无标题稿件编号（将由编辑插入）

先验与后验误差恒等式：基于凸对偶的向量问题研究

P. A. Gazca-Orozco · A. Kaltenbach

arXiv:2602.04368v1 [math.NA] 4 Feb 2026

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 近年来，人们利用凸对偶，为各种非线性、非光滑标量问题推导出后验误差估计和误差恒等式。借助 Crouzeix–Raviart 和 Raviart–Thomas 元显著的相容性，非协调离散化的最优收敛性以及通量重构公式也得以确立。本文旨在将这些结果推广到向量情形，重点研究不可压缩Stokes问题和 Navier– Lam´e 这两个典型问题。此外，与大多数已有结果不同，我们考虑非齐次混合边界条件，以及能量空间拓扑对偶中的载荷。在离散层面，我们推导出误差恒等式和误差估计，从而能够在最小正则性假设下，为 Crouzeix–Raviart 离散化证明准最优误差估计，且无需数据振荡项。

关键词 不可压缩斯托克斯问题；Navier–Lam´e问题；最小正则性估计；Prager–Synge型恒等式；凸对偶；离散凸对偶；混合边界条件。

P.A. G.-O. 衷心感谢查理大学研究计划 PRIMUS/25/SCI/025 和 UNCE/24/SCI/005 的资助。

P. A. Gazca-Orozco 查理大学数学与
物理学院 Sokolovsk´a 83 186 75，布
拉格 电子邮件：
gazca@karlin.mff.cuni.cz

A. Kaltenbach
数学研究所
柏林工业大学
六月十七日大街 136 号
10623 柏林
电子邮件：kaltenbach@math.tu-berlin.de

数学主题分类（2020年） 49M29 · 65N15 · 65N30 ·65N50 · 74F10 · 74B05

1 引言

Prager–Synge 恒等式（参见 [58]）是许多后验误差分析发展的基石。对于在有界 Lipschitz 域 $\Omega \subseteq \mathrm{R}^d$, $d \in \mathrm{N}$ 上、施加了完整齐次狄利克雷边界条件的经典泊松（极小化）问题 $f \in L^2(\Omega)$，即，

$$\text{Find } u \in H^1_0(\Omega) \quad \text{s.t.} \quad I(u) = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \left\{ I(v) \coloneqq \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2_\Omega - (f, v)_\Omega \right\}, \tag{1}$$

对于每个 $v \in H^1_0(\Omega)$， $\boldsymbol{r} \in H(\mathrm{div};\, \Omega)$，其散度 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{r} = -f$ 几乎处处属于 Ω，*Prager–Synge* 恒等式可写为

$$\tfrac{1}{2}\|\nabla u - \nabla v\|^2_\Omega + \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}\|^2_\Omega = \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{r} - \nabla v\|^2_\Omega \,. \tag{2}$$

这里，$(\cdot,\ \cdot)_\Omega$ 和 $\|\cdot\|_\Omega$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 内积和范数（具体符号将在下一节介绍）。向量场$\boldsymbol{q} \coloneqq \nabla u \in H(\mathrm{div};\, \Omega)$ 是与原始解 $u \in H^1_0(\Omega)$ 相关联的通量，实际上也是式 (1) 的对偶问题的解：

$$\text{Find } \begin{cases} \boldsymbol{q} \in H(\mathrm{div}; \Omega) \text{ with} \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{q} = -f \text{ a.e. in } \Omega \end{cases} \quad \text{s.t.} \quad D(\boldsymbol{q}) = \max_{\substack{\boldsymbol{r} \in H(\mathrm{div};\Omega) \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{r} = -f}} \left\{ D(\boldsymbol{r}) \coloneqq -\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{r}\|^2_\Omega \right\}. \tag{3}$$

在实践中，函数 $v \in H^1_0(\Omega)$以及满足$\mathrm{div}\, \boldsymbol{r} = -f$ 在 Ω 中几乎处处成立的向量场 $\boldsymbol{r} \in H(\mathrm{div};\, \Omega)$来自数值近似，而Prager–Synge恒等式(2)的右端给出了一个可计算的误差量，该误差量可局部化，并能以显式常数实现误差控制（更多细节与历史评述见 [63, 16]）。

Prager–Synge恒等式(2)的传统推导基于勾股恒等式，而该恒等式并不容易推广到非线性情形。然而，简单计算表明，对每一个 $v \in H^1_0(\Omega)$以及满足 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{r} = -f$在 Ω中几乎处处成立的$\boldsymbol{r} \in H(\mathrm{div}; \Omega)$，有

$$I(v) - I(u) = \tfrac{1}{2}\|\nabla u - \nabla v\|^2_\Omega \,, \tag{4}$$

$$D(\boldsymbol{q}) - D(\boldsymbol{r}) = \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}\|^2_\Omega \,. \tag{5}$$

换言之，对于凸优化问题，自然的误差度量（能量差）与通常意义下的误差并无二致。此外，由于泊松问题 (2) 满足强对偶关系 $I(u) = D(\boldsymbol{q})$（参见.[32, 命题 2.1，第 80] 页），不难看出，对于每个 $v \in H^1_0(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{r} \in H(\mathrm{div}; \Omega)$，只要 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{r} = -f$几乎处处成立于 Ω，就有

$$I(v) - I(u) + D(\boldsymbol{q}) - D(\boldsymbol{r}) = I(v) - D(\boldsymbol{r}) = \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{r} - \nabla v\|^2_\Omega \,. \tag{6}$$

Prager–Synge恒等式 (2) 的这一表述采用了所谓的原始-对偶间隙估计量 $\eta_{\mathrm{gap}}^2(\boldsymbol{r},\ v) := I(v) - D(\boldsymbol{r})$，其优点是，只要强对偶关系成立，就可以将其直接推广到更一般的一类能量泛函。对于形如 $I\colon\ W^{1,\ p}_{0}(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$, $p \in [1,+\infty]$ 的一类能量泛函，已有研究推导出此类恒等式；对每个 $v \in W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$，其定义为

$$I(v) := \int_{\Omega} \phi(\cdot, \nabla v)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} \psi(\cdot, v)\,\mathrm{d}x\,, \tag{7}$$

其中，$\phi\colon\ \Omega \times \mathrm{R}^d \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 和 $\psi\colon\ \Omega \times \mathrm{R} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 是满足适当增长条件和强制性条件的凸正规被积函数（参见 [68]），但它们也可能是非线性的、非光滑的（参见 [12,8,10,11] 和 [66,60,40,63,61],，其中的早期结果主要关注原始误差的上界）。

虽然 [12,8,10,11] 的结果相当一般，但所考虑的仅限于标量函数空间中的问题，其中载荷 f 属于 $L^{p'}(\Omega)$（而非（拓扑）对偶空间 $W^{-1,\ p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$）。本文的目标之一是将 [12,8,10,11] 中的思路拓展到向量值函数空间中的问题，具体而言，我们考虑不可压缩斯托克斯问题（参见 [69]）和 Navier–Lam´e 问题（参见 [54,47]）；此外，我们还针对属于能量空间对偶空间的一般载荷，以及非齐次混合边界条件开展分析。尽管相应的后验误差恒等式此前已通过其他方法推导出来（但所需假设更为严格），我们的分析仍是将其推广至非线性和/或非光滑向量问题的第一步。

在离散层面，我们对原始解采用 Crouzeix–Raviart 离散化，对通量（或应力）解采用 Raviart–Thomas逼近。例如，对于泊松问题 (1)，离散问题是求一个属于 Crouzeix–Raviart 空间 V_D^h 且满足零边界条件的函数 u_h（具体定义见第 2.1.1 节），使其最小化离散能量泛函 $I_h\colon\ V_D^h \to \mathrm{R}$，对每个由下式定义的 $v_h \in V_D^h$ 均成立

$$I_h(v_h) := \tfrac{1}{2}\|\nabla_h v_h\|_{\Omega}^2 - (f, \Pi_h v_h)_{\Omega}\,, \tag{8}$$

其中，∇_h 表示逐单元梯度算子，而 Π_h 表示将 V_D^h 正交投影到逐单元常数函数上的投影。投影算子 Π_h 的存在十分重要，因为它确保了对偶能量泛函 D_h 与 $\Sigma^h \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$之间成立强对偶关系，对每个由下式定义的 $\boldsymbol{r}_h \in \Sigma_h$均成立

$$D_h(\boldsymbol{r}_h) := -\tfrac{1}{2}\|\Pi_h \boldsymbol{r}_h\|_{\Omega}^2 - I^{\Omega}_{\{-\Pi_h f\}}(\operatorname{div} \boldsymbol{r}_h)\,, \tag{9}$$

其中，Σ^h 为最低阶 Raviart–Thomas 空间（具体定义见第 2.1.2 节）。

更确切地说，这意味着离散原始解 $u_h \in V_D^h$（即，式（8）的极小化子）和离散对偶解 $\boldsymbol{q}_h \in \Sigma_h$（即，式（9）的最大化元）满足 $I_h(u_h) = D_h(\boldsymbol{q}_h)$。正如 [9], 最近在标量Signorini问题离散化的误差分析中指出的，这使得我们能够推导出一个

Prager–Synge恒等式（2）的离散类比。对于任意满足 $\operatorname{div} \boldsymbol{r}_h = -\Pi_h f$ 在 Ω 中几乎处处成立的 $v_h \in V_D^h$ 和 $\boldsymbol{r}_h \in \Sigma^h$，该恒等式可写为

$$\tfrac{1}{2}\|\nabla_h u_h - \nabla_h v_h\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2}\|\Pi_h \boldsymbol{q}_h - \Pi_h \boldsymbol{r}_h\|_\Omega^2 = \tfrac{1}{2}\|\Pi_h \boldsymbol{r}_h - \nabla_h v_h\|_\Omega^2 . \tag{10}$$

先验恒等式 (10) 刻画了任意离散可容许函数与离散解之间的距离，可用于非精确线性求解器的停止准则。本文利用先验恒等式 (10) 证明上述离散化是准最优的，即离散化误差与最佳逼近误差等价，也就是说，

$$\begin{aligned}\|\nabla_h u_h - \nabla u\|_\Omega^2 + \|\Pi_h \boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}\|_\Omega^2 \sim \inf_{v_h \in V_D^h} \left\{\|\nabla_h v_h - \nabla u\|_\Omega^2\right\} \\ + \inf_{\substack{\boldsymbol{r}_h \in \Sigma^h \\ \operatorname{div} \boldsymbol{r}_h = -\Pi_h f}} \left\{\|\Pi_h \boldsymbol{r}_h - \boldsymbol{q}\|_\Omega^2\right\},\end{aligned} \tag{11}$$

其中，等价关系“∼”中涉及的隐含常数不依赖于任何参数。我们强调，拟最优性结果 (11) 只需最小正则性假设（仅需 $u \in H_0^1(\Omega)$），并且后文将证明，该结果对更一般的载荷和混合边界条件也成立。此外，请注意，(11) 中没有数据振荡项，这与 [38] 中的经典结果不同。即使对于泊松问题 (1)，这一观察似乎也是新的；据作者所知，对于泊松问题 (1) 的 Crouzeix–Raviart 离散化，唯一其他真正具有最小正则性的准最优性结果是 [71]，的结果，该结果要求实现所谓的平滑算子，且涉及一个依赖于形状正则性、无法显式给出的常数（详情请参见备注 4）。

1.1 不可压缩斯托克斯问题

不可压缩 Stokes（极小化）问题（参见 [69]）目前考虑齐次 Dirichlet 边界条件，旨在寻找一个速度向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^d$，使能量泛函 $I\colon \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 达到极小值。对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$，该泛函定义为

$$I(\boldsymbol{v}) := \tfrac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{v}\|_\Omega^2 + I_{\{0\}}^\Omega(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega , \tag{12}$$

其中，$\nu > 0$ 为运动黏度，$\boldsymbol{f}^* \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ 为给定的体力，$\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ 表示 $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ 与 $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 之间的对偶配对；示性泛函 $I_{\{0\}}^\Omega\colon L^2(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$，对于每个 $\widehat{v} \in L^2(\Omega)$，定义为

$$I_{\{0\}}^\Omega(\widehat{v}) := \begin{cases} 0 & \text{if } \widehat{v} = 0 \text{ a.e. in } \Omega , \\ +\infty & \text{else} . \end{cases}$$

这一零散度约束构成了不可压缩斯托克斯问题 (12) 中的主要难点，而泊松问题 (1) 中不存在这一难点。

利用 $\mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ 中单元的标准表示公式，即，固定 $\boldsymbol{f} \in \mathsf{L}^2(\Omega) := (L^2(\Omega))^d$ 和 $\mathsf{F} \in \mathsf{L}^2(\Omega) := (L^2(\Omega))^{d\times d}$，使得

$$\langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_\Omega + (\mathsf{F}, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega \quad \text{for all } \boldsymbol{v} \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)\,,$$

对偶能量泛函 D：对每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathsf{H}(\mathrm{div};\Omega)$，$\mathsf{F} + \mathsf{H}(\mathrm{div};\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 由下式给出

$$D(\boldsymbol{\tau}) := -\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|^2_\Omega - I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}(\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}))\,, \tag{13}$$

其中 $\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{d}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathsf{I} \in \mathsf{L}^2(\Omega)$ 是 $\boldsymbol{\tau}$ 的偏应变部分，且 $\mathsf{H}(\mathrm{div};\Omega) := (H(\mathrm{div};\Omega))^d$。类似于 Prager–Synge恒等式 (1)，可以利用 (12) 的唯一极小化元 $\boldsymbol{u} \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$ 与 (13) 的唯一极大元 $\mathsf{T} \in \mathsf{F} + \mathsf{H}(\mathrm{div};\Omega)$（它表示柯西应力）之间的强对偶关系 $I(\boldsymbol{u}) = D(\mathsf{T})$，对任意满足 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立的 $\boldsymbol{v} \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$，以及满足 $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f}$ 在 Ω 中几乎处处成立的 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathsf{H}(\mathrm{div};\Omega)$，导出后验误差恒等式：

$$\tfrac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{v} - \nabla \boldsymbol{u}\|^2_\Omega + \tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} - \mathrm{dev}\,\mathsf{T}\|^2_\Omega = \tfrac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{v} - \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|^2_\Omega\,. \tag{14}$$

为了能够利用恒等式 (14) 对误差进行后验估计，需要构造一个可容许张量场 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathsf{H}(\mathrm{div};\Omega)$，使得 $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f}$ 在 Ω中几乎处处成立。为此，可以采用诸如 [30,41,2,24] 之类的经典应力平衡化方法。受 Marini [29],工作的启发，已针对若干问题推导出一种重构公式，它可为给定的 Crouzeix–Raviart 近似提供离散对偶解（参见. [22,53,52,21,8,10]）。对于 $\mathsf{F} = \mathbf{0}$ 在 Ω中几乎处处成立的不可压缩斯托克斯问题，该公式具有如下形式（参见. [21]）

$$\mathsf{T}_h = \nu\nabla_h \boldsymbol{u}_h - p_h\mathsf{I} - \tfrac{1}{d}\Pi_h \boldsymbol{f} \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - \Pi_h \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{u}_h \in V^h_D$ 表示 Crouzeix–Raviart速度向量场，而 $p_h \in \mathsf{P}^0(\mathcal{T}_h)$ 是离散（分片常值）运动压力场。本文证明，公式 (15) 在最小正则性设定下，对于如 [21] 中那样更一般的载荷和边界条件仍然成立（参见. 命题1）。关于向量场 $\boldsymbol{v} \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$，恒等式 (14) 要求它严格无散，而近似通常并非如此，因此一般需要后处理。对于 Crouzeix–Raviart速度向量场 $\boldsymbol{u}_h \in V^h_D$，[73]中描述了一种合适的后处理。然而，若不希望进行这种后处理，我们还给出一个结果，使得可以采用任意的 $\boldsymbol{v} \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$（参见. 定理6）；其代价是 (10) 中的等式变为等价性，尽管带有一个仅依赖于所谓偏差-散度不等式之常数的显式常数（见下文 (23)）；我们注意到，在更严格的假设下，[64,62,46]中已得到结构类似的估计。

与泊松问题 (1) 类似，我们证明，在满足以下

最小正则性假设（参见 定理 2）：

$$\begin{aligned}&\tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{u}_h - \nabla \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2\nu}\|\Pi_h \text{偏 T}_h - \text{偏 T}\|_\Omega^2 \\ &\sim \inf_{\boldsymbol{v}_h \in V_D^h} \left\{ \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h - \nabla \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 \right\} + \inf_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma^h \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \Pi_h \mathsf{F}) = -\Pi_h f}} \underbrace{\left\{ \tfrac{1}{2\nu}\|\text{偏差 } \Pi_h \boldsymbol{\tau}_h - \text{偏差 T}\|_\Omega^2 \right\}}_{},\end{aligned}$$

其中，等价性“∼”中涉及的隐含常数不依赖于任何参数。据作者所知，对于不可压缩斯托克斯问题 (12) 的 Crouzeix–Raviart 近似，唯一其他具有最小正则性要求的准最优性结果是 [73, Thm. 4.2], ，它同样要求实现一个平滑算子，并且涉及的常数可能依赖于形状正则性（参见注 3）。

1.2 Navier–Lam´e 问题

Navier–Lam´e（极小化）问题（参见 [54,47]）目前考虑齐次 Dirichlet 边界条件，旨在寻找一个位移向量场$\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$，使能量泛函 $I\colon \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{R}$ 对每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 取到极小值

$$I(\boldsymbol{v}) := \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}), \mathfrak{e}(\boldsymbol{v}))_\Omega - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega . \tag{16}$$

其中，$\mathsf{C} : \mathrm{R}^{d\times d} \to \mathrm{R}^{d\times d}$表示线弹性张量 （其精确定义见第 4.1 节），$\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}) := \tfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^\top)$ 表示对称梯度算子，而 $\boldsymbol{f}^* \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ 是给定的载荷。与不可压缩斯托克斯问题（12）类似，对偶能量泛函 $D\colon \mathsf{F} + \mathrm{H}(\operatorname{div};\, \Omega) \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ 对每个由下式定义的 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathrm{H}(\operatorname{div};\, \Omega)$

$$D(\boldsymbol{\tau}) := -\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})_\Omega - I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F})) - I^\Omega_{\{0\}}(\operatorname{skew} \boldsymbol{\tau}) , \tag{17}$$

其中，第二个示性泛函体现了应力应满足对称性的事实。这是 Navier–La m´e 问题的主要难点之一，因为尽管后验误差恒等式（类似于（10））[58,65,63,48], 在实践中可用，但构造 $\mathrm{H}(\operatorname{div};\Omega)$-相容的对称近似解颇具挑战。自然地，如果采用了强制精确对称性的离散化或平衡过程，例如 [55, 3,4,67,48], 中所述的方法，就可以使用该误差恒等式。本文则在分析中采用扩展对偶能量泛函 $D\colon \mathsf{F} + \mathrm{H}(\operatorname{div};\, \Omega) \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$，该泛函只需去掉对称性要求即可得到，并推导出一个后验等价关系。对于任意满足 $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f}$ a.e. in Ω 的 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathrm{H}(\operatorname{div};\Omega)$，该关系写作：

$$\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\|_\Omega^2 + \|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})\|_\Omega^2 \sim \|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}) - \mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|_\Omega^2 , \tag{18}$$

其中 $\|\mathsf{C}^{\frac{1}{2}}(\cdot)\|_\Omega^2 := (\mathsf{C}(\cdot)\,\cdot)_\Omega$, $\|\mathsf{C}^{-\frac{1}{2}}(\cdot)\|_\Omega^2 := (\mathsf{C}^{-1}(\cdot)\,\cdot)_\Omega$, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathsf{F} + \mathrm{H}(\operatorname{div};\, \Omega)$，且 $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f}$在 Ω中几乎处处成立，而 $\boldsymbol{\sigma}^\top = \boldsymbol{\sigma}$在 Ω中几乎处处成立，表示对偶解（即弹性应力张量场），等价关系中的隐含常数

“∼”仅取决于局部 Korn 常数。尽管此前已在 Navier–Lam´e 问题的背景下推导出此类估计（参见 [44,45,31,17]）（通常对数据和边界条件施加了更严格的假设），但我们在此提出的基于凸对偶的论证，更易于应用于 Navier–La m´e 问题的非线性和／或非光滑推广（以及不可压缩斯托克斯问题）。

与泊松问题 (1) 和不可压缩斯托克斯问题 (12) 类似，在离散层面应用这些思路，我们能够推导出一个具有最小正则性的先验 误差估计。为了解决 Crouzeix– Raviart 向量场不满足 Korn 不等式这一众所周知的事实（参见. [36]），我们考虑一种包含跳跃稳定化项 $s_h(\cdot,\cdot)$ 的离散形式。由于存在稳定化项 $s_h(\cdot,\cdot)$，无法按通常方式定义一个具有鞍点结构、且离散应力属于 Raviart–Thomas 空间的相应混合形式，因此在离散层面，我们不推导误差恒等式。不过，通过采用离散能量范数

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_h^2 := \|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h)\|_\Omega^2 + s_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h), \quad \boldsymbol{v}_h \in V^h, \tag{19}$$

其中，$\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h) := \frac{1}{2}(\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \boldsymbol{v}_h^\top)$ 表示逐单元的对称梯度算子，我们仍能够证明以下最小正则性误差界（见定理 4）：

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_h^2 \lesssim \inf_{\boldsymbol{v}_h \in V_D^h} \left\{\|\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}\|_h^2\right\} + \inf_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma^h \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{r}_h - \Pi_h \mathsf{F}) = -\Pi_h f}} \left\{\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h)\|_\Omega^2\right\},$$

其中 Σ^h 表示最低阶（向量）Raviart–Thomas 空间（无对称性条件），估计‘$\lesssim$’中所涉及的隐式常数仅依赖于范数 $\|\cdot\|_h$所满足的离散 Korn 常数。尽管仅涉及位移最佳逼近误差的估计更为理想，但我们强调，与更为经典的 Crouzeix–Raviart 逼近估计（例如 [42, 定理 3.1]）不同，我们的结果仅需最小正则性，从而在所需附加正则性具备时得到最优分数阶收敛率。此外，我们还给出离散应力重构公式:

$$\boldsymbol{\sigma}_h^* := \mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{u}_h) + \nabla_h \boldsymbol{r}_h - \tfrac{2}{d+1}\operatorname{sym}\left(\boldsymbol{f}_h \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - \Pi_h \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})\right) \quad \text{a.e. in } \Omega, \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{r}_h \in V_D^h$ 表示跳跃稳定化形式$s_h(\boldsymbol{u}_h,\cdot) \in (V_D^h)^*$的 Crouzeix–Raviart 提升。由此给出逐单元仿射的 H(div; Ω)协调应力逼近，其计算代价与离散原始问题相当，其对称性缺失可用 $\boldsymbol{u}_h \in V_D^h$ 的跳跃来量化（更多细节见注 10 与注 11）。

本文结构安排如下： 第 2 节介绍泛函分析框架、符号约定和离散化要素。第 3 节阐述不可压缩斯托克斯问题的原始-对偶形式，通过凸对偶性推导连续和离散误差恒等式，并证明 Crouzeix–Raviart 离散化在最低正则性条件下的准最优性。第 4 节

介绍 Navier–Lam´e 问题的相应理论，包括对偶形式、后验 等价性，以及离散应力重构。第 5 节报告数值实验，展示并支持理论结果。

2 预备知识

全文中，我们用 $\Omega \subseteq \mathrm{R}^d$, $d \geq 2$ 表示一个有界多面体 Lipschitz域，其（拓扑）边界 $\partial\Omega$ 被划分为一个相对开狄利克雷部分 Γ_D 和一个相对开诺伊曼部分 Γ_N,–即，我们有 $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ 和 $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$。为简单起见，假设 $\Gamma_D \neq \emptyset$。接下来，我们采用以下函数空间的标准记号：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}^2(\Omega) := (L^2(\Omega))^d, \quad \mathbb{L}^2(\Omega) := (L^2(\Omega))^{d\times d}, \quad \mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) := (L^2(\Omega))^{d\times d}_{\mathrm{sym}},\\
&\mathbf{H}^1(\Omega) := (H^1(\Omega))^d, \quad \mathbf{H}^1_D(\Omega) := \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ q.e. in } \Gamma_D\right\},\\
&\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\gamma) := (H^{\frac{1}{2}}(\gamma))^d \text{ for } \gamma \in \{\partial\Omega, \Gamma_D, \Gamma_N\},\\
&\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N) := \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N) \mid \text{对 } \boldsymbol{v} \text{ 的零延拓 } \widetilde{\boldsymbol{v}} \text{ 属于 } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\}, \mathbf{H}(\mathrm{div};\,\Omega)\\
&:= \left\{\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,d\}} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}.
\end{aligned}
$$

对于任意（勒贝格）可测集 $\omega \subseteq \Omega$，将标准内积或范数限制到 ω 上的 $L^2(\Omega)$、$\mathbf{L}^2(\Omega)$ 和 $\mathbb{L}^2(\Omega)$，分别记为 $(\cdot,\cdot)_\omega$ 和 $\|\cdot\|_\omega$。对于对偶配对，我们采用以下简写记号

