algebra/media/teaching/geometric-aspects-of-quantum-states_final.pdf。[94]*K. Landsman*，《量子理论基础》，施普林格，*2017*年，doi:10.1007/978-3-319-51777-3。[95] *P. Laplace*，《概率的解析理论》，*V. Coucier*，*1812*年。[96]*D. Lehmann*，《非交换概率论基础（扩展摘要）》，*arXiv*：*2306.*01131 [*quant-ph*]，*2023*年，arXiv:2306.01131，doi:10.48550/arXiv.2306.01131。[97] *M. Leifer*，《小希尔伯特空间教会的十诫》，参见：https://mattleifer.info/wordpress/wp-content/uploads/2008/11/commandments.pdf。

[98] G. Lowther，《*-代数上的态》，可从以下网址获取：https://almostsuremath.com/2019/12/08/states-on-algebras/。[99] G. Ludwig，《量子力学的公理基础——希尔伯特空间结构的推导》，第1卷，施普林格，1985年。[100] ，《量子力学的公理基础——量子力学与宏观系统》，第2卷，施普林格，1987年。[101] G. W. Mackey，《量子力学的数学基础》，W. A. Benjamin，1963年。[102] P.-A. Meyer，《面向概率论学者的量子概率》，数学讲义，第1538卷，施普林格，1995年。[103] J. A. Mingo 和 R. Speicher，《自由概率与随机矩阵》，菲尔兹研究所专著，第35卷，施普林格，柏林，2017年，doi:10.1007/978-1-4939-6942-5。[104]P. D. Mitchener，《非交换概率论》，技术报告，哥廷根大学，2005年，《自由概率导论》，可从以下网址获取：https://www.academia.edu/download/84097499/free.pdf。[105] M. A. Neumark（Naĭmark），《赋范代数》，第3版，Wolters-Noordhoff 出版社，1972年，doi:10.1007/978-94-009-9260-3。[106] N. T. Nguyen、V. Kreinovich、T. H. Doan 和 D. T. Nguyen（编），《金融计量经济学：贝叶斯分析、量子不确定性及相关主题》，系统、决策与控制研究，第427卷，施普林格，2022年。[107] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》，第10版，剑桥大学出版社，2011年。[108] N. Obata，《增长图的谱分析：量子概率视角》，施普林格数学物理简明丛书，第20卷，施普林格，2017年，doi:10.1007/978-981-10-3506-7。[109] M. Ozawa，《论量子条件概率》，数学物理杂志 25（1984年），79–87，doi:10.1063/1.526000。[110] V. Paulsen，《完全有界映射与算子代数》，剑桥大学出版社，2003年。[111] M. Plávala，《量子概率论》，arXiv: 2103.07469 [quant-ph]，2021年，arXiv:2103.07469，doi:10.48550/arXiv.2103.07469。[112] D. Péres-García、M. M. Wolf、D. Petz 和 M. B. Ruskai，《正保迹映射在 L_p 范数下的压缩性》，arXiv: 0601063 [math/ph]，2006年，arXiv:0601063，doi:10.48550/arXiv.0601063。[113] I. Pérez 和 A. Luis，《量子条件概率》，arXiv: 2107.05861 [quant-ph]，2022年，arXiv:2107.05861，doi:10.48550/arXiv.2107.05861。[114]A. C. Quillen，《量子信息导论》，PHY265 讲义，2025年，可从以下网址获取：https://astro.pas.rochester.edu/~aquillen/phy265/lectures/QI_B.pdf。

