arXiv:2602.04359v1 [math.NA] 4 Feb 2026

论线弹性的纯牵引问题：一种正则化公式及其稳健逼近

Ahsan Kaleem[1,2],Cristian Gebhardt[3],和Ignacio Romero[1,2]

[1]机械工程系，Universidad Polit´ecnica de Madrid，Jos´e Guti´errez Abascal，2，28006 马德里，西班牙[2]IMDEA材料研究所，Eric Kandel 2，28096 赫塔费，马德里，西班牙[3]地球物理研究所与卑尔根海上风电中心，卑尔根大学，All´egaten 70，5007 卑尔根，挪威

2026年2月5日

摘要

弹性力学的纯牵引问题在工程应用中频繁出现，其复杂性源于其解仅在相差（无穷小）刚体运动的意义下是唯一的。当采用有限元逼近该问题时，通常通过对离散模型施加精心选取的边界条件，或对变形施加全局约束，来确定其中一个解。然而，这两种策略都无法同时兼具简单性与计算效率。本文提出一种求解纯牵引问题的新方法，以克服现有局限。该方法建立在问题的正则化形式之上，其解被证明是唯一的，并收敛于原问题的最小范数解，而且可以无需额外自由度、以直接的方式用有限元进行逼近。此外，我们分析了求解域的逼近使离散问题的载荷成为非平衡、从而使问题不适定的情形。对此，我们提出一种正则化预测-校正有限元格式，以处理载荷的不相容性，并给出当网格尺寸与正则化参数趋于零时收敛于原诺伊曼问题之解的解。数值算例展示了所提方法对力学中出现纯牵引边界条件的代表性问题的有效性。

1 引言

在椭圆边值问题中，纯诺伊曼问题指的是求解域的边界上没有施加本质（狄利克雷）边界条件的情形。在弹性力学中，纯诺伊曼问题

通常称为牵引问题，因为它对应于所分析物体的边界不受位移约束、仅能在其上施加牵引力的情形。本文将重点分析小应变弹性中的非平凡牵引问题及其数值解，但要注意，其他椭圆型问题也存在这种情形，例如热传导、Saint-Venant 理论中的翘曲函数计算 [1],等。

从理论角度看，这类问题值得研究；从实际角度看，它们也同样重要，因为有些物理情形只能用纯诺伊曼问题准确描述，或者很容易近似为纯诺伊曼问题。例如，研究浸没在海中的物体的变形（没有任何连接海床的锚固装置）时，就需要将其视为纯诺伊曼问题。此外，置于平坦表面上且仅受平行于基础的力作用的弹性固体，其变形也可以恰当地近似为诺伊曼问题。

至少在理论上，求解诺伊曼问题并不存在本质上的困难。这个问题早已得到全面分析，关于其适定性的问题可见标准参考文献，例如 [2, 3, 4, 5]。研究表明，除了对问题边界的常规光滑性假设、对 Lam´e 系数的界限以及载荷的正则性要求外，施加的体积载荷和表面载荷还必须满足某些整体平衡条件。满足这些条件后，即可在有限能量位移空间（模去无穷小刚体运动）中证明解的存在性、唯一性以及对数据的连续依赖性。

虽然处理商空间在理论上不存在困难，但要设计能够逼近牵引问题的解的数值方法却会变得复杂。采用有限元或任何其他 Galerkin 型方法时，很容易找到由具有有限能量的函数构成的有限维空间，但直接处理等价类可能并不实际，甚至不可能。

为避免上述困难并继续求解纯牵引问题，有限元研究人员转而采用投影技术，即针对给定的离散化牵引问题，采用一种选择方案，从解的等价类中选出唯一一个函数。有限元逼近中通常采用的最简单技术，是约束最少数量的节点位移，使其禁止任何刚体运动，同时允许所有可能的变形。在二维问题中，这意味着约束三个节点位移；而在三维问题中，则必须将总共六个节点位移设为零。为了允许物体发生所有可能的变形，必须谨慎选择这些节点约束（例如参见 [6]）；这种策略通常并没有明确的定义 [7] ，并且可能破坏刚度基体的条件数[8, 9]。相反，这些思想的稳健推广要求识别物体的（无穷小）刚体模态，并对其施加惩罚 [10]。

求解纯牵引问题的另一种策略是所谓的惯性释放 方法 [11, 12]。这种数值技术已应用于多种商业有限元代码，其原理是将准静态纯牵引问题替换为一个辅助瞬态问题，并在所有刚体运动中加入惯性力。该方法假定将位移场分解为“弹性”位移和刚体位移，进而可以

通过这种分解简化平衡方程，但代价是需要改变刚度矩阵的结构 [12]。这种方法与求解半正定线性方程组的零空间 方法密切相关（例如，参见 [13]）。在所有这些情况下，都需要显式求出系统矩阵的核，从而仅针对解的相关分量得到一个定义明确的方程组。

在有限元解中，求解牵引问题并获得唯一解的第三种方法，是针对离散平衡方程使用专用代数求解器。这类问题的刚度矩阵具有非平凡的核，可以实现专用直接求解器以绕过奇异性 [14]；或者，也可以设计（迭代）Krylov 型方法，使其收敛到奇异线性方程组的最小范数解 [15, 16, 17]。

另一种可用于求得纯诺伊曼问题近似解的方法，是将其转化为带约束的鞍点问题，以确保对商空间的投影；Bochev 和 Lehoucq 的研究对此作了详细阐述 [8, 9]。该研究不仅为理解采用点约束消除刚体模态的影响提供了严谨的框架，还提出了一种约束正则化形式，将诺伊曼问题写成适用于近似求解和分析的形式。具体而言，他们提出的正则化公式不需要拉格朗日乘子，与本文所倡导的方法也有些相似之处。然而，在他们的研究中，需要引入一个权函数，它可能会耦合模型的所有自由度，从而破坏刚度矩阵的稀疏模式；最显而易见的选择会导致完全刚度矩阵。惩罚刚体运动的思路已有研究 [18, 19, 20], ，但这些解都会破坏刚度矩阵的稀疏性。

最后，Day [21] 给出了一种与本文所述方法密切相关的诺伊曼问题解法。该方法通过添加涉及解在区域边界上的迹的惩罚项，消除了诺伊曼问题的奇异性。此外，还提出了一种迭代解法，以缓解惩罚参数较小时刚度矩阵的病态问题。这一公式有一个不便之处——至少从实现角度来看如此：它需要计算边界积分，因此必须在网格中引入特殊的边界单元。

本文提出了一种求解弹性力学纯牵引问题的替代近似方法。其基本思路是对原诺伊曼问题的能量进行正则化，使新能量具有唯一的极小化解。关键在于，可以证明，当正则化参数趋于零时，扰动能量的极小化解会收敛到原始（非严格凸）诺伊曼能量的某个极小化解。更具体地说，正则化解收敛到纯牵引问题的最小 L^2 范数解。值得注意的是，正则化后的能量适用于数值离散，因此能够便捷地构造适定且收敛的牵引问题有限元离散，无需使用拉格朗日乘子，也无需改变离散诺伊曼问题刚度矩阵的稀疏模式。

尝试求解纯牵引问题的近似解时，

分析域会采用例如多面体网格进行离散。如果原始区域本身不是多面体，即使网格尺寸如何变化，也可能无法由网格精确表示。这些误差对诺伊曼问题至关重要，因为离散域上的载荷可能不相容，严格来说，该问题也就不再适定。在文章的最后一部分，我们分析了这种情况，并指出可以提出一种新的预测-校正方法，该方法基于正则化公式，即使载荷变得“略微”非平衡，也能得到诺伊曼问题的收敛近似。

本文其余部分的结构如下。第2节在尽可能简单的设定下，阐述本文所分析方法的理论依据。随后，从第3节所述的一般问题表述出发，第4节提出一个正则化 Neumann 问题；如第5节所示，该问题的解趋近于原问题的解。这一分析结果为简单且一致的近似格式奠定了基础：第6节针对 Neumann 问题提出此类格式，第7节则针对略微非平衡的问题提出此类格式。最后，第8节通过三个数值算例展示所提出方法的性质。本文在第9节总结主要结果并给出一些结语。

记号：按照力学领域的惯例，粗体符号表示向量或张量。在集合 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 上平方可积（勒贝格意义下）的函数空间记作 $L^2(\Omega)$；分量属于$L^2(\Omega)$的向量场 $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 属于 $[L^2(\Omega)]^d$。类似地，属于 $L^2(\Omega)$ 且其梯度属于 $[L^2(\Omega)]^d$ 的函数构成希尔伯特空间 $H^1(\Omega)$。最后，定义在 Ω 上且分量属于 $H^1(\Omega)$的向量场属于集合 $[H^1(\Omega)]^d$。在所有估计中，符号 C 表示一个泛型常数，它可以取不同的值，但不依赖于网格尺寸 h 或正则化参数 η。类似地，记号 $a \lesssim b$ 可用于替代 $a \leq C\, b$，其中 C 是具有前述性质的常数。

2 动机

作为动机，我们考虑一个简单的力学系统，它可以作为纯诺伊曼问题来分析，并回顾几种求解该问题的方式。尽管问题本身很简单，但在这个简单的情境中，已经可以看出更复杂问题中的一些困难和求解策略。

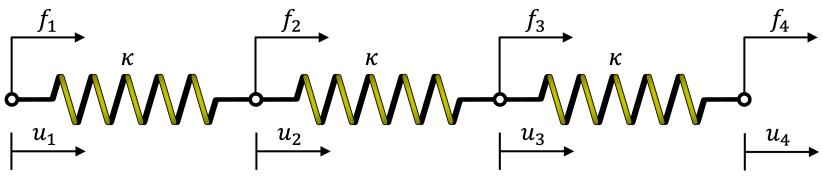

图 1：简单的力学问题。

具体而言，我们考虑一个由 $N = 4$ 个节点组成、由常数为 $\kappa > 0$ 的 $N - 1$ 个弹性弹簧连接的结构，如图 1 所示，该结构受到

作用于节点的力 $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}^T$。这些节点只能沿水平方向移动，其对应的位移汇集于向量 $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T$ 中。

该系统具有四个自由度，没有位移（狄利克雷）边界条件，其势能函数为

$$V(\boldsymbol{u}) := \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\kappa}{2} (u_{k+1} - u_k)^2 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} \ , \tag{1}$$

其中，此后我们均用点号表示相同维度向量的标量积。若纯牵引问题存在解，或者更确切地说，存在无穷多个解，则外载荷 $\boldsymbol{f}$ 必须满足平衡条件，即$\sum f_i = 0$。具体而言，设 $-f_1 = f_4 = f$，$f_2 = f_3 = 0$，其中 f为某个标量。那么，任何满足 $u_{k+1} - u_k = f/\kappa$且$1 \le k \le N-1$ 的位移向量 $\boldsymbol{u}$都是该问题的一个解。

要选取 该问题的无穷多个解中的一个，只需任选一个节点 $1 \le J \le 4$ 并施加 $u_J = 0$即可。此外，所有这些解都是势能函数的极小化解，因此满足最优性条件$\nabla V(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$，或者等价地，

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 2\kappa & -\kappa \\ 0 & 0 & -\kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} \ . \tag{2}$$

该问题的刚度矩阵当然是奇异的，这预示着该问题及类似问题的数值解可能存在困难。我们可以通过施加例如平均位移必须等于零这一条件，从问题的无穷多个解中选取一个解。为了解这个受约束问题，我们必须求出拉格朗日函数的鞍点

$$L(\boldsymbol{u}, \lambda) := V(\boldsymbol{u}) + \lambda \langle \boldsymbol{u} \rangle \ , \tag{3}$$

其中 $\langle \boldsymbol{u} \rangle := (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/4$。这个新问题的最优性条件为

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa & 0 & 0 & 1/4 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 & 1/4 \\ 0 & -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 1/4 \\ 0 & 0 & -\kappa & \kappa & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \end{Bmatrix} \ , \tag{4}$$

其唯一解为

$$u_1^\lambda = -\frac{3f}{2\kappa}, \qquad u_2^\lambda = -\frac{f}{2\kappa}, \qquad u_3^\lambda = \frac{f}{2\kappa}, \qquad u_4^\lambda = \frac{3f}{2\kappa}, \qquad \lambda = 0 \ . \tag{5}$$

遵循这一方法，我们可以将一个具有无穷多个解的问题转化为另一个带有额外拉格朗日乘子的問題，同时具有唯一解。事实上，我们可以将平均值 $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ 约束为任意其他值，并且仍然得到唯一解。

或者，为了避免引入新的拉格朗日乘子，我们可以寻找一个使函数达到最小值的惩罚解

$$V_\alpha(\boldsymbol{u}) := V(\boldsymbol{u}) + \frac{\alpha}{2} \langle \boldsymbol{u} \rangle^2 \ , \tag{6}$$

其中参数 α 为某个较大的正数。该函数的最优性条件为

$$\begin{bmatrix} \kappa+\alpha & -\kappa+\alpha & \alpha & \alpha \\ -\kappa+\alpha & 2\kappa+\alpha & -\kappa+\alpha & \alpha \\ \alpha & -\kappa+\alpha & 2\kappa+\alpha & -\kappa+\alpha \\ \alpha & \alpha & -\kappa+\alpha & \kappa+\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} , \tag{7}$$

其采用正则刚度矩阵，且其解再次

$$u_1^\alpha = -\frac{3f}{2\kappa}, \qquad u_2^\alpha = -\frac{f}{2\kappa}, \qquad u_3^\alpha = \frac{f}{2\kappa}, \qquad u_4^\alpha = \frac{3f}{2\kappa}. \tag{8}$$

我们已经看到，拉格朗日乘子法和罚方法都能消除刚度矩阵的奇异性，从而有效地为纯牵引问题的求解提供途径。然而，这两种策略都会破坏刚度矩阵的稀疏性。事实上，在拉格朗日乘子法中，矩阵的带宽从 2 增至 N；而罚方法中的矩阵则完全稠密。对于这个说明性示例，带宽大小和／或刚度矩阵的稀疏性完全无关紧要，但对于具有许多自由度的工程问题，这两种解的计算代价极高，因此并不实用。

不过，还有另一种途径，它依赖于如下形式的扰动势能

$$V_\eta(\boldsymbol{u}) := V(\boldsymbol{u}) + \frac{\eta}{2}\|\boldsymbol{u}\|_2^2 , \tag{9}$$

其中，η是一个较小的 正参数，$\|\cdot\|_2$表示欧几里得范数。该正则化函数的最优性条件为

$$\begin{bmatrix} \kappa+\eta & -\kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 2\kappa+\eta & -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 2\kappa+\eta & -\kappa \\ 0 & 0 & -\kappa & \kappa+\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} , \tag{10}$$