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega &:= \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \qquad \forall\, \boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}^{-1}_D(\Omega) := (\mathbf{H}^1_D(\Omega))^*,\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega),\\
\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle_{\partial\Omega} &:= \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \qquad \forall\, \boldsymbol{w} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*,\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\\
\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}\rangle_{\Gamma_N} &:= \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N)} \qquad \forall\, \boldsymbol{g} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N) := (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N))^*,\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N).
\end{aligned}
$$

最后，采用上述记号，我们现在定义 $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ 中在诺伊曼边界部分 Γ_N 上法向迹为零（广义意义下）的张量场子空间，即即，

$$
\mathbf{H}_N(\mathrm{div};\Omega) := \left\{\mathsf{T} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \mid \mathsf{T}\boldsymbol{n} = \mathbf{0} \text{ in } \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N)\right\}.
$$

本文的目标之一是针对一般载荷 $\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)$进行数值分析。为此，我们采用关于（拓扑）对偶空间 $\mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)$ 的一个著名表示定理。

引理 1 对于每个载荷 $\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)$，存在一个向量场 $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$和一个张量场 $\mathsf{F} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$，使得对每个 $\mathrm{H}^1_D(\Omega)$，均有

$$
\langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_\Omega + (\mathsf{F}, \nabla\boldsymbol{v})_\Omega. \tag{21}
$$

此外，有

$$
\|\boldsymbol{f}^*\|_{\mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)} = \min\left\{\|\boldsymbol{f}\|_\Omega + \|\mathsf{F}\|_\Omega \mid \boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\, \mathsf{F} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \ \textit{with}\ (21)\right\}. \tag{22}
$$

换言之，$H_D^{-1}(\Omega)$ 与和空间 $L^2(\Omega)+div(L^2(\Omega))$ 等距同构，并配备通常的和范数，其中像空间 $div(L^2(\Omega))$ 相对于分布逐行散度算子 $div: L^2(\Omega) \to H_D^{-1}(\Omega)$ 配备通常的像范数，对由下式定义的每一个$\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)$ 与 $\boldsymbol{v} \in H_D^1(\Omega)$

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega := -(\boldsymbol{\tau}, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega .$$

证明 见 [1,定理 3.8]。

对于不可压缩斯托克斯问题的分析，我们将采用*dev-div*不等式 （参见 [14, 定理 3.1] ，假设在 $\partial\Omega$ 的某一部分上满足法向迹边界条件；以及 [18, 命题 9.1.1] ，假设满足零均值条件）。该不等式指出，存在一个常数 $c_{\mathrm{DD}} > 0$，称为*dev-div*常数，它仅依赖于区域 Ω，使得对任意 $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$，均有

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_\Omega \le c_{\mathrm{DD}} \big\{ \|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_\Omega + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)} \big\} . \tag{23}$$

这里，张量场 $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$的偏应变部分 定义为

$$\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\tau} - \tfrac{1}{d} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathsf{I} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) ,$$

其中，$\mathsf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,d} \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 表示单位矩阵，是 $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$的无迹部分。

对于Navier–Lam´e问题的分析，我们将采用<Korn 不等式的style id='2'>Korn's inequality （参见 [25,定理 6.3-4]），该不等式指出，存在一个常数$c_{\mathrm{K}} > 0$，即所谓的<Korn常数的style id='9'>Korn constant，它仅依赖于 Ω，使得对任意$\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$，均有

$$\|\nabla \boldsymbol{v}\|_\Omega^2 \le c_{\mathrm{K}} \|\mathfrak{e}(\boldsymbol{v})\|_\Omega^2 , \tag{24}$$

其中，向量场（或位移场） $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$的对称梯度（或应变张量）定义为

$$\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}) := \tfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^\top) \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) .$$

注意，当 $\Gamma_D = \partial\Omega$ 时，我们有 $c_{\mathrm{K}} = 2$ （参见 [25, 第 294] 页）。

2.1 三角剖分

在全文中，我们用 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 表示 $\Omega \subseteq \mathrm{R}^d$, $d \ge 2$ 的一族三角剖分（参见 [34, 定义 11.2]），其由闭单纯形 T 构成。下标 h 表示平均网格尺寸，即，记 $\mathcal{T}_h$ 的顶点集为 $\mathcal{N}_h$ ，我们定义

$$h := \big(\tfrac{|\Omega|}{\operatorname{card}(\mathcal{N}_h)} \big)^{\frac{1}{d}} .$$

我们假设三角剖分族 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 是形状正则的，即，对于每个 $T \in \mathcal{T}_h$，记 $h_T := \operatorname{diam}(T)$ 为 T 的直径，并记 $\rho_T :=$

$\sup\{r > 0 \mid \exists x \in T\colon \quad B_r^d(x) \subseteq T\}$ 为 T 中内切球直径的上确界，我们假设存在一个常数 $\omega_0 > 0$，称为 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 的块状度，其与 $h > 0$ 无关，使得 $\max_{T\in\mathcal{T}_h} \left\{ \frac{h_T}{\rho_T} \right\} \leq \omega_0$。此外，我们引入内部边集合 $\mathcal{S}_h^i$、边界边 $\mathcal{S}_h^\partial$以及所有边 $\mathcal{S}_h$，它们与所关注的有限元空间的自由度相关，并定义为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_h &:= \mathcal{S}_h^i \cup \mathcal{S}_h^\partial \,, \\
\mathcal{S}_h^i &:= \left\{ T \cap T' \mid T, T' \in \mathcal{T}_h \,, \dim_{\mathcal{H}}(T \cap T') = d - 1 \right\} , \\
\mathcal{S}_h^\partial &:= \left\{ T \cap \partial\Omega \mid T \in \mathcal{T}_h \,, \dim_{\mathcal{H}}(T \cap \partial\Omega) = d - 1 \right\} ,
\end{aligned}
$$

其中，豪斯多夫维数定义为 $\dim_{\mathcal{H}}(\omega) := \inf\{d' \geq 0 \mid \mathcal{H}^{d'}(\omega) = 0\}$对所有 $\omega \subseteq \mathrm{R}^d$ 均成立。狄利克雷边集合 $\mathcal{S}_h^D$和诺伊曼边集合 $\mathcal{S}_h^N$分别定义为

$$
\mathcal{S}_h^{\mathrm{X}} := \{ S \in \mathcal{S}_h^\partial \mid \mathrm{int}(S) \subseteq \Gamma_{\mathrm{X}} \} \quad \text{for X} \in \{D, N\} \,,
$$

其中，我们假设三角剖分 $\mathcal{T}_h$ 满足 $\mathcal{S}_h^\partial = \mathcal{S}_h^D \dot\cup \mathcal{S}_h^N$。

对于 $k \in \mathrm{N}_0$ 和 $T \in \mathcal{T}_h$，令 $\mathrm{P}^k(T)$ 表示 T 上最高次数为 k 的多项式空间。于是，对于 $k \in \mathrm{N}_0,$，最高次数为的逐单元多项式函数空间定义为

$$
\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h) := \left\{ v_h \in L^\infty(\Omega) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T) \text{ for all } T \in \mathcal{T}_h \right\} .
$$

（局部） L^2-投影算子 $\Pi_h \colon (L^1(\Omega))^\ell \to (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^\ell$, $\ell \in \{1, d, d \times d\}$，分别投影到逐单元常数函数、向量场或张量场，对于每个 $\boldsymbol{v} \in (L^1(\Omega))^\ell$，定义为

$$
\Pi_h \boldsymbol{v}|_T := \tfrac{1}{|T|}(\boldsymbol{v}, 1)_T \quad \text{for all } T \in \mathcal{T}_h \,.
$$

对每个$\boldsymbol{v}_h \in (L^1(\cup\mathcal{S}_h))^\ell$，定义（局部） L^2-投影算子 $\pi_h \colon (L^1(\cup\mathcal{S}_h))^\ell \to (\mathrm{P}^0(\mathcal{S}_h))^\ell$, $\ell \in \{1, d, d \times d\}$，它将定义在 $\cup\mathcal{S}_h$上的逐边常数函数空间$\mathrm{P}^0(\mathcal{S}_h)$分别投影到逐边常数函数、向量场或张量场上，定义为

$$
\pi_h \boldsymbol{v}_h|_S := \tfrac{1}{|S|}(\boldsymbol{v}, 1)_S \quad \text{for all } S \in \mathcal{S}_h \,.
$$

对于 $k \in \mathrm{N}$，逐单元梯度算子 $\nabla_h \colon (\mathrm{P}^k(\mathcal{T}_h))^\ell \to (\mathrm{P}^{k-1}(\mathcal{T}_h))^{\ell \times d}$, $\ell \in \{1, d, d \times d\}$，对每个 $\boldsymbol{v}_h \in (\mathrm{P}^k(\mathcal{T}_h))^\ell$，定义为 $\nabla_h \boldsymbol{v}_h|_T := \nabla(\boldsymbol{v}_h|_T)$，对所有 $T \in \mathcal{T}_h$ 均成立；逐单元散度算子 $\mathrm{div}_h \colon (\mathrm{P}^k(\mathcal{T}_h))^{d\times\ell} \to (\mathrm{P}^{k-1}(\mathcal{T}_h))^\ell$, $\ell \in \{1, d\}$，对每个 $\boldsymbol{v}_h \in (\mathrm{P}^k(\mathcal{T}_h))^{d\times\ell}$，定义为 $(\mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h|_T)_i := \mathrm{div}(\mathrm{e}_i^\top \boldsymbol{v}_h|_T)$[1]，对所有 $T \in \mathcal{T}_h$ 和 $i = 1, \ldots, \ell$ 均成立。

[1] 对于每个 $i = 1, \ldots, d$，我们用$\mathbf{e}_i$ 表示第 i个单位向量：$= (\delta_{ij})_{j=1,\ldots,d} \in \mathrm{S}^{d-1}$。

2.1.1 Crouzeix–Raviart 元

Crouzeix–Raviart 空间 （即 [27]）（分别在 Γ_D 上满足齐次狄利克雷边界条件）定义为

$$V^h \coloneqq \left\{ \boldsymbol{v}_h \in (\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h))^d \mid \pi_h[\![\boldsymbol{v}_h]\!] = \mathbf{0} \text{ q.e. in } \cup \mathcal{S}_h^i \right\},$$
$$V_D^h \coloneqq \left\{ \boldsymbol{v}_h \in V^h \mid \pi_h \boldsymbol{v}_h = \mathbf{0} \text{ q.e. in } \cup \mathcal{S}_h^D \right\}.$$

此处，对每个 $\boldsymbol{v}_h \in (\mathrm{P}^1(\mathcal{T}_h))^d$，跳跃（跨 $\mathcal{S}_h$） $[\![\boldsymbol{v}_h]\!] \in (\mathrm{P}^1(\mathcal{S}_h))^d$ 由 $[\![\boldsymbol{v}_h]\!]|_S$ 定义：$= [\![\boldsymbol{v}_h]\!]_S$ 对所有 $S \in \mathcal{S}_h$，其中，对每个 $S \in \mathcal{S}_h$，跳跃（跨 S） $[\![\boldsymbol{v}_h]\!]_S \in (\mathrm{P}^1(S))^d$ 定义为

$$[\![\boldsymbol{v}_h]\!]_S \coloneqq \begin{cases} \boldsymbol{v}_h|_{T_+} - \boldsymbol{v}_h|_{T_-} & \text{if } \begin{cases} S \in \mathcal{S}_h^i \text{ and } T_+, T_- \in \mathcal{T}_h \\ \quad \text{with } \partial T_+ \cap \partial T_- = S, \end{cases} \\ \boldsymbol{v}_h|_T & \text{if } S \in \mathcal{S}_h^\partial \text{ and } T \in \mathcal{T}_h \text{ with } S \subseteq \partial T. \end{cases} \tag{25}$$

众所周知，Crouzeix–Raviart 函数不满足与 (24) 类似的离散 Korn 不等式（参见. [37]）。为确保 Korn 不等式在离散层面成立，通常引入一个有界且对称的稳定化双线性型 $s_h \colon V^h \times V^h \to \mathbb{R}$（参见. [19]），从而存在与 $h > 0$ 无关的常数 $c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{disc}} > 0$，使得对每个 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，有

$$\|\mathbb{C}\nabla_h \boldsymbol{v}_h\|_\Omega^2 \le c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{disc}} \left\{ \|\mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h)\|_\Omega^2 + s_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \right\}, \tag{26}$$

其中，为方便起见，我们引入弹性张量 $\mathbb{C} \colon \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$，其定义见后文（参见（94））。然后，对于每个 $\boldsymbol{v}_h$，$\boldsymbol{w}_h \in V_D^h$，在空间 V_D^h 上定义另一种内积及其相应的诱导范数：

$$(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)_h \coloneqq (\mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h), \mathfrak{e}_h(\boldsymbol{w}_h))_\Omega + s_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h), \tag{27a}$$
$$\|\boldsymbol{v}_h\|_h^2 \coloneqq \left((\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h)_h\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{27b}$$

s_h 在（26）中的一种典型选择是采用标准的跳跃惩罚；对于每个 $\boldsymbol{v}_h$，$\boldsymbol{w}_h \in V^h$，其定义为

$$s_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) \coloneqq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^i \cup \mathcal{S}_h^D} \int_S \frac{2\mu}{h_S} [\![\boldsymbol{v}_h]\!]_S [\![\boldsymbol{w}_h]\!]_S \,\mathrm{d}s, \tag{28}$$

其中，对于所有 $S \in \mathcal{S}_h$，有 $h_S \coloneqq \mathrm{diam}(S)$；此外，为方便起见，我们引入剪切模量 μ（参见（94））。

V^h 的一个基由 $\boldsymbol{\varphi}_S^i \in V^h$, $S \in \mathcal{S}_h$, $i = 1, \ldots, d$ 给出，并满足 $\boldsymbol{\varphi}_S^i(x_{S'}) = \delta_{S,S'}\mathbf{e}_i$ 对所有 $S, S' \in \mathcal{S}_h$ 以及 $i = 1, \ldots, d$ 均成立。于是，对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$，由下式定义的典范（拟）插值算子 $\mathcal{I}_h^{cr} \colon \mathbf{H}_D^1(\Omega) \to V_D^h$ (参见. [34, 第 36.2.1–2]节).....

$$\mathcal{I}_h^{cr} \boldsymbol{v} \coloneqq \sum_{i=1,\ldots,d} \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \tfrac{1}{|S|} (\boldsymbol{v}, \mathbf{e}_i)_S \, \boldsymbol{\varphi}_S^i, \tag{29}$$

具有保结构性质，即，对于每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有

$$\nabla_h(\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{v}) = \Pi_h(\nabla\boldsymbol{v}) \qquad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{30a}$$
$$\operatorname{div}_h(\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{v}) = \Pi_h(\operatorname{div}\boldsymbol{v}) \qquad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{30b}$$

梯度保持性质 (30a) 意味着，对于每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有

$$\|\nabla\boldsymbol{v}-\nabla_h(\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{v})\|_\Omega^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\inf_{\mathsf{A}_T\in(\mathbb{P}^0(T))^{d\times d}}\left\{\|\nabla\boldsymbol{v}-\mathsf{A}_T\|_T^2\right\}, \tag{31}$$

对于具有额外正则性 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)\cap\mathbf{H}^{1+s}(\mathcal{T}_h)$[2],的函数，其中 $s\in(0,1]$, 意味着

$$\|\nabla\boldsymbol{v}-\nabla_h(\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{v})\|_\Omega^2 \le c_{cr}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2s}|\boldsymbol{v}|^2_{\mathbf{H}^{1+s}(T)}\,, \tag{32}$$

其中，$c_{cr}=\frac{1}{\pi^2}$ 若 $s=1$，则为 $c_{cr}>0$；否则为依赖于 ω_0 的常数 (参见[15, 定理 3.2]（针对 $s=1$）和 [43, 命题 2.2]（针对 $s\in(0,\,1)$）)。类似地，对于每个$\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，若 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}\in H^s(\mathcal{T}_h)$ 且 $s\in(0,1],$，则散度保持性质 (30b) 得出

$$\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}-\operatorname{div}_h(\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{v})\|_\Omega^2 \le c_{cr}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2s}|\operatorname{div}\boldsymbol{v}|^2_{H^s(T)}\,. \tag{33}$$

2.1.2 Raviart–Thomas 元

Raviart–Thomas 空间（参见 [59]）（分别在 Γ_N 上满足齐次法向边界条件）定义为

$$\Sigma^h := \left\{\boldsymbol{\tau}_h\in(\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h))^{d\times d}\;\middle|\;\begin{array}{l}(\boldsymbol{\tau}_h|_T)\mathbf{n}_T=\text{const on }\partial T\text{ for all }T\in\mathcal{T}_h\,,\\ [\![\boldsymbol{\tau}_h\mathbf{n}]\!]_S=\mathbf{0}\text{ on }S\text{ for all }S\in\mathcal{S}_h^i\end{array}\right\},$$
$$\Sigma_N^h := \left\{\boldsymbol{\tau}_h\in\Sigma^h\mid\boldsymbol{\tau}_h\mathbf{n}=\mathbf{0}\text{ q.e. in }\Gamma_N\right\}.$$

这里，对于每个 $\boldsymbol{\tau}_h\in(\mathrm{P}^1(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$，（跨越 $\mathcal{S}_h$的法向跳跃）$[\![\boldsymbol{\tau}_h\boldsymbol{n}]\!]\in(\mathrm{P}^1(\mathcal{S}_h))^d$定义为 $[\![\boldsymbol{\tau}_h\boldsymbol{n}]\!]|_S=[\![\boldsymbol{\tau}_h\boldsymbol{n}]\!]_S$ 对所有 $S\in\mathcal{S}_h$，其中，对于每个 $S\in\mathcal{S}_h$，（跨越 S的法向跳跃）$[\![\boldsymbol{\tau}_h\boldsymbol{n}]\!]\in(\mathrm{P}^1(S))^d$ 定义为

$$[\![\boldsymbol{\tau}_h\boldsymbol{n}]\!]_S := \begin{cases}\boldsymbol{\tau}_h|_{T_+}\boldsymbol{n}_{T_+}+\boldsymbol{\tau}_h|_{T_-}\boldsymbol{n}_{T_-} & \text{if }\begin{cases}S\in\mathcal{S}_h^i\text{ and }T_+,T_-\in\mathcal{T}_h\\ \quad\text{with }\partial T_+\cap\partial T_-=S\,,\end{cases}\\ \boldsymbol{\tau}_h|_T\boldsymbol{n} & \text{if } S\in\mathcal{S}_h^\partial\text{ and }T\in\mathcal{T}_h\text{ with }S\subseteq\partial T\,.\end{cases}$$

对于 Raviart–Thomas 空间，也可以构造一种保持结构的插值算子。例如，可以采用（准）插值

[2] 对于 $s>0$，我们设 $H^s(\mathcal{T}_h):=\{v\in L^2(\Omega)\mid v|_T\in H^s(T)\ \forall T\in\mathcal{T}_h\}$，$\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h):=(H^s(\mathcal{T}_h))^d$，$\mathrm{H}^s(\mathcal{T}_h):=(H^s(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。

算子 $\mathcal{I}_h^{rt}$: $\mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega) \to \Sigma_N^h$从 [33], 出发，对于任意 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$，均满足散度保持性质

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{I}_h^{rt}\boldsymbol{\tau}) = \Pi_h(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}) \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{34}$$

此外，这个插值算子实际上是一个投影算子，并满足局部稳定性和逼近性质。但对我们而言，推导最优逼近估计的一个关键组成部分至关重要。更确切地说，对于每个 $s \in [0,1]$，都存在一个常数 $c_{rt} > 0$，它仅依赖于 s、d 和块状度 ω_0，使得对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega) \cap \mathrm{H}^s(\mathcal{T}_h)$，都有（参见。 [33, 定理 3.6]）

$$\inf_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma_N^h \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h = \Pi_h \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}}} \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 \le c_{rt} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2s} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{H}^s(T)}^2 + \delta_{s<1} h_T^2 \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\|_T^2 \right\}, \tag{35}$$

其中，若 $s < 1$，则 $\delta_{s<1} = 1$；若 $s = 1$，则 $\delta_{s<1} = 0$。

2.1.3 离散分部积分公式

对于任意 $\boldsymbol{v}_h \in V^h$ 和 $\mathsf{T}_h \in \Sigma^h$，都有如下离散分部积分公式

$$(\nabla_h \boldsymbol{v}_h, \Pi_h \mathsf{T}_h)_\Omega = -(\Pi_h \boldsymbol{v}_h,\, \mathrm{div}\,\mathsf{T}_h)_\Omega + (\mathsf{T}_n \mathbf{n}, \pi_h \boldsymbol{v}_h)_{\partial\Omega}\,. \tag{36}$$

此外，对我们的分析至关重要的是（相对于内积 $(\cdot,\ \cdot)_\Omega$ 正交的）离散 *Helmholtz–Weyl* 分解（参见。 [13,20]）

$$(\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d} = \ker(\mathrm{div}|_{\Sigma_N^h}) \oplus \nabla_h(V_D^h)\,. \tag{37}$$

除此之外，还成立以下正交关系（参见 [13, 第 2 节4]）：

$$(\Pi_h \Sigma_N^h)^{\perp_{\mathbb{L}^2}} = \nabla_h(\ker \Pi_h|_{V_D^h})\,, \tag{38a}$$
$$(\Pi_h V_D^h)^{\perp_{\mathbb{L}^2}} = \mathrm{div}\,(\ker \Pi_h|_{\Sigma_N^h})\,. \tag{38b}$$

3 不可压缩斯托克斯问题

本节考虑不可压缩斯托克斯问题。该问题由 G. G. Stokes 于 1845年 在其关于流体内摩擦的著作 [69] 中首次提出，用于描述低雷诺数下不可压缩黏性牛顿流的运动。

3.1 原始问题

设 $\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$ 为给定载荷，$\boldsymbol{u}_D \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ 为给定的狄利克雷边界数据。对于狄利克雷边界数据，我们假设存在一个向 Ω 内部的不可压缩提升，即，存在一个向量场 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D \in \mathrm{H}^1(\Omega)$，使得 $\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{u}}_D = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，且在 Γ_D 中 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D = \boldsymbol{u}_D$ 准处处成立。接下来，我们将为速度向量场未知量 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$ 引入一种表述。于是，原始问题的实际解可通过 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}} \coloneqq \widehat{\boldsymbol{u}}_D + \boldsymbol{u} \in \widehat{\boldsymbol{u}}_D + \mathbf{H}_D^1(\Omega)$ 给出。

更具体地说，我们考虑一个不可压缩*Stokes*（极小化）问题，其目标是求出速度向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$，使原始能量泛函 I达到极小值：$\mathbf{H}_D^1(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$，

$$I(\boldsymbol{v}) \coloneqq \tfrac{\nu}{2} \|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2 + I_{\{0\}}^\Omega(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega \,, \tag{39}$$

其中，$\nu > 0$ 是运动黏度，$I_{\{0\}}^\Omega\colon L^2(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 是示性泛函，对于每个由下式定义的 $\widehat{v} \in L^2(\Omega)$，

$$I_{\{0\}}^\Omega(\widehat{v}) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } \widehat{v} = 0 \text{ a.e. in } \Omega \,, \\ +\infty & \text{else} \,. \end{cases} \tag{40}$$

于是，原始能量泛函（39）的有效定义域[3] 为

$$K_{\boldsymbol{u}} \coloneqq \operatorname{dom}(I) \coloneqq \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

本节将（39）的极小化称为原始问题。由变分法中的直接法可知，存在唯一极小化元 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$，称为原始解。由于（39）并非 Fr´echet 可微，与原始问题相关的最优性条件并非通过变分等式（即，在$\mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$中）给出，而是通过水力机械等式给出：事实上，对于任意 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{u} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 是（39）的极小化元，当且仅当满足

$$\nu(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega = \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega \,.$$

3.2 对偶问题

在本小节中，我们针对不可压缩斯托克斯问题（39）推导并研究一个（拉格朗日）对偶问题（依据 [74, 第 49] 章的定义）。为此，我们引入拉格朗日函数 $\mathcal{L}\colon \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_D^1(\Omega) \to \mathrm{R}$，对于每个由以下公式定义的 $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_D^1(\Omega)$：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \coloneqq -\tfrac{1}{2\nu} \|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2 + (\boldsymbol{\tau}, \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega \,. \tag{41}$$

[3] $F\ X \to\ \cup\{+\infty\}$ *effective domain* $F\ = \{x \in$ 对于泛函 : R，其定义为 dom( ) : ( )。$X \mid F\ x\ < +\infty\}$

注意，能量密度 ϕ: $\Omega \times \mathrm{R}^{d\times d} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 的（Fenchel）共轭泛函（相对于第二个自变量），对几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及每个 $\mathsf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$，定义为

$$\phi(x,\mathsf{A}) \coloneqq \begin{cases} \frac{\nu}{2}|\mathsf{A} + \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D(x)|^2 & \text{if } \operatorname{tr}\mathsf{A} = 0\,, \\ +\infty & \text{else}\,, \end{cases}$$