[115]D. Rajan 和 M. Visser，《重新审视柯亨-施佩克定理》，arXiv: 1708.01380[quant-ph]，2019年，arXiv:1708.01380，doi:10.48550/arXiv.1708.01380。[116] W. Robin，《正交多项式的系统性梯算符方法》，海湾数学杂志 1（2013年），第2期，133–147。[117] B. Ron，《代数量子理论的重构》，arXiv: 2311.17739 [quant-ph],2023，arXiv:2311.17739，doi:10.48550/arXiv.2311.17739。[118] M. Rédei 和 S. J. Summers，《量子概率论》，《现代物理学史与哲学研究》38（2007年），390–417，doi:10.1016/j.shpsb.2006.05.006。[119] S. Sakai，《C*代数与 W*代数》，施普林格，1971年。[120] H. H. Schaefer 和 M. P. Wolff，《拓扑向量空间》，第2版，施普林格，1999年，doi:10.1007/978-1-4612-1468-7。[121] K. Schmüdgen，《希尔伯特空间上*-代数无界表示导论》，数学研究生教材，第285卷，施普林格，2020年，doi:10.1007/978-3-030-46366-3。[122] I. Schneider，《雅各布·伯努利的〈猜度术〉对18世纪大不列颠的直接与间接影响》，《概率与统计史电子期刊》2（2006年），第1期，1–17，可从以下网址获取：http://eudml.org/doc/127027。[123]E. Schrödinger，《论海森堡不确定性原理》，《普鲁士科学院会议报告》，物理数学部 14（1930年），296–303。[124] I. E. Segal，《一般量子力学公设》，《数学年刊》第二辑 48（1947年），第4期，930–948，doi:10.2307/1969387。[125] ，《抽象积分的非交换扩张》，《数学年刊》57（1953年），第3期，401–457，doi:10.2307/1969729。[126] ，《抽象概率空间与柯尔莫哥洛夫定理》，《美国数学杂志》76（1954年），第3期，721–732，doi:10.2307/2372714。[127] ，《希尔伯特空间上的张量代数 I》，《美国数学会汇刊》81（1956年），第1期，106–134，doi:10.1090/S0002-9947-1956-0076317-8。[128] ，《希尔伯特空间上的张量代数 II》，《数学年刊》63（1956年），第1期，160–175，doi:10.2307/1969994。[129] ，《代数积分理论》，《美国数学会通报》71（1965年），419–489，doi:10.1090/S0002-9904-1965-11284-8。[130] ，《算子代数的不可约表示》，《美国数学会通报》53（1969年），第2期，73–88，doi:10.1090/s0002-9904-1947-08742-5。[131] I. E. Segal 和 R. A. Kunze，《积分与算子》，2nd 版，施普林格，1978年。

[132]D. Sen，《量子力学中的不确定性关系》，Current Science 107（2014年），第2期，203–218，可获取于：https://www.currentscience.ac.in/Volumes/107/02/0203.pdf。[133] G. Shafer，雅各布·伯努利的《猜度术》对当今概率哲学的意义，《计量经济学杂志》75（1996年），第1期，15–32，doi:10.1016/0304-4076(95)01766-6。[134] J. A. Smolin，更大希尔伯特空间教会，可获取于：https://www.quantiki.org/wiki/church-larger-hilbert-space。[135] D. Sornette，物理学与金融经济学：谜题、伊辛模型与基于主体的模型，《物理学进展报告》77（2014年），062001，doi:10.1088/0034-4885/77/6/062001。[136]R. Speicher，自由概率论，《德国数学家联合会年报》119（2017年），3–30，doi:10.1365/s13291-016-0150-5。[137] T. J. Sullivan，《不确定性量化导论》，应用数学丛书，第63卷，施普林格，2015年，doi:10.1007/978-3-319-23395-6。[138] M. Takesaki，《算子代数理论I》，第I卷，数学科学百科全书，第124号，施普林格，1979年。[139] ，《算子代数理论II》，第II卷，数学科学百科全书，第125号，施普林格，2002年。[140] ，《算子代数理论III》，第III卷，数学科学百科全书，第127号，施普林格，2003年。[141] M. Takesaki，冯·诺依曼代数中的条件期望，《泛函分析杂志》9（1972年），306–321，doi:10.1016/0022-1236(72)90004-3。[142] J. Tomiyama，论W*代数中范数为1的投影，《日本学士院纪要》33（1957年），608–612，doi:10.3792/pja/1195524885。[143] H. Umegaki，算子代数中的条件期望，东北数学杂志，第二辑6（1954年），第2–3期，177–181，doi:10.2748/tmj/1178245177。[144]V. S. Varadarajan，《关于量子、对称与超对称性的思考》，施普林格，2011年，doi:10.1007/978-1-4419-0667-0。[145] D. V. Voiculescu、K. J. Dykema与A. Nica，《自由随机变量》，CRM专著丛书，第1卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1992年。[146] R. von Mises，《概率、统计与真理》，施普林格，1928年，doi:10.1007/978-3-662-36230-3。[147] J. von Neumann，《量子力学的数学基础》，施普林格，1932年。[148] ，《量子力学的数学基础》，普林斯顿大学出版社，1955年。[149] ，《文集：算子环》，第III卷，培格曼出版社，1961年。

[150]R. F. Werner，量子信息——一份邀请，《量子信息》，Springer现代物理丛书，第173卷，施普林格，2001年，第14–57页。[151] M. M. Wilde，量子信息论，剑桥大学出版社，2017年。[152] M. M. Wolf，量子信道与运算——导览，讲义，2012年，慕尼黑工业大学图书馆，可获取于： https://mediatum.ub.tum.de/node?id=1701036。[153]Q. Yuan，有限非交换概率、玻恩规则与波函数坍缩，可获取于：https://qchu.wordpress.com/2012/09/09/finite-noncommutative-probability-the-born-rule-and-wave-function-collapse/。[154] V. I. Yukalov与D. Sornette，量子决策理论中的信息处理，《熵》11（2009年），1073–1120， doi:10.3390/e11041073。[155] , 量子概率与量子决策，Phil. Trans. R. Soc. A374（2016年），20150100， doi:10.1098/rsta.2015.0100。