很容易验证，此时刚度矩阵是正则的。该矩阵方程的唯一解为

$$u_1^\eta = -\frac{3f}{2\,\kappa}\,\frac{1+\frac{\eta}{3\kappa}}{1+\frac{2\eta}{\kappa}+\frac{\eta^2}{2\kappa^2}} , \tag{11a}$$

$$u_2^\eta = -\frac{f}{\kappa}\,\frac{1+\frac{\eta}{3\kappa}}{1+\frac{2\eta}{\kappa}+\frac{\eta^2}{2\kappa^2}} , \tag{11b}$$

$$u_3^\eta = \frac{f}{\kappa}\,\frac{1+\frac{\eta}{3\kappa}}{1+\frac{2\eta}{\kappa}+\frac{\eta^2}{2\kappa^2}} , \tag{11c}$$

$$u_4^\eta = \frac{3f}{2\,\kappa}\,\frac{1+\frac{\eta}{3\kappa}}{1+\frac{2\eta}{\kappa}+\frac{\eta^2}{2\kappa^2}} . \tag{11d}$$

与正则化势能相对应的解一致地逼近解 $\boldsymbol{u}^\lambda \equiv \boldsymbol{u}^\alpha$，即

$$\lim_{\eta\downarrow 0} \boldsymbol{u}^\eta = \boldsymbol{u}^\lambda = \boldsymbol{u}^\alpha , \tag{12}$$

同时还满足 $\langle \boldsymbol{u}^\eta \rangle = 0$。对于这个简单问题，正则化解相对于零均值精确解的误差可以显式计算

$$\|\boldsymbol{u}^\eta - \boldsymbol{u}^\lambda\|_2 = \frac{\eta\,|f|\,\sqrt{5\,\eta^2 + 34\,\eta\,\kappa + 58\,\kappa^2}}{\kappa\,(\eta^2 + 4\,\eta\,\kappa + 2\,\kappa^2)}\ . \tag{13}$$

这一结果表明，位移 $\boldsymbol{u}^\eta$ 可以任意接近 $\boldsymbol{u}^\lambda$。关键的是，与基于拉格朗日乘子或惩罚的方法不同，式（10）的正则刚度矩阵与式（2）的（奇异）刚度矩阵具有相同的稀疏模式。这一事实表明，正则化（9）可用于求解纯牵引问题的近似解，且额外成本可以忽略不计。在本文余下部分，我们将证明，正则化的思想确实可以推广到（小应变）弹性问题，并可用于高效的有限元近似。

3 弹性力学的纯诺伊曼问题

本文研究小应变弹性中的纯诺伊曼问题的解。为定义该问题，考虑一个区域 $\Omega \in \mathbb{R}^d$，其中 $d = 2$ 或 3，边界为 $\partial\Omega$。给定体积力场 $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 和表面牵引力场 $\boldsymbol{t} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$，我们寻求位移场 $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$，使其势能最小：

$$V(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega W(\nabla^s \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\,dV - \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\,dV - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\,dA. \tag{14}$$

在此表达式中，$\boldsymbol{x}$ 表示Ω上的点，∇^s 是对称梯度算子，W 是储存能密度函数。

无穷小刚体运动在下面的推导中发挥着关键作用。为完整起见，我们回顾这一基本概念及相关的相容性 条件。

定义 3.1。令 $\mathcal{R}$ 为无穷小刚体运动的空间，即形如 $\boldsymbol{u} \in [C^\infty(\Omega)]^d$ 的向量场

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{x}\ , \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$，而 $\boldsymbol{\beta}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$上的反对称二阶张量。

定义 3.2。令 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为 $[L^2(\Omega)]^d$中的两个向量场。若存在刚体运动 $\boldsymbol{\rho}$ 使得，则称它们是（无穷小）刚体等价的，并记为 $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$。

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{v}\|_{[L^2(\Omega)]^d} = 0\ . \tag{16}$$

这是一种等价关系，将定义在Ω上的函数空间划分为等价类。我们将 $\mathcal{S}$ 定义为 $[H^1(\Omega)]^d$ 模去刚体运动后的商空间，并使用记号 $[\boldsymbol{u}] \in \mathcal{S}$ 表示 $[H^1(\Omega)]^d$ 中与 $\boldsymbol{u}$ 刚体等价的向量场。

备注 1。

由于所有无穷小刚体运动构成了$[H^1(\Omega)]^d$的一个闭子空间，因此 $\mathcal{S}$ 相对于以下范数成为一个赋范空间

$$\|[\boldsymbol{u}]\|_{\mathcal{S}} = \inf_{\boldsymbol{v}\in[\boldsymbol{u}]} \|\boldsymbol{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d}. \tag{17}$$

$\mathcal{R}$是有限维空间。因此， $\mathcal{R}$ 上的所有范数都是等价的。

定义 3.3。 设 $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^d$ 是体积力的向量场，$\boldsymbol{t}: \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$ 是定义在 Ω 边界上的牵引力向量场。若该载荷系统处于平衡 或相容，则

$$\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\, dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\, dA = \mathbf{0}\ , \tag{18}$$

对所有刚体运动 $\boldsymbol{\rho}$均成立。若 $d = 3$，则前述条件等价于

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\, dA &= \mathbf{0}\ , \\ \int_\Omega \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\, dA &= \mathbf{0}\ . \end{aligned} \tag{19}$$

经典弹性问题已在文献 [2, 5]中得到充分分析。下面总结有关诺伊曼问题适定性的主要结果:

定理 3.4 ([22])。 设Ω 是 $\mathbb{R}^d$中的开有界集。设 $\partial\Omega$的边界 Ω是 *Lipschitz* 的，并考虑一个储能函数为 $W: \mathit{Sym}^{d\times d} \to \mathbb{R}$的均匀各向同性弹性体

$$W(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}[\boldsymbol{\epsilon}])^2 + \mu\, \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}\ , \tag{20}$$

其中$\mathrm{tr}[\cdot]$是迹算子， λ 和 μ 是满足λ、 $\mu > 0$的 *Lam ́e* 常数，冒号积表示二阶张量的缩并。设 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 为相容载荷。则，纯牵引问题存在唯一解 $[\boldsymbol{u}] \in \mathcal{S}$，该解连续依赖于载荷，并且对应于能量 $V: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$的极小化解。

与式 (14) 的极小化相对应的弱形式是求解 $[\boldsymbol{u}] \in \mathcal{S}$，使得

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v})\ , \tag{21}$$

对所有 $[\boldsymbol{v}] \in \mathcal{S}$，其中

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_\Omega (\mu \nabla^s \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla^s \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\, dV\ , \tag{22a}$$

$$\ell(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, dA\ . \tag{22b}$$

根据式 (19)，对于任意 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}$，有 $\ell(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$。此外，注意到 $\nabla^s\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$，因此

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\rho}) = a(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{v}) = 0\ , \tag{23}$$

对于任意的 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}$ 和位移向量场 $\boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^d$。

寻求诺伊曼问题之解的数值近似的主要困难，恰恰在于从寻求解的空间中分解出 $\mathcal{R}$ 。例如，在有限元分析中，这种投影通常是通过对每个诺伊曼问题引入精心选择的边界条件来实现的，这些边界条件从解中去除刚体运动，从而有效地从商空间 $[H^1(\Omega)]^d/\mathcal{R}$中选出单一的位移场。这些约束必须在不无意引入任何不期望应变的情况下施加于解上，因此该过程是非系统性的且容易出错。

4 正则化诺伊曼问题

如第3节所述，弹性力学的诺伊曼问题有唯一解，它是希尔伯特空间中刚体等价函数的一个等价类。鉴于我们将构造该问题的有限元近似，现提出一个通过正则化原始诺伊曼问题得到的新边值问题。这个新公式建立在标准希尔伯特空间上，因此其伽辽金离散化十分直接。

所求向量场 $\boldsymbol{u}_\eta \in [H^1(\Omega)]^d$ 使正则化势能达到最小

$$V_\eta(\boldsymbol{v}) := V(\boldsymbol{v}) + \frac{\eta}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2_{[L^2(\Omega)]^d} \ , \tag{24}$$

对于某个较小的 $\eta > 0$。或者， $\boldsymbol{u}_\eta \in [H^1(\Omega)]^d$ 是满足下式的函数

$$a_\eta(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v}) \ , \tag{25}$$

对所有 $\boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^d$均成立，其中 $a_\eta : [H^1(\Omega)]^d \times [H^1(\Omega)]^d \to \mathbb{R}$ 定义为

$$a_\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \eta\,(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \ , \tag{26}$$

并且我们引入了 L^2-乘积

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, dV \tag{27}$$

在 $[L^2(\Omega)]^d$ 中的向量场之间。正则化 Neumann 问题显然与本文关注的纯牵引问题相似。在研究这两个问题的解之间的关系之前，我们先指出以下基本结果，其证明推迟至第5节

定理 4.1。 对于每个 $\eta > 0$，泛函 V_η 有唯一的极小化解$\boldsymbol{u}_\eta \in [H^1(\Omega)]^d$ ，且该解随载荷连续变化。等价地，变分问题 (25) 是适定的。

注释 2。

1. 通过正则化来研究纯牵引问题的解，这一思路并不新鲜。例如，Fichera [2]的经典著作中就采用了这种技术。

2. 定理 4.1 的关键在于，将问题从纯诺伊曼情形转为正则化公式后，寻求解的函数空间变成了希尔伯特空间 $[H^1(\Omega)]^d$，而不再是商空间。从近似的角度看，这一看似细微的变化却有着重大影响：虽然没有简便的方法来近似 $\mathcal{S}$ 中的等价类，但正则化问题的近似却轻而易举。

3. 值得注意的是，定理 4.1 并未说明解对 η的依赖关系。事实上，对于一般载荷，解的界并非关于 η一致。我们将在后文细化这一结果。就第2节的动机示例而言，这一定理只是推广了式 (10) 中刚度矩阵是正则的这一事实，并未对其条件数作任何说明。

4. 值得注意的是，除非问题中出现的所有量都已归一化，否则正则化参数 η 必须具有 F/L^{d+1}的量纲。在数值算例中，采用以下写法或许更方便:

$$\eta = \bar{\eta}\frac{\mu}{L^{d-1}} \ , \tag{28}$$

其中， L是物体的特征长度， $\bar{\eta}$ 是无量纲的。在第5节中，我们将假设所有方程均为无量纲形式。这使得界和估计的推导更加简便。

我们声称正则化问题 (25) 是适定的，但它与原始诺伊曼问题之间的关系尚未阐明。正如我们将在第5节中证明的那样，这两个问题的解密切相关，并且当 $\eta \to 0$ 时，正则化解收敛到原问题的一个解。实际上，我们提出了一个经过修改的问题，它易于进行数值近似，而且其解可以任意接近纯牵引问题的解。

5 分析

本节将证明正则化问题是适定的，且其解与纯牵引问题的解有关。具体而言，当正则化参数趋于零时，极限解与诺伊曼问题的一个特解一致。这一重要结果表明，通过一个小扰动求解正则化问题，可以按所需的精度求解原问题。在本文余下部分，我们假设 $d = 3$。这一选择简化了代数运算，使我们能够在 $\mathbb{R}^3$ 中使用标准向量积。通过适当重新定义反对称张量对向量的作用，所有结果均可推广至二维情形。

首先，设 $\boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^d$ 为任意向量场，并定义

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \, dV \ , \qquad \{\boldsymbol{v}\} := \boldsymbol{J}^{-1} \int_\Omega (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\Omega) \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \, dV \ , \tag{29}$$

with

$$\boldsymbol{x}_\Omega := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \boldsymbol{x}\, dV\ , \qquad \boldsymbol{J} := \int_\Omega (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\Omega)\otimes(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\Omega)\, dV\ . \tag{30}$$

为方便起见，我们引入以下概念：

定义 5.1. 若向量场 $\boldsymbol{v}\in[L^2(\Omega)]^d$ 属于 $\mathcal{C}$，即属于中心化位移空间，则

$$\langle \boldsymbol{v}\rangle = \{\boldsymbol{v}\} = \boldsymbol{0}\ . \tag{31}$$

这一概念与无穷小刚体运动空间的定义密切相关，以下结果说明了这一点：

引理 5.2. 向量场 $\boldsymbol{u}\in[L^2(\Omega)]^d$ 与无穷小刚体运动空间正交，当且仅当它是中心化的。因此，空间 $[L^2(\Omega)]^d$ 是以下正交直和

$$[L^2(\Omega)]^d = \mathcal{C}\oplus\mathcal{R}\ , \tag{32}$$

并且每个 $\boldsymbol{u}\in[L^2(\Omega)]^d$ 都可以唯一表示为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}_\perp(\boldsymbol{x})\ , \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{u}_0\in\mathcal{C}$、 $\boldsymbol{u}_\perp\in\mathcal{R}$ 和 $(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_\perp)=0$。

证明. 若向量场 $\boldsymbol{u}\in[L^2(\Omega)]^d$ 与任意无穷小刚体运动正交，则

$$0 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{x}) \tag{34}$$

对任意 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}$。取 $\boldsymbol{\beta}\equiv\boldsymbol{0}$，可得

$$0 = \int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\alpha}\, dV = \boldsymbol{\alpha}\cdot\int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, dV = \boldsymbol{\alpha}\cdot|\Omega|\,\langle\boldsymbol{u}\rangle\ . \tag{35}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意的，且 $|\Omega|>0$， $\langle\boldsymbol{u}\rangle$ 必须恒等于零。类似的论证表明， $\{\boldsymbol{u}\}$ 也必须为零。注意到对于任意 $\boldsymbol{\alpha}$， $\boldsymbol{\beta}$， $0=\boldsymbol{\alpha}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}\times\{\boldsymbol{u}\}$，即可得到反向推论。 □

引理 5.3. 设 $\boldsymbol{u}\in[H^1(\Omega)]^d$ 是诺伊曼问题 (21) 的任意一个解。那么，定义函数 $\boldsymbol{u}_0\in[H^1(\Omega)]^d$ 如下：

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \langle\boldsymbol{u}\rangle - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\Omega)\times\{\boldsymbol{u}\} \tag{36}$$

属于 $[\boldsymbol{u}]$，因此也是诺伊曼问题的一个解。此外，它是中心化的，并且在 $[\boldsymbol{u}]$ 中所有函数里具有最小的 L^2 范数。

证明。 函数 $\boldsymbol{u}_0$ 满足方程（31），且差值 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0=\langle\boldsymbol{u}\rangle+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\Omega)\times\{\boldsymbol{u}\}$ 是一个无穷小刚体运动。因此 $\boldsymbol{u}\sim\boldsymbol{u}_0$，而 $\boldsymbol{u}_0$ 是诺伊曼问题的一个解。此外，经过简单推导可得

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{[L^2(\Omega)]^d} = \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{[L^2(\Omega)]^d} + |\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2\,|\Omega|^2 + \{\boldsymbol{u}\}\cdot\boldsymbol{J}\,\{\boldsymbol{u}^*\} \geq \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{[L^2(\Omega)]^d}\ , \tag{37}$$