由 ϕ^* 给出: $\Omega \times \mathrm{R}^{d\times d} \to \mathrm{R}$，对几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及每个由下式定义的 $\mathsf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$

$$\phi^*(x,\mathsf{A}) \coloneqq \tfrac{1}{2\nu}|\operatorname{dev}\mathsf{A}|^2 - \mathsf{A} : \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D(x)\,.$$

因此，根据 [68, 定理 2], , 对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有
$\frac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|^2_\Omega + I^\Omega_{\{0\}}$(散度 $\boldsymbol{v}$) $=$上确界 $_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2(\Omega)}\big\{ - \frac{1}{2\nu}\|\mathsf{dev}\ \boldsymbol{\tau}\|^2_\Omega + (\boldsymbol{\tau}, \nabla($
$\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega\big\}$,
这意味着，对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有

$$I(\boldsymbol{v}) = \sup_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\}\,. \tag{42}$$

由于拉格朗日函数 (41) 是凹凸的，并且对所有 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 都有 $\mathcal{L}\ \boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v}) \to -\infty$ ($\|\boldsymbol{\tau}\|_\Omega \to +\infty$)，根据极小极大定理（参见 [74, 定理 49.B]），它存在一个鞍点 $(\mathsf{T}\ \boldsymbol{u}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，即，我们有

$$\min_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \max_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\} = \mathcal{L}(\mathsf{T},\boldsymbol{u}) = \max_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2(\Omega)} \min_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\}\,. \tag{43}$$

与相应鞍点问题相关的最优性条件，就是求出 $(\mathsf{T}\ \boldsymbol{u}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，使得对于任意 $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，均有

$$-\tfrac{1}{\nu}(\operatorname{dev}\mathsf{T}, \operatorname{dev}\boldsymbol{\tau})_\Omega + (\nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D), \boldsymbol{\tau})_\Omega = 0\,, \tag{44a}$$

$$(\mathsf{T}, \nabla\boldsymbol{v})_\Omega = \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega\,, \tag{44b}$$

其中 (44a) 等价于

$$\operatorname{dev}\mathsf{T} = \nu\nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{45}$$

然后，根据 [74, 第 49 节。2],相关的（拉格朗日函数）对偶问题可通过最大化对偶能量泛函 D来给出：对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$，$\mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{R}\cup\{+\infty\}$ 定义为

$$D(\boldsymbol{\tau}) \coloneqq \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\}\,. \tag{46}$$

只有当对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有以下关系时，定义 (46) 中的下确界才是有限的

$$(\boldsymbol{\tau}, \nabla\boldsymbol{v})_\Omega = \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_\Omega + (\mathsf{F}, \nabla\boldsymbol{v})_\Omega\,, \tag{47}$$

其中我们使用了表示 (21)，它等价于 $\boldsymbol{\tau}$ –F $\in \mathbf{H}(\mathrm{div};\ \Omega)$，并且

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f} \quad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{48a}$$

$$\langle(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F})\boldsymbol{n}, \widetilde{\boldsymbol{v}}\rangle_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{for all } \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N)\,. \tag{48b}$$

回忆一下，$\widetilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 表示向量场 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N)$ 的零延拓。因此，只需考虑受限对偶能量泛函$D\colon \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，对于每个具有显式积分表示的 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$

$$D(\boldsymbol{\tau}) = -\tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}\|^2_\Omega + (\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}, \nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega - I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}))\,, \qquad (49)$$

其中，示性泛函 $I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}\colon \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 对每个 $\widehat{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 定义为

$$I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}(\widehat{\boldsymbol{v}}) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } \widehat{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{f} \text{ a.e. in } \Omega\,, \\ +\infty & \text{else}\,. \end{cases}$$

于是，负的对偶能量泛函 (49) 的有效定义域为

$$K_{\mathsf{T}} \coloneqq \operatorname{dom}(-D) \coloneqq \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\Omega) \mid \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f} \text{ a.e. in } \Omega\right\}.$$

由 (43) 可知，对偶能量泛函 (49) 存在唯一最大化元 $\mathsf{T} \in \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$，称为对偶解，并且满足强对偶关系，即，我们有

$$I(\boldsymbol{u}) = D(\mathsf{T})\,. \qquad (50)$$

在完整狄利克雷边界条件的情形下（即，$\Gamma_D = \partial\Omega$），通常通过施加零均值条件来确保应力的球形部分（压力）$\frac{1}{d}\operatorname{tr}(\mathsf{T})$ 的唯一性，即，施加 $\int_\Omega \operatorname{tr}(\mathsf{T})\,\mathrm{d}x = 0$。

注 *1* 条件 (48b) 可解释为 Γ_N 上的诺伊曼边界条件。换言之，在我们的框架中，诺伊曼边界数据编码在张量场 $\mathsf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 中。关系 $(48b)_1$ 配合$\mathbf{H}^2_{00}(\Gamma_N)$ 中的试验函数，是弱形式下诺伊曼边界条件 “$\mathsf{T}\boldsymbol{n} = \mathsf{F}\boldsymbol{n}$ 在 Γ_N 上” 的正确表示（参见 [35, 第 31.3 节.3]）。

3.3 离散原始问题

与连续情形类似，我们假设狄利克雷边界条件可由区域内部 $\widehat{\boldsymbol{u}}^h_D \in V^h$ 上定义的向量场描述；并假设在 Ω 中，$\operatorname{div}_h\widehat{\boldsymbol{u}}^h_D = 0$ 几乎处处成立。通过对 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D$ 进行适当插值并映射到 V^h 上，可以得到这样的向量场。与连续情形类似，离散形式将以向量场 $\boldsymbol{u}_h \in V^h_D$ 为框架，但对原始问题的期望近似为 $\boldsymbol{u}^h_{\mathrm{orig}} \coloneqq \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D \in V^h$。此外，我们将向量场 $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 和定义载荷 $\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)$ 的张量场 $\mathsf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 的逐单元常值近似分别记为 $\boldsymbol{f}_h \in (\mathbf{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$ 和 $\mathsf{F}_h \in (\mathbf{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。

接下来，我们考虑一个离散不可压缩 *Stokes*（极小化）问题，旨在寻找使离散原始能量泛函 I_h 最小化的离散速度向量场 $\boldsymbol{u}_h \in V_D^h$：对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，有 $V_D^h \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$

$$\begin{aligned} I_h(\boldsymbol{v}_h) \coloneqq \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2 + I_{\{0\}}^\Omega(\mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h) \\ - (\boldsymbol{f}_h, \mathit{\Pi}_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega \,. \end{aligned} \tag{51}$$

离散原始能量泛函 (51) 的有效定义域由下式给出

$$K_{\boldsymbol{u}}^h \coloneqq \mathrm{dom}(I_h) = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in V_D^h \mid \mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h = 0 \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

本节将 (51) 的极小化称为离散原始问题。唯一极小化子 $\boldsymbol{u}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$（称为离散原始解）的存在性可由变分法的直接法得到。由于 (51) 不可 Frech´et 微分，离散原始问题对应的最优性条件并非通过离散变分等式给出（即，在 $(V_D^h)^*$ 中），而是通过离散水力-力学等式给出：事实上，对于任意 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$，$\boldsymbol{u}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 是 (51) 的极小化子，当且仅当满足

$$\nu(\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h), \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega = (\boldsymbol{f}_h, \mathit{\Pi}_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega + (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega \,. \tag{52}$$

3.4 离散对偶问题

在本小节中，我们针对离散不可压缩斯托克斯问题 (39) 推导并考察一个（拉格朗日）对偶问题（依据 [74, 第 49] 章的定义）。为此，我们引入拉格朗日函数 $\mathcal{L}_h^0$：对每个 $(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{v}_h)$，$\in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d} \times V_D^h$，定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \boldsymbol{v}_h) \coloneqq -\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\overline{\boldsymbol{\tau}}_h\|_\Omega^2 + (\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \nabla(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h))_\Omega \\ - (\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega \,. \end{aligned} \tag{53}$$

注意，能量密度 ϕ_h：$\Omega \times \mathrm{R}^{d\times d} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 关于第二个自变量的（Fenchel）共轭泛函，对于几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及每个 $\mathsf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$，定义为

$$\phi_h(x, \mathsf{A}) \coloneqq \begin{cases} \frac{\nu}{2}|\mathsf{A} + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h(x)|^2 & \text{if } \mathrm{tr}\,\mathsf{A} = 0\,, \\ +\infty & \text{else}\,, \end{cases}$$

其定义为 ϕ_h^*：$\Omega \times \mathrm{R}^{d\times d} \to \mathrm{R}$，对于几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及每个 $\mathsf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$

$$\phi_h^*(x, \mathsf{A}) \coloneqq \tfrac{1}{2\nu}|\mathrm{dev}\,\mathsf{A}|^2 - \mathsf{A} : \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h(x)\,.$$

因此，应用 ϕ_h^* 的逐单元定义，对于每个 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，我们得到

$$\begin{aligned} &\tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2 + I_{\{0\}}^\Omega(\mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h) \\ &= \sup_{\overline{\boldsymbol{\tau}}_h \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}} \left\{ -\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\overline{\boldsymbol{\tau}}_h\|_\Omega^2 + (\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h))_\Omega \right\}, \end{aligned}$$

这意味着，对于每个 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，我们有

$$I_h(\boldsymbol{v}_h) = \sup_{\overline{\boldsymbol{\tau}}_h \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}} \left\{ \mathcal{L}_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \boldsymbol{v}_h) \right\}. \tag{54}$$

由于拉格朗日函数 (53) 是凹凸的，且对所有 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$ 均有 $\mathcal{L}_h^0(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{v}_h) \Rightarrow -\infty$ ($\|\boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega \to +\infty$)，根据极小极大定理（参见 [74, Thm. 49.B]），它存在一个鞍点 $(\mathsf{T}_h, \boldsymbol{u}_h) \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d} \times V_D^h$，即，有

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{v}_h \in V_D^h} \max_{\overline{\boldsymbol{\tau}}_h \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}} \left\{ \mathcal{L}_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \boldsymbol{v}_h) \right\} &= \mathcal{L}_h^0(\overline{\mathsf{T}}_h, \boldsymbol{u}_h) \\ &= \max_{\overline{\boldsymbol{\tau}}_h \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}} \min_{\boldsymbol{v}_h \in V_D^h} \left\{ \mathcal{L}_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \boldsymbol{v}_h) \right\}. \end{aligned} \tag{55}$$

相应鞍点问题的最优性条件等价于求取 $(\mathsf{T}_h, \boldsymbol{u}_h) \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d} \times V_D^h$，使得对每个 $(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{v}_h) \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d} \times V_D^h$，均有

$$-\tfrac{1}{\nu}(\operatorname{dev} \overline{\mathsf{T}}_h, \operatorname{dev} \overline{\boldsymbol{\tau}}_h)_\Omega + (\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h), \overline{\boldsymbol{\tau}}_h)_\Omega = 0\,, \tag{56a}$$

$$(\overline{\mathsf{T}}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega = (\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{v}_h)_\Omega + (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega\,, \tag{56b}$$

其中 (56a) 等价于

$$\operatorname{dev} \overline{\mathsf{T}}_h = \nu \nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{57}$$

那么，根据 [74, Sec. 49.2]，相应的（拉格朗日）对偶问题可通过最大化离散对偶能量泛函 D_h^0 来定义：$(\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，对每个 $\boldsymbol{\tau}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$，定义为

$$D_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h) \coloneqq \inf_{\boldsymbol{v}_h \in V_D^h} \left\{ \mathcal{L}_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \boldsymbol{v}_h) \right\}. \tag{58}$$

只有当对每个 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，均有

$$(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega = (\boldsymbol{f}_h, \Pi_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega + (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega\,, \tag{59}$$

这等价于存在 $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathsf{F}_h + \Sigma_N^h$，使得 $\boldsymbol{\tau}_h = \Pi_h \boldsymbol{\tau}_h$ 几乎处处 Ω，并且

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h) = -\boldsymbol{f}_h \quad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{60a}$$

$$(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \quad \text{q.e. in } \Gamma_N\,. \tag{60b}$$

因此，只需考虑受限的离散对偶能量泛函 $D_h^0 \colon \mathsf{F}_h + \Pi_h(\Sigma_N^h) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，对于每个 $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathsf{F}_h + \Pi_h(\Sigma_N^h)$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathsf{F}_h + \Sigma^h$，使得 $\overline{\boldsymbol{\tau}}_h = \Pi_h \boldsymbol{\tau}_h$ 几乎处处成立于 Ω 且具有显式积分表示

$$\begin{aligned} D_h^0(\overline{\boldsymbol{\tau}}_h) = &-\tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev} \Pi_h \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 + (\operatorname{dev} \Pi_h \boldsymbol{\tau}_h, \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega \\ &- I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}_h\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h))\,. \end{aligned} \tag{61}$$

我们引入离散对偶能量泛函 $D_h\colon \mathsf{F}_h+\Sigma_N^h\to \mathsf{R}\cup\{-\infty\}$，对于每个由 $D_h(\boldsymbol{\tau}_h)\coloneqq D_h^0(\Pi_h\boldsymbol{\tau}_h)$ 定义的 $\boldsymbol{\tau}_h\in\mathsf{F}_h+\Sigma_N^h$ 即，我们有

$$\begin{aligned} D_h(\boldsymbol{\tau}_h)\coloneqq &-\tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\Pi_h\boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2+(\operatorname{dev}\Pi_h\boldsymbol{\tau}_h,\nabla_h\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega\\ &-I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}_h\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h-\mathsf{F}_h))\,. \end{aligned}\tag{62}$$

因此，离散对偶能量泛函 (62) 的负值的有效定义域由下式给出

$$K_{\mathsf{T}}^h\coloneqq\operatorname{dom}(-D_h)\coloneqq\left\{\boldsymbol{\tau}_h\in\mathsf{F}_h+\Sigma_N^h\mid\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h-\mathsf{F}_h)=-\boldsymbol{f}_h\text{ a.e. in }\Omega\right\}.$$

根据 (55)，离散对偶能量泛函 (58) 存在唯一最大化元 $\mathsf{T}_h\in(\mathsf{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$，并且适用离散强对偶关系，即，有 $I_h(\boldsymbol{u}_h)=D_h^0(\mathsf{T}_h)$。由于 $\operatorname{dom}(D_h^0)\subseteq\mathsf{F}_h+\Pi_h(\Sigma_N^h)$，存在 $\mathsf{T}_h\in\mathsf{F}_h+\Sigma_N^h$，使得 $\mathsf{T}_h=\Pi_h\mathsf{T}_h$ 在 Ω 上几乎处处成立，因此有

$$I_h(\boldsymbol{u}_h)=D_h(\mathsf{T}_h)\,.\tag{63}$$

命题1（（逆）Marini公式）以下陈述成立：*(i)* 给定离散原始解 $\boldsymbol{u}_h\in K_{\boldsymbol{u}}^h$（即离散速度）和离散拉格朗日乘子 $p_h\in\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h)$（即离散压力），满足对每个 $\boldsymbol{v}_h\in V_D^h$，都有

$$(\nu\nabla_h(\boldsymbol{u}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)-p_h\mathsf{I},\nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega=(\boldsymbol{f}_h,\boldsymbol{v}_h)_\Omega+(\mathsf{F}_h,\nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega\,,\tag{64}$$

离散对偶解 $\mathsf{T}_h\in K_{\mathsf{T}}^h$（即离散应力）可直接通过以下方式获得

$$\mathsf{T}_h=\nu\nabla_h(\boldsymbol{u}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)-p_h\mathsf{I}-\tfrac{1}{d}\boldsymbol{f}_h\otimes(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}-\Pi_h\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})\quad a.e.\ in\ \Omega\,;\tag{65}$$

(ii) 给定离散对偶解 $\mathsf{T}_h\in K_{\mathsf{T}}^h$（即离散应力）和离散拉格朗日乘子 $\boldsymbol{u}_h\in(\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$，使得对于每个 $\overline{\boldsymbol{\tau}}_h\in\Sigma_N^h$，都有

$$-\tfrac{1}{\nu}(\operatorname{dev}\Pi_h\mathsf{T}_h,\operatorname{dev}\Pi_h\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega-(\overline{\boldsymbol{u}}_h,\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega=-(\nabla_h\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h,\operatorname{dev}\Pi_h\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega\,,\tag{66}$$

离散原始解 $\boldsymbol{u}_h\in K_{\boldsymbol{u}}^h$（即离散速度）可直接通过以下方式获得

$$\boldsymbol{u}_h=\overline{\boldsymbol{u}}_h+\tfrac{1}{\nu}\operatorname{dev}\Pi_h\mathsf{T}_h(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}-\Pi_h\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})\quad a.e.\ in\ \Omega\,.\tag{67}$$

注*2* 在某些特殊情形下，人们已知不可压缩斯托克斯问题的此类重构公式；例如，[21] 推导了该公式，适用于 $d=2$，且在 Ω 中 $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ 几乎处处成立，并适用于更规则的狄利克雷边界数据 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D\in\mathbf{H}^1(\Gamma_D)\cap\mathbf{H}^1(\Omega)$。然而，命题1确保这些公式对任意 $d\geq 2$、一般载荷 $\boldsymbol{f}^*\in\mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$ 以及非齐次混合边界条件均成立。

命题*1*的证明（关于*(i)*）。首先，我们定义张量场

$$\widehat{\mathsf{T}}_h \coloneqq \nu\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - p_h\mathsf{I} - \tfrac{1}{d}\boldsymbol{f}_h \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - \mathit{\Pi}_h\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}) \in (\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h))^{d\times d}\,,$$

$\widehat{\ }$其在局部（每个单元上）是一个 Raviart–Thomas 张量场，并且 $\mathrm{div}_h\mathsf{T}_h = -\boldsymbol{f}_h$ 几乎处处成立于 Ω，且根据定义满足

$$\mathit{\Pi}_h\widehat{\mathsf{T}}_h = \nu\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - p_h\mathsf{I} \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{68}$$

由于 $\mathrm{dev}\,(p_h\mathsf{I}) = 0$ 几乎处处成立于 Ω，(68) 蕴含

$$\mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\widehat{\mathsf{T}}_h = \nu\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{69}$$

$\widehat{\ }$由于对于所有 $T \in \mathcal{T}_h$，$\mathrm{div}\,(\mathsf{T}_h - \mathsf{T}_h) = \mathbf{0}$ 几乎处处成立于 T，我们有 $\mathsf{T}_h - \mathsf{T}_h \in (\mathsf{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。因此，由 (68)、离散分部积分公式 (36) 以及 (64)，对于任意 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，可得

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathsf{T}}_h - \mathsf{T}_h + \mathsf{F}_h, \nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega &= (\mathit{\Pi}_h\widehat{\mathsf{T}}_h - \mathit{\Pi}_h\mathsf{T}_h + \mathsf{F}_h, \mathit{\Pi}_h\nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega\\ &= (\nu\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - p_h\mathsf{I}, \nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega\\ &\quad + (\mathrm{div}\,(\mathsf{T}_h - \mathsf{F}_h), \mathit{\Pi}_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega\\ &= (\mathsf{F}_h, \nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega\,.\end{aligned} \tag{70}$$

然后，利用离散 Helmholtz–Weyl 分解 (37)，由 (70) 我们推得

$$\widehat{\mathsf{T}}_h - \mathsf{F}_h - (\mathsf{T}_h - \mathsf{F}_h) = \widehat{\mathsf{T}}_h - \mathsf{T}_h \in (\nabla_h(V_D^h))^{\perp_{\mathbb{L}^2}} = \ker(\mathrm{div}|_{\Sigma_N^h})\,,$$

并且，由于 $\mathsf{T}_h - \mathsf{F}_h \in \Sigma_N^h$，我们得到 $\widehat{\ }\mathsf{T}_h - \mathsf{F}_h \in \Sigma_N^h$，其中

$$\mathrm{div}(\widehat{\mathsf{T}}_h - \mathsf{F}_h) = \mathrm{div}(\mathsf{T}_h - \mathsf{F}_h) = -\boldsymbol{f}_h \quad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{71}$$

也就是说，我们有 $\widehat{\ }\mathsf{T}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$。特别地，由于 (69) 和 (71)，我们得出$\widehat{\ }\mathsf{T}_h = \mathsf{T}_h$ 在 Ω 中几乎处处成立。

（*ii*）项。首先，我们定义向量场

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_h \coloneqq \overline{\boldsymbol{u}}_h + \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\mathsf{T}_h(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - \mathit{\Pi}_h\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}) \in (\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h))^d\,,$$

它在局部（每个单元上）是一个 P^1-向量场，按定义满足

$$\nabla_h\widehat{\boldsymbol{u}}_h = \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\mathsf{T}_h \quad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{72a}$$

$$\mathit{\Pi}_h\widehat{\boldsymbol{u}}_h = \overline{\boldsymbol{u}}_h \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{72b}$$

由于对所有 $T \in \mathcal{T}_h$，$\nabla_h(\widehat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h) = \mathbf{0}$ 在 T 中几乎处处成立（参见（72b））， 我们有 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h \in (\mathsf{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$。因此，由（72b）、离散分部积分公式（36）和（66），对于每个 $\boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma_N^h$，可得

$$\begin{aligned}(\widehat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h, \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega &= (\mathit{\Pi}_h\widehat{\boldsymbol{u}}_h - \mathit{\Pi}_h\boldsymbol{u}_h, \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega\\ &= (\overline{\boldsymbol{u}}_h, \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega + (\nabla_h\boldsymbol{u}_h, \mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega\\ &= (\overline{\boldsymbol{u}}_h, \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega + (\tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\mathsf{T}_h - \nabla_h\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\boldsymbol{\tau}_h)_\Omega\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

接着，利用 $\operatorname{div}(\Sigma_N^h) = (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$，因为 $\Gamma_N \neq \partial\Omega$（根据假设，我们有 $\Gamma_D \neq \emptyset$），可得

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h \in (\operatorname{div}(\Sigma_N^h))^{\perp_{\mathrm{L}^2}} = \{\mathbf{0}\},$$

即，我们得出 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h = \boldsymbol{u}_h$ 在 Ω 中几乎处处成立。

3.5先验误差分析

借鉴 [9,6], 中的思路，我们按照离散层面后验误差分析的思路，利用推导出的离散对偶关系（参见第 3.4 节），进行先验误差分析。这个过程得出了一个先验误差恒等式。据作者所知，该恒等式对于不可压缩斯托克斯问题（39）及其相应的离散化（51）而言是新的。

[9,6] 中该过程的第一步是推导所谓离散原始-对偶间隙估计量$\eta^2_{\mathrm{gap},\ h}$的一种“有意义的”表示：$K_{\boldsymbol{u}}^h \times K_{\mathsf{T}}^h \to [0,+\infty)$，对每个 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 以及由下式定义的 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$

$$\eta^2_{\mathrm{gap},h}(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \coloneqq I_h(\boldsymbol{v}_h) - D_h(\boldsymbol{\tau}_h). \tag{73}$$

以下引理给出了离散原始-对偶间隙估计量（73）的一种“有意义的”表示，它表明后者精确地度量了对离散凸最优性关系（56）的违背。

引理 2 对于任意 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$，有

$$\eta^2_{\mathrm{gap},h}(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \coloneqq \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h - \tfrac{1}{\nu} \mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 .$$

证明 对于任意 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$，利用 (60a)、离散分部积分公式 (36)（因为 $\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h \in \Sigma_N^h$）、(60b)、$\boldsymbol{\tau}_h$：$(\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) = \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h$：$(\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)$ 在 Ω 中几乎处处成立（因为 $\operatorname{tr} \nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) = \operatorname{div}_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立），以及二项式公式，可得

$$\begin{aligned}
I_h(\boldsymbol{v}_h) - D_h(\boldsymbol{\tau}_h) &= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_\Omega^2 - (\boldsymbol{f}_h, \mathit{\Pi}_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 - (\boldsymbol{\tau}_h, \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)_\Omega \\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_\Omega^2 + (\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h), \mathit{\Pi}_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 - (\boldsymbol{\tau}_h, \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)_\Omega \\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_\Omega^2 - (\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 - (\boldsymbol{\tau}_h, \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)_\Omega \\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_\Omega^2 - (\mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 \\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h - \tfrac{1}{\nu}\mathit{\Pi}_h \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 ,
\end{aligned}$$

这就是所声称的离散原始-对偶间隙估计量 (73) 的表示式。

过程 [9,6] 的第二步是推导出“有意义的”离散原始能量泛函 (51) 在离散原始解 $\boldsymbol{u}_h \in K^h_{\boldsymbol{u}}$ 处的离散最优强凸性测度的表示式即， $\rho^2_{I^{cr}_h}\colon K^h_{\boldsymbol{u}} \to [0,+\infty)$, 对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v}_h \in K^h_{\boldsymbol{u}}$

$$\rho^2_{I_h}(\boldsymbol{v}_h) \coloneqq I_h(\boldsymbol{v}_h) - I_h(\boldsymbol{u}_h)\,, \tag{74}$$