由于 $|\Omega|>0$，且惯性矩阵 $\boldsymbol{J}$ 为正定。 □

证明正则化问题适定性的关键结果由 Korn 型不等式 [4] 给出：

引理 5.4。 设 $\boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ 为中心化的。那么，

$$\|\nabla^s \boldsymbol{v}\|_{[L^2(\Omega)]^d} \geq C \, \|\boldsymbol{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \, , \tag{38}$$

对某个常数 C。

证明。引入映射 $|||\boldsymbol{v}||| := \|\nabla^s \boldsymbol{v}\|_{[L^2(\Omega)]^d}$。Korn 第二不等式表明，映射 $\boldsymbol{v} \mapsto (|||\boldsymbol{v}|||^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2_{[L^2(\Omega)]^d})^{1/2}$ 是空间 $[H^1(\Omega)]^d$上的一个范数，且与标准 H^1–范数等价。因此，要证明界（38），只需证明

$$|||\boldsymbol{v}||| \geq C \, \|\boldsymbol{v}\|_{[L^2(\Omega)]^d} \, , \tag{39}$$

对于所有中心化的 $\boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ 。为此，我们首先注意到，中心化函数与空间 $\mathcal{R}$正交，而该空间恰好是算子 ∇^s的核，因此满足 $|||\boldsymbol{v}||| = 0$ 的唯一中心化函数是 $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{0}$。接着，若（39）不成立，则存在一个由中心化函数$\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成的序列，使得

$$|||\boldsymbol{v}_n||| \to 0 \, , \qquad \|\boldsymbol{v}_n\|_{[L^2(\Omega)]^d} = 1 \, . \tag{40}$$

再次，由Korn第二不等式可知，序列 $\{\boldsymbol{v}\}_{n=1}^{\infty} \in [H^1(\Omega)]^d$ 有界，因此存在一个仍记为 $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$的子序列以及一个中心化函数$\boldsymbol{v}$ ，使得 $\boldsymbol{v}_n \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ 于 $\in [H^1(\Omega)]^d$中。利用弱极限的性质，

$$0 = \lim_{n\to\infty} |||\boldsymbol{v}_n||| \geq \liminf_{n\to\infty} |||\boldsymbol{v}_n||| \geq |||\boldsymbol{v}||| \, , \tag{41}$$

因此， $|||\boldsymbol{v}||| = 0$ ，并且由本证明的第一个结果， $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{0}$。根据Rellich嵌入定理（见 [23, 命题4.4]）以及有限笛卡尔积保持紧嵌入这一事实， $[H^1(\Omega)]^d$ 紧嵌入于 $[L^2(\Omega)]^d$ ，从而 $\boldsymbol{v}_n \to \boldsymbol{0}$ 于 $[L^2(\Omega)]^d$中，这与$\|\boldsymbol{v}_n\|_{[L^2(\Omega)]^d} = 1$的假设相矛盾，从而证明了引理的第一个结果。由此，第二个界的证明是直接的。详见 [24] 。

□

引理 5.4 是证明正则化 Neumann 公式稳定性所需的核心结果。利用该引理，我们可以证明以下结果，从而简化分析

引理 5.5。 函数 $|||\cdot|||$ 是 $[H^1(\Omega)]^d \cap \mathcal{C}$ 上的一个范数，与 $[H^1(\Omega)]^d$ 上的标准范数等价。此外，映射

$$|||\boldsymbol{v}|||_\eta := \left(a_\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\right)^{1/2} \tag{42}$$

定义在 $[H^1(\Omega)]^d$ 上，满足

$$|||\boldsymbol{v}|||_\eta \lesssim \max(1, \sqrt{\eta}) \, \|\boldsymbol{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \, . \tag{43}$$

此外，如果 $\boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^d \cap \mathcal{C}$，则

$$\|\boldsymbol{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim |||\boldsymbol{v}|||_\eta \, . \tag{44}$$

因此，加权范数 $|||\cdot|||_\eta$ 等价于 $[H^1(\Omega)]^d$–范数，但并非在 η上是一致等价的。

正则化问题 (25) 的解是中心化的，因为根据关系式 (18) 和 (23)，对于所有 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}$ 和 $\eta > 0$,

$$(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\eta} \left(\ell(\boldsymbol{\rho}) - a(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{\rho}) \right) = 0 \ . \tag{45}$$

因此，我们可以利用界（38）证明定理 4.1：

定理 *4.1* 的证明。 变分方程（25）的解 $\boldsymbol{u}_\eta$ 是中心化的，因此

$$\|\boldsymbol{u}_\eta\|^2_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim |||\boldsymbol{u}_\eta|||^2_\eta \lesssim \|\ell\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \|\boldsymbol{u}_\eta\|_{[H^1(\Omega)]^d} \ , \tag{46}$$

因此

$$\|\boldsymbol{u}_\eta\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \|\ell\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \ . \tag{47}$$

□

如定理 4.1 的陈述所示，式（47）表明，正则化解在 η 中一致稳定。这一点取决于载荷处于平衡状态这一事实。

接下来，我们证明所考虑的连续问题的关键结果。我们将证明，正则化变分问题的解接近于求解诺伊曼问题的函数等价类中的一个成员。更确切地说，正则化解 $\boldsymbol{u}_\eta$ 接近于 $\boldsymbol{u}_0 \in [\boldsymbol{u}]$，即具有最小 L^2 范数的解函数，并且两个解之间的距离随正则化参数趋于零。

定理 5.6。 设 $[\boldsymbol{u}] \in \mathcal{S}$ 为诺伊曼问题 （21）的解，且$\boldsymbol{u}_\eta \in [H^1（\Omega）]^d$ 为正则化 *Neumann* 问题 （25）的解。则存在一个与 η 无关的常数 C，使得

$$\|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \eta \ \|\ell\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \ , \tag{48}$$

其中 $\boldsymbol{u}_0$ 在式 (36) 中定义。

证明。 令 $\boldsymbol{u}_0$ 为引理 5.3 中定义的位移场。从式 (25) 中减去式 (21)，并令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0$，可得

$$a(\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0) + \eta(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0) = 0 \ . \tag{49}$$

由于 $\boldsymbol{u}_\eta$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 均为中心化的，它们的差也如此。因此，我们可以应用引理 5.4 得到

$$\|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0\|^2_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim |||\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0|||^2 \lesssim \eta \ \|\boldsymbol{u}_\eta\|_{[L^2(\Omega)]^d} \ \|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0\|_{[L^2(\Omega)]^d} \ . \tag{50}$$

我们可以化简此方程，得到

$$\|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_0\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \eta \ \|\boldsymbol{u}_\eta\|_{[L^2(\Omega)]^d} \ . \tag{51}$$

利用界 (47)，我们完成证明。 □

定理 5.6 表明，不必求解其解为 H^1中一类刚体等价函数的诺伊曼问题，而可以求解扰动问题——其解现在是 H^1中的一个函数。用扰动问题代替原问题，会在解中引入一个与扰动参数同阶的误差。值得注意的是，正则化问题是适定的，且与 η无关。由于扰动问题是在希尔伯特空间上提出的，因此可以直接对其建立有限元近似，如下所示。

需要强调的是，界（48）依赖于外部载荷满足相容条件（19）这一事实，正如我们在证明中所示。若不具备这一性质，解 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}_\eta$ 未必彼此接近，该方法也会失效。

6 有限元近似

在证明正则化问题（25）在 $[H^1(\Omega)]^d$ 中适定之后，我们将分析其有限元近似。利用 C´ea 引理 [22] ，很容易证明，该 Galerkin方法对正则化解 $\boldsymbol{u}_\eta$ 具有最优逼近性质，并继承连续问题的稳定性。本文最后的结果表明，当网格尺寸和正则化参数均趋于零时，有限元解收敛到诺伊曼问题的最小 L^2 范数解。

为此，我们首先引入纯牵引问题的有限元近似。具体而言，设 $\mathcal{T} = \{\Omega_e, e \in \mathcal{E}\}$ 是区域 Ω 到有限元 Ω_e 的一个正规划分，并定义一个函数有限元空间

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \boldsymbol{u}^h \in H^1(\Omega),\ \boldsymbol{u}^h\big|_{\Omega_e} \in R_k \right\} , \tag{52}$$

其中， R_k 是定义在参考单元 K 上的多项式空间，或是张量积ˆ多项式经仿射变换得到的空间，阶数为 k 。正则化问题的有限元解可通过以下方式获得:

$$\boldsymbol{u}_\eta^h = \arg \min_{\boldsymbol{w}^h \in \mathcal{V}^h} V_\eta(\boldsymbol{w}^h) , \tag{53}$$

也可以作为满足以下条件的唯一 $\boldsymbol{u}_\eta^h \in \mathcal{V}^h$:

$$a(\boldsymbol{u}_\eta^h, \boldsymbol{w}^h) + \eta\, (\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{w}^h) = \ell(\boldsymbol{w}^h) , \tag{54}$$

对所有 $\boldsymbol{w}^h \in \mathcal{V}^h$ 均成立。有限元函数空间包含无穷小刚体运动，并且，与式（45）相同，我们有

$$(\boldsymbol{u}_\eta^h, \boldsymbol{\rho}^h) = \frac{1}{\eta} \left(\ell(\boldsymbol{\rho}^h) - a(\boldsymbol{u}_\eta^h, \boldsymbol{\rho}^h) \right) = 0 . \tag{55}$$

于是，我们可以重现定理 4.1 的证明，从而得出有限元正则化问题是适定的，且关于 η 一致，即:

$$\|\boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \|\ell\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}. \tag{56}$$

本工作的主要结果由下一个定理给出，该定理保证所提出的有限元离散收敛到牵引问题的一个解，即范数最小的那个解:

定理 6.1。 设 $[\boldsymbol{u}]$ 为诺伊曼问题 (21) 的解， $\boldsymbol{u}_\eta^h$为 (53)的解。此外，假设解 $\boldsymbol{u}_\eta$ 满足正则性估计

$$|\boldsymbol{u}_\eta|_{[H^{k+1}(\Omega)]^d} \lesssim \|\ell\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \tag{57}$$

对某个常数 C。于是，得到如下误差估计

$$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim (\eta + h^k)\|l\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \ , \tag{58}$$

其中， $\boldsymbol{u}_0$ 是 $[\boldsymbol{u}]$ 中范数最小的元素。

证明。 为此，我们首先注意到，由三角不等式可得

$$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \leq \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \, . \tag{59}$$

右端的第一项可利用式 (48) 进行估计。标准有限元先验 估计为

$$\|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim h^k \ |\boldsymbol{u}_\eta|_{[H^{k+1}(\Omega)]^d} \ . \tag{60}$$

结合式 (57) 和式 (60)，定理得证。 □

该结果表明，对于松弛参数 η 的任意固定取值，有限元方法都能最优收敛到松弛问题的解。此外，有限元离散保留了正则化解向牵引问题精确解的收敛性；通过将 h 和 η 选取得任意小，有限元解与所求解之间的误差便趋于零。注意，若希望网格加密时有限元离散收敛到 Neumann 解 $\boldsymbol{u}_0$ ，则必须要求

$$\lim_{\eta, h \to 0} \frac{\eta}{h^k} = 0 \ . \tag{61}$$

6.1 迭代解

从代数角度看，本节提出的正则化解的作用是用正则刚度替换纯诺伊曼表述中的奇异刚度，从而使诺伊曼问题可解并具有唯一解。然而，正则化问题中刚度矩阵的条件数会随 $\eta \to 0$ 恶化。这一点应予以考虑，因为浮点计算的精度有限，病态基体在实践中可能导致错误的解。

这一方面已由 Dai [21]，仔细分析，其中提出了一种与第4节所介绍方法类似的正则化方法。将该工作的思想应用于我们的方法，我们可以提出一种迭代解，从而避免正则化解的病态问题。

定理 6.2. 考虑一个纯诺伊曼问题以及通过求解得到的有限元解序列 $\{\boldsymbol{u}_h^k\}_{k=0}^\infty$

$$\begin{aligned} a_\eta(\boldsymbol{u}_h^0, \boldsymbol{v}_h) &= \ell(\boldsymbol{v}_h) \ , \\ a_\eta(\boldsymbol{u}_h^{k+1}, \boldsymbol{v}_h) &= \ell(\boldsymbol{v}_h) + \eta(\boldsymbol{u}_h^k, \boldsymbol{v}_h) \ , \end{aligned} \tag{62}$$

对所有 $\boldsymbol{v}_h \in \mathcal{V}^h$。令 α 表示双线性形式 $a_\eta(\cdot,\cdot)$的强制性常数。当 $k \to \infty$ 时，迭代方法 (62) 收敛到离散 *Neumann* 问题的解 $\boldsymbol{u}_h$ ，对所有 $0 < \eta < 1/\alpha$均成立。

证明。 考虑两个连续迭代步的解 $k, k+1$ ，其中$k>0$。然后，将该方法的方程相减可得

$$a_\eta(\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1},\boldsymbol{v}_h)=\eta\left(\boldsymbol{u}_h^{k+1}-\boldsymbol{u}_h^{k},\boldsymbol{v}_h\right)\,. \tag{63}$$

然后，根据双线性形式 $a_\eta(\cdot,\ \cdot)$ 的强制性，我们有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1}\|_{[H^1(\Omega)]^d} &\le \alpha\,\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1}\right|\!\right|\!\right|_\eta^2\\ &=\alpha\,a_\eta(\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1},\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1})\\ &=\alpha\,\eta\,(\boldsymbol{u}_h^{k+1}-\boldsymbol{u}_h^{k},\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1})\\ &\le \alpha;\eta\,\|\boldsymbol{u}_h^{k+1}-\boldsymbol{u}_h^{k}\|_{[H^1(\Omega)]^d}\,\|\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1}\|_{[H^1(\Omega)]^d}\,.\end{aligned} \tag{64}$$

化简此关系并选取 $\eta<1/\alpha$，我们得到

$$\|\boldsymbol{u}_h^{k+2}-\boldsymbol{u}_h^{k+1}\|_{[H^1(\Omega)]^d}<\|\boldsymbol{u}_h^{k+1}-\boldsymbol{u}_h^{k}\|_{[H^1(\Omega)]^d}\,, \tag{65}$$

这证明映射 $\boldsymbol{u}_h^k\mapsto\boldsymbol{u}_h^{k+1}$ 是压缩的。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的 $\boldsymbol{u}_h$，使得 $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_h^k\|_{[H^1(\Omega)]^d}=0$。 □

注意，迭代方法（62）也可以写成:

$$\begin{aligned} a_\eta(\boldsymbol{u}_h^0,\boldsymbol{v}_h)&=\ell(\boldsymbol{v}_h)\,,\\ (\frac{\boldsymbol{u}_h^{k+1}-\boldsymbol{u}_h^{k}}{\eta^{-1}},\boldsymbol{v}_h)+a(\boldsymbol{u}_h^{k+1},\boldsymbol{v}_h)&=\ell(\boldsymbol{v}_h)\,,\end{aligned} \tag{66}$$

这就是抛物型问题的后向欧拉离散。因此，该迭代方法可以解释为一种离散演化，由于耗散作用，它收敛于平衡的诺伊曼解。

7 非平衡载荷

第5节和第6节讨论了纯诺伊曼问题，即针对载荷完全平衡的问题求解，或求其近似解。实际中，求解域的空间离散往往会引入误差，从而破坏载荷相容性。严格来说，这些载荷（略微）非平衡的问题并非纯牵引问题，因此没有解。然而，要获得纯牵引问题的近似解，离散化可能是唯一途径。接下来，我们将研究如何使用第4节的方法，确保诺伊曼问题的近似解收敛，即使离散化破坏了载荷的相容性。

离散化破坏诺伊曼问题相容性的一个常见情形，首先仅仅是由网格的使用所导致的。这样一来，区域 Ω 往往会被替换为多面体域。当精确区域被近似区域替代时，静力平衡载荷可能不再保持平衡。对求解域进行剖分还会产生一种更为微妙的副作用：通常，网格会在近似空间中引入一定的各向异性。尽管这种不理想的

现象会随着网格尺寸趋于零而消失，但仍可能破坏载荷的相容性。

第二个可能出现这些困难的说明性例子，与求以匀角速度旋转的可变形体的位移有关。这些相对平衡 是诺伊曼问题 [25, 26, 27] 的典型例子。为计算所有相关量，只需对物体施加一个中心力场，其原点位于质心，且在每一点的模与到原点的距离成正比。然而，该点坐标的轻微偏差（无论是由于计算误差还是仅仅由于截断）都会产生不再相容的载荷，从而得到一个不适定问题。

鉴于其实际重要性，我们接下来考察“小”载荷不相容对纯面力问题数值解的影响。在此之前，我们指出，答案取决于所采用的求解方法。例如，若通过精心选取的边界条件来求解诺伊曼问题以排除刚体运动，则小的不相容只会在这些约束上引起某些反作用力，而这些反作用力在平衡载荷下本应精确为零。然而，在相对平衡的例子中，我们注意到固体质心的所有位移都应受到约束，而这一条件只有当该点与某一节点重合时才易于实现，对于具有复杂几何形状的物体，这种情况很可能不会发生。

7.1 扰动的诺伊曼问题

再次考虑诺伊曼问题的有限元解。离散化的起点是将区域 Ω 划分为有限个互不相交的单元 Ω_e，使得 $\Omega_h := \cup_e \Omega_e \approx \Omega$。这种区域几何表示上的误差取决于网格尺寸，因此我们假设

$$|\Omega - \Omega_h| \lesssim h^d \ . \tag{67}$$

由于这种错误表示，与变分问题（21）不同，离散解变为满足扰动变分问题的函数 $\boldsymbol{u}_h \in \mathcal{V}_h$

$$a^h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h) = \ell^h(\boldsymbol{w}_h) \ , \tag{68}$$

对所有 $\boldsymbol{w}_h \in \mathcal{V}_h$，以及

$$a^h(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_{\Omega_h} (\mu \nabla^s \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla^s \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \, \nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \, dV \ , \tag{69a}$$

$$\ell^h(\boldsymbol{v}) := \int_{\Omega_h} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \, dV + \int_{\partial\Omega_h} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \, dA \ . \tag{69b}$$

这种对边值问题的近似称为变分误差，其影响早在几十年前就已由 Strang 研究 [28, 22]。然而，对于诺伊曼问题，仅使用这些经典结果是不够的，因为第5节的收敛结果取决于双线性形式 $a_\eta(\cdot, \ \cdot)$ 在 $\mathcal{R}$ 上为零，以及线性形式 $\ell(\cdot)$ 是平衡的。鉴于方程（21）与（68）之间的差异，需要重新审视这两个关键条件。

我们首先刻画不相容载荷或非平衡载荷这一类载荷。

定义 7.1。设 ℓ 为一个载荷，即 $[H^1(\Omega)]^d$ 的对偶空间上的连续泛函；我们将该对偶空间认同为 $[H^{-1}(\Omega)]^d$。此载荷可唯一分解为

$$\ell = \ell_0 + \ell_\perp \tag{70}$$

其中，对于所有 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d$，我们定义

$$\ell_0(\boldsymbol{w}) := \ell(\boldsymbol{w}_0) \;, \qquad \ell_\perp(\boldsymbol{w}) := \ell(\boldsymbol{w}_\perp) \;, \tag{71}$$

其中 $\boldsymbol{w}_0$ 和 $\boldsymbol{w}_\perp$ 与式（33）中的定义相同，中心场定义中的积分在 Ω_h 上计算。

由于 $\ell_0(\boldsymbol{\rho}) = 0$对所有 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}$ 均成立，我们将 ℓ_0 称为 ℓ的相容分量或平衡分量；相应地，$\ell_\perp$ 是载荷的不相容部分或非平衡部分。

如前所述，对诺伊曼问题进行离散化时，载荷泛函 ℓ 可能会被近似载荷 ℓ^h 替代，而该近似载荷并非平衡的，从而使第6节的收敛性分析失效。同样，连续问题的双线性形式 $a_\eta(\cdot,\ \cdot)$ 也可能被近似双线性形式 $a^h_\eta(\cdot,\ \cdot)$ 替代，使得

$$a^h_\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := a^h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \eta\,(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})^h \;, \tag{72}$$

其中 $a^h(\cdot,\ \cdot)$ 和 $\ell^h(\cdot)$ 在式（69）中定义，并且

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})^h := \int_{\Omega^h} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}V \tag{73}$$

是定义在 Ω^h 上的函数的 L^2 内积。

在这些前提下，我们此后考虑如下问题：求$\boldsymbol{u}_\eta \in [H^1(\Omega)]^d$，使得

$$a^h_\eta(\boldsymbol{u}^h_\eta, \boldsymbol{w}^h) = \ell^h(\boldsymbol{w}^h) \;, \tag{74}$$

对所有 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d$成立。下文中，我们只考虑满足下列条件的对称双线性形式 $a^h(\cdot,\cdot)$

$$a^h(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) = a^h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{w}) = 0 \;, \tag{75}$$

对所有 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d$ 和 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}$成立。对于按式(69a)定义的双线性形式，该条件始终成立，因为 $\mathcal{R}$上函数的对称梯度恒为零。

对所有 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d$，我们定义

$$|||\boldsymbol{w}|||^h := \big(a^h(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})\big)^{1/2} \;, \qquad |||\boldsymbol{w}|||^h_\eta := \big(a^h_\eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})\big)^{1/2} \;, \tag{76}$$

并假设，作为对引理 5.5 的推广，函数 $|||\cdot|||^h$ 是 $[H^1(\Omega)]^d \cap \mathcal{C}$上的范数。此外，对于 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d$

$$|||\boldsymbol{w}|||^h_\eta \lesssim \max(1, \sqrt{\eta})\ \|\boldsymbol{w}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \;, \tag{77}$$

而如果 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d \cap \mathcal{C}$，则

$$\|\boldsymbol{w}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim |||\boldsymbol{w}|||^h_\eta \;. \tag{78}$$

7.2 具有非平衡载荷的连续正则化 Neumann 问题

我们首先研究非平衡载荷对定义在近似域上的正则化问题连续解的影响。请注意，由于载荷不平衡，标准 Neumann 问题没有解，因此无法对其进行类似的分析。

引理 7.2. 设 $\ell \in [H^{-1}(\Omega)]$ 为如式 (71) 所示、具有平衡分量与非平衡分量的载荷。则正则化问题 (74) 的解 $\boldsymbol{u}_\eta$ 的中心化分量与刚体分量是以下问题的解

$$\begin{aligned} a_\eta(\boldsymbol{u}_{\eta,0}, \boldsymbol{w}) &= \ell_0(\boldsymbol{w}) \ , \\ a_\eta(\boldsymbol{u}_{\eta,\perp}, \boldsymbol{w}) &= \ell_\perp(\boldsymbol{w}) \ , \end{aligned} \tag{79}$$

对所有 $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^d$成立。同一结果对伽辽金逼近 (54) 亦成立。

证明. 由线性性，正则化 Neumann 问题的解为位移 $\boldsymbol{u}_\eta = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$，其中

$$a_\eta(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}) = \ell_0(\boldsymbol{w}) \ , \tag{80a}$$
$$a_\eta(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}) = \ell_\perp(\boldsymbol{w}) \ . \tag{80b}$$

在式 (80a) 中选取 $\boldsymbol{w} \in \mathcal{R}$，我们证明 $\boldsymbol{u}_1$ 是中心化的。接下来，我们在式 (80b) 中将 $\boldsymbol{w}$ 取为 $\boldsymbol{u}_{2,0}$，即 $\boldsymbol{u}_2$的中心化部分。利用引理 5.4 与式 (80b)，我们有

$$\|\boldsymbol{u}_{2,0}\|^2_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim a_\eta(\boldsymbol{u}_{2,0}, \boldsymbol{u}_{2,0}) = \ell_\perp(\boldsymbol{u}_{2,0}) = 0 \ . \tag{81}$$

因此， $\boldsymbol{u}_2$ 的中心化分量消失，从而 $\boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{R}$亦然。由于分解(36)是唯一的，我们得出

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_{\eta,0} \ , \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_{\eta,\perp} \ , \tag{82}$$

如引理中所述。 □

对于本文所倡导的方法，下一个结果总结了其在非相容载荷下的性能。

定理 7.3. 考虑具有非相容外载荷 ℓ^h的纯牵引问题的有限元解。则正则化公式 (74) 的解 $\boldsymbol{u}^h_\eta$ 可唯一分解为

$$\boldsymbol{u}^h_\eta = \boldsymbol{u}^h_{\eta,0} + \boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp} \, , \tag{83}$$

其中$\boldsymbol{u}^h_{\eta,0}$, $\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}$ 分别为由载荷的相容部分和不相容部分引起的位移场。此外，

$$\|\boldsymbol{u}^h_{\eta,0}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \|\ell^h_0\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \ , \tag{84a}$$
$$\|\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \max(1, \eta^{-1}) \, \|\ell^h_\perp\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \ , \tag{84b}$$

因此，

$$\|\boldsymbol{u}^h_\eta\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \max(1, \eta^{-1}) \|\ell^h\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}. \tag{85}$$

证明。 引理 7.2 证明，分解式 (83) 对应于平衡载荷和非平衡载荷各自的解之和。

我们可以利用第6节的结果来界定解的中心化部分的范数。特别地，引理 5.4 适用，从而得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}^h_{\eta,0}\|^2_{[H^1(\Omega)]^d} &\lesssim a(\boldsymbol{u}^h_{\eta,0},\boldsymbol{u}^h_{\eta,0})\\ &\lesssim a_\eta(\boldsymbol{u}^h_{\eta,0},\boldsymbol{u}^h_{\eta,0})\\ &= \ell^h_0(\boldsymbol{u}^h_{\eta,0})\\ &\lesssim \|\boldsymbol{u}^h_{\eta,0}\|_{[H^1(\Omega)]^d}\,\|\ell^h_0\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}\ .\end{aligned} \tag{86}$$

这正是界（84a）。至于 $\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}$，由于载荷 $\ell_\perp$ 不相容，该位移场不一定是中心化的，因此无法采用第5节的结果。然而，利用 Korn 不等式可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}\|^2_{[H^1(\Omega)]^d} &\lesssim \left(\,|||\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}|||^2 + \|\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}\|^2_{[L^2(\Omega)]^d}\right)\\ &= \frac{1}{\min(1,\eta)}\,\left(\,|||\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}|||^2 + \eta\,\|\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}\|^2_{[L^2(\Omega)]^d}\right)\\ &= \max(1,\eta^{-1})\ a_\eta(\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp},\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp})\\ &\lesssim \max(1,\eta^{-1})\ \|\boldsymbol{u}^h_{\eta,\perp}\|_{[H^1(\Omega)]^d}\|\ell^h_\perp\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}\ ,\end{aligned} \tag{87}$$

于是界（84b）成立。结合式（84a）和（84b），即可得到全局界（85）。 □

该定理表明，尽管平衡载荷产生的位移范数在 η 中是一致有界的，但不相容载荷会为位移解引入一个分量；该分量只能由非平衡载荷的大小来界定，并且与正则化参数成反比。

定理 6.1 和 7.3 的实际意义在于，当 $h,\ \eta\to 0$ 且载荷完全平衡时，正则化方法可以逼近纯牵引问题的最小范数解。当载荷略有不相容时——在这种情况下诺伊曼问题没有解——正则化公式仍然存在一个解。然而，在这种情形下，该解不会是中心化的；如果正则化参数较小，非中心化部分相对于中心化部分可能会很大。

具有不相容载荷的牵引问题可分解为两个相互独立的问题。第一个问题是均匀适定的，相容载荷会产生中心化位移；第二个问题中，不相容载荷会导致非中心化位移。第二个问题有唯一解，该解连续依赖于载荷，但不会一致依赖于 η。即使随着网格细化，载荷的非平衡分量趋于零，该方法也只有在以下条件下才稳定：

$$\lim_{\eta,h\to 0}\frac{\|\ell^h_\perp\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}}{\eta}\to 0\ . \tag{88}$$

这对正则化参数 η 是一个相当严格的约束。

为进一步分析这一情况，现在考虑有限元问题的代数形式，即，

$$\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F}\ , \tag{89}$$

其中$\mathbf{K}$ 是刚度矩阵，而$\mathbf{U}$和$\mathbf{F}$分别是位移向量和外力向量。定理 7.3 表明，位移、力和刚度矩阵可以分解为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\perp\perp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_\perp \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_\perp \end{Bmatrix}\ , \tag{90}$$

其中，沿用前面的记号，$\mathbf{U}_0$,$\mathbf{F}_0$ 分别对应中心化位移和平衡力，而$\mathbf{U}_\perp$,$\mathbf{F}_\perp$ 则对应其余部分。

$\mathbf{K}_{00}$, 的条件数记为 $\kappa(\mathbf{K}_{00})$，与（规则）有限元离散中的条件数相似。然而，$\mathbf{K}_{\perp\perp}$的条件数将取决于 η^{-1}。对于单元尺寸为 h 的规则网格，我们预期 [29]:

$$\kappa(\mathbf{K}_{00}) \sim h^{-2}\ , \qquad \kappa(\mathbf{K}_{\perp\perp}) \sim h^{-2}\,\eta^{-1}\ . \tag{91}$$

如果网格细化时非中心化解$\mathbf{U}_\perp$ 应趋于零，那么

$$\|\mathbf{U}_\perp\| \le \|\mathbf{K}_{\perp\perp}\|\,\|\mathbf{F}_\perp\| \le h^{-2}\eta^{-1}\,\|\mathbf{F}_\perp\| \tag{92}$$

7.3 非平衡载荷的投影解

我们探讨一种数值策略，可用于求解不相容载荷下纯诺伊曼问题的解的中心化部分。实现这一目标的一种显而易见的方法，是将载荷投影到其平衡部分，并利用后者求解中心化位移。从数值角度看，这种方法并不实用，因为它需要求出空间 $\mathcal{R}$ 的一组基。