以及离散对偶解 $\mathsf{T}_h \in K^h_{\mathsf{T}}$处的离散对偶能量泛函（62）（取其相反数），即, $\rho^2_{-D_h}\colon K^h_{\mathsf{T}} \to [0,+\infty)$ ，对每个由以下定义的 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\mathsf{T}}$

$$\rho^2_{-D_h}(\boldsymbol{\tau}_h) \coloneqq -D_h(\boldsymbol{\tau}_h) + D_h(\mathsf{T}_h)\,. \tag{75}$$

它们的和称为离散原始-对偶总误差，即，$\rho^2_{\mathrm{tot},\,h}\colon K^h_{\boldsymbol{u}} \times K^h_{\mathsf{T}} \to [0,+\infty)$ ，对每个由以下定义的 $\boldsymbol{v}_h \in K^h_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\mathsf{T}}$

$$\rho^2_{\mathrm{tot},h}(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \coloneqq \rho^2_{I_h}(\boldsymbol{v}_h) + \rho^2_{-D_h}(\boldsymbol{\tau}_h)\,, \tag{76}$$

在离散原始-对偶间隙恒等式中（参见定理 1），它表示一个“自然的”误差量。

以下引理将给出离散最优强凸性度量（74）和（75）的此类“有意义的”表示式。

引理 3 以下结论成立：
(i) 对于每个 $\boldsymbol{v}_h \in K^h_{\boldsymbol{u}}$，我们有

$$\rho^2_{I_h}(\boldsymbol{v}_h) = \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h - \nabla_h \boldsymbol{u}_h\|^2_{\Omega}\,;$$

(ii) 对于每个 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\mathsf{T}}$，我们有

$$\rho^2_{-D_h}(\boldsymbol{\tau}_h) = \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h - \mathit{\Pi}_h \mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|^2_{\Omega}\,.$$

证明（引理 *3* 的证明）***(i)***。注意到 $K^h_{\boldsymbol{u}}$ 是一个希尔伯特空间，且受限的离散原始能量泛函 $I_h\colon K^h_{\boldsymbol{u}} \to \mathsf{R}$ 是一个光滑二次泛函，因此对于每个 $\boldsymbol{v}_h \in K^h_{\boldsymbol{u}}$，泰勒展开可得

$$\begin{aligned} I_h(\boldsymbol{v}_h) - I_h(\boldsymbol{u}_h) &= \langle \mathrm{D}I(\boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h\rangle_{K^h_{\boldsymbol{u}}} + \tfrac{1}{2}\langle \mathrm{D}^2 I(\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h\rangle_{K^h_{\boldsymbol{u}}} \\ &= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{v}_h - \nabla_h \boldsymbol{u}_h\|^2_{\Omega}\,, \end{aligned}$$

这就是离散最优强凸性测度 (74) 的所述表示。

（*ii*）。对于每个 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\mathsf{T}}$，利用 $(\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h - \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h,\ \nabla_h \boldsymbol{u}_h)_{\Omega} = (\mathsf{T}_h - \boldsymbol{\tau}_h,\ \nabla_h \boldsymbol{u}_h)_{\Omega} = 0$（这由在 Ω 中几乎处处成立的 $\mathrm{tr}(\nabla_h \boldsymbol{u}_h) = \mathrm{div}_h \boldsymbol{u}_h = 0$ a 得出，

离散分部积分公式 (36) 和 (60)、离散凸最优性条件 (56) 以及二项式公式，我们得到

$$\begin{aligned}
-D_h(\boldsymbol{\tau}_h)+D_h(\mathsf{T}_h) &= \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2-\tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|_\Omega^2\\
&\quad+(\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h-\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h,\nabla_h(\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h+\boldsymbol{u}_h))_\Omega\\
&= \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2-\tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|_\Omega^2\\
&\quad+\tfrac{1}{\nu}(\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,(\mathsf{T}_h-\boldsymbol{\tau}_h),\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h)_\Omega\\
&= \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2+\tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|_\Omega^2\\
&\quad-\tfrac{1}{\nu}(\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h,\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h)_\Omega\\
&= \tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}_h-\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|_\Omega^2\,,
\end{aligned}$$

这就是所声称的离散最优强凸性测度（75）的表示。

在 [9,6], 过程的第三步中，根据定义（73）–（76）和离散强对偶关系（63），可得在离散层面上适用的一种后验误差恒等式，称为离散原始-对偶间隙恒等式。

定理 1（离散原始-对偶间隙恒等式）对于 $\boldsymbol{v}_h\in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 和$\boldsymbol{\tau}_h\in K_{\mathsf{T}}^h$，有

$$\rho_{\mathrm{tot},h}^2(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{\tau}_h)=\eta_{\mathrm{gap},h}^2(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{\tau}_h)\,. \tag{77}$$

证明 结合定义（73）–（76）和离散强对偶关系（63）即可。

借助离散原始-对偶间隙恒等式（77），可以推导出一种先验 误差恒等式，用以刻画离散解与精确解的插值函数之间的距离，并将其表示为对偶插值误差。特别地，这将导出一个准最优误差估计，该估计尤其适用于不可压缩Stokes问题的最低正则性解。

定理 2 设 $\boldsymbol{f}_h:=\mathit{\Pi}_h\boldsymbol{f}\in(\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$，$\mathsf{F}_h:=\mathit{\Pi}_h\mathsf{F}\in(\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$，且$\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h:=\mathcal{I}_h^{cr}\widehat{\boldsymbol{u}}_D\in V^h$。则以下结论成立：

（*i*）存在如下先验误差恒等式

$$\begin{aligned}
\tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{u}-\nabla_h\boldsymbol{u}_h\|_\Omega^2+\tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,(\mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T}-\mathsf{F}))-\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,(\mathsf{T}_h-\mathsf{F}_h)\|_\Omega^2\\
=\tfrac{1}{2\nu}\|\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,(\mathsf{T}-\mathsf{F})-\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T}-\mathsf{F})\|_\Omega^2\,;
\end{aligned} \tag{78}$$

(ii) 成立准最优误差估计

$$\begin{aligned}
&\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\nabla_h(\boldsymbol{u}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2+\tfrac{1}{\nu}\|\mathrm{dev}\,\mathsf{T}-\mathit{\Pi}_h\mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|_\Omega^2\\
&\le 6\inf_{\boldsymbol{v}_h\in K_{\boldsymbol{u}}^h}\left\{\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\nabla_h(\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2\right\}\\
&\quad+6\inf_{\boldsymbol{\tau}_h\in K_{\mathsf{T}}^h}\left\{\tfrac{1}{\nu}\|\mathrm{dev}\,\mathsf{T}-\mathrm{dev}\,\mathit{\Pi}_h\boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2\right\}.
\end{aligned} \tag{79}$$

注 *3* 据作者所知，推论 2 给出了带显式常数的斯托克斯问题 Crouzeix–Raviart 近似的首个最小正则性估计，该估计考虑一般载荷$\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$以及非齐次混合边界条件。唯一的另一拟最优性结果是 [73, 定理 4.2], ，其中作者得到该估计

$$\|\nabla \boldsymbol{u} - \nabla_h \boldsymbol{u}_h\|_\Omega \leq c_{\mathrm{qo}} \inf_{\boldsymbol{v}_h \in V_D^h} \left\{ \|\nabla \boldsymbol{u} - \nabla_h \boldsymbol{v}_h\|_\Omega \right\}. \tag{80}$$

（我们不认为例如来自 [50,51]的结果是真正具有最小正则性的，因为假设例如 $\Delta \boldsymbol{u}$ 在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中的振荡是受控的。）虽然估计式 (80) 不涉及对偶最佳逼近误差（与 (79) 不同），但它要求在右端实现所谓的平滑算子$E_h\colon\ V_D^h \to \mathrm{H}_D^1(\Omega)$，即 $\langle \boldsymbol{f}^*,\ E_h \boldsymbol{v}_h \rangle_\Omega$（这涉及在宏单元上求解斯托克斯问题），且常数 $c_{\mathrm{qo}} > 0$ 并未明确给出，可能取决于例如形状正则性。此外，他们的分析仅针对齐次 Dirichlet 边界条件。不过， [73] 中的方法具有压力稳健性。

证明（定理 *2*）

（*i*）。回顾引理 2 和引理 3，对于每个 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$，离散原始-对偶间隙恒等式 (77) 可明确写为

$$\begin{aligned} &\tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \boldsymbol{u}_h - \nabla_h \boldsymbol{v}_h\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2\nu}\|\Pi_h \mathrm{dev}\, \mathsf{T}_h - \Pi_h \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 && (81)\\ &\qquad = \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - \tfrac{1}{\nu}\Pi_h \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 . && (82)\end{aligned}$$

利用散度保持性质 (30b)，我们得到 $\mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{u} \in K_{\boldsymbol{u}}^h$。类似地，由散度保持性质 (34)，可得 $\mathrm{div}\,(\mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T} - \mathsf{F})) = -\boldsymbol{f}_h$ a.e. in Ω，即，我们看到 $\mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T} - \mathsf{F}) + \mathsf{F}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$。于是，对于 (81) 中的 $\boldsymbol{v}_h = \mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{u} \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h = \mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T}-\mathsf{F})+\mathsf{F}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$，根据梯度保持性质 (30a) 和凸最优性条件 (45)，我们得到

$$\begin{aligned} &\tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{u} - \nabla_h \boldsymbol{u}_h\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2\nu}\|\Pi_h \mathrm{dev}\, \mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T}-\mathsf{F}) - \Pi_h \mathrm{dev}\,(\mathsf{T}_h - \mathsf{F}_h)\|_\Omega^2 \\ &\qquad = \tfrac{\nu}{2}\|\nabla_h \mathcal{I}_h^{cr}\boldsymbol{u} + \nabla_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h - \tfrac{1}{\nu}\Pi_h \mathrm{dev}\,(\mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T}-\mathsf{F}) + \mathsf{F}_h)\|_\Omega^2 \\ &\qquad = \tfrac{1}{2\nu}\|\Pi_h \mathrm{dev}\,(\mathsf{T}-\mathsf{F}) - \Pi_h \mathrm{dev}\,(\mathcal{I}_h^{rt}(\mathsf{T}-\mathsf{F}))\|_\Omega^2 , \end{aligned}$$

这就是所要证明的先验误差恒等式 (78)。

（*ii*）令 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$ 固定，但任意取值。于是，利用两次离散原始-对偶间隙恒等式（77）和一次凸最优性条件（45），可得

$$\begin{aligned} &\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\mathsf{T} - \Pi_h \mathrm{dev}\,\mathsf{T}_h\|_\Omega^2 \\ &\quad \leq \tfrac{\nu}{2}\left\{\|\nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega + \|\nabla_h \boldsymbol{u}_h - \nabla_h \boldsymbol{v}_h\|_\Omega\right\}^2 \\ &\qquad + \tfrac{1}{2\nu}\left\{\|\mathrm{dev}\,\mathsf{T} - \mathrm{dev}\,\Pi_h \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega + \|\mathrm{dev}\,\Pi_h \boldsymbol{\tau}_h - \mathrm{dev}\,\Pi_h \mathsf{T}_h\|_\Omega\right\}^2 \\ &\quad \leq \nu\|\nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{\nu}\|\mathrm{dev}\,\mathsf{T} - \mathrm{dev}\,\Pi_h \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 \\ &\qquad + \nu\|\nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - \nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) + \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\mathsf{T} - \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\Pi_h \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 \\ &\quad \leq 3\nu\|\nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \nabla_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2 + \tfrac{3}{\nu}\|\mathrm{dev}\,\mathsf{T} - \mathrm{dev}\,\Pi_h \boldsymbol{\tau}_h\|_\Omega^2 . \end{aligned} \tag{83}$$

然后，分别对（83）中的 $\boldsymbol{v}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\mathsf{T}}^h$ 取下确界，即可得出所声称的准最优误差估计（79）成立。

结合定理 2 与逼近性质 (32) 和 (35)，即可在适当的正则性假设下提取最优误差衰减率 $s \in (0,1]$, 即，

$$\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\nabla_h(\boldsymbol{u}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\|_\Omega^2+\tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\mathsf{T}-\Pi_h\operatorname{dev}\mathsf{T}_h\|_\Omega^2=\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}}^{2s})\,. \tag{84}$$

我们还想指出，这种为 Crouzeix–Raviart 近似获取准最优误差估计的方法似乎是新的，即使对于泊松问题也是如此；特别是对于一般载荷 $f^* \in H_D^{-1}(\Omega)$ 和非齐次混合边界条件。为求完整起见，我们概述此情形下的方法，其证明沿用类似的论证：

设 $f^* \in H_D^{-1}(\Omega)$ 是给定载荷，与引理 1 类似，对于每个$v \in H_D^1(\Omega)$，它都可以表示为 $\langle f^*,\ v\rangle_\Omega = (f,\ v)_\Omega + (\boldsymbol{f},\ \nabla v)_\Omega$，其中函数$f \in L^2(\Omega)$ 和向量场 $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 已给定；再设 $u_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ 是给定的狄利克雷边界数据，且存在一个将其提升到内部的提升 Ω，即存在函数$\widehat{u}_D \in H^1(\Omega)$，使得 $\widehat{u}_D = u_D$ 在 Γ_D 中几乎处处成立。那么，泊松（极小化）问题 旨在极小化原始能量泛函 I：对于每个由下式定义的 $v \in H_D^1(\Omega)$，有 $H_D^1(\Omega) \to \mathrm{R}$

$$I(v) \coloneqq \tfrac{1}{2}\|\nabla(v+\widehat{u}_D)\|_\Omega^2-\langle f^*,v\rangle_\Omega\,. \tag{85}$$

一个（拉格朗日函数）对偶问题（按 [74, 第 49]章的含义）通过最大化对偶能量泛函 D来定义： $\boldsymbol{f}+H_N(\mathrm{div};\,\Omega) \to \mathrm{R}\cup\{-\infty\}$，对每个 $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{f}+H_N(\mathrm{div};\,\Omega)$，定义为

$$D(\boldsymbol{r}) \coloneqq -\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{r}\|_\Omega^2+(\boldsymbol{r},\nabla\widehat{u}_D)-I^\Omega_{\{-f\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}))\,. \tag{86}$$

根据变分法中的直接法，原始能量泛函 (85) 存在唯一极小化子 $u \in H_D^1(\Omega)$，而对偶能量泛函 (86) 存在唯一最大化元 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{f}+H_N(\mathrm{div};\,\Omega)$，二者通过凸最优性关系 $\boldsymbol{q}=\nabla(u+\widehat{u}_D)$ 在 Ω中几乎处处相关。

接下来，稍微滥用一下记号，令 V_D^h 和 Σ_N^h 分别为标量值空间和向量值空间。此外，令 $f_h \in \mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h)$、 $\boldsymbol{f}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$和 $\widehat{u}_D^h \in V^h$分别为 $f \in L^2(\Omega)$、 $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$和 $\widehat{u}_D \in H^1(\Omega)$的近似。于是，离散泊松（极小化）问题 旨在极小化离散原始能量泛函 I_h： $V_D^h \to \mathrm{R}$，对每个 $v_h \in V_D^h$，定义为

$$I_h(v_h) \coloneqq \tfrac{1}{2}\|\nabla_h(v_h+\widehat{u}_D^h)\|_\Omega^2-(f_h,\Pi_h v_h)_\Omega-(\boldsymbol{f}_h,\nabla_h v_h)_\Omega\,. \tag{87}$$

（拉格朗日函数）对偶问题（依照 [74, 第 49]章的定义）通过最大化离散对偶能量泛函 D_h： $\boldsymbol{f}_h+\Sigma_N^h \to \mathrm{R}\cup\{-\infty\}$给出，该泛函对每个 $\boldsymbol{r}_h \in \boldsymbol{f}_h+\Sigma_N^h$ 定义为

$$D_h(\boldsymbol{r}_h) \coloneqq -\tfrac{1}{2}\|\Pi_h\boldsymbol{r}_h\|_\Omega^2+(\Pi_h\boldsymbol{r}_h,\nabla_h\widehat{u}_D)-I^\Omega_{\{-f_h\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{r}_h-\boldsymbol{f}_h))\,. \tag{88}$$

根据变分法中的直接法，离散原始能量泛函 (87) 存在唯一极小化子 $u_h \in V_D^h$，且离散对偶能量

泛函 (88) 存在唯一最大化元 $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{f}_h + \Sigma_N^h$，二者通过离散凸最优性关系 $\Pi_h \boldsymbol{q}_h = \nabla_h(u_h + \widehat{u}_D^h)$ 在 Ω 中几乎处处相关。

与定理 2 类似，我们可以推导出一个准最优误差估计。

推论 1 设 $f_h := \Pi_h f \in \mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h)$，$\boldsymbol{f}_h := \Pi_h \boldsymbol{f} \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$，且 $\widehat{u}_D^h := \mathcal{I}_h^{cr} \widehat{u}_D \in V^h$。则有以下结论：

(i) 成立先验误差恒等式

$$\begin{aligned}\|\nabla_h \mathcal{I}_h^{cr} u - \nabla_h u_h\|_\Omega^2 + \|\Pi_h(\mathcal{I}_h^{rt}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{f})) - \Pi_h(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{f}_h)\|_\Omega^2 \\ = \|\Pi_h(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{f}) - \Pi_h \mathcal{I}_h^{rt}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{f})\|_\Omega^2 ;\end{aligned}$$

(ii) 成立准最优误差估计

$$\begin{aligned}&\|\nabla(u + \widehat{u}_D) - \nabla_h(u_h + \widehat{u}_D^h)\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{q} - \Pi_h \boldsymbol{q}_h\|_\Omega^2 \\ &\le 6 \inf_{v_h \in V_D^h} \left\{\|\nabla(u + \widehat{u}_D) - \nabla_h(v_h + \widehat{u}_D^h)\|_\Omega^2\right\} + 6 \inf_{\boldsymbol{r}_h \in K_{\boldsymbol{q}}^h} \left\{\|\boldsymbol{q} - \Pi_h \boldsymbol{r}_h\|_\Omega^2\right\},\end{aligned}$$

其中

$$K_{\boldsymbol{q}}^h := \operatorname{dom}(-D_h) := \{\boldsymbol{r}_h \in \boldsymbol{f}_h + \Sigma_N^h \mid \operatorname{div}(\boldsymbol{r}_h - \boldsymbol{f}_h) = -f_h \ \text{a.e. in } \Omega\}.$$

注 *4* 据作者所知，推论 1 给出了首个适用于泊松问题 Crouzeix–Raviart 逼近的最小正则性估计，该估计具有显式常数，考虑了一般载荷 $f^* \in H_D^{-1}(\Omega)$ 以及非齐次混合边界条件。在凸对偶理论框架下，已有结果将离散解 $(\boldsymbol{q}_h,\ u_h) \in K_{\boldsymbol{q}}^h \times V_D^h$ 与精确解的插值函数联系起来（参见 [11, 式 (1.34)]），但这些结果不适用于一般载荷，且通常针对齐次边界条件。唯一其他的准最优性结果是[71, 定理 3.4]，其中作者得到了如下估计

$$\|\nabla u - \nabla_h u_h\|_\Omega \le c_{\mathrm{qo}} \inf_{v_h \in V_D^h} \left\{\|\nabla u - \nabla_h v_h\|_\Omega\right\}.$$

虽然该估计不涉及对偶最佳逼近误差（不同于推论 1），但它要求在右端实现所谓的平滑算子 $E_h : V_D^h \to H_D^1(\Omega)$，即，$\langle f^*,\ E_h v\rangle_\Omega$，而且常数 $c_{\mathrm{qo}} > 0$ 并非显式，可能取决于例如形状正则性等因素。此外，他们的分析仅针对齐次狄利克雷边界条件。

3.6后验误差分析

在第 3.5 节按照离散层面的后验误差分析思路完成先验误差分析之后，本节最终将进行后验误差分析。为此，我们再次借鉴 [9,6] 中的思路，并与离散层面的先验误差分析类似，分三个步骤进行。

第一步同样是推导所谓的原始-对偶间隙估计量 η_{gap}^2的‘有意义的’表示：$K_{\boldsymbol{u}} \times K_{\mathsf{T}} \to \mathsf{R}$，对于每个 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，定义如下：

$$\eta_{\mathrm{gap}}^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) \coloneqq I(\boldsymbol{v}) - D(\boldsymbol{\tau}) \,. \tag{89}$$

在后验 误差分析中，原始-对偶间隙估计量 (89) 的表示要满足“有意义”这一核心要求，具体而言，它必须具有被积函数逐点非负的积分表示，从而能够推导出局部网格加密指示子，并据此进行局部网格细化。下文引理给出了原始-对偶间隙估计量 (89) 的这种“有意义”表示；该表示与第 3.5 小节的离散情形类似（参见引理2），并表明后者精确地度量了对凸最优性关系 (45) 的违反程度。

引理4 对于任意 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，有

$$\eta_{\mathrm{gap}}^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) = \tfrac{\nu}{2} \|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \tfrac{1}{\nu} \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_{\Omega}^2 \,.$$

证明 对于任意 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，利用 (48a)、连续分部积分公式（因为 $\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F} \in \mathbf{H}_N(\operatorname{div}; \Omega)$）、(48b)、$\boldsymbol{\tau} : (\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D) = \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} : (\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D)$ 在 Ω 中几乎处处成立（因为 $\operatorname{tr} \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) = \operatorname{div}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立），以及二项式公式，可得

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{v}) - D(\boldsymbol{\tau}) &= \tfrac{1}{2} \|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_{\Omega}^2 - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\Omega} - (\mathsf{F}, \nabla \boldsymbol{v})_{\Omega} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_{\Omega}^2 - (\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}, \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D)_{\Omega} \\
&= \tfrac{\nu}{2} \|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_{\Omega}^2 + (\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}), \boldsymbol{v})_{\Omega} - (\mathsf{F}, \nabla \boldsymbol{v})_{\Omega} \\
&\quad + \tfrac{1}{2\nu} \|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_{\Omega}^2 - (\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}, \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D)_{\Omega} \\
&= \tfrac{\nu}{2} \|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_{\Omega}^2 - (\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}, \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_{\Omega} + \tfrac{1}{2\nu} \|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_{\Omega}^2 \\
&= \tfrac{\nu}{2} \|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \tfrac{1}{\nu} \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|_{\Omega}^2 \,,
\end{aligned}$$

这就是所声称的原始-对偶间隙估计量（89）的表示式。

第二步同样是推导原始能量泛函（39）在原始解 $\boldsymbol{u} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 处的‘有意义的’最优强凸性度量表示式，即，$\rho_I^2 \colon K_{\boldsymbol{u}} \to [0, +\infty)$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$

$$\rho_I^2(\boldsymbol{v}) \coloneqq I(\boldsymbol{v}) - I(\boldsymbol{u}) \,, \tag{90}$$

以及对偶能量泛函（49）的相反数在对偶解 $\mathsf{T} \in K_{\mathsf{T}}$ 处的即，$\rho_{-D}^2 \colon K_{\mathsf{T}} \to [0, +\infty)$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$

$$\rho_{-D}^2(\boldsymbol{\tau}) \coloneqq -D(\boldsymbol{\tau}) + D(\mathsf{T}) \,, \tag{91}$$

将它们相加，称为原始-对偶总误差，即，$\rho_{\mathrm{tot}}^2 \colon K_{\boldsymbol{u}} \times K_{\mathsf{T}} \to [0, +\infty)$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$

$$\rho_{\mathrm{tot}}^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) \coloneqq \rho_I^2(\boldsymbol{v}) + \rho_{-D}^2(\boldsymbol{\tau}) \,, \tag{92}$$

再次，它在原始-对偶间隙恒等式中表示一个“自然的”误差量（参见定理 3）。

以下引理推导了最优强凸性度量 (90) 和 (91) 的这类“有意义的”表示式，它们类似于第 3.5 小节中的离散情形（参见引理 3）。

引理 5 以下陈述成立：
(i) 对任意 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$，有

$$\rho_I^2(\boldsymbol{v}) = \tfrac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{v} - \nabla \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 ;$$

(ii) 对任意 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，有

$$\rho_{-D}^2(\boldsymbol{\tau}) = \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau} - \operatorname{dev}\mathsf{T}\|_\Omega^2 .$$

证明 *(i)*。证明与引理 3(i) 类似。

关于 *(ii)*。对任意 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，利用 $(\operatorname{dev}\mathsf{T} - \operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}, \nabla \boldsymbol{u})_\Omega = (\mathsf{T} - \boldsymbol{\tau}, \nabla \boldsymbol{u})_\Omega = 0$（这可由 $\operatorname{tr}(\nabla \boldsymbol{u}) = \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立、连续分部积分公式以及 (48) 得出）、凸最优性条件 (45) 和二项式公式，可得

$$\begin{aligned}
-D(\boldsymbol{\tau}) + D(\mathsf{T}) &= \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2 - \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\mathsf{T}\|_\Omega^2 + (\operatorname{dev}\mathsf{T} - \operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}, \nabla \boldsymbol{u} + \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega \\
&= \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2 - \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\mathsf{T}\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{\nu}(\operatorname{dev}\mathsf{T} - \operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}, \operatorname{dev}\mathsf{T})_\Omega \\
&= \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2 - \tfrac{1}{\nu}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau}, \operatorname{dev}\mathsf{T})_\Omega + \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\mathsf{T}\|_\Omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2\nu}\|\operatorname{dev}\boldsymbol{\tau} - \operatorname{dev}\mathsf{T}\|_\Omega^2 ,
\end{aligned}$$