相反，我们提出一种预测-校正方案，即求出$\boldsymbol{u}_p^h$，$\boldsymbol{u}_\eta^h \in \mathcal{V}^h$，使其满足

$$a_\eta^h(\boldsymbol{u}_p^h, \boldsymbol{w}^h) = \ell^h(\boldsymbol{w}^h)\ , \tag{93a}$$
$$a_\eta^h(\boldsymbol{u}_\eta^h, \boldsymbol{w}^h) = \ell^h(\boldsymbol{w}^h) - \eta\,(\boldsymbol{u}_p^h, \boldsymbol{w}^h)^h\ , \tag{93b}$$

对所有 $\boldsymbol{w}^h \in \mathcal{V}^h$均成立。以下结果表明，函数 $\boldsymbol{u}_\eta^h$ 确实是所求的位移场。

定理 7.4。设 $\ell^h:\ \mathcal{V}^h \to \mathbb{R}$ 是一个连续线性形式，不一定满足平衡条件，且 $a_\eta^h:\ \mathcal{V}^h\times:\ \mathcal{V}^h \to \mathbb{R}$ 是式 (74) 中定义的对称双线性形式，并满足式 (75)-(78)。若 $\boldsymbol{u}_p^h$ 和 $\boldsymbol{u}_\eta^h$ 分别满足式 (93a)和 (93b)，则 $\boldsymbol{u}_\eta^h$ 是中心化的，并满足

$$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim h\,|\boldsymbol{u}|_{[H^{k+1}(\Omega)]^d} + \sup_{\boldsymbol{w}^h\in\mathcal{V}^h} \frac{|a_\eta^h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}^h) - \ell^h(\boldsymbol{w}^h)|}{\|\boldsymbol{w}^h\|_{[H^1(\Omega)]^d}} + \eta\,\|\ell^h\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}\ . \tag{94}$$

因此，预测-校正方法 (93) 是收敛的，具体而言，

$$\lim_{h,\eta\to 0} \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} = 0\ . \tag{95}$$

证明。 根据式（75）， $\boldsymbol{u}_\eta^h$是中心化的，无论ℓ^h 是否达到平衡。于是，我们可以利用引理 5.4 得到

$$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \leq \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \ . \tag{96}$$

为计算第二项误差，我们定义

$$\boldsymbol{e} := \boldsymbol{u}_\eta - \boldsymbol{u}_\eta^h \ , \qquad \boldsymbol{e}_i := \boldsymbol{u}_\eta - \Pi^h \boldsymbol{u}_\eta \ , \qquad \boldsymbol{e}_h := \boldsymbol{u}_\eta^h - \Pi^h \boldsymbol{u}_\eta \ . \tag{97}$$

其中 $\Pi^h \boldsymbol{u}_\eta \in \mathcal{V}^h$ 是函数 $\boldsymbol{u}_\eta$ 到 $\mathcal{V}^h$上的 L^2 投影。然后，我们可以将正则化问题的有限元解中的误差分解为两项贡献，即

$$\|\boldsymbol{e}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \leq \|\boldsymbol{e}_i\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\boldsymbol{e}_h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \ . \tag{98}$$

第一项是插值误差

$$\|\boldsymbol{e}_i\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim h^k \, |\boldsymbol{u}_\eta|_{[H^{k+1}(\Omega)]^d} \ . \tag{99}$$

对于第二项，我们写出

$$\|\boldsymbol{e}_h\|^2_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim (|||\boldsymbol{e}^h|||_\eta^h)^2 = a_\eta^h(\boldsymbol{e}^h, \boldsymbol{e}^h) = a_\eta^h(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^h) + a_\eta^h(-\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^h) \tag{100}$$

此外，

$$a_\eta^h(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^h) = a_\eta^h(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{e}^h) - a_\eta^h(\boldsymbol{u}_\eta^h, \boldsymbol{e}^h) = a_\eta^h(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{e}^h) - \ell^h(\boldsymbol{e}^h) + \eta \, (\boldsymbol{u}_{p,0}^h, \boldsymbol{e}^h) \tag{101}$$

and

$$a_\eta^h(-\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^h) \lesssim |||\boldsymbol{e}_i|||_\eta^h \, |||\boldsymbol{e}_h|||_\eta^h \ . \tag{102}$$

综合式(100)至(102)，我们得到误差 $\boldsymbol{e}_h$ 的范数可被界定为

$$\|\boldsymbol{e}_h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim \sup_{\boldsymbol{w}_h \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_\eta^h(\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{w}_h) - \ell(\boldsymbol{w}^h)}{\|\boldsymbol{w}_h\|_{[H^1(\Omega)]^d}} + \eta \, \|\boldsymbol{u}_{p,0}^h\|_{[L^2(\Omega)]^d} + |||\boldsymbol{e}_i|||_\eta^h \ . \tag{103}$$

将该界与式 (96) 和 (99) 相结合，即可证明主要结果。注意，当近似双线性形式与精确双线性形式一致时，误差界简化为

$$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\eta^h\|_{[H^1(\Omega)]^d} \lesssim h^k \ |\boldsymbol{u}|_{[H^{k+1}(\Omega)]^d} + \eta \ \|\ell^h\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} \ . \tag{104}$$

前一定理表明，只要近似双线性形式在无穷小刚体运动上为零，两步解的误差便由插值误差、双线性形式的误差以及与正则化参数 η 成正比的误差所控制。该结果应与界 (85) 相比较，后者表明若不采用两步法，有限元解的大小将随 η^{-1} 增长。

□

8 数值算例

我们展示四个纯牵引问题的示例，并使用本文提出的方法对其解进行近似计算。所有方程均假定已无量纲化。

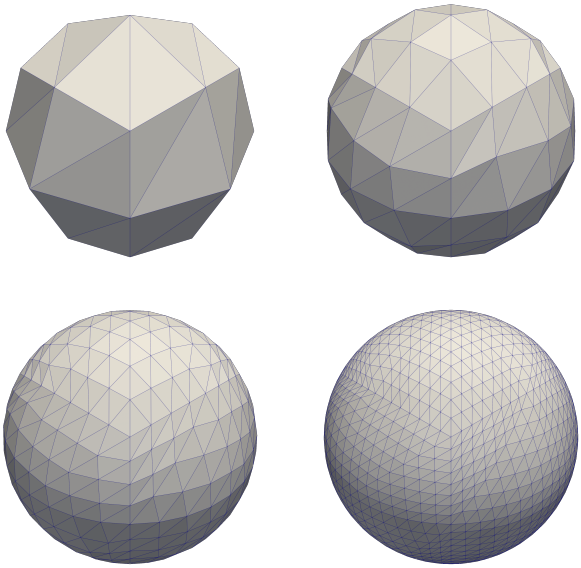

图2：弹性球体问题的有限元模型。从上到下、从左到右的单元数： $96 \cdot 8^j$， $j = 0$, ……， 3)

.

8.1 中心力场作用下的可变形球体

在第一个示例中，我们研究半径为 R 的弹性球体在中心力作用下的变形，其形式为

$$\boldsymbol{f}(r, \theta, \phi) = -C \frac{r}{R} \boldsymbol{e}_r \ ,$$

其中，(r， θ， ϕ) 为球坐标，原点位于球体中心，C 为已知常数， $\boldsymbol{e}_r$ 为每一点处沿径向的单位向量。该问题的解已知有闭式解，例如可参见 Love 的经典著作 [30, 第142-143]页。书中指出，若用球坐标表示，位移场中只有径向分量不为零，其值为:

$$u_r = -\frac{1}{10} \frac{C\,R\,r}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} - \frac{r^2}{R^2} \right) \ . \tag{105}$$

同样用球坐标表示，应变张量中唯一非零的分量为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{3Cr^2 - CR^2}{10\lambda R + 20\mu R} - \frac{CR}{5(3\lambda + 2\mu)} \ , \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} &= -\frac{CR}{10(\lambda + 2\mu)} \left(-\frac{4\lambda}{3\lambda + 2\mu} - \frac{r^2}{R^2} + 3 \right) \ . \end{aligned} \tag{106}$$

在我们的模拟中，我们选取 $R = 1/2$， $C = 2$ 而 Lam´e 参数对应于杨氏模量为 $E = 1$ 、泊松比为

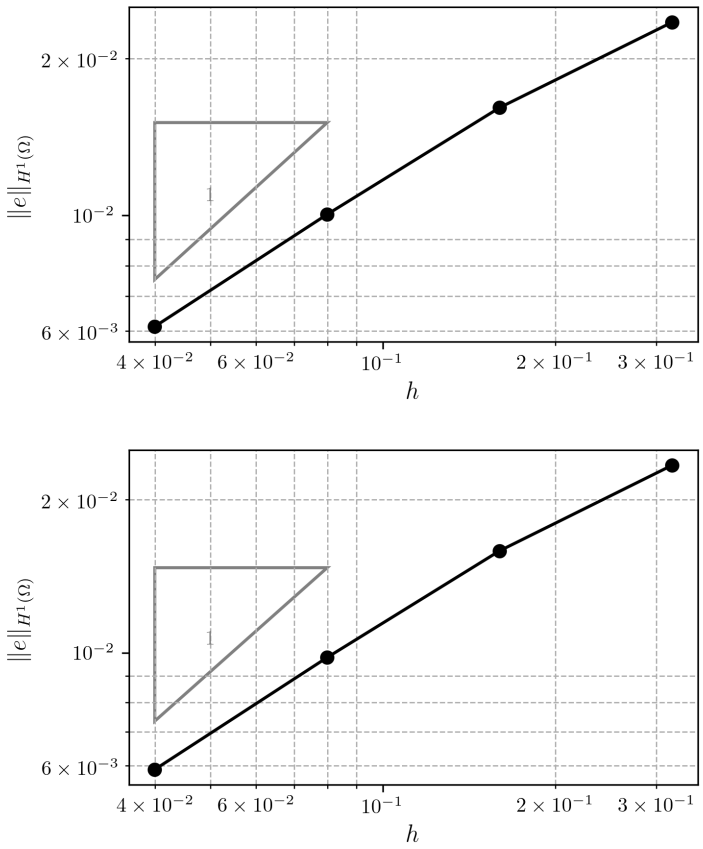

图3： H^1 弹性球体问题数值解中的误差。上：采用节点约束得到的解；下：采用正则化方法得到的解。

$\nu = 0.3$。首先，我们使用标准有限元公式求解这个诺伊曼问题，并施加约束以排除刚体运动。为此，我们引入一个笛卡尔坐标系，其原点与球体中心重合。然后，我们创建单元数量递增的四面体网格（$96{\cdot}8^j$，$j = 0$，.....，3）（见图2）。这些网格均在原点处有一个节点，且在笛卡尔坐标轴与球体表面的交点处也有节点。我们约束中心节点的三个位移分量，以限制所有平移。为排除（无穷小）旋转，我们约束位于 $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 1/2)$ 处节点沿 x 和 y 方向的位移；类似地，我们约束坐标为 $(x,\ y,\ z) = (0,\ 1/2,\ 0)$ 的节点沿 x 方向的位移。

对于这一纯牵引问题，可以不约束节点自由度，而采用第6节所述的正则化公式，并使用正则化参数 $\eta \propto h^{1.2}$ 来求解。

如图 3 所验证的，两种数值方法均以最优阶收敛于弹性球体的精确解，误差之间的差异

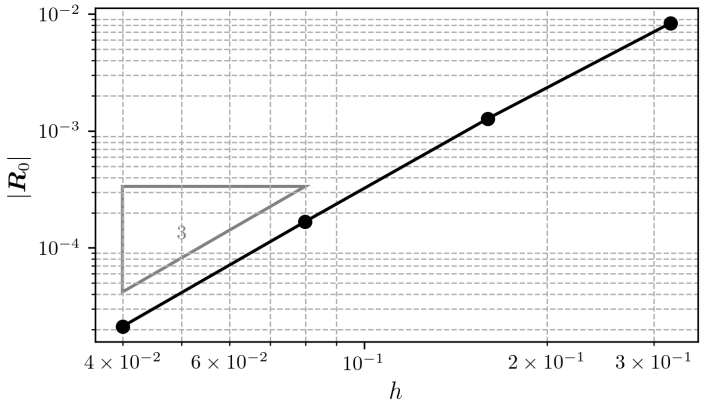

图 4：受到扰动中心载荷作用的弹性球体。采用受约束自由度求得的解中，节点反力的范数。

几乎可以忽略不计。正如前文所述，新提出的公式在此情况下的优势在于解的简洁性，完全不需要边界条件。

中心载荷 (8.1) 是平衡的，且第一种解中受约束节点处的反力为零。接下来，我们探讨载荷受到（非平衡）扰动对数值解的影响。具体而言，我们考虑在中心载荷 (8.1) 上添加体积载荷对可变形球体的影响

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \frac{h}{R}\,\boldsymbol{i}\,, \tag{107}$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 是笛卡尔基 $\tilde{}$ 中沿 x 轴方向的单位向量。总载荷 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}$ 未中心化，因此我们预期受约束节点处会产生大小为 $|\tilde{\boldsymbol{f}}|\frac{4}{3}\pi R^3 \sim h^3$ 的反力，这一点也得到了图 4 所示结果的证实。¯此外，由于载荷不平衡，采用该方法得到的数值解无法保持中心化，如图 5 所示。从图中可以看出，该数值方法能够针对每种网格尺寸计算出一个解，但这些解自然都无法保持中心化。尽管存在这些局限，约束方法仍能得到最优收敛的解，如图 5 所示。

第7.3节介绍的方法能够处理不相容载荷。使用这种两步法计算出的解恰好是中心化的，无需任何节点约束，并且具有最优收敛性，如图6所示。

本节所示结果证实，第6节和第7.3节介绍的方法分别能够处理平衡载荷和非平衡载荷，且无需使用任何节点约束。两种情况下，这些方法均被证实具有最优收敛性。

纯诺伊曼问题的刚度矩阵是奇异的。采用第6节介绍的正则化方法后，该矩阵变为非奇异，但其条件数会随着 $\eta \to 0$而恶化。图7展示了本节所研究解中所用刚度矩阵的条件数。当 η 的值约为1时，该矩阵的条件良好，然而

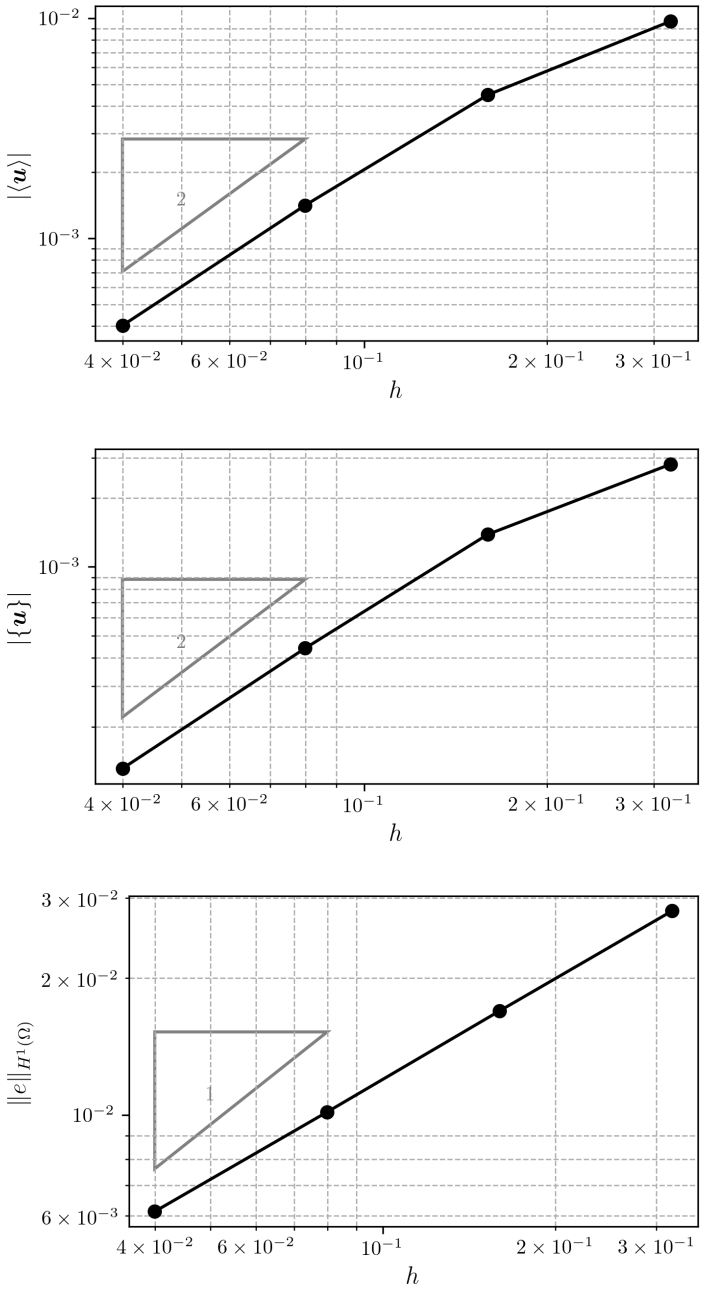

图 5：受扰动的中心载荷作用下的弹性球体。采用受约束自由度得到的解。上：平均位移范数与网格尺寸的关系；中：位移矩范数与网格尺寸的关系；下：解中的 H^1 误差。

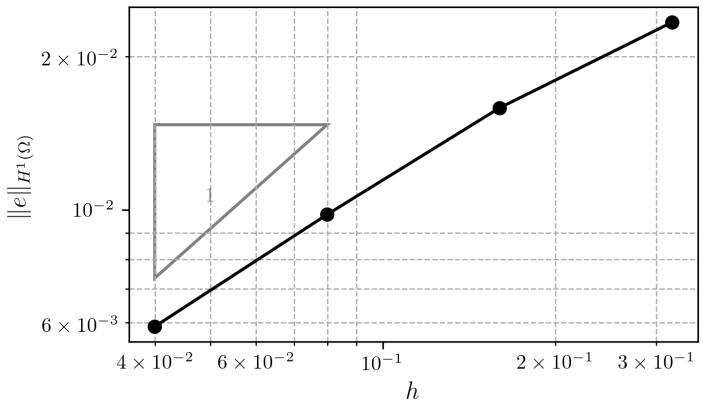

图 6：受扰动的中心载荷作用下的弹性球体。 H^1 采用两步法得到的解的误差。

引入诺伊曼问题的扰动不能视为很小，因此解可能与精确解相差甚远。对于 $\eta \ll 1$，正则化的影响变得不那么明显，但刚度矩阵的条件数很大。

从理论角度来看，任意 $\eta > 0$ 都能使诺伊曼问题适定。事实上，正则化会在弹性算子的谱中引入一个（较小的）正特征值，足以使其具有强制性。同样，在离散 Neumann 问题中，任意正的 η 都会在刚度矩阵中引入一个正特征值，使其可逆（前提是能够采用任意精度计算）。然而在实际中，无论使用直接求解器还是迭代求解器，当刚度矩阵病态时，有限精度浮点计算都会使离散解失去实用价值。

如果载荷满足平衡条件，则可使用第6.1节的方法，即使采用较大的正则化参数，也能得到精确的纯牵引解。例如，我们使用 $\eta = 1$ 和第6.1节介绍的迭代方法，求解可变形球体的诺伊曼问题。

诺伊曼解采用图2所示的有限元离散进行计算，使用与之前相同的材料属性，且正则化参数为 $\eta = 1$。对于每种离散化，均采用迭代格式 (62)。

通过迭代方法得到的解可以与精确解进行比较。图8展示了所得到解的收敛情况。请注意，所有这些解均是在相对较大的 η 值下得到的；对于每个 h，其条件数约为 1（见图7）。此外，对于所有网格， H^1 误差与正则化解或采用受约束自由度得到的解的误差相当（见图3）。

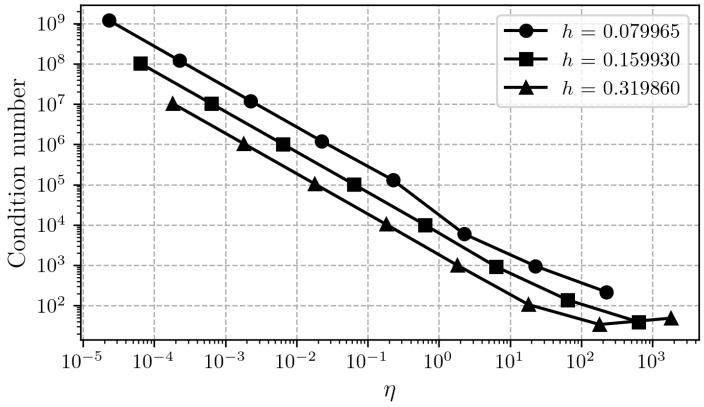

图 7：可变形球体问题正则化解的刚度基体条件数随正则化参数的变化。

迭代	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	$4.4148 \cdot 10^{-2}$	$2.8104 \cdot 10^{-2}$	$1.2475 \cdot 10^{-2}$	$4.8739 \cdot 10^{-3}$
2	$4.3828 \cdot 10^{-4}$	$3.3498 \cdot 10^{-4}$	$1.5544 \cdot 10^{-4}$	$6.1022 \cdot 10^{-5}$
3	$4.2696 \cdot 10^{-6}$	$3.9575 \cdot 10^{-6}$	$1.9449 \cdot 10^{-6}$	$7.7661 \cdot 10^{-7}$
4	$4.1818 \cdot 10^{-8}$	$4.7464 \cdot 10^{-8}$	$2.4436 \cdot 10^{-8}$	$9.9100 \cdot 10^{-9}$
5	$4.3745 \cdot 10^{-10}$	$6.5080 \cdot 10^{-10}$	$3.1821 \cdot 10^{-10}$	$1.2676 \cdot 10^{-10}$

表1：采用图2所示离散化求解迭代格式（62）时残差的 2-范数。每个网格中的单元数为 $96 \cdot 8^j$，$j = 0, \ldots, 3$。

8.2 波动静力平衡体载荷作用下的平行六面体

在第二个示例中，我们考虑另一个具有静力平衡体载荷的简单诺伊曼问题的解。为确保载荷完全相容，我们首先选取一个平行六面体形状的物体。此外，我们使用六面体单元对其进行网格划分，从而精确表示几何形状并保持其对称性。

具体而言，我们考虑一个尺寸为 $L_x = 4$, $L_y \equiv L_z = 1$ 的平行六面体，其棱平行于笛卡尔坐标轴，且中心位于原点（见图 9）。假设材料为弹性材料，其杨氏模量为 $E = 1$，泊松比为 $\nu = 0$。在物体上施加相容体力 $\boldsymbol{f} = \sin(3\pi x/L_x)\,\boldsymbol{i}$，其中 $\boldsymbol{i}$ 与第一个示例中一样，是沿 x 方向的单位基向量。由于泊松效应已消除，物体的位移场为

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \frac{L_x^2}{9\,\pi^2}\sin(3\pi x/L_x)\,\boldsymbol{i}\ ,$$

这是一个中心向量场。

这个（本质上是一维的）诺伊曼问题可以通过以下方法求解：

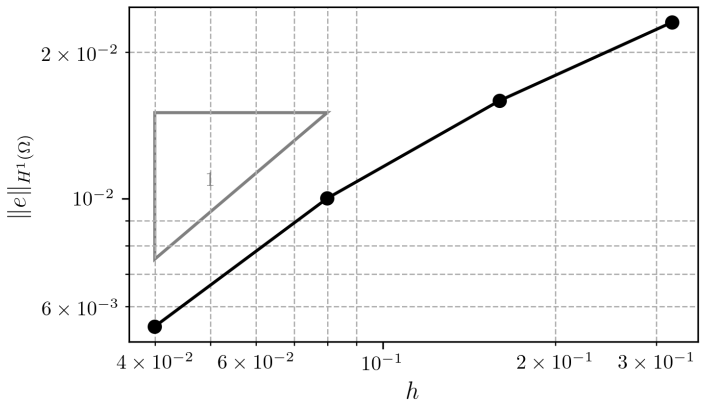

图8：承受中心载荷的弹性球体。 H^1 采用迭代格式（62）得到的解的误差范数。

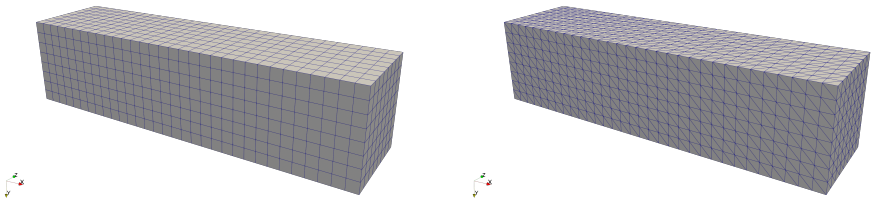

图9：采用六面体和四面体划分网格的平行六面体。请注意，四面体网格中的单元边表明，有限元空间中的函数相对于坐标平面并非完全对称。

采用弹性方程的标准有限元近似，并构建一个包含原点和坐标轴上节点的网格。对于所考虑的简单几何形状，这一点很容易验证。因此，我们可以选取六个约束：原点处三个，另外三个用于排除刚体运动，从而得到唯一解。

然而，我们必须指出，即使对于这个简单问题，为排除刚体运动而约束选定节点处的位移场，也可能引入不易察觉的误差，除非进行仔细检查。事实上，当平行六面体采用六面体单元划分网格时，离散模型能够精确保留物体和载荷的对称性，因此受约束自由度上的反力恒为零。然而，当物体采用四面体划分网格时，由于离散模型不再完全对称，解中会产生一定的各向异性。两种网格的示意图以及四面体单元方向导致的对称性破缺见图9。

图10针对若干网格尺寸给出了 $\boldsymbol{R}_0$（即原点处的反作用力）的范数，此时模型采用四面体，且该节点的全部自由度均被约束。尽管该反力的大小随网格

尺寸减小，但从图中可以看出它从未完全消失。此外，由于载荷中存在这些微小的不相容性，解本身并未中心化。图10中部和底部的图描绘了采用四面体时解中 $\langle \boldsymbol{u} \rangle$和 $\{\boldsymbol{u}\}$ 的范数，它们本应为零。然而，对于非结构网格，这两个量很小，但并不为零。相比之下，当网格采用规则六面体时，由于离散化并未破坏平行六面体的对称性，解恰好是中心化的。需要指出的是，如图11所示，这些受约束的解对于两类网格均以最优速率收敛。

第4节介绍的正则化方法能够为这类诺伊曼问题求得（收敛的）解，即使没有任何受约束自由度也是如此（见图12）。然而，采用这种方法时，四面体网格得到的解并非中心化（见图13）。为消除离散化的各向异性所导致的这一不良影响，可以采用第7.3节提出的两步法。采用该方法时，得到的解不仅收敛（见图14），而且完全中心化，无需约束任何自由度，并且适用于所有网格。

8.3 施加周期性边界条件

微观力学计算中经常会遇到一类重要的诺伊曼问题。为了计算非均质材料的均匀化性质，只需在假设尺度明确分离的前提下，研究代表性体积单元（RVE），并对其施加宏观变形。此外，为了在这些单元上满足 Hill-Mandell[1] 条件，通常会选择对其施加周期性边界条件。

立方体域 Ω 上的周期性边界条件定义如下。将边界 $\partial\Omega$ 划分为互不相交的集合 $\partial\Omega^+$ 和 $\partial\Omega^-$。为简便起见， $\partial\Omega^+$ 通常由 $\partial\Omega$ 的三个互不平行的面组成，而 $\partial\Omega^-$ 则包含其余三个面。对于这种划分，存在一个投影算子Π: $\partial\Omega^+ \to \partial\Omega^-$ ，它将 $\partial\Omega^+$ 上的每个点映射到对面的面上。若 $\boldsymbol{u}$ 表示物体的位移，且 $\boldsymbol{t}$ 表示表面上的面力，则 Ω 上的周期性边界条件定义为：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{u} \circ \Pi)(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x} - \Pi(\boldsymbol{x})) \,, \qquad \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{t} \circ \Pi)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,, \tag{108}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega^+$ 以及某个宏观应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$均成立。请注意，具有周期性边界条件的弹性力学问题属于纯诺伊曼类型，因此其数值解需要采用第1节中介绍的某种策略。

文献中提出了若干种策略，可用于在有限元离散中实施周期性边界条件；所有这些策略都必须从周期性解中去除诺伊曼问题的（无穷小）刚体运动（参见，例如，[31, 32, 33, 34]）。本文将研究一个施加了周期性边界条件的代表性体积单元，采用方程（108），并通过使用第4节提出的正则化方法来消除诺伊曼奇异性。

我们现在考虑计算边长为 $a = 1$ 的立方弹性代表性体积单元的剪切模量，其内部有一个半径为 $r = a/5$ 的球形夹杂

[1]该条件指出，宏观应力功率必须等于代表性体积单元内微观应力功率的体积平均值，从而确保计算均匀化过程中各尺度之间的能量一致性。

位于。为使结果可复现，我们对体素化立方体采用有限元离散，并在区域中使用逐渐增加的细分数量。对于基体和夹杂，我们分别采用Lam´e参数为 $\lambda = \mu = 1$ 和 $\lambda = \mu = 10^{-4}$的弹性材料。均质化材料剪切刚度的一个经典估计 [35] 为

$$C = \mu \left(1 - \frac{15(1-\nu)}{7-5\nu} p \right) ,$$

其中 $\nu = \lambda/2/(\lambda + \mu) = 0.25$ 是材料的泊松比，

$$p = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{a^3} \tag{109}$$

是代表性体积单元的孔隙率。式 (108) 是剪切刚度随孔隙率变化的一阶近似；对于所选材料和夹杂的属性，其计算值为 $C = 0.934436327$。

为验证所提出公式的适用性，我们使用具有 $(3\,k)^3$ 个单元的代表性体积单元， $k = 1$、2、.....、6。对于每个网格，我们按照上述方法施加周期性边界条件，仅使用 $\epsilon_{xy} = 1$，并按照第4节提出的方法，通过参数 $\eta = 10^{-2}\, h^{1.5}$ 对弹性算子进行正则化，以消除刚体运动。随后，我们计算垂直于 x 方向的一个面上的反力总和，并将其投影到 y 方向，以获得C的近似值。表 2 汇总了计算结果；我们观察到，数值计算所得的值收敛于估计值 (108)。由于后者只是剪切刚度真实值的近似，因此没有必要详细分析这些计算的收敛速率。至多只能期望计算得到的刚度接近估计值 (108)。

k	C_h	误差（%）
1	0.94890	1.54785
2	0.93130	0.33547
3	0.92409	1.10714
4	0.93455	0.01260
5	0.92549	0.95749
6	0.92889	0.59318