这就是所声称的最优强凸性度量（91）的表示。

在第三步中，根据定义（89）–（92）和强对偶关系（50），可得一个连续层次上的后验误差恒等式，称为原始-对偶间隙恒等式。

定理 3（原始-对偶间隙恒等式） 对于任意 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，均有

$$\rho_{\mathrm{tot}}^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) = \eta_{\mathrm{gap}}^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) . \tag{93}$$

证明 我们结合定义（89）、（90）–（92）以及强对偶关系（50）。

注 *5* 恒等式 (93) 先前已在 [64,62,46], 中导出，尽管条件更为严格。具体而言，载荷取在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中，应力$\boldsymbol{\tau}$被要求为对称，且条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{f}^*$ 在 $K_{\boldsymbol{u}}^*$ 中被强制满足。最终，这被用于导出一个上界，该上界并不假定 (93) 中的$\boldsymbol{v}$ 为无散，但需要引入一个附加的误差估计量。在本文中，我们将证明一个上界和一个下界，其中不需要附加估计量，并且压力误差实际上也可以得到控制；见第 4.7 节。

为了用于后验 误差估计，误差恒等式 (93) 需要可容许对 $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in K_{\mathsf{T}} \times K_{\boldsymbol{u}}$。获得可容许应力是直接的，因为可以采用 Marini重构 (65)。然而，获得可容许速度向量场并非完全平凡，因为离散解并非严格无散。所幸，一种能够给出可容许向量场的速度向量场后处理已在 [71, 式 (4.10)] 中提出。在定理6中，我们将给出另一种论证，使得可以直接在原始-对偶间隙估计量中使用非无散向量场；对此，对离散速度向量场进行简单的节点平均后处理即已足够；其代价是原始-对偶间隙恒等式 (93) 变为原始-对偶间隙等价性。

4 Navier–Lam´e 问题

本节考虑 Navier–Lam´e 问题。该问题最初由 C.-L. Navier 于 1821年提出（参见 [54]），后来由 G. Lam´e 于 1833年将其表述为现代形式（参见 [47]）。该问题描述了弹性体在外部载荷作用下的变形，其中 Lam´e 参数体现了抗压能力和抗剪切能力。

4.1 原始问题

设 $\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$ 为给定载荷，且 $\boldsymbol{u}_D \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ 为给定的狄利克雷边界数据。对于狄利克雷边界数据，我们假设存在一个向 Ω 内部的提升，即，存在一个向量场 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D \in \mathrm{H}^1(\Omega)$，使得 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D = \boldsymbol{u}_D$ q.e. 在 Γ_D 中成立。类比第 3 节，我们将针对位移向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$ 来提出问题，同时牢记原始问题的实际解将通过 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}} := \widehat{\boldsymbol{u}}_D + \boldsymbol{u} \in \widehat{\boldsymbol{u}}_D + \mathbf{H}_D^1(\Omega)$ 给出。

对于给定的*Lam´e* 参数 λ，$\mu > 0$，分别用 $\mathsf{C}\colon \mathrm{R}^{d\times d} \to \mathrm{R}^{d\times d}$ 表示体积模量和剪切模量，我们将对称的四阶弹性张量记为 C；对于每个 $\mathsf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$，其定义为

$$\mathbb{C}\mathsf{A} := 2\mu\mathsf{A} + \lambda \mathrm{tr}(\mathsf{A})\mathsf{I}\,. \tag{94}$$

张量 C 是对称且正定的，因此其逆 C^{-1} 也存在；此时，它的形式为

$$\mathbb{C}^{-1}\mathsf{B} = \tfrac{1}{2\mu}\mathrm{dev}\,\mathsf{B} + \tfrac{1}{2d\mu + d^2\lambda}\mathrm{tr}(\mathsf{B})\mathsf{I}\,, \qquad \forall\, \mathsf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}. \tag{95}$$

特别地，以下范数等价性成立：

$$2\mu|\mathsf{A}|^2 \le \mathbb{C}\mathsf{A} : \mathsf{A} \quad \le (2\mu + d\lambda)|\mathsf{A}|^2 \quad \text{for all } \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}\,, \tag{96a}$$

$$\tfrac{1}{2\mu + d\lambda}|\mathsf{B}|^2 \le \mathbb{C}^{-1}\mathsf{B} : \mathsf{B} \le \tfrac{1}{2\mu}|\mathsf{B}|^2 \quad \text{for all } \mathsf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}\,. \tag{96b}$$

由 (96a) 和 (96b) 可知，可以定义由 C 和 C^{-1} 诱导的范数，它们与 $\|\cdot\|_\Omega$ 等价，记为

$$\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathsf{A}\|_\Omega := ((\mathbb{C}\mathsf{A},\mathsf{A})_\Omega)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \mathsf{A}\in\mathbb{L}^2(\Omega)\,, \tag{97a}$$

$$\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\mathsf{B}\|_\Omega := ((\mathbb{C}^{-1}\mathsf{B},\mathsf{B})_\Omega)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \mathsf{B}\in\mathbb{L}^2(\Omega)\,. \tag{97b}$$

注意，利用弹性张量 $\mathbb{C}\colon \mathsf{R}^{d\times d}\to\mathsf{R}^{d\times d}$ 的定义（参见 (94)），可以用等价范数 (97a) 重写 Korn 不等式 (24)：更准确地说，对每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有

$$\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\nabla\boldsymbol{v}\|^2_\Omega \le c_{\mathrm{K}}\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathbb{e}(\boldsymbol{v})\|^2_\Omega\,, \tag{98}$$

其中，$c_{\mathrm{K}}>0$ 是 Korn 不等式 (24) 中相同的 Korn常数。

于是，基于上述定义，我们考虑一个 *Navier–Lam´e*（极小化）问题，该问题旨在寻找一个位移向量场 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，使原始能量泛函 $I\colon \mathbf{H}^1_D(\Omega)\to\mathsf{R}$ 在每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 上达到极小，其中该泛函定义为

$$I(\boldsymbol{v}) := \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\mathbb{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\mathbb{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - \langle\boldsymbol{f}^*,\boldsymbol{v}\rangle_\Omega\,. \tag{99}$$

本节将 (99) 的极小化称为原始问题。根据变分法的直接法，存在唯一极小化子 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，称为原始解；其中，原始能量泛函 (99) 所需的弱强制性主要依赖于 Korn 不等式 (98)。由于原始能量泛函 (99) 是 Frech´et 可微的，与原始问题相关的最优性条件可通过变分等式给出（即，在 $\mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)$ 中）：事实上，当且仅当对每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有以下关系成立时，$\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 才是 (99) 的极小化子

$$(\mathbb{C}\mathbb{e}(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\mathbb{e}(\boldsymbol{v}))_\Omega = \langle\boldsymbol{f}^*,\boldsymbol{v}\rangle_\Omega\,. \tag{100}$$

4.2 对偶问题

在本小节中，我们推导并考察 Navier–Lam´e 问题 (99) 的一个（拉格朗日函数）对偶问题（按照 [74, 第 49] 章的定义）。为此，我们引入拉格朗日函数 $\mathcal{L}\colon \mathbf{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_D(\Omega)\to\mathsf{R}$，对于每个 $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\in\mathbf{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，定义为

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v}) := -\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau})_\Omega + (\boldsymbol{\tau},\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - \langle\boldsymbol{f}^*,\boldsymbol{v}\rangle_\Omega\,.$$

注意，能量密度 $\phi\colon \Omega\times\mathsf{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}\to\mathsf{R}$ 的（Fenchel）共轭泛函（关于第二个自变量），对几乎处处的 $x\in\Omega$ 以及每个 $\mathsf{A}\in\mathsf{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$，定义为

$$\phi(x,\mathsf{A}) := \tfrac{1}{2}\mathbb{C}(\mathsf{A}+\mathbb{e}(\widehat{\boldsymbol{u}}_D)(x)) : (\mathsf{A}+\mathbb{e}(\widehat{\boldsymbol{u}}_D)(x))\,,$$

由 ϕ^* 给出：$\Omega\times\mathsf{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}\to\mathsf{R}$，对于几乎处处的 $x\in\Omega$ 以及每个由下式定义的 $\mathsf{A}\in\mathsf{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$

$$\phi^*(x,\mathsf{A}) := \tfrac{1}{2}\mathbb{C}^{-1}\mathsf{A} : \mathsf{A} - \mathsf{A} : \mathbb{e}(\widehat{\boldsymbol{u}}_D)(x)\,.$$

因此，根据 [68,定理 2], ，对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有

$$\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega = \sup_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)} \big\{ -\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau})_\Omega - (\boldsymbol{\tau},\mathfrak{e}(\widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega \big\},$$

这意味着，对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有

$$I(\boldsymbol{v}) = \sup_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\}. \tag{101}$$

由于拉格朗日函数 $\mathcal{L}\colon \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) - \infty \quad \boldsymbol{v} \in \quad \times \quad \Omega \quad \to \quad \boldsymbol{\tau} \ \boldsymbol{v} \ \to$ $\mathbf{H}^1_D(\Omega)$ R 具有凹凸性，并且对于所有 $\mathbf{H}^1_D(\,)$ 都有 $\mathcal{L}(,)$ $(\|\boldsymbol{\tau}\|_\Omega \to +\infty)$，根据极小极大定理（参见 [74,定理 49.B]），它存在一个鞍点 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，即，我们有

$$\min_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \max_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\} = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) = \max_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)} \min_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\}. \tag{102}$$

与相应鞍点问题相关的最优性条件归结为寻找 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，使得对于每个 $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v}) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有

$$-(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})_\Omega + (\mathfrak{e}(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\boldsymbol{\tau})_\Omega = 0\,, \tag{103a}$$
$$(\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}))_\Omega = \langle \boldsymbol{f}^*,\boldsymbol{v}\rangle_\Omega\,, \tag{103b}$$

这等价于

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\mathfrak{e}(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D) \quad \text{a.e. in } \Omega\,. \tag{104}$$

那么，根据 [74, 第 49 节2], ，相应的（拉格朗日）对偶问题可通过最大化对偶能量泛函 D给出：$\mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$，对每个由下式定义的 $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)$

$$D(\boldsymbol{\tau}) \coloneqq \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \big\{\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})\big\}. \tag{105}$$

注意，由于应力具有对称性，我们可以用对称梯度替换梯度，因此定义 (105) 中的下确界有限，当且仅当对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有

$$(\boldsymbol{\sigma},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega = (\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}))_\Omega = \langle \boldsymbol{f}^*,\boldsymbol{v}\rangle_\Omega = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_\Omega + (\mathsf{F},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\,,$$

其中我们使用了表示 (21)，它等价于 $\boldsymbol{\tau}$ –F $\in \mathbf{H}(\mathrm{div};\,\Omega)$，并且

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}-\mathsf{F}) = -\boldsymbol{f} \quad \text{a.e. in } \Omega\,, \tag{106a}$$
$$\langle(\boldsymbol{\tau}-\mathsf{F})\boldsymbol{n},\widetilde{\boldsymbol{v}}\rangle_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_N)\,. \tag{106b}$$

因此，只需考虑受限对偶能量泛函$D\colon (\mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)) \cap \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$，对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in (\mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)) \cap \mathrm{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)$，其显式积分表示为

$$D(\boldsymbol{\tau}) \coloneqq -\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau})_\Omega + (\boldsymbol{\tau},\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega - I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}(\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}-\mathsf{F}))\,. \tag{107}$$

于是，对偶能量泛函 (107) 的负值的有效定义域由下式给出

$$K_{\boldsymbol{\sigma}} \coloneqq \operatorname{dom}(-D) \coloneqq \left\{ \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\operatorname{div};\Omega)) \cap \mathbb{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) \mid \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f} \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

根据（102），存在唯一极大元 $\boldsymbol{\sigma} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，称为对偶解，并且适用强对偶关系，即，我们有

$$I(\boldsymbol{u}) = D(\boldsymbol{\sigma}). \tag{108}$$

4.3 扩展至非对称张量场的对偶问题 或场

尽管上一小节中对偶解 $\boldsymbol{\sigma} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的存在性始终得到保证，但众所周知，很难为对偶形式（103）设计保形离散化，其中离散应力是对称的，并且同时属于 $\mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$。此外，在后验 误差分析层面，同样难以重构满足对偶能量泛函（107）中所编码的对称性要求的平衡应力。因此，在本小节中，我们将第 4.1 小节和第 4.2 小节中介绍的对偶框架扩展到非对称情形：更确切地说，在原始能量泛函（99）中，我们用全梯度替代对称梯度，从而可以去除对偶能量泛函（107）中所编码的应力对称性要求。

首先，我们引入扩展原始问题，该问题寻求一个向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，使扩展原始能量泛函 $\overline{I}$ 达到极小：$\mathbf{H}^1_D(\Omega) \to \mathsf{R}$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$

$$\overline{I}(\boldsymbol{v}) \coloneqq \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D), \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega. \tag{109}$$

注意，扩展原始能量泛函 (109) 实际上并不是原始能量泛函 (99) 的扩展，而是一种修改，即用全梯度替代了对称梯度。

然后，为了确定（拉格朗日）对偶问题（按 [74,第 49] 章的意义）对应于 (109) 的极小化问题，我们引入扩展拉格朗日函数 $\overline{\mathcal{L}}$：$\mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1_D(\Omega) \to \mathsf{R}$，对于每个由下式定义的 $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$

$$\overline{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \coloneqq -\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})_\Omega + (\boldsymbol{\tau}, \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega. \tag{110}$$

类比第 4.2 小节中的过程，我们发现，对 (109) 进行极小化所对应的（拉格朗日）对偶问题（按 [74, 第 49] 章的意义）可通过最大化扩展对偶能量泛函 D 得到：$\mathsf{F} + \underline{\mathbf{H}}_N(\mathrm{div};\,\Omega) \to \mathsf{R} \cup \{-\infty\}$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$

$$\overline{D}(\boldsymbol{\tau}) \coloneqq -\tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})_\Omega + (\boldsymbol{\tau}, \nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega - I^\Omega_{\{-\boldsymbol{f}\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F})). \tag{111}$$

注意，扩展对偶能量泛函 (111) 实际上是对偶能量泛函 (107) 的扩展，因为对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in (\mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)) \cap \mathbf{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega)$，都有

$$\overline{D}(\boldsymbol{\tau}) = D(\boldsymbol{\tau}). \tag{112}$$

最后，根据极小极大定理（参见 [74, 定理 49.B]），扩展拉格朗日函数 (110) 存在一个鞍点 $(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\boldsymbol{u}}) \in (\mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\, \Omega)) \times \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，其等价地由以下最优性关系刻画：对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，都有

$$-(\mathbb{C}^{-1}\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau})_\Omega + (\nabla(\overline{\boldsymbol{u}} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D), \boldsymbol{\tau})_\Omega = 0\,, \tag{113a}$$

$$(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega = \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega\,. \tag{113b}$$

特别地，向量场 $\overline{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 是扩展原始能量泛函 (109) 的唯一极小化元，称为扩展原始解；张量场 $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\, \Omega)$ 是扩展对偶能量泛函 (111) 的唯一极大元，称为扩展对偶解，并且强对偶关系成立，即我们有

$$\overline{I}(\overline{\boldsymbol{u}}) = \overline{D}(\overline{\boldsymbol{\sigma}})\,. \tag{114}$$

4.4 离散原始问题

设 $\widehat{\boldsymbol{u}}^h_D \in V^h$、$\boldsymbol{f}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$ 与 $\mathsf{F}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$、$\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 与 $\mathsf{F} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 的逼近。然后，我们考虑离散 *Navier–Lam´e*（极小化）问题，它寻求一个离散位移向量场 $\boldsymbol{u}_h \in V^h_D$，使离散原始能量泛函 $I_h\colon\ V^h_D \to \mathrm{R}$ 对每个 $\boldsymbol{v}_h \in V^h_D$ 取极小，其定义为

$$I_h(\boldsymbol{v}_h) \coloneqq \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D\|^2_h - (\boldsymbol{f}_h, \mathit{\Pi}_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega\,. \tag{115}$$

在本节中，我们将式 (115) 的极小化称为离散原始问题。唯一极小化元 $\boldsymbol{u}_h \in V^h_D$（称为离散原始解）的存在性，可由变分法中的直接法得到；其中，离散原始能量泛函 (115) 所需的弱强制性，关键在于离散 Korn 不等式 (26)，并需回顾离散范数 $\|\cdot\|_h$ 的定义（参见式 (27b)）。由于离散原始能量泛函 (115) Fr´echet 可微，当且仅当对每个 $\boldsymbol{v}_h \in V^h_D$，下式成立时，$\boldsymbol{u}_h \in V^h_D$ 是式 (115) 的极小化子：

$$(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D, \boldsymbol{v}_h)_h = (\boldsymbol{f}_h, \mathit{\Pi}_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega + (\mathsf{F}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega\,. \tag{116}$$

由于离散原始能量泛函 (115) 中存在稳定化项 s_h，我们不期望能找到与之对应的（拉格朗日函数）对偶问题（按照 [74, 第 49] 章的含义）。

4.5先验误差分析

由于对 (116) 的极小化尚未确定相应的（拉格朗日函数）对偶问题（按照 [74, 第 49] 章中的定义），因此无法同时推导先验误差恒等式以及涉及原问题和

对偶逼近的准最优误差估计（如定理 1 所示）。尽管如此，我们仍然可以推导出一个准最优误差估计。该估计不控制对偶逼近误差，而是考虑相对于不要求对称性的可容许离散应力集合的对偶逼近误差，即，

$$\overline{K}^h_{\boldsymbol{\sigma}} \coloneqq \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in \mathsf{F}_h + \Sigma^h_N \mid \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h) = -\boldsymbol{f}_h \text{ a.e. in } \Omega \right\}, \tag{117}$$

在右端。

定理 4 设 $\widehat{\boldsymbol{u}}^h_D \coloneqq \mathcal{I}^{cr}_h \widehat{\boldsymbol{u}}_D \in V^h$, $\boldsymbol{f}_h \coloneqq \Pi_h \boldsymbol{f} \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$, 且 $\mathsf{F}_h \coloneqq \Pi_h \mathsf{F} \in (\mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。则有以下结论：

(i) 对任意 $\boldsymbol{v}_h \in V^h_D$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\boldsymbol{\sigma}}$，成立以下先验误差估计

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\|_h^2 \le 8 \big\{ &\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D) - \mathbb{C}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{\tau}_h))\|^2_\Omega \\ &+ s_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D, \boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D) + c^{\mathrm{disc}}_{\mathrm{K}} \|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}} \operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}_h)\|^2_\Omega \big\}; \end{aligned} \tag{118}$$

(ii) 成立以下误差估计

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D - \boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D\|_h \lesssim &\inf_{\boldsymbol{v}_h \in V^h_D} \left\{ \|\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D - \boldsymbol{v}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D\|_h \right\} \\ &+ \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \overline{K}^h_{\boldsymbol{\sigma}}} \left\{ \|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h)\|_\Omega \right\}. \end{aligned} \tag{119}$$

注 *6* (i) 据作者所知，类似于 (119) 的误差估计尚属首次提出。传统方法（如 [42, 定理 3.1], ）需要额外的正则性假设（例如，$\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)$ 对某个 $\varepsilon > 0$成立），且通常针对齐次边界条件以及属于 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 的载荷 $\boldsymbol{f}^* \in \mathbf{H}^{-1}_D(\Omega)$ 构建，即，F 在 Ω 中几乎处处成立。就作者所知，针对涉及对称梯度的 Crouzeix–Raviart 离散化，唯一其他具有最小正则性的准最优性结果是 [28], 的结果；该结果处理的是（非线性）不可压缩系统，但要求对试函数和检验函数应用平滑算子。关于另一种无锁非协调方法的最小正则性结果（虽然包含振荡项），另请参见 [23]。

(ii) 请注意，先验误差估计式 (118) 右端的第一项，是连续层面原始-对偶间隙估计量的离散对应形式（与 (124) 对比），它衡量最优性关系 (104)（本构定律）的违背程度。其余各项则分别处理刚体运动核以及离散应力 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\boldsymbol{\sigma}}$ 可能存在的非对称性。

—

证明（定理 *4*）

由 (118)。令 $\boldsymbol{v}_h \in V^h_D$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K^h_{\boldsymbol{\sigma}}$ 固定，但任意选取。因此，由于离散原始能量泛函 (115) 是光滑二次泛函，$\mathrm{D}I_h(\boldsymbol{v}_h) = R_{V^h_D}(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}^h_D) - (\boldsymbol{f}_h, \Pi_h(\cdot))_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h(\cdot))_\Omega$ 属于 $(V^h_D)^*$，其中

$R_{V_D^h}\colon\ V_D^h \to (V_D^h)^*$ 是 $(V_D^h,\ (\cdot,\ \cdot)_h)$ 的 Riesz 同构，并且对于 $\mathrm{D}^2 I_h \equiv R_{V_D^h}$，通过泰勒展开可得

$$
\begin{aligned}
0 &\geq I_h(\boldsymbol{u}_h) - I_h(\boldsymbol{v}_h) \\
&= \langle \mathrm{D}I_h(\boldsymbol{v}_h), \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\rangle_{V_D^h} + \tfrac{1}{2}\langle \mathrm{D}^2 I_h(\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h), \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\rangle_{V_D^h} \\
&= (\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h)_h \\
&\quad - (\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h))_\Omega + \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\|_h^2 .
\end{aligned}
\tag{120}
$$

接下来，利用 $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h) = -\boldsymbol{f}_h$ a.e. in Ω 以及离散分部积分公式 (36)（因为 $\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h \in \Sigma_N^h$），我们得到

$$
\begin{aligned}
-(\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\mathsf{F}_h, \nabla_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h))_\Omega &= (\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h - \mathsf{F}_h), \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h)_\Omega \\
&\quad - (\mathsf{F}_h, \nabla_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h))_\Omega \\
&= (\boldsymbol{\tau}_h, \nabla_h(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h))_\Omega \\
&= (\mathbb{C}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{\tau}_h), \mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h))_\Omega \\
&\quad + (\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}_h), \nabla_h(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h))_\Omega .
\end{aligned}
\tag{121}
$$

然后，在 (120) 中使用 (121)、H¨older 不等式以及离散 Korn 不等式 (26)，可得

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\|_h^2 &\leq (\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - \mathbb{C}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{\tau}_h), \mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h)) \\
&\quad + s_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h) - (\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}_h), \nabla_h(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h))_\Omega \\
&\leq \big\{\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\|_h^2 + \|\mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h)\|_\Omega^2\big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \big\{\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - \mathbb{C}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{\tau}_h))\|_\Omega^2 \\
&\quad + s_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) + c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{disc}}\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_\Omega^2\big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\|_h\big\{\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) - \mathbb{C}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{\tau}_h))\|_\Omega^2 \\
&\qquad + s_h(\boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \boldsymbol{v}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) \\
&\qquad + c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{disc}}\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_\Omega^2\big\}^{\frac{1}{2}} ,
\end{aligned}
$$

这就推出了所声称的 先验 误差估计 (118)。

ad (119). 设 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\boldsymbol{\sigma}}^h$ 为固定但任意的量。利用凸最优性条件（ 104 118 $s_h\ \boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D\ \boldsymbol{w}_h\ =0$ $\boldsymbol{w}_h \in$），（），可得对所有，V_D^h $\boldsymbol{\sigma}\ =\mathbf{0}$ Ω $\{|\ ^{\frac{1}{2}}$ $|\ |\ ^{\frac{1}{2}}$ $|\}\leq$ 有（，），且 skew（）几乎处处成立于，以及 max C sym（A），C 反对称部分（A）

$|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathrm{A}|$ 对所有 $\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_h &\le \|\boldsymbol{u}-\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\boldsymbol{v}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_h+\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h\|_h\\
&\le \|\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\boldsymbol{v}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_h\\
&\quad+\sqrt{8}\,\big\{\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)-\mathbb{C}^{-1}\mathrm{sym}\,(\boldsymbol{\tau}_h))\|_\Omega\\
&\qquad+s_h(\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h,\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad+(c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{disc}})^{\frac{1}{2}}\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{skew}\,(\sigma-\boldsymbol{\tau}_h)\|_\Omega\big\}\\
&\le \|\boldsymbol{u}-\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\boldsymbol{v}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_h\\
&\quad+\sqrt{8}\,\big\{\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h-\boldsymbol{u}-\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega\\
&\qquad+s_h(\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h-(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\boldsymbol{v}_h+\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h-(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D))^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad+\{(c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{disc}})^{\frac{1}{2}}+1\}\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\tau}_h)\|_\Omega\big\}\,.
\end{aligned}
\tag{122}
$$

然后，分别对 (122) 中的 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h \in K_{\boldsymbol{\sigma}}^h$ 取下确界，即可得出所述的准最优误差估计 (119) 成立。

结合定理 2 与逼近性质 (32)–(35)，便可在适当的正则性假设下得出最优误差衰减率 $s \in (0,1]$，即，

$$
\|\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_D^h\|_h^2=\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}}^{2s})\,,
\tag{123}
$$

其中，一如往常，借助逼近性质 (33)，该逼近在近乎不可压缩区域 $\frac{\lambda}{\mu}\gg 1$ 中具有稳健性。

4.6后验误差分析

本节旨在证明一个类似于定理 3(93) 的原始-对偶间隙恒等式。如前所述，一个主要困难在于：对于给定的离散原始解 $\boldsymbol{u}_h \in V_D^h$，要重构出一个完全（甚至弱）对称的离散应力 $\boldsymbol{\sigma}_h^* \in K_{\boldsymbol{\sigma}}^h$ 并非易事；事实上，通过 Marini 型公式（参见 (131)）得到的后续重构离散应力 $\boldsymbol{\sigma}_h^* \in K_{\boldsymbol{\sigma}}^h$ 既不完全对称，也不弱对称，因此不满足对偶能量泛函 (107) 的可容许条件，导致无法逐字重复定理 3(93) 中的论证（原文如此）。相反，本节的分析将利用扩展对偶能量泛函 (111) 和协调性 (112)。当然，若能进行对称后处理，则可使用相应的后验误差恒等式；关于在完全对称应力的背景下为 Navier–Lam´e 问题 (99) 推导的 Prager–Synge 恒等式，请参见 [48]。

仿照第 3.6 节，我们首先引入扩展原始-对偶间隙估计量 $\overline{\eta}_{\mathrm{gap}}^2:\ \mathbf{H}_D^1(\Omega)\times K_{\boldsymbol{\sigma}} \to \mathrm{R}$，对每一个 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)\times K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 定义为

$$
\overline{\eta}_{\mathrm{gap}}^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau})=\tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|_\Omega^2\,,
\tag{124}
$$

其中无对称性要求的可容许应力集合定义为

$$\overline{K}_{\boldsymbol{\sigma}} \coloneqq \{\boldsymbol{\tau} \in \mathsf{F} + \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\Omega) \mid \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}) = -\boldsymbol{f} \text{ a.e. in } \Omega\}\,. \tag{125}$$

与第 3.6 节类似，我们假设 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$，以及 $\mathsf{F} = \mathsf{F}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$；在一般情况下，后验误差估计还将包含数据振荡项（参见第4.8节）。请注意，与斯托克斯问题的原始-对偶间隙估计量 (89) 不同，这里的后验误差估计量 (124) 被定义为偏离凸最优性关系 (104) 的程度。以下引理将确立它与能量差之间的精确关系。

引理 6 对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，我们有

$$\overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau}) = I(\boldsymbol{v}) - \overline{D}(\boldsymbol{\tau}) + (\mathrm{skew}\,(\boldsymbol{\tau}), \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega\,.$$

注 7 我们指出，若 $\mathrm{skew}\,(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$ 在 Ω 上几乎处处成立，则扩展原始-对偶间隙估计量 (124) 实际上就是对偶间隙，因为在这种情况下，我们有 $D(\boldsymbol{\tau}) = D(\boldsymbol{\tau})$。

证明（引理 6）对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 及 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，利用 (48a)、连续分部积分公式（因为 $\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F} \in \mathbf{H}_N(\mathrm{div};\Omega)$）、(48b) 和二项式公式，可得

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{v}) - \overline{D}(\boldsymbol{\tau}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D), \mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_\Omega - (\mathsf{F}, \nabla\boldsymbol{v})_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau})_\Omega - (\boldsymbol{\tau}, \nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D), \mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega + (\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau} - \mathsf{F}), \boldsymbol{v})_\Omega - (\mathsf{F}, \nabla\boldsymbol{v})_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau})_\Omega - (\boldsymbol{\tau}, \nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D), \mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega - (\boldsymbol{\tau}, \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)) + \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau})_\Omega \\
&= \tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|^2_\Omega - (\mathrm{skew}\,(\boldsymbol{\tau}), \nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega\,,
\end{aligned}$$

这就是所声称的扩展原始-对偶间隙估计量 (124) 的表示。

接下来，仿照第 3.6 节，我们继续引入原始解 $\boldsymbol{u} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 处原始能量泛函 (99) 的（扩展）强凸性度量，即，$\rho_I^2 \colon \mathbf{H}^1_D(\Omega) \to [0,+\infty)$，对每个由以下定义的 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$

$$\rho_I^2(\boldsymbol{v}) \coloneqq \tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{e}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\|^2_\Omega\,, \tag{126}$$

以及对偶解 $\boldsymbol{\sigma} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 处扩展对偶能量泛函 (111) 的（负）函数的即，$\rho^2_{-D} \colon K_{\boldsymbol{\sigma}} \to \mathrm{R}$，对每个由以下定义的 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\rho^2_{-\overline{D}}(\boldsymbol{\tau}) \coloneqq \tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})\|^2_\Omega\,. \tag{127}$$

请注意，与 Stokes 问题中的最优强凸性度量 (90) 和 (91) 不同，这里分别将 (126) 和 (127) 中的（扩展）强凸性度量定义为原始能量泛函 (99) 和扩展对偶能量泛函 (111) 所需的误差度量。它们与能量差之间的确切关系将在以下引理中确立。

引理 7 以下表示式成立：
(i) 对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有

$$\rho_I^2(\boldsymbol{v}) = I(\boldsymbol{v}) - I(\boldsymbol{u})\,;$$

(ii) 对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，我们有

$$\rho^2_{-\overline{D}}(\boldsymbol{\tau}) = -\overline{D}(\boldsymbol{\tau}) + \overline{D}(\boldsymbol{\sigma}) + (\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}), \nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega\,.$$

证明 (i)。由于 $I\colon \mathrm{H}^1_D(\Omega) \to \mathrm{R}$ 是一个二次泛函，$\mathrm{D}I(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}^*$ in $\mathrm{H}^{-1}_D(\Omega)$，且 $\mathrm{D}^2 I \equiv R_{\mathbf{H}^1_D(\Omega)}$，其中 $R_{\mathbf{H}^1_D(\Omega)} : \mathrm{H}^1_D(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}_D(\Omega)$ 是 $(\mathrm{H}^1_D(\Omega), (\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}\mathbb{C}(\cdot), \mathrm{C}^{\frac{1}{2}}\mathbb{C}(\cdot))_\Omega)$ 的 Riesz 同构，对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)$，泰勒展开可得

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{v}) - I(\boldsymbol{u}) &= \langle \mathrm{D}I(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\rangle_{\mathbf{H}^1_D(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\langle \mathrm{D}^2 I(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\rangle_{\mathbf{H}^1_D(\Omega)} \\ &= \tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathbb{e}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\|^2_\Omega\,, \end{aligned}$$

这就是所声称的强凸性度量 (126) 的表示。

证明 *(ii)*。对于 $\overline{\boldsymbol{\tau}} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，利用 $(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \nabla \boldsymbol{u})_\Omega = 0$（这由连续分部积分公式以及 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 得出），反对称部分 $(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ 几乎处处成立于 Ω（因为 $\boldsymbol{\sigma} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$），以及凸最优性条件 (104)，我们得到

$$\begin{aligned} -\overline{D}(\boldsymbol{\tau}) + \overline{D}(\boldsymbol{\sigma}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})_\Omega - \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})_\Omega - (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})_\Omega - \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})_\Omega - (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})_\Omega - \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})_\Omega - (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \mathbb{e}(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega \\ &\quad - (\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}), \nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega \\ &= \tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})\|^2_\Omega - (\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}), \nabla(\boldsymbol{u} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega\,, \end{aligned}$$

这就是强凸性度量（127）所声称的表示。

现在我们引入扩展原始-对偶总误差，即，$\rho^2_{\mathrm{tot}}\colon \mathbf{H}^1_D(\Omega) \times K_{\boldsymbol{\sigma}} \to \mathrm{R}$，对于每个 $\overline{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ 以及由下式定义的 $\boldsymbol{\tau} \in K_\sigma$

$$\overline{\rho}^2_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) \coloneqq \rho_I^2(\boldsymbol{v}) + \rho^2_{-\overline{D}}(\boldsymbol{\tau})\,.$$

现在我们可以推导出一个后验误差等价性。注意，与定理 4 中的先验误差估计类似，这里得到的是等价性而非恒等式，因为没有假设可容许应力 $\overline{\boldsymbol{\tau}} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 是对称的。

定理 5 对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 以及 $\overline{\boldsymbol{\tau}} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，有如下恒等式和等价性

$$\overline{\rho}^2_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) = \overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) + (\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}), \nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}))_\Omega \sim \overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau})\,, \tag{128}$$

其中明确写出的等价性为

$$\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}\mathbb{e}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\|^2_\Omega + \|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})\|^2_\Omega \sim \|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{e}(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|^2_\Omega\,, \tag{129}$$

估计式 $\gtrsim$ 中的隐含常数由 2 给出，而估计式 $\lesssim$ 中的隐含常数仅取决于 $\max_{T\in\mathcal{T}_h}\{c_{\mathrm{K},T}^2\}$，即逐单元 *Korn* 常数的最大值 $c_{\mathrm{K},T}^2>0$ （参见 *[44,* 不等式 *(3.2)* 和定理 *3.1]*）。

证明式 (128)。回顾协调性 (112) 和强对偶关系 (108)，式 (128) 可直接由引理 6 和引理 7 得出。

证明式 (128)。接下来，我们来证明所述等价性:

证明 $\lesssim$。对于每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_D^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\tau}\in K_{\boldsymbol{\sigma}}$，记 $\mathsf{A}_h:=\Pi_h$反对称部分 $\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\in(\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$，并利用反对称部分 $(\boldsymbol{\tau})\perp_{\mathbb{L}^2}$反对称部分 $\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})-\mathsf{A}_h$、反对称部分 $(\boldsymbol{\tau})$: $\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\tau}$: 反对称部分 $\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ 在 Ω 中几乎处处成立，以及 $\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\perp_{\mathbb{L}^2}$C反对称部分 $\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ 和霍尔德不等式，可得

$$\begin{aligned}(\operatorname{skew}(\boldsymbol{\tau}),\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}))_\Omega&=(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\mathbb{C}\operatorname{skew}\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}))_\Omega\\&=(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau},\mathbb{C}(\operatorname{skew}\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})-\mathsf{A}_h))_\Omega\\&\le\|\mathbb{C}^{\frac12}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|_\Omega\\&\quad\times\|\mathbb{C}^{\frac12}(\operatorname{skew}\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})-\mathsf{A}_h)\|_\Omega,\end{aligned}$$

其中，根据 Π_h 的 L^2-最佳逼近性质，记

$$\mathrm{RM}(T):=\{\mathsf{A}(\cdot)+\boldsymbol{b}\colon T\to\mathbb{R}^{d\times d}\mid\mathsf{A}\in\mathbb{R}^{d\times d},\,\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d,\,\mathsf{A}^\top=-\mathsf{A}\},$$

在 T 上的刚体运动空间，逐单元应用 Korn 不等式（参见 [44,不等式 (3.2)]）可得

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{C}^{\frac12}(\operatorname{skew}\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})-\mathsf{A}_h)\|_\Omega\\&=\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\mathbb{C}^{\frac12}(\operatorname{skew}\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})-\mathsf{A}_h)\|_T^2\right\}^{\frac12}\\&\le\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\inf_{\boldsymbol{\varrho}_T\in\mathrm{RM}(T)}\left\{\|\mathbb{C}^{\frac12}(\operatorname{skew}\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varrho}_T)\|_T^2\right\}\right\}^{\frac12}\\&\le\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}c_{\mathrm{K},T}^2\|\mathbb{C}^{\frac12}\mathfrak{e}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}))\|_T^2\right\}^{\frac12},\end{aligned}$$

其中 $c_{\mathrm{K},T}^2>0$、$T\in\mathcal{T}_h$ 表示逐单元 Korn 常数（参见 [44, 定理 3.1]），因此应用 Young 不等式可得所述上界成立。

且 $\gtrsim$。利用凸最优性条件 (104)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathbb{C}^{\frac12}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|_\Omega^2&=\|\mathbb{C}^{\frac12}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\mathfrak{e}(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)+\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}-\mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|_\Omega^2\\&\le2\{\|\mathbb{C}^{\frac12}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\|_\Omega^2+\|\mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\tau})\|_\Omega^2\},\end{aligned}$$

由此得到所述下界。

注 *8*（关于定理 *5* 中的逐单元 *Korn* 常数）根据[44,定理 3.1],，对于每个 $T\in\mathcal{T}_h$，我们有 $c_{\mathrm{K},T}^2\le{}_2{}^{\theta^2}\sin(\text{最小值}_4{}^T)$，其中$\theta_{\min,T}\in(0,\tfrac{\pi}{2}]$是 T 中的最小角。

注 *9*（关于定理 *5* 的相关结果）
已有多项研究针对 Navier–Lam´e 问题提出了 Prager–Synge 型后验误差估计方法:

[31] 中的结果在结构上与本文方法最为接近：它推导出一个后验估计量（无需重构的离散应力满足对称性），且分析涉及逐单元 Korn 常数（参见注 8）。然而， [31], 中的结果针对多项式次数为 $k \geq 2$ 的协调离散建立。

[17], 中提出了一个相关框架，对位移-压力公式进行分析，并基于弱对称重构 $\boldsymbol{\sigma}_h^* \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ 构造了一个 Prager–Synge 型后验估计量。 [17] 中的框架同样假设多项式次数为 $k \geq 2$，证明了局部效率，并展示了其对不可压极限的鲁棒性。

文献 [45] 采用 Crouzeix–Raviart 离散化，并在次低阶 Raviart–Thomas 空间中重构应力。所得重构是弱对称的，但分析需要分别对对称性缺陷和 $\boldsymbol{u}_h \in V_D^h$ 的非协调性使用估计量，且未能证明效率。原则上， [45]中的重构策略也可以与本文的估计量结合，而不影响分析的有效性；该分析在位移向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}_D^1(\Omega)$ 满足最小正则性假设时仍然适用。

为了使推导出的后验误差等价性得以应用，需要能够以较低的计算成本，根据求解式（116）得到的离散位移场 $\boldsymbol{u}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$ 重构出一个容许离散张量场 $\boldsymbol{\sigma}_h^* \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$。尽管我们没有像命题1那样，为离散原始能量泛函（115）的极小化推导离散对偶问题，但我们能够为此类容许离散张量场建立一个 Marini 型公式。

命题 2（Marini 型公式）给定离散原始解$\boldsymbol{u}_h \in K_{\boldsymbol{u}}^h$（即离散位移场）以及跳跃稳定化项 $s_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \cdot)$的一个离散提升 $\boldsymbol{r}_h \in V_D^h$，对于每个由下式定义的 $\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$

$$(\nabla_h \boldsymbol{r}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega = s_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \boldsymbol{v}_h)\,, \tag{130}$$

离散张量场

$$\boldsymbol{\sigma}_h^* \coloneqq \mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) + \nabla_h \boldsymbol{r}_h - \tfrac{2}{d+1}\mathrm{sym}\,(\boldsymbol{f}_h \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - \mathit{\Pi}_h \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})) \in (\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h))^{d\times d}\,, \tag{131}$$

满足 $\boldsymbol{\sigma}_h^* \in K_{\boldsymbol{\sigma}}^h$，且

$$\mathit{\Pi}_h \boldsymbol{\sigma}_h^* = \mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) + \nabla_h \boldsymbol{r}_h \qquad a.e.\ in\ \Omega\,, \tag{132a}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_h^* - \mathsf{F}_h) = -\boldsymbol{f}_h \qquad a.e.\ in\ \Omega\,. \tag{132b}$$

证明 首先，我们注意到 $\mathrm{div}_h\boldsymbol{\sigma}_h^* = -\frac{2}{d+1}(\frac{d}{2}\boldsymbol{f}_h + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_h) = -\boldsymbol{f}_h$几乎处处成立于$\Omega$中。另一方面，由于按行散度算子 div: $\Sigma_N^h \to (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$ 是满射（因为 $|\Gamma_D| > 0$），存在一个张量场 $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \Sigma_N^h$，使得 div $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h = -\boldsymbol{f}_h$ 几乎处处成立于 Ω中。因此，我们有 $\mathrm{div}_h(\boldsymbol{\sigma}_h^* - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h) = \mathbf{0}$几乎处处成立于 Ω 中，进而有 $\boldsymbol{\sigma}_h^* - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。根据离散凸最优性条件 (116) 和离散分部积分公式 (36)，对于任意$\boldsymbol{v}_h \in V_D^h$，我们有

$$(\boldsymbol{\sigma}_h^* - \mathsf{F}_h - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega = (\boldsymbol{f}_h, \Pi_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega - (\Pi_h \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_\Omega = 0\,.$$

于是，利用离散 Helmholtz–Weyl 分解（37），我们得到

$$\boldsymbol{\sigma}_h^* - \mathsf{F}_h - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in (\nabla_h(V_D^h))^{\perp_{\mathbb{L}^2}} = \ker(\mathrm{div}|_{\Sigma_N^h})\,,$$

并且，由于 $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \Sigma_N^h$，我们推知 $\boldsymbol{\sigma}_h^* - \mathsf{F}_h \in \Sigma_N^h$，且 div$(\boldsymbol{\sigma}_h^* - \mathsf{F}_h)$ =div $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h = -\boldsymbol{f}_h$ 在 Ω 中几乎处处成立，因此，总而言之，我们得出 $\boldsymbol{\sigma}_h^* \in K_{\boldsymbol{\sigma}}^h$，其中 (132)。

注 *10*（关于命题 *2*）

（i）在实践中，线性问题（130）可以通过不精确求解来处理，而不会显著影响性能；（ii）Marini 型公式（131）中的非对称性可以量化为

$$\|\mathrm{skew}\,\boldsymbol{\sigma}_h^*\|_\Omega^2 \sim \|\mathrm{skew}\,(\nabla_h \boldsymbol{r}_h)\|_\Omega^2 \sim s_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h, \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)\,,$$

因此，这与 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}}^h := \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h \in V^h$ 的 $\mathrm{H}^1(\Omega)$-协调性有关。这表明，在实践中，可以省去提升 $\boldsymbol{r}_h$ 的计算，并改为加入残差跳跃估计量 $s_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h,\ \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h)$，仍能得到可靠的估计量。

（iii）与式（131）对应的另一种 Marini 型公式不含对称仿射部分，即

$$\boldsymbol{\sigma}_h^* := \mathbb{C}\mathfrak{e}_h(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_D^h) + \nabla_h \boldsymbol{r}_h - \tfrac{1}{d}\boldsymbol{f}_h \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - \Pi_h \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}) \in (\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h))^{d\times d}\,.$$

注 *11* Marini 型公式 (131) 似乎是新的；在线弹性问题的 Crouzeix–Raviart离散背景下，唯一有些相似的重构过程是在 [45], 中提出的：对于 $d = 2$、齐次Neumann边界条件以及 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中的载荷，在次低阶 Raviart–Thomas 空间中重构应力；我们注意到，他们的分析更加复杂，需要额外的估计量，并且只证明了可靠性。针对其他离散化，其他工作也提出了重构过程，例如 [3,4,55,44,67,56,57,49], 基于局部求解并采用有限元，从而可以（弱或强地）施加对称性；为了施加对称性，这些工作大多至少采用二次单元。对于一种同样基于 Prager–Synge恒等式、但不要求对称性的方法（不过，该方法假设多项式次数至少为 2），参见 [31]。总之，重构公式 (131) 提供了一个最低阶 $H(\mathrm{div};\Omega)$-保形应力近似，其计算成本与求解原始问题相当。

4.7 重新审视斯托克斯问题

顺便指出，对于不可压缩Stokes问题 (39)，可以进行类似于第4.6节的论证，并获得一个不同于 后验恒等式 (93) 的替代结果；该结果不要求原始近似 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ 严格无散；这简化了实现，因为我们可以在进行廉价的后处理（例如通过节点平均）后，直接使用离散原始解 $\boldsymbol{u}_h \in V_D^h$。当然，明显的缺点是，我们得到的是 后验误差等价性，而不是 后验误差恒等式。

首先，我们引入一个（针对非无散向量场的）扩展原始问题，该问题旨在寻找向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)$，使扩展原始能量泛函 $I\colon \mathrm{H}^1_D(\Omega) \to \mathrm{R}$ 对每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ 取最小值：

$$\overline{I}(\boldsymbol{v}) \coloneqq \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2 - \langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega \,. \tag{133}$$

接下来，仿照第4.6节，我们引入（扩展）强凸性度量 $\rho_I^2 \colon \mathbf{H}^1_D(\Omega) \to [0,+\infty)$，对每个由下式定义的 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$：

$$\rho_I^2(\boldsymbol{v}) \coloneqq \tfrac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{v} - \nabla \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 \,, \tag{134}$$

其中，$\boldsymbol{u} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 表示不可压缩斯托克斯问题（39）的唯一原始解。对偶能量泛函（49）及其唯一对偶解 $\mathsf{T} \in K_{\mathsf{T}}$，以及相应的最优强凸性度量（91），均保持不变（参见引理 5），因此扩展原始-对偶总误差 $\rho^2_{\mathrm{tot}} \colon \mathbf{H}^1_D(\Omega) \times K_{\mathsf{T}} \to [0,+\infty)$ 对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$，定义如下：

$$\overline{\rho}^2_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) \coloneqq \rho_I^2(\boldsymbol{v}) + \rho_D^2(\boldsymbol{\tau}) \,. \tag{135}$$

最后，类比第4.6节，我们引入扩展原始-对偶间隙估计量 $\eta^2_{\mathrm{gap}} \colon \mathbf{H}^1_D(\Omega) \times K_{\mathsf{T}} \to [0,+\overline{\infty})$，对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$以及 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$定义为

$$\overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) \coloneqq \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2 \,. \tag{136}$$

它们与能量差的精确关系在下述引理中确立。

引理8下列命题成立：
(i) 对每个 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$ 和 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有

$$\overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) = \overline{I}(\boldsymbol{v}) - D(\boldsymbol{\tau}) + (\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}), \nabla \boldsymbol{v})_\Omega \,;$$

(ii) 对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，我们有

$$\rho_I^2(\boldsymbol{v}) = \overline{I}(\boldsymbol{v}) - I(\boldsymbol{u}) + (\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}(\mathsf{T})\mathsf{I}, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega \,.$$

证明 *(i)*。对于每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，利用 (48a)、连续的分部积分公式（因为 $\mathsf{T}-\mathsf{F}\in\mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$）、(48b)、$\mathsf{T}=\mathrm{dev}\,\mathsf{T}+\frac{1}{d}\mathrm{tr}(\mathsf{T})$ 几乎处处成立于Ω、$(\mathsf{T},\nabla\boldsymbol{u})_\Omega=(\mathrm{dev}\,\mathsf{T},\nabla\boldsymbol{u})_\Omega$（因为 $\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{u})=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$几乎处处成立于 Ω）、凸最优性关系 (45) 以及二项式公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{I}(\boldsymbol{v})-I(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_\Omega-(\mathsf{F},\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2+(\mathrm{div}\,(\mathsf{T}-\mathsf{F}),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_\Omega-(\mathsf{F},\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-(\mathsf{T},\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-(\mathrm{dev}\,\mathsf{T},\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_\Omega-(\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}\,(\mathsf{T})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\nu(\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_\Omega-(\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}\,(\mathsf{T})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-\nu(\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D),\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega+\tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-(\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}\,(\mathsf{T})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\|_\Omega^2-(\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}\,(\mathsf{T})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\,,
\end{aligned}$$

关于 *(ii)*。对于每个 $\boldsymbol{\tau}\in K_\mathsf{T}$ 和 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$，利用 (48a)、连续分部积分公式（因为 $\boldsymbol{\tau}-\mathsf{F}\in\mathbf{H}_N(\mathrm{div};\,\Omega)$）、(48b)、$\boldsymbol{\tau}=\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}+\frac{1}{d}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})$ 在 Ω中几乎处处成立、$(\boldsymbol{\tau},\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega=(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau},\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega$（因为 $\mathrm{tr}(\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)=\mathrm{div}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_D=0$ 在 Ω中几乎处处成立）以及二项式公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{I}(\boldsymbol{v})-D(\boldsymbol{\tau}) &= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_\Omega-(\mathsf{F},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega+\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2-(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau},\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2+(\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}-\mathsf{F}),\boldsymbol{v})_\Omega-(\mathsf{F},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega+\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2-(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau},\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D)_\Omega\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)\|_\Omega^2-(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau},\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D))_\Omega-(\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}),\nabla\boldsymbol{v})_\Omega+\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2\\
&= \tfrac{\nu}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D)-\tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2-(\tfrac{1}{d}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}),\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\,,
\end{aligned}$$