表2：采用尺寸为（$3\,k$）^{3} 的规则网格和周期性边界条件得到的近似剪切刚度 C_h 。相对于式（108）中给出的 C 的误差。

8.4 复杂几何物体在施加温度场作用下

在这最后一个例子中，我们研究具有复杂几何形状的固体中的纯牵引问题。具体而言，考虑一个几何形状为斯坦福兔子 [36], 的各向同性热弹性固体，该模型常用于评估计算机图形学算法的性能。我们将生成三个

不同的网格，并对物体施加线性温度场。由于热弹性效应，兔子将发生变形，但不应出现应力。

我们所采用的材料具有杨氏模量 $E = 1$、泊松比 $\nu = 0.3$ 和热膨胀系数 $\alpha = 1$。施加的热增量为 $\vartheta = x + y + z$，其中后者指原始兔子模型中所采用的笛卡尔坐标。

图 16 展示了在所考虑的三个网格上施加的温度场。小型、中型和大型网格分别包含 2319、19138 和 152706 个单元。该问题没有狄利克雷边界条件，并且鉴于模型几何的复杂性，这是一个明显的例子，说明在<style id='1'>所有网格中施加约束以排除刚体运动并非易事。

我们使用本文所介绍的正则化公式，针对三个网格求解诺伊曼问题，并研究网格尺寸和正则化参数的影响。图 17 展示了三种不同网格下的位移场，以及 $\bar{\eta} = 1$，0。1 和 0。01；其中，我们选取 ℓ =0.1 作为固体的特征长度。该图表明，随着正则化参数减小，物体上的位移受到的约束减弱，因此最大值增大。

正如前文所述，理论预测，对于没有狄利克雷边界条件的各向同性热弹性固体，线性温度场不会产生应力。我们引入的正则化破坏了这一性质，因此预计会产生一定的储存能。不过，当 $\bar{\eta} \to 0$ 时，这种能量应趋于零。图 18 展示了采用图 16 和图 17 中三种网格时，随着正则化参数减小，固体的（归一化）势能值。无论是网格尺寸还是 $\bar{\eta}$ 趋于零时，这种能量都会单调递减，表明该方法在极限情况下能够恢复精确的无应力状态。

9 总结

弹性力学中的诺伊曼问题在工程实践中经常出现。假设载荷满足某些相容条件，那么就存在无穷多个刚体等价的位移场，它们都是该边值问题的解，这给数值近似带来了困难。在有限元分析中，针对这种非唯一性的常见解决方法要么计算成本高，要么不够稳健。

在这项工作中，我们引入了一个扰动后的诺伊曼问题，其解唯一，且可任意接近原问题的解；更准确地说，可任意接近范数 L_2 最小的解。这一结果为诺伊曼问题的适定、稳健有限元近似铺平了道路，而这类近似只需在求解经典狄利克雷问题或混合边界值问题时增加微不足道的额外成本即可获得。

我们已经给出了原始诺伊曼问题的解（更确切地说，具有最小 L^2 范数的解）与扰动解之间 H^1 误差的严格界。这些界表明，该误差与正则化参数成正比，因此可以任意接近。此外，我们还证明了扰动问题的有限元近似收敛于精确解，只要网格尺寸和扰动参数

趋于零。

具有非平衡载荷的诺伊曼问题没有解。然而，纯诺伊曼问题的离散化会引入扰动，从而严重影响其数值解。若采用约束表述，则在受约束自由度处会出现非零反力，且所得解不会中心化；若采用正则化方法，其解同样不会中心化，且误差界会变差。为解决这些问题，已提出一种预测-校正正则化方法，即使载荷非平衡，也能在无需使用约束的情况下给出最优的中心化解。

本文的主要思想具有更广泛的意义。事实上，可以证明：给定一个椭圆问题，其解位于更大线性空间的某个闭子空间中，则可以扰动能量泛函，并证明正则化解及其有限元近似收敛于原解。在线性情形下，该论断可用与本文类似的论证加以证明。一般而言，可用 Γ–收敛论证来证明这些性质。上述推广可见于本文的续篇 [37]。

致谢

AK 和 IR 分别感谢获得西班牙科学与创新部项目 PLEC2023- 010190 和 PID2021-128812OB-I00 的资助。CG 感谢欧洲研究委员会通过 ERC 协同资助“DATA- DRIVEN OFFSHORE”（项目编号：101083157）提供的资助。

A 实施细节

纯牵引问题的正则化解实现简单，且不会为小应变力学的有限元解增加任何额外自由度。为完整起见，我们简要概述在有限元解的背景下实现所提出公式所需的细节。因此，我们考虑一个节点集为$\mathcal{N}$的有限元网格。记与节点 $a \in \mathcal{N}$相关联的形函数为 $N^a \colon \Omega \to \mathbb{R}$，该节点对应的残差向量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^a = &\int_\Omega \left[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \nabla N^a(\boldsymbol{x}) + \eta\, \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})\, N^a(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, N^a(\boldsymbol{x}) \right] dV \\ &- \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) N^a(\boldsymbol{x})\, dA. \end{aligned} \tag{110}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathrm{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]\boldsymbol{I} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应力张量，且 $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u}^h$。对应于节点 a，$b \in \mathcal{N}$ 的刚度矩阵分块为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}^{ab} = &\int_\Omega \lambda \nabla N^a(\boldsymbol{x}) \otimes \nabla N^b(\boldsymbol{x})\, dV \\ &+ \int_\Omega \mu \left(\nabla N^b(\boldsymbol{x}) \otimes \nabla N^a(\boldsymbol{x}) + (\nabla N^b(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla N^a(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{I} \right) dV \\ &+ \int_\Omega \eta\, N^a(\boldsymbol{x})\, N^b(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{I}\, dV\end{aligned} \tag{111}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 是单位张量，$\otimes$是向量的并矢积。正则化形式无需额外的残差方程，因为该公式不会引入任何自由度。修改后的刚度矩阵在每个块 $\boldsymbol{k}^{ab}$ 的对角线上增加了一项，但不会改变全局切线矩阵的轮廓。因此，正则化解带来的额外计算成本可以忽略不计。

参考文献

[1]B. A. Roccia、C. Alturria Lanzardo、F. D. Mazzone 和 C. G. Gebhardt. 关于非均匀及正交各向异性截面齐次扭转问题的理论与数值方面。应用数值数学，201:579–607，2024年。[2] G. Fichera. 弹性力学定理。载于 S. Fl¨ugge 和 C. Truesdell 编，《物理学百科全书》，第 VIa/2 卷。施普林格，柏林，1972年。[3] M. E. Gurtin. 线弹性理论。载于 S. Fl¨ugge 和 C. Truesdell 编，《物理学百科全书》。施普林格，柏林，1965年。[4] G. Duvaut 和 J.-L. Lions.《力学与物理学中的不等式》。施普林格出版社，柏林-海德堡，1976年。[5] P. G. Ciarlet.《数学弹性力学》。北荷兰出版社，1988年。[6] R. D. Cook.《应力分析有限元建模》。约翰·威立父子出版公司，1995年。[7] I. Babuska. 工程设计中的不确定性：数学理论与数值经验。技术报告，马里兰大学物理科学与技术研究所，1985年。[8] P. B. Bochev 和 R. B Lehouqc. 关于纯诺伊曼问题的有限元解。*SIAM*评论，47(1):50–66，2005年。[9] P. B. Bochev 和 R. Lehoucq. 纯牵引线弹性问题的能量原理与有限元方法。应用数学计算方法，11(2):173–191，2011年。[10]M. Papadrakakis 和 Y. Fragakis. 一种用于求解结构力学半定问题的几何代数集成方法。应用力学与工程中的计算机方法，190(49–50):6513–6532，2001。

[11]L. Liao. 惯性释放分析研究。载于第*52*届*AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC*结构、结构动力学与材料会议。美国航空航天学会，2011年。[12] H. Pengqiu 和 Q. Sun. 基于精确惯性载荷的改进惯性释放法。《*AIAA*期刊》，55(8):2848–2852，2017年。[13] M. Benzi、G. H. Golub 和 J. Liesen. 鞍点问题的数值解。《数值学报》，14:1–137，2005年。[14] C. Farhat 和 M. G´eradin. 关于大型奇异线性方程组直接法的一般解：在浮动结构分析中的应用。《国际工程数值方法杂志》，41(4):675–696，1998年。[15] E. F. Kaasschieter. 求解奇异系统的预条件共轭梯度法。《计算与应用数学杂志》，24(1–2):265–275，1988年。[16] H. Elman、D. Silvester 和 A. Wathen.《有限元与快速迭代求解器》。牛津大学出版社，2005年。[17] M. Kuchta、K. Mardal 和 M. Mortensen. 线弹性中的奇异诺伊曼问题。《应用数值线性代数》，26(1)，2018年。[18] J. Ne˘cas.《弹性体与弹塑性体的数学理论》。爱思唯尔，1981年。[19] M. Kirzek 和 Z. Milka. 一种采用诺伊曼或周期性边界条件求解线弹性问题的非常规变分法。载于数值分析与数学建模，巴拿赫中心出版物第29卷，第65–77页。波兰科学院，1994年。[20] M. Ivanov、I. Kremer 和 M. Urev. 用有限元方法求解纯诺伊曼问题。《数值分析与应用》，12(4):359–371，2019年。[21] X. Dai. 使用迭代罚方法对纯诺伊曼问题进行有限元近似。《应用数学与计算》，186(2):1367–1373，2007年。[22] P. G. Ciarlet.《椭圆问题的有限元方法》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1978年。[23] M. E. Taylor.《偏微分方程 *I*：基础理论》。施普林格，2011年。[24] G. Acosta 和 R. G. Duran.《散度算子及相关不等式》。施普林格数学丛书。施普林格，纽约，纽约州，第1版，2017年3月。

[25] J. C. Simo、T. A Posbergh 和 J. E Marsden。相对平衡的稳定性。II. 在非线性弹性力学中的应用。理性力学与分析档案，115(1):61–100，1991。[26] F. Armero 和 I. Romero。关于非线性动力学高频耗散时间步进算法的公式。第一部分：针对两个模型问题和非线性弹性动力学的低阶方法。应用力学与工程中的计算机方法，190:2603–2649，2001。[27] I. Romero。非线性弹性动力学耗散算法的公式与分析。博士论文，加州大学伯克利分校，2001。[28] G. Strang 和 G. J. Fix。有限元方法分析。普伦蒂斯·霍尔，恩格尔伍德悬崖，新泽西州，1973。[29]A. Ern 和 J. L. Guermond。有限元理论与实践。施普林格，2004。[30] A. E. H. Love。弹性数学理论论著。剑桥大学出版社，第4版，1927。[31] J. C. Michel、H. Moulinec 和 P. Suquet。具有周期性微观结构的复合材料有效性能：一种计算方法。应用力学与工程中的计算机方法，172(1-4):109–143，1999。[32] C. Miehe 和 A. Koch。发生小应变的离散微观结构的微观到宏观计算过渡。应用力学档案，72(4-5):300–317，2002年7月。[33] V.-D. Nguyen、E. B´echet、C. Geuzaine 和 L. Noels。通过多项式插值在任意网格上施加周期性边界条件。计算材料科学，第1–28页，2011。[34] P. Heny˘s、L. ˘Capek 和 J. B˘rezina。多尺度均匀化中实现周期性边界条件的现有方法比较。欧洲力学杂志*A*辑：固体，78:103825，2019。[35] J. K. Mackenzie。含有球形孔洞的固体的弹性常数。物理学会会刊。*B*辑，63(1):2–11，1950。[36] 斯坦福三维扫描库。http://graphics.stanford.edu。[37] G. Gebhardt 和 I. Romero。针对具有有限维非平凡核的双线性形式二次优化问题的一种扰动式L2正则化。编写中，2025。