这就是所声称的扩展原始-对偶间隙估计量 (136) 的表示。

最终，我们可以建立与 (129) 类似的等价性。

定理6 对于每个 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_D(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\tau}\in K_\mathsf{T}$，我们有如下恒等式与等价性

$$\overline{\rho}^2_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau})=\overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau})+\tfrac{1}{d}(\mathrm{tr}\,(\mathsf{T}-\boldsymbol{\tau})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega\sim\overline{\eta}^2_{\mathrm{gap}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau})\,,\tag{137}$$

其中明确写出的等价关系为

$$\tfrac{\nu}{2}\|\nabla\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{u}\|_\Omega^2+\tfrac{1}{2\nu}\|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}-\mathrm{dev}\,\mathsf{T}\|_\Omega^2\sim\tfrac{\nu}{2}\|\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|_\Omega^2\,,\tag{138}$$

$\sim$ 中的隐式常数仅依赖于偏差-散度常数 $c_{\mathrm{DD}}>0$。

注 *12* 注意，偏差-散度不等式 (23) 的另一个推论是，在后验误差估计 (138) 中，我们可以将 $\|\mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\tau}-\mathsf{T})\|_\Omega^2$ 替换为完整范数 $\|\boldsymbol{\tau}-\mathsf{T}\|_\Omega^2$，从而得到压力 $p=-\frac{1}{d}\mathrm{tr}\,\mathsf{T}$ 的估计。

证明（定理*6*）证明与定理 5 的证明类似，注意到$\overline{I}(\boldsymbol{u})=I(\boldsymbol{u})$（因为 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$几乎处处成立于 Ω 中），并且

$$\tfrac{1}{d}(\mathrm{tr}\,(\mathsf{T}-\boldsymbol{\tau})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega=\tfrac{1}{d}(\mathrm{tr}\,(\mathsf{T}-\boldsymbol{\tau})\mathsf{I},\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau})_\Omega\,,$$

其中我们利用了 $\mathrm{tr}\,(\mathsf{T}-\boldsymbol{\tau})\mathsf{I}\perp_{\mathbb{L}^2}\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}_D-\frac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}$ as $\mathrm{div}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_D=0$ 在 Ω 中几乎处处成立。

4.8 数据振荡

一般而言，数据 $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 和 $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 并非常数元，因此，先前得到的结果不能直接应用。不过，基于修正能量的类似论证可以得到一个同样适用于一般载荷的后验误差估计。为简单起见，我们回到泊松问题 (85)。

鉴于通量重构 $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{f}_h + \Sigma_N^h$ 满足 $\operatorname{div}(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{f}_h) = -f_h$ a.e. in Ω，它不适用于对偶能量泛函 (86)，但适用于修正对偶能量泛函 $D_h\colon \boldsymbol{f}_h + H_N(\operatorname{div};\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，对于每个由以下条件定义的 $\boldsymbol{r}_h \in \boldsymbol{f}_h + H_N(\operatorname{div};\Omega)$：

$$\overline{D}_h(\boldsymbol{r}_h) := -\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{r}_h\|_\Omega^2 + (\boldsymbol{r}_h, \nabla \widehat{u}_D) - I^\Omega_{\{-f_h\}}(\operatorname{div}(\boldsymbol{r}_h - \boldsymbol{f}_h)) \,. \tag{139}$$

然后，采用与上文类似的论证，对于每个 $v \in H^1_D(\Omega)$ 以及满足 $\operatorname{div}(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{f}_h) = -f_h$ a.e. in Ω 的 $\boldsymbol{r}_h \in \boldsymbol{f}_h + H_N(\operatorname{div};\Omega)$，我们得到修正原始-对偶间隙恒等式

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\|\nabla u - \nabla v\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}\|_\Omega^2 = \tfrac{1}{2}\|\nabla(u + \widehat{u}_D) - \boldsymbol{r}\|_\Omega^2 \\ + (f - f_h, u - v)_\Omega \\ + (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h, \nabla(u - v))_\Omega \,. \end{aligned} \tag{140}$$

回顾一下，根据局部 Poincaré 不等式（参见. [34, 引理 3.24]），对于每个$T \in \mathcal{T}_h$和 $v \in H^1(T)$，有 $\|v - \Pi_h v\|_T \le \frac{h_T}{\pi}\|\nabla v\|_T$；对于每个 $v \in H^1_D(\Omega)$ 和满足 $\operatorname{div}(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{f}_h) = -f_h$ a.e. in Ω 的 $\boldsymbol{r}_h \in \boldsymbol{f}_h + H_N(\operatorname{div};\Omega)$，Young 不等式给出后验 误差估计

$$\tfrac{1}{2}\|\nabla u - \nabla v\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}\|_\Omega^2 \lesssim \tfrac{1}{2}\|\nabla(u + \widehat{u}_D) - \boldsymbol{r}\|_\Omega^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \operatorname{osc}_T^2(f, \boldsymbol{f}) \,, \tag{141}$$

其中局部数据振荡项 定义为 osc

$$\tfrac{2}{T}\ f\ \boldsymbol{f}\ = \tfrac{h_T^2}{\pi^2}\|f - f_h\|_T^2 + \overline{(,\ )}\colon \text{对所有}。$$

$\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_T^2 \qquad T \in \mathcal{T}_h$

5 数值实验

本节展示数值实验，以支持前几节得出的理论结论。所有数值实验均使用 firedrake 实现（参见 [39]）。所得线性系统使用 MUMPS 库求解（参见 [5]）。

尽管本文导出的后验误差恒等式/估计具有全局性质，但所有导出的后验误差估计量都具有积分表示，且被积函数非负（参见引理 2 与引理 6），分别度量凸最优性关系 (45) 与 (104) 的违背程度。由此可以定义用于局部网格细化的局部网格加密指示子。更确切地说，对于不可压缩斯托克斯问题（参见第 3.1 节）和 Navier–Lamé 问题（参见第 4.1 节），我们引入如下局部网格加密指示子：

• 不可压缩斯托克斯问题：对每个 $T \in \mathcal{T}_h$，我们引入局部细化指标 $\eta^2_{\text{间隙}\ T}$：$K_{\boldsymbol{u}} \times K_{\mathsf{T}} \to \mathbb{R}$，对每个 $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}}$ 与 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\mathsf{T}}$ 定义为

$$\eta^2_{\mathrm{gap},T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau}) = \tfrac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \widehat{\boldsymbol{u}}_D - \tfrac{1}{\nu}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}\|^2_T\,; \tag{142}$$

• 纳维–斯托克斯问题：对于每个 $T \in \mathcal{T}_h$，我们引入局部细化指标 $\eta^2_{\mathrm{gap}\ T}$：$\mathbf{H}^1_D(\Omega) \times K^{\mathrm{div}}_{\boldsymbol{\sigma}} \to \mathbb{R}$，对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega)$，并且 $\boldsymbol{\tau} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}$定义为

$$\overline{\eta}^2_{\mathrm{gap},T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau}) = \tfrac{1}{2}\|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{e}(\boldsymbol{v}+\widehat{\boldsymbol{u}}_D) - \mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})\|^2_T\,. \tag{143}$$

数值实验不一定使用分片常数数据 $\boldsymbol{f} \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$ 和 $\mathsf{F} \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。相反，在所有数值实验中，我们采用 $\boldsymbol{u}^h_D := \mathcal{I}^{cr}_h \boldsymbol{u}_D \in V^h$，$\boldsymbol{f}_h := \Pi_h \boldsymbol{f} \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^d$，以及 $\mathsf{F}_h := \Pi_h \mathsf{F} \in (\mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h))^{d\times d}$。因此，根据第4.8节，对于每个$T \in \mathcal{T}_h$，我们引入局部数据振荡估计量

$$\mathrm{osc}^2_T(\boldsymbol{f},\mathsf{F}) := \tfrac{h_T^2}{\pi^2}\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|^2_T + \|\mathsf{F} - \mathsf{F}_h\|^2_T\,. \tag{144}$$

在所有采用局部网格细化（基于(142)或(143)）的数值实验中，我们实施以下局部网格细化算法。

算法 1 选取一个初始三角剖分 $\mathcal{T}_0$、最大迭代次数 $k_{\max} \in \mathbb{N}$、误差容限 $\varepsilon_{\mathrm{STOP}} > 0$和细化参数$\theta \in (0,1]$。然后，对于 $k \in \{1,2,\dots,k_{\max}\}$，执行以下迭代循环：

('Solve') 计算离散原始解 $\boldsymbol{u}_{h_k} \in V^{h_k}_D$和离散对偶解 $\mathsf{T}_{h_k} \in \mathsf{F}_{h_k + \Sigma^{h_k}_N}$（分别为 $\boldsymbol{\sigma}^*_{h_k} \in \mathsf{F}_{h_k + \Sigma^{h_k}_N}$）通过重构公式(65)（分别为(131)）。对其进行后处理，将离散原始解 $\boldsymbol{u}_{h_k} \in V^{h_k}_D$ 转换为可容许向量场 $\widehat{\boldsymbol{u}}_{h_k} \in \mathsf{H}^1_D(\Omega)$，采用节点平均（参见 *[34, 第 22 节。2]*）。

('Estimate') 对于每个 $T \in \mathcal{T}_{h_k}$，计算局部细化指标 $\eta^2_T :=$ $\eta^2_T(\widehat{\boldsymbol{u}}_{h_k}, \mathsf{T}_{h_k})$ + 振荡$^2_T(\boldsymbol{f},\mathsf{F})$ *($\eta^2_T := \eta^2_T(\widehat{\boldsymbol{u}}_{h_k}, \boldsymbol{\sigma}^*_{h_k})$* + 振荡$^2_T(\boldsymbol{f},\mathsf{F})$*,* 分别）。如果 $\sum_{T\in\mathcal{T}_{h_k}} \eta^2_T < \varepsilon_{\mathrm{STOP}}$，则停止。否则，继续执行步骤（'Mark'）；

('Mark') 标记所有满足最大标记条件、需要细化的单元 $T \in \mathcal{T}_{h_k}$，即有标记条件，即有

$$\eta^2_T \geq \theta \max_{\widehat{T}\in\mathcal{T}_{h_k}} \{\eta^2_{\widehat{T}}\}\,;$$

('Refine') 使用 *[7]* 中的二分算法获得下一个三角剖分 $\mathcal{T}_{h_{k+1}}$。增大 $k \mapsto k+1$，并继续执行步骤 *('Solve')*。

除非另有说明，我们将在进行局部网格细化的实验中采用 $\theta = \frac{1}{2}$。注意，$\theta = 0$ 对应于均匀网格细化，即，对每个单元进行二分细化。

5.1 不可压缩斯托克斯问题：先验误差分析

在第一个数值实验中，我们检验离散原始-对偶间隙恒等式 (77) 的有效性。为此，设计算区域为 $\Omega \coloneqq (0,\ 1)^2$，左右边界为狄利克雷边界，即，$\Gamma_D \coloneqq \{0\} \times (0,\ 1) \cup \{1\} \times (0,\ 1)$；上下边界为诺伊曼边界，即，$\Gamma_N \coloneqq (0,\ 1) \times \{0\} \cup (0,\ 1) \times \{1\}$（参见图 1）。接着，对于制造的（原始）速度向量场 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 和运动压力 $p_{\mathrm{orig}} \in L^2(\Omega)$，我们考虑泰勒–格林涡（参见 [70]），其中每个$x = (x_1,\ x_2) \in \Omega$ 定义为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}}(x) \coloneqq (\sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2), -\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2))^{\top}, \tag{145a}$$
$$p_{\mathrm{orig}}(x) \coloneqq \tfrac{1}{4}\{\cos(2\pi x_1) + \sin(2\pi x_2)\}, \tag{145b}$$

分别。然后，将载荷设为 $\boldsymbol{f} = -\nu\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}} + \nabla p_{\mathrm{orig}} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$，其中$\nu = \frac{1}{2}$，狄利克雷边界数据 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 满足 $\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{u}}_D = 0$ 几乎处处成立于 Ω，且 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D = \boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}}$ 几乎处处成立于 Γ_D；诺伊曼边界数据 $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 满足 $\mathrm{F}\boldsymbol{n} = \nu\nabla\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}}\boldsymbol{n}$ 几乎处处成立于 Γ_N（参见备注 1）。

从一个包含 200 个单元的三角剖分 $\mathcal{T}_h$ 开始，通过引入离散运动压力来求解离散不可压缩斯托克斯问题（参见第 3.3 节）；该压力作为拉格朗日乘子，用于施加散度约束。更准确地说，我们寻找 $(\boldsymbol{u}_h,\ p_h) \in V_D^h \times \mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h)$，使得对于任意 $(\boldsymbol{v}_h,\ q_h) \in V_D^h \times \mathrm{P}^0(\mathcal{T}_h)$，均有

$$\begin{aligned} \nu(\nabla_h(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_D^h), \nabla_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega - (p_h, \operatorname{div}_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega &= (\boldsymbol{f}_h, \Pi_h\boldsymbol{v}_h)_\Omega\,, \\ (\operatorname{div}_h\boldsymbol{u}_h, q_h)_\Omega &= 0\,. \end{aligned}$$

离散对偶解/应力 $\mathrm{T}_h \in K_{\mathrm{T}}^h$ 由重构公式 (65) 求得。然后，我们生成随机向量场 $\boldsymbol{v}_h^i \in K_{\boldsymbol{u}}^h$、$i \in \{1,2,3\}$ 和张量 $\boldsymbol{\tau}_h^i \in \mathrm{R}^{2\times 2}$、$i \in \{1,2,3\}$（即，对于所有 $i \in \{1,2,3\}$，$\mathrm{T}_h + \boldsymbol{\tau}_h^i \in \Sigma_N^h$ 满足 $\operatorname{div}(\mathrm{T}_h + \boldsymbol{\tau}_h^i) = -\boldsymbol{f}_h$ a.e. in Ω）；每个对象均通过贝塔分布采样得到。为量化离散原始-对偶间隙恒等式 (77) 的有效性，对于每个细化层级 $k \in \{1,\dots,6\}$ 和采样步 $i \in \{1,2,3\}$，我们计算相对恒等式误差（参见表1）

$$\mathtt{err}_{k,i}^{\mathrm{iden}} \coloneqq \frac{|\eta_{\mathrm{gap},h_k}^2(\boldsymbol{v}_{h_k}^i, \mathrm{T}_{h_k} + \boldsymbol{\tau}_{h_k}^i) - \rho_{\mathrm{tot},h_k}^2(\boldsymbol{v}_{h_k}^i, \mathrm{T}_{h_k} + \boldsymbol{\tau}_{h_k}^i)|}{\rho_{\mathrm{tot},h_k}^2(\boldsymbol{v}_{h_k}^i, \mathrm{T}_{h_k} + \boldsymbol{\tau}_{h_k}^i)}\,. \tag{146}$$

此外，对于每个细化层级 $k \in \{1,\dots,6\}$，表1列出了原始误差 $\mathtt{err}_k^{\boldsymbol{u}} \coloneqq \rho_I(\boldsymbol{u}_{h_k})$ 和对偶误差 $\mathtt{err}_k^{\mathrm{T}} \coloneqq \rho_{-D}(\mathrm{T}_{h_k})$，以及通过 $\mathrm{EOC}_k(\mathtt{err}_k) \coloneqq (\log(\mathtt{err}_k) - \log(\mathtt{err}_{k-1}))/(\log(h_k) - \log(h_{k-1}))$ 计算得到的实验收敛率，其中 $\mathtt{err}_k \in \{\mathtt{err}_k^{\boldsymbol{u}}, \mathtt{err}_k^{\mathrm{T}}\}$。由此可见，离散原始-对偶间隙恒等式（77）成立，且收敛率为线性；鉴于原始解（145）的光滑性，这与预期相符。

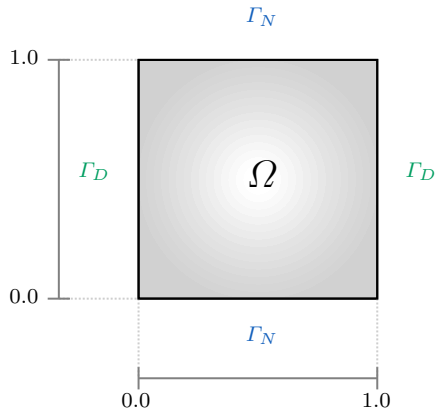


图 1： 正方形区域 Ω（灰色），狄利克雷边界 Γ_D（绿色），以及诺伊曼边界 Γ_N（蓝色）。

$\texttt{num_dof}_k$	$\texttt{err}_k^{\boldsymbol{u}}$	$\texttt{EOC}_k\ (\texttt{err}_k^{\boldsymbol{u}})$	$\texttt{err}_k^{\mathsf{T}}$	$\texttt{EOC}_k\ (\texttt{err}_k^{\mathsf{T}})$	i	$\texttt{err}_{k,i}^{\text{iden}}$
840	0.1830	-	0.1573	-	1 2 3	8.9×10^{-4} 7.0×10^{-3} 6.9×10^{-4}
3 280	0.0920	1.0091	0.0783	1.0238	1 2 3	3.0×10^{-3} 1.8×10^{-3} 1.8×10^{-4}
12 960	0.0461	1.0054	0.0391	1.0114	1 2 3	4.7×10^{-5} 1.5×10^{-4} 2.6×10^{-4}
51 520	0.0231	1.0029	0.0195	1.0054	1 2 3	7.9×10^{-6} 4.8×10^{-5} 3.5×10^{-5}
205 440	0.0115	1.0015	0.0098	1.0027	1 2 3	8.2×10^{-8} 1.1×10^{-5} 2.8×10^{-5}
820 480	0.0058	1.008	0.0049	1.0013	1 2 3	6.3×10^{-7} 2.3×10^{-7} 7.5×10^{-7}

表1： 原始、对偶和相对恒等误差。

5.2 不可压缩斯托克斯问题：后验误差分析

在第二次数值实验中，我们考察局部细化指标（142）在局部网格细化算法（参见算法 1）中的表现。为此，令计算区域为 L 形区域$\Omega := (-1,\ 1)^2 \setminus ([0,1] \times [-1,0])$，并在所有边界部分施加狄利克雷边界，即，$\Gamma_D := \partial\Omega$（参见图 2（右））。接着，对于构造的（原始）速度向量场 $\boldsymbol{u}_{\text{orig}} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 和运动压力 $p_{\text{orig}} \in L^2(\Omega)$，我们考虑文献 [72]，中推导的示例，该示例对应于平凡载荷，即，$\boldsymbol{f}^* = \mathbf{0}^*$

在极坐标中，对于由以下定义的每个 $(r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi)$，属于 $\mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}}(r,\theta) \coloneqq r^{\alpha}\{(1+\alpha)\psi(\theta)(\sin(\theta),-\cos(\theta))^{\top}+\psi'(\theta)(\cos(\theta),\sin(\theta))^{\top}\},$$
$$p_{\mathrm{orig}}(r,\theta) \coloneqq \tfrac{r^{\alpha-1}}{\alpha-1}\{(\alpha+1)^2\psi'(\theta)+\psi'''(\theta)\},$$

其中 $\alpha = \frac{856399}{1572864}$，函数 $\psi\colon [0,2\pi) \to \mathrm{R}$ 对每个 $\theta \in [0,2\pi)$ 均由以下定义

$$\begin{aligned}\psi(\theta) = {} & \tfrac{1}{\alpha+1}\cos(\tfrac{3\pi}{2}\alpha)\sin((\alpha+1)\theta)-\cos((\alpha+1)\theta)\\ & +\tfrac{1}{1-\alpha}\cos(\tfrac{3\pi}{2}\alpha)\sin((\alpha-1)\theta)+\cos((\alpha-1)\theta).\end{aligned}$$

狄利克雷边界数据 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 的定义满足 $\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}}_D = 0$ 几乎处处成立于 Ω，且准处处成立于 Γ_D。注意，原始速度向量场 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 在 L 形区域 Ω 的再入角（即原点 (0,0)，参见图 2（右侧））处具有奇异性，这使其最大正则性仅为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{orig}} \in \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega)$。

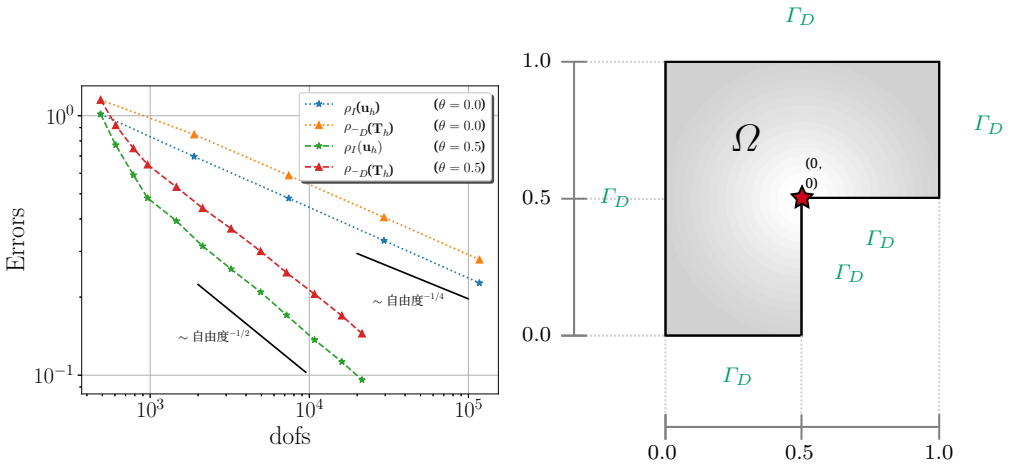
图 3 展示了由 114 个单元组成的初始三角剖分 $\mathcal{T}_{h_0}$，以及通过应用局部网格细化算法（参见算法 1）得到的最终三角剖分 $\mathcal{T}_{h_{12}}$。正如预期，局部网格细化算法（参见算法 1）迭代地向再入角（即原点 (0，0)，参见图 2（右））细化。在图 2（左）中，我们给出了原始误差 $\rho_I(\boldsymbol{u}_{h_k})$、$k = 0,\dots,k_{\max}$ 以及对偶误差 $\rho_{-D}(\mathsf{T}_{h_k})$、$k = 0,\dots,k_{\max}$ 相对于自由度数量 $\mathcal{O}(\text{num dof}_k^{-\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(h_k)$、$k = 1,\dots,k_{\max} \coloneqq 12$ 的最优收敛率，其中采用自适应网格加密（即算法 1 中的 $\theta = \frac{1}{2}$）；此外，还给出了采用均匀网格细化（即算法 1 中的 $\theta = 0$）时，相对于自由度数量 $\mathcal{O}(\text{num dof}_k^{-\frac{1}{4}}) = \mathcal{O}(h_k^{-\frac{1}{2}})$、$k = 1,\dots,k_{\max} \coloneqq 4$ 的最优收敛率。

5.3后验误差分析——Navier–Lam´e 极小化问题

在这第三次数值实验中，我们考察局部网格细化算法中的局部加密指标 (143) 的表现（参见算法 1）。为此，我们考虑 Cook 膜问题（参见 [26]）：计算区域由 $\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$ 给出，如图 4（右）所示，左侧边界为狄利克雷边界，即 $\Gamma_D = \{0\} \times (0,\ 0.44)$，其余边界为诺伊曼边界，即 $\Gamma_N \coloneqq \partial\Omega \setminus \Gamma_D$。在狄利克雷边界 Γ_D 上，我们施加齐次 Dirichlet 边界条件，即 $\widehat{\boldsymbol{u}}_D = \mathbf{0}$ 几乎处处成立于 Ω。在诺伊曼边界上，对于给定的正参数 $\gamma > 0$，我们规定对每个 $s = (s_1,\ s_2) \in \Gamma_N$，均有

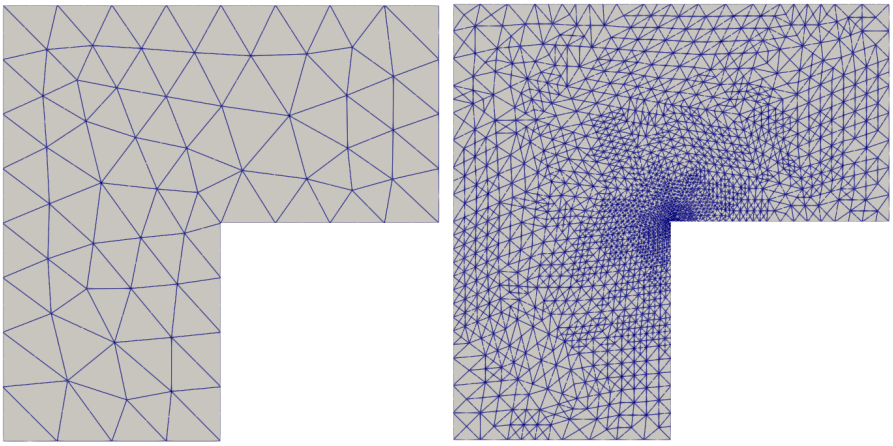
$$(\mathsf{T}\boldsymbol{n})(s) = \begin{cases}(0,\gamma)^{\top} & \text{if } s_1 = 0.48,\\ (0,0)^{\top} & \text{otherwise}.\end{cases} \tag{147}$$