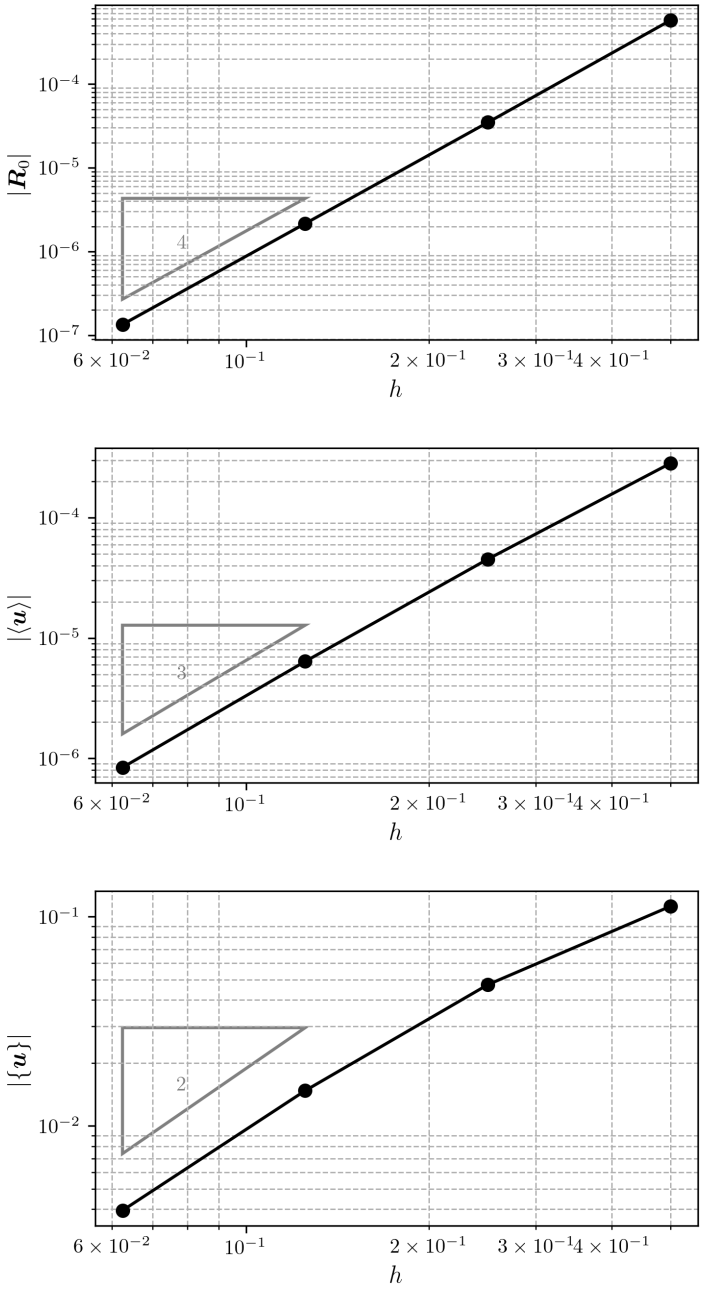

图10：平行六面体示例。采用四面体和节点约束得到的解。上：原点处节点反力的范数；中：平均位移范数；下：位移的一阶矩的范数。

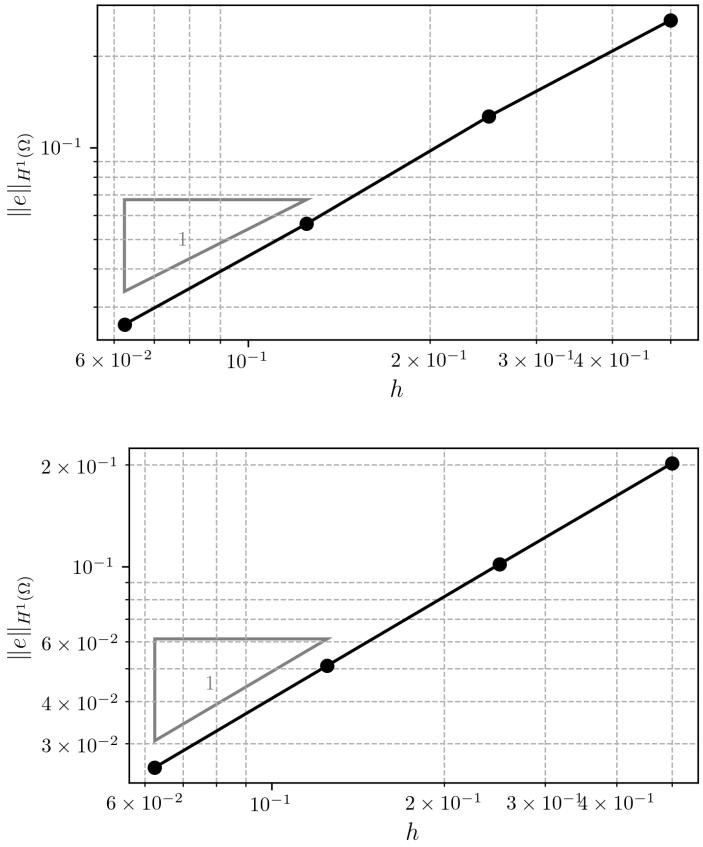

图11：平行六面体示例。采用约束位移得到的解的误差 H^1 范数。上：四面体网格；下：六面体网格。

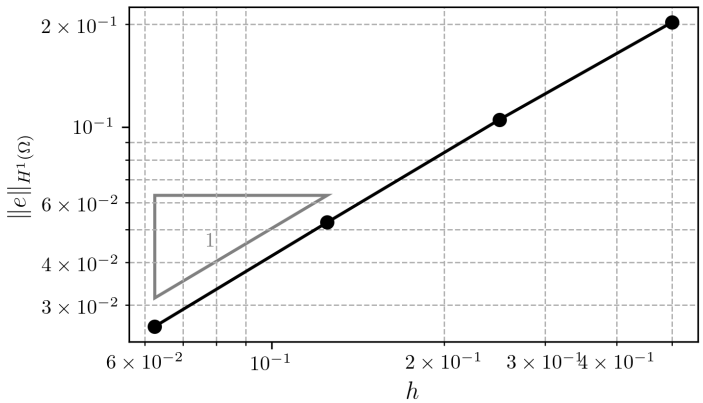

图12：平行六面体示例。采用四面体和正则化公式得到的解的误差 H^1 范数。

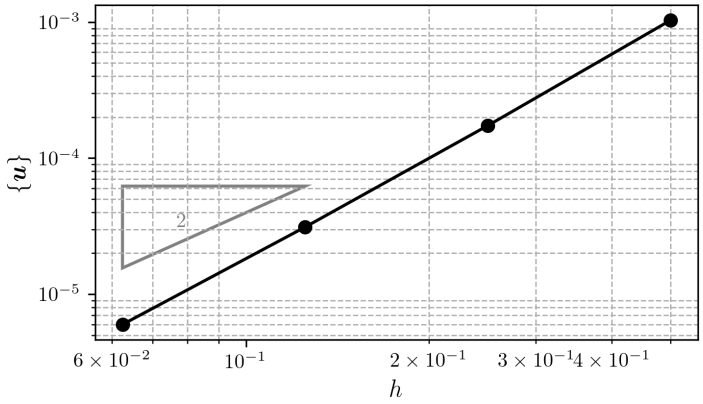

图13：平行六面体示例。采用正则化公式得到的位移场一阶矩的范数。

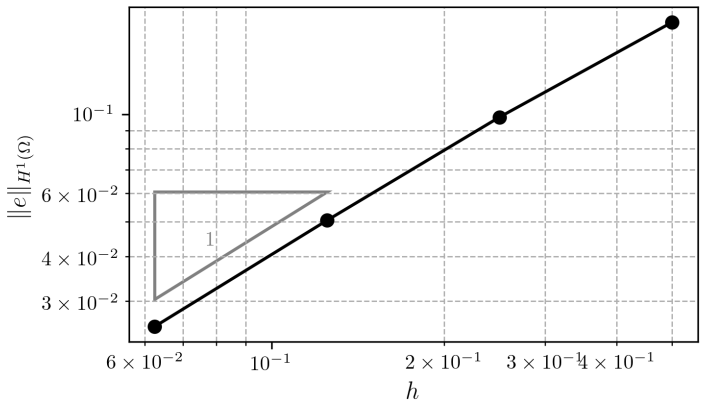

图14：平行六面体示例。 H^1 采用四面体和两步正则化公式得到的解误差范数。

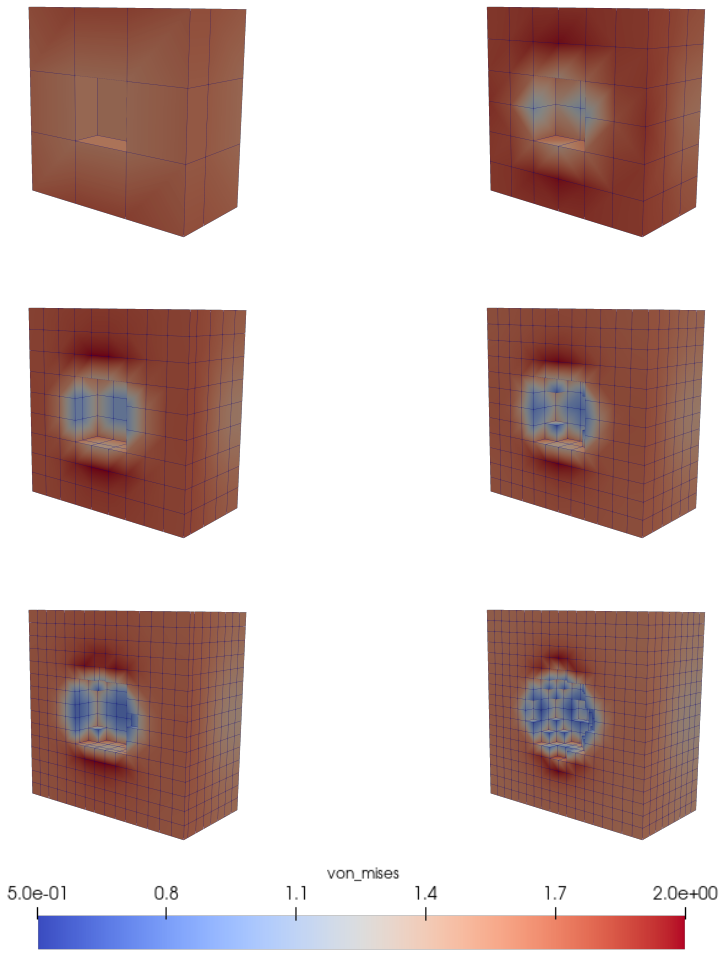

图 15：在施加剪切应变和周期性边界条件下，含软球形夹杂的代表性体积单元截面。颜色表示冯·米塞斯应力。从左到右、从上到下，网格尺寸依次为 $(3\,k)^3$，　$k = 1$，2.....，6。

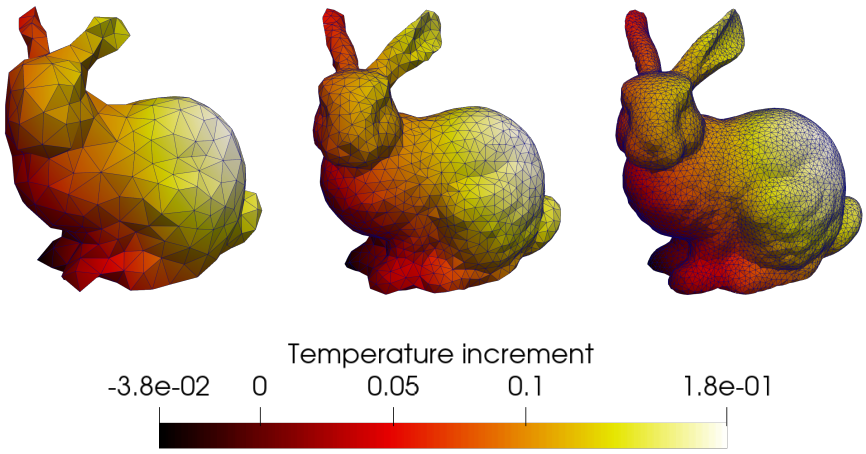

图 16：施加在斯坦福兔子的粗网格、中等网格和细网格上的 $\vartheta = x + y + z$ 形式的温度场。

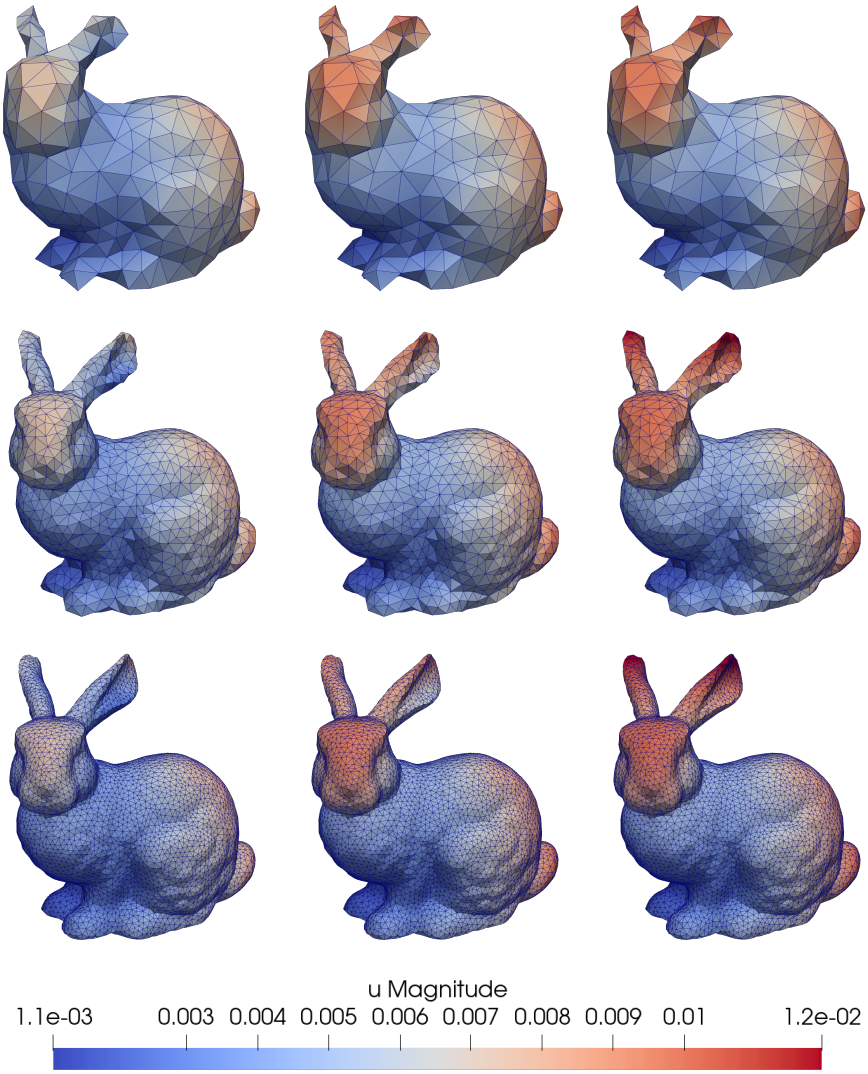

图 17：热弹性兔形固体上的变形场。顶部行：粗网格；中间行：中等网格；底部行：细网格。左列：$\bar{\eta} = 1$；中列：$\bar{\eta} = 0.1$；右列：$\bar{\eta} = 0.01$。

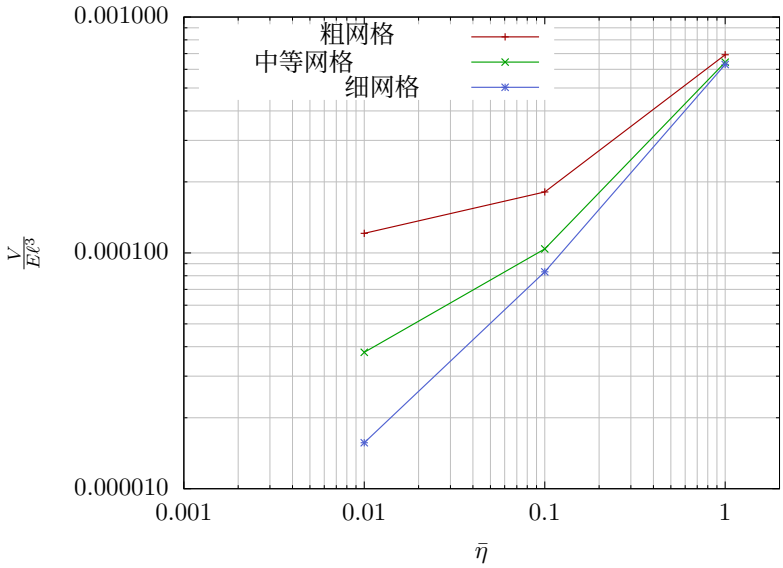

图 18：类兔子热弹性固体。正则化方法所得解的归一化势能随网格尺寸和正则化参数的变化。精确解的势能为零。