更准确地说，在数值实验中，我们选取 $\gamma = 0.01$、Lam´e 参数 $\mu = 1$ 和 $\lambda = 5$，以及平凡载荷 $\boldsymbol{f}^* = \mathbf{0}^*$，使其属于 $\mathbf{H}_D^{-1}(\Omega)$。注意



(a) 使用自适应网格加密（*i.e.*、 $\theta = \frac{1}{2}$ 在算法 1 中） **(b)** L形区域 Ω (灰色)， 狄利克雷边界 Γ_D (绿色)， 以时， $k_{\max} = 12$对应的原始误差 $\rho_I(\boldsymbol{u}_{h_k})$、$k = 1$、... 及奇异点的位置（红色星号）。
...、 $k_{\max}$ 以及对偶误差 $\rho_{-D}(\mathbf{T}_{h_k})$、$k = 1$、.....、
$k_{\max}$ 的对数图；使用均匀网格细化（*i.e.*、 $\theta = 0$ 在
算法 1 中）时， $k_{\max} = 4$对应的结果。

图 2： 左图：误差衰减图；右图：带边界条件的计算区域。

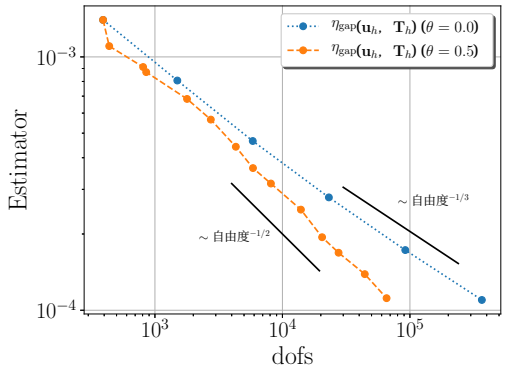


(a) 初始三角剖分 $\mathcal{T}_0$。 **(b)** 经过 11 次加密后的三角剖分 $\mathcal{T}_{12}$。

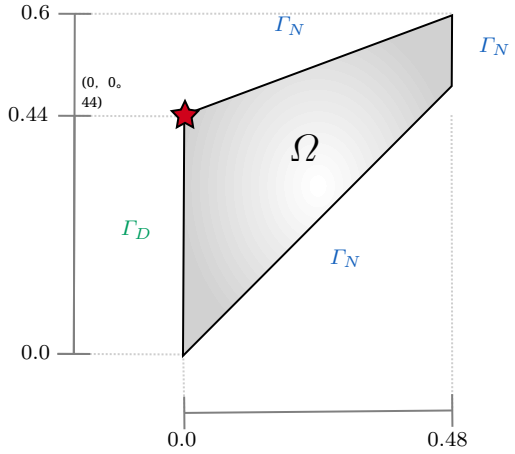
图 3： 针对斯托克斯极小化问题，采用算法 1 和细化参数 $\theta = 0.5$ 得到的初始三角剖分及局部加密结果（参见第 3 节）。

在 Cook 膜问题中（参见 [26]），原始位移场$\boldsymbol{u}_{\text{orig}} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 预期在计算区域 Ω 的左上角（即，位于 (0，0.44)，参见图 4（右侧））存在奇异性，其最大正则性因此受限于 $\boldsymbol{u}_{\text{orig}} \in \mathrm{H}^{\frac{5}{3}}(\Omega)$。

在图 5（左/中）中，展示了由 119 个单元组成的初始三角剖分 $\mathcal{T}_{h_0}$ 以及通过七次应用局部网格细化算法（参见算法 1）得到的中间三角剖分 $\mathcal{T}_{h_7}$。正如预期，局部网格细化算法（参见算法 1）迭代地向左上角细化（即在 (0, 0.44) 处，参见图 4（右））。此外，在图 4（左）中，对于扩展原始-对偶间隙估计量的值 $\eta_{\text{gap}}(\boldsymbol{u}_{h_k}, \boldsymbol{\sigma}^*_{h_k})$，$k = 0, \ldots, k_{\max}$，（参见 (124)），我们报告了相对于自由度总数的最优收敛率：使用自适应网格加密时（即算法 1 中的 $\theta = \frac{1}{2}$）为 $\mathcal{O}$（自由度数目$^{-\frac{1}{2}}$）$= \mathcal{O}(h_k)$，$k = 1, \ldots, k_{\max} := 13$，使用均匀网格细化时（即算法 1 中的 $\theta = 0$）为 $\mathcal{O}$（自由度数目$^{-\frac{1}{3}}$）$= \mathcal{O}(h_k^{-\frac{2}{3}})$，$k = 1, \ldots, k_{\max} := 5$。

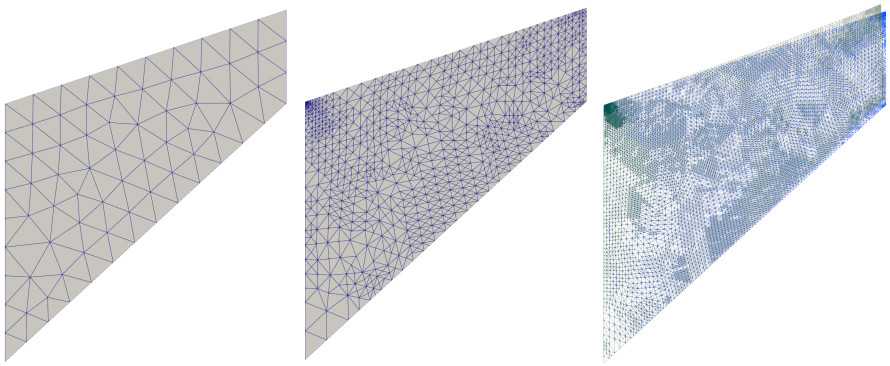


(a)扩展原始-对偶间隙估计量的对数图 估计量 $\bar{\eta}_{\text{gap}}(\boldsymbol{u}_{h_k}, \boldsymbol{\sigma}^*_{h_k})$，$k = 1, \ldots, k_{\max}$，（$cf.$ (124)），对于 $k_{\max} = 13$，采用自适应网格加密时（$i.e.$，$\theta = \frac{1}{2}$ 见算法 1），以及对于 $k_{\max} = 5$，当采用均匀网格细化（$i.e.$，$\theta = 0$ 见算法 1)



(b) 区域 Ω (灰色)，狄利克雷边界 Γ_D (绿色)，诺伊曼边界 Γ_N (蓝色)，以及位置奇异性（红色星号）位于 Cook 膜中问题（$cf.$ [26]）。

图 4： 左：误差衰减图；右：带边界条件的计算区域。



(a) 初始三角剖分 $\mathcal{T}_0$。

(b) 经过 7 次加密后的三角剖分 $\mathcal{T}_8$ 加密。

(c) 参考构形 Ω (蓝色) 和变形后的构形配置 $\boldsymbol{u}_h$ $_{13}(\Omega)$ (green)。

图 5： 使用带细化参数 $\theta = 0.5$ 的算法 1 为 Navier–Lam´e 极小化问题获得的初始及局部细化三角剖分（参见第 3 节）。

致谢 作者感谢 S. Bartels 在本研究开展过程中进行的有益讨论。

声明

数据可用性。 本研究未生成或分析任何数据集。因此，本研究不适用数据共享。

利益冲突。 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

1. Adams, R.A., Fournier, J.J.F.: 索伯列夫空间， *Pure Appl. Math., Academic Press*，第140卷，第2版。纽约，NY：Academic Press（2003年）2. Ainsworth, M., Allendes, A., Barrenechea, G.R., Rankin, R.: 斯托克斯问题的非协调Fortin-Soulie有限元逼近的可计算误差界。IMA数值分析杂志 **32**006 3 2 417 447 2012年 10 1093 ( ), – ( )。DOI . /imanum/drr . Ainsworth, M., Rankin, R.: 平面弹性中协调与非协调有限元分析的保证可计算误差界。国际工程数值方法杂志 **82**2799 4 9 1114 1157 2010年 10 1002 ( ), – ( )。DOI . /nme. . Ainsworth, M., Rankin, R.: 线弹性三维有限元分析的切实可计算误差界。应用力学与工程中的计算方法 **200**(21-22), 1909 017 5 1926 2011年 10 1016 2011 01 – ( )。DOI . /j.cma. . . . Ainsworth, M., Rankin, R.: 线弹性三维有限元分析的切实可计算误差界。应用力学与工程中的计算方法 **200**(21-22), 1909–1926 (2011年)。DOI 10.1016/j.cma.2011.01.017

6. Antil, H., Bartels, S., Kaltenbach, A., Khandelwal, R.: 带梯度约束的变分问题： *A priori* 与 *a posteriori* 误差恒等式。数学计算（2025年）。DOI 10 4146 7 1090. /mcom/ . Arnold, D.N., Mukherjee, A., Pouly, L.: 利用二分法的局部自适应四面体网格。SIAM科学计算杂志 **22**1064827597323373 8 2 431 448 2000年 10 1137 ( ), – ( )。DOI . /S . Bartels, S.: 凸最小化问题的非协调离散及其与混合方法的精确关系。计算数学及其应用 **93**, 214–229 (2021年)。DOI 10.1016/j.camwa.2021.04.014 9. Bartels, S., Gudi, T., Kaltenbach, A.: 标量Signorini问题的 *A priori* 与 *a posteriori* 误差恒等式。SIAM数值分析杂志 **63**(5), 2155–2186 (2025年)。DOI 10 1677691 10 1137 24. / M . Bartels, S., Kaltenbach, A.: 凸最小化问题的显式高效误差估计。数学计算 **92**3821 11 343 2247 2279 2023年 10 1090 ( ), – ( )。DOI . /mcom/ . Bartels, S., Kaltenbach, A.: 第七章——借助凸对偶与显式通量重构实现变分问题的精确后验误差控制。载于：F. Chouly、S.P. Bordas、R. Becker、P. Omnes（编）误差控制、自适应离散与应用，第1部分，*Advances in Applied Mechanics*，第58卷，第295–375页。爱思唯尔（2024年）。DOI https://doi.org/10 001 12 1016 2024 04 . /bs.aams. . . . Bartels, S., Milicevic, M.: 用于非光滑最小化问题 *a posteriori* 误差分析的原始-对偶间隙估计量。ESAIM数学建模与数值分析 **54**(5), 1635–1660 (2020 10 1051 2 2019074 https://doi.org/10.1051/m2an/2019074)。13 DOI . /m an/ . URL . Bartels, S., Wang, Z.: Crouzeix-Raviart与Raviart- Thomas有限元空间的正交关系。数值数学 **148**(1), 127–139 (2021年)。DOI 10 3 14 1007 00211 021 01199 . /s - - - . Bauer, S., Neff, P., Pauly, D., Starke, G.: 带混合边界条件的非相容方张量场的Dev-div不等式与Devsym-Devcurl不等式。ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **22** 1 112 133 2016 10 1051 2014068 ( ), – ( )。DOI . /cocv/ . 15 Bebendorf, M.: 关于凸域庞加莱不等式的一个注记。Z. Anal. Anwend. **22**1170 16 4 751 756 2003年 10 4171 ( ), – ( )。DOI . /ZAA/ . Bertrand, F., Boffi, D.: 基于重构的后验误差估计中的Prager-Synge定理。载于：计算数学75年。庆祝计算数学75年研讨会，数学计算与实验研究所，ICERM，美国罗德岛州普罗维登斯，2018年11月1日至3日，第45–67页。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）（2020年）。DOI 10.1090/conm/ 754 15152 17 / . Bertrand, F., Kober, B., Moldenhauer, M., Starke, G.: 线弹性的弱对称应力平衡与后验误差估计。数值方法与偏微分方程 **37**22741 18 4 2783 2802 2021年 10 1002 ( ), – ( )。DOI . /num. . Boffi, D., Brezzi, F., Fortin, M.: 混合有限元方法及其应用，*Ser. Comput. Math.* 44 2013 10 1007 978 3 642 36519 ，第 *Springer* 卷。柏林：Springer（ ）。DOI . / - - - - 19 H^1 5 **73** 247 .

Brenner, S.C.: 分片向量场的Korn不等式。数学计算 ( ), 1067 5 20 1087 2004年 10 1090 0025 5718 03 01579 – ( )。DOI . /S - - - - . Bringmann, P., Ketteler, J.W., Schedensack, M.: 分片常值与分片仿射向量场和张量场的离散Helmholtz分解。计算数学基础 **25**1 21 2 417 461 2025年 10 1007 10208 024 09642 ( ), – ( )。DOI . /s - - - . Carstensen, C., Gallistl, D., Schedensack, M.: Stokes方程的准最优自适应伪应力近似。SIAM数值分析杂志 **51**(3), 1715–1734 (2013年)。DOI 10 110852346 22 1137. / . Carstensen, C., Liu, D.J.: 最优设计问题的非协调有限元方法。SIAM数值分析杂志 **53**(2), 874–894 (2015年)。DOI 10.1137/130927103. URL https://doi.23 org/10.1137/130927103 .

Carstensen, C., Tran, N.T.: 线弹性的无闭锁混合高阶方法。《SIAM数值分析杂志》 **63** 2 827 853 2025 10 1137 24 1650363 ( ), – 24 ( )。DOI . / M . ˇCermak, M., Hecht, F., Tang, Z., Vohralık, M.: 基于斯托克斯问题多项式次数稳健后验估计的自适应非精确迭代算法。数值数学 **138**3 25 4 1027 1065 2018年 10 1007 00211 017 0925 ( ), – ( )。DOI . /s - - - . Ciarlet, P.G.: 数学弹性力学。第一卷。三维弹性力学， *Class.* ，卷 *Appl. Math.* 84, 1998 reprint of the edition edn. 宾夕法尼亚州费城：工业与应用数学学会（SIAM）（2022年）。DOI 10.1137/1.9781611976786

26. Cook, R.D.：改进的二维有限元。结构部结构杂志**100**0003877 27 9 1851 1863 1974 10 1061 ( ), – ( )。DOI。/JSDEAG.。Crouzeix, M., Raviart, P.A.：求解定常斯托克斯方程的协调与非协调有限元方法。I. Rev. Fran˛c. Autom. Inform. Rech. Op´erat., R **7**300331 28 3 33 76 1974 10 1051 2 197307 ( ), – ( )。DOI。/m an/ R。Diening, L., Hirn, A., Kreuzer, C., Zanotti, P.：非线性斯托克斯方程的压力稳健有限元离散。Math. Models Methods Appl. Sci. **35**(12), 2661 0218202525500484 29 2693 2025 10 1142 – ( )。DOI。/S。Donatella Marini, L.：一种低成本方法，用于计算最低阶 Raviart-Thomas 混合方法的解。SIAM数值分析杂志**22**, 493–496 (1985)。DOI 10 1137 0722029 。/。Dorfler, W., Ainsworth, M.：斯托克斯流非协调有限元逼近的可靠后验误差控制。数学计算**74**(252), 1599–1619 (2005)。DOI 10 1090 0025 5718 05 01743 6 。/S - - - -。Dorsek, P., Melenk, J.M.：近不可压线弹性中 FEM 的 p 稳健、无对称性平衡误差指示。应用数学计算方法 **13** 3 291 304 2013 10 1515 2013 0007 ( ), – ( )。DOI。/cmam- -。Ekeland, I., Temam, R.：凸分析与变分问题，*Classics in Applied Mathematics*，第28卷，英文版。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州（1999 10 1137 1 9781611971088 https://doi.）。DOI。/。URL。译自法文。33. Ern, A., Gudi, T., Smears, I., Vohral´ık, M.：局部与整体最佳逼近的等价性、简单稳定的局部交换投影算子，以及 $\boldsymbol{H}$(div) 中最优 hp 逼近估计。IMA数值分析杂志**42**(2), 1023–1049 (2022)。DOI 10.1093/ imanum/draa103 34. Ern, A., Guermond, J.L.：有限元 I：逼近与插值，*Texts Appl. Math.* 72 2020 10 1007 978 3 030 56341 ，第 . 卷。Cham：Springer （）。DOI。/ - - - -7 35. Ern, A., Guermond, J.L.：有限元 II：Galerkin 逼近、椭圆型与混合型偏微分方程，*Texts Appl. Math.*，第73卷。Cham：Springer（2021）。DOI 10.1007/ 978-3-030-56923-5 36. Falk, R.S.：一类变分不等式逼近的误差估计。数学计算 **28**, 963–971 (1974) 37. Falk, R.S.：线弹性方程的非协调有限元方法。数学计算**57**2938702 38 196 529 550 1991 10 2307 ( ), – ( )。DOI。/。Gudi, T.：线性椭圆问题间断有限元方法的新误差分析。数学计算**79**(272), 2169–2189 (2010)。DOI 10.1090/S0025-5718-10-02360-4。URL https://doi.org/10.1090/s0025-5718-10-02360-4 39 。Ham, D.A., Kelly, P.H.J., Mitchell, L., Cotter, C.J., Kirby, R.C., Sagiyama, K., Bouziani, N., Vorderwuelbecke, S., Gregory, T.J., Betteridge, J., Shapero, D.R., Nixon-Hill, R.W., Ward, C.J., Farrell, P.E., Brubeck, P.D., Marsden, I., Gibson, T.H., Homolya, M., Sun, T., McRae, A.T.T., Luporini, F., Gregory, A., Lange, M., Funke, S.W., Rathgeber, F., Bercea, G.T., Markall, G.R.：Firedrake 用户手册。伦敦帝国理工学院、牛津大学、贝勒大学和华盛顿大学，第一版（2023 104839 40 10 25561）。DOI。/。Han, W.：通过对偶理论进行后验误差分析，*Advances in Mechanics and Mathematics* 8 2005 ，第 . 卷。Springer-Verlag，纽约（）。附有建模与数值近似方面的应用。41. Hannukainen, A., Stenberg, R., Vohral´ık, M.：斯托克斯问题后验误差估计的统一框架。数值数学**122**(4), 725–769 (2012)。DOI 10.1007/s00211-012-0472-x 42. Hansbo, P., Larson, M.G.：间断 Galerkin 方法与 Crouzeix-Raviart 元：在弹性力学中的应用。M2AN，数值数学模型与分析**37**(1), 63–72 (2003)。DOI 10 2003020 43 1051 2。/m an:。Heuer, N.：分数阶 Sobolev 半范数的等价性。J. Math. Anal. Appl. **417**047 44 2 505 518 2014 10 1016 2014 03 ( ), – ( )。DOI。/j.jmaa.。Kim, K.Y.：弱应力对称线弹性混合有限元方法的可靠后验误差估计子。SIAM数值分析杂志 **49**(6), 2364–2385 (2011)。DOI 10.1137/110823031

45. Kim, K.Y.：基于非对称应力张量近似的线弹性后验误差估计子。韩国工业与应用数学学会杂志**16**(1), 1–13 (2012)。DOI 10 001 46 12941 2012 16 1。/jksiam.。Kim, K.Y.：无需全局 inf-sup 常数的斯托克斯方程完全可计算后验误差估计。计算数学及其应用**67**(3), 681–691 (2014)。DOI 10 1016 2013 12 011 。/j.camwa.。Lame, G.：关于固体弹性数学理论的课程。Bachelier, 巴黎（1833年）48. Lederer, P.L., Stenberg, R.：线弹性精确对称混合有限元的能量范数分析。数学计算**92**(340), 583–605 (2023)。DOI 10.1090/ mcom/3784 49. Lederer, P.L., Stenberg, R.：弹性力学弱对称混合有限元分析。数学计算**93**3865 50 346 523 550 2024 10 1090 ( ), – ( )。DOI。/mcom/。Linke, A.：亥姆霍兹分解在不可压缩流混合方法中的作用及一种新的变分误差。应用力学与工程中的计算方法**268**, 782 800 2014 10 1016 2013 10 – ( )。DOI。/j.cma.。Linke, A., Merdon, C., Neilan, M., Neumann, F.：斯托克斯问题压力稳健非协调有限元方法的准最优性。数学计算**87**(312), 1543 3344 52 1566 2018 10 1090 – ( )。DOI。/ mcom/。Liu, D.J., Chen, Z.R.： p-Laplace 问题的自适应有限元方法。Appl. Numer. Math. **152**, 323 018 53 337 2020 10 1016 2019 11 – ( )。DOI。/j.apnum.。Liu, D.J., Li, A.Q., Chen, Z.R.： p-Laplace 问题的非协调有限元方法。Adv. Appl. Math. Mech. **10** 6 1365 1383 2018 10 4208 2018 0117 ( ), – ( )。DOI。/aamm.OA- -。Navier, C.L.：关于流体运动定律及其在不同情况下所经历状态变化的回忆录。法国科学院院刊**6**, 389–440 (1821年) 55. Nicaise, S., Witowski, K., Wohlmuth, B.I.：基于平衡通量的 Lam´e 方程后验误差估计子。IMA数值分析杂志**28**(2), 331–353 (2008)。DOI 10 008 56 1093。/imanum/drm。Ohnimus, S., Stein, E., Walhorn, E.：通过求解局部诺伊曼问题，得到线弹性位移和应力的有限元局部误差估计。国际工程数值方法杂志 **52** 7 727 746 2001 10 1002 228 ( ), – ( )。DOI。/nme.。Pled, F., Chamoin, L., Ladeveze, P.：一种增强方法，通过局部能量最小化，在有限元分析中稳健地构造平衡应力场的后验估计。Comput. Mech.**49**(3), 357–378 (2012)。DOI 10.1007/s00466-011-0645-y 58. Prager, W., Synge, J.L.：基于函数空间概念的弹性逼近。Q. Appl. Math.**5**, 241 25902 59 269 1947 10 1090 – ( )。DOI。/qam/。Raviart, P.A., Thomas, J.M.：一种用于二阶椭圆问题的混合有限元方法。载于：有限元方法的数学方面（会议论文集，意大利国家研究委员会（C.N.R.），罗马，1975），第292–315页。数学讲义，第606卷（1977） 60. Repin, S.：强凸泛函变分问题近似解的后验误差估计。J. Math. Sci.（纽约）**97**(4), 4311–4328 (1999)。DOI 10.1007/BF02365047。URL https://doi.org/10.1007/BF02365047。数学物理与函数论问题。61. Repin, S.：一致凸泛函变分问题的后验误差估计。数学计算**69**(230), 481–500 (2000)。DOI 10.1090/ S0025-5718-99-01190-4 62. Repin, S.：带不可压缩条件的若干边值问题中偏离精确解的估计。圣彼得堡数学杂志**16**(5), 837–862 (2005)。DOI 10 4 63 1090 1061 0022 05 00882。/S - - - -。Repin, S.：偏微分方程的后验估计，*Radon Ser. Comput.*，第 *Appl. Math.* 4 2008 10 1515 . 卷。柏林：德格鲁伊特出版社（）。DOI。/9783110203042 64. Repin, S.I.：斯托克斯问题的后验估计。J. Math. Sci., New York **109**1014400626472 65 5 1950 1964 1999 10 1023 ( ), – ( )。DOI。/A:。Repin, S.I.：弹性理论二维模型的误差估计。Probl. Mat. Anal. **22**, 178–196 (2001)

66. Repin, S.I., Xanthis, L.S.：非线性变分问题的后验误差估计。《巴黎科学院报告》，S´er. I **324**(10), 1169–1174 (1997). DOI 10.1016/S0764-4442(97) 87906-2 67. Riedlbeck, R., Di Pietro, D.A., Ern, A.：用于线性弹性问题的平衡应力重构及其在后验误差分析中的应用。载于：复杂应用中的有限体积法 VIII——方法与理论方面。FVCA 8，法国里尔，2017年6月12 7 22 68 16，293 301 2017 10 1007 978 3 319 57397 539 – 页。– 。Cham：Springer（）。DOI . / - - - - . Rockafellar, R.T.：作为凸泛函的积分。Pac. J. Math. **24**, 525– (1968 525 69 10 2140 1968 24). DOI . /pjm. . . . Stokes, G.G.：《论运动流体内摩擦理论以及弹性固体平衡与运动理论》，第 75–129页。剑桥图书馆数学文集。剑桥大学出版社（2009）70. Taylor, G.I., Green, A.E.：大涡旋产生小涡旋的机制。《伦敦皇家学会会刊》。A辑，数学与物理科学 **158**0036 71 895 499 521 1937 10 1098 1937 ( ), – ( ). DOI . /rspa. . . Veeser, A., Zanotti, P.：对称椭圆问题的拟最优非协调方法。II：– 过一致性与经典非协调元。SIAM数值分析杂志。

57 1 266 292 2019 10 1137 17 1151651 ( ), – ( ). DOI . / M . Verfurth, 72 R.：Stokes方程的后验误差估计子。数值数学 **55**(3),

309 325 1989 10 1007 01390056 – ( ). DOI . /BF . Verfurth, R., Zanotti, P.：73 Stokes方程的拟最优Crouzeix-Raviart离散。SIAM数值分析杂志 **57**1177688 74 3 1082 1099 2019 10 1137 18 ( ), – ( ). DOI . / M . Zeidler, E.：非线性泛函分析及其应用。III。Springer-Verlag，纽约（

1985 10 1007 978 1 4612 5020 3 https://doi.org/10.1007/ ）。978-1-4612-5020-3 DOI . / - - - - . URL . 变分方法与优化，Leo F. Boron 从德文译出