arXiv:2602.04382v1 [math.GT] 4 Feb 2026

作为平凡链环的扭曲环面链环

HONG CHANG、THIAGO DE PAIVA 和 QING LAN

Abstract. 扭曲环面链环 $T(p,\ q,\ r,\ s)$ 是通过对 $(p,\ q)$ 环面链环上的 r 股相邻股进行 s 整圈扭转得到的。本文对作为平凡链环的扭曲环面链环进行分类。我们完整刻画了所有参数族 $(p,\ q,\ r,\ s)$，使得相应的扭曲环面链环是平凡链环。

1. Introduction

设 $p,\ q,\ r,\ s$ 为整数，且满足 $p > 1,\ q \geq 1$、$2 \leq r \leq p+q$ 和 $s \neq 0$。一个扭曲环面链环

$$T(p,q,r,s)$$

由 $(p,\ q)$ 环面链环通过进行 s 整圈扭转，并作用于 r 股相邻股而得到。该构造如图1所示。当 $r > p$时，扭转的解释略有不同，如图 2所示。

扭曲环面链环最初由 Dean 在其博士论文中引入 [11], ，其动机是确定对纽结施行德恩手术何时得到塞弗特纤维空间。此后，扭曲环面链环已成为低维拓扑中一类重要的链环。它们已从多个角度得到研究，包括纽结弗洛尔同调 [23]、桥谱 [2], 以及海加德分解 [20]。

研究扭曲环面链环的另一动机，来自它们作为广义 T-链环中一个易于处理的子族所起的作用。T链环又称洛伦兹链环，作为成结的闭周期轨道出现在由 Lorenz [19]引入的洛伦兹动力系统中。Birman 与 Kofman [1] 证明，洛伦兹链环与 T链环一致，而后者构成正辫链环中一个由组合方式定义的子类。通过允许在辫的末端施加负扭转，便可得到广义 T-链环族，其中自然包含扭曲环面链环这一子族。值得注意的是， [8] 中证明了 S^3 中的每一个链环都同痕于某个广义 T-链环。因此，在广义 T-链环中（依据其组合数据）对平凡链环进行分类的问题，原则上等价于对 S^3中所有平凡链环进行分类。在这一更广阔的背景下，扭曲环面链环提供了一个自然且易于入手的试验场。

扭曲环面链环的几何分类在纽结情形下已得到广泛研究。尤其是，许多研究聚焦于扭曲环面纽结；例如参见 [17, 18, 21, 6, 16, 4, 12, 3, 22, 5, 7]。最值得一提的是，Sangyop Lee [14] 完整分类了以下

平凡结，确定了七个明确的参数族（p、q、r、s），对于这些参数族，相应的扭曲环面纽结是平凡的（见定理4）。

相比之下，关于链环情形的研究成果要少得多。对于扭曲环面链环，de Paiva [6] 对 $|s| > 3$的双曲例子进行了分类，但这仅仅是迈向更广泛几何分类的初步一步。特别是，此前人们尚未全面了解哪些扭曲环面链环是平凡链环。

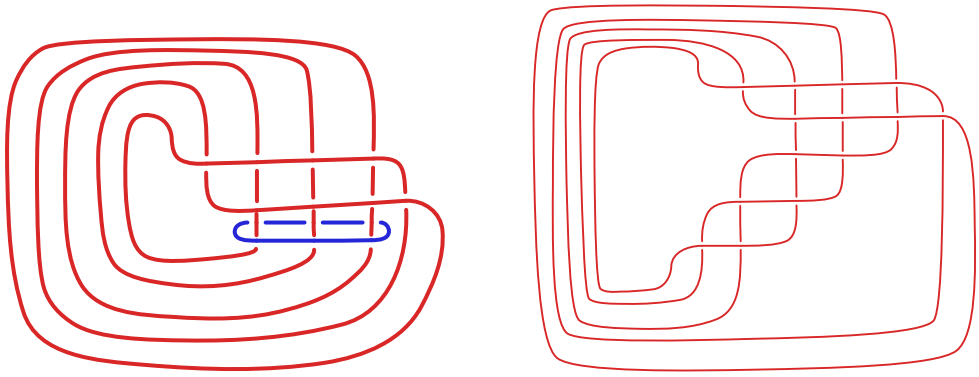

FIGURE 1. 左侧：红色的（5，2）环面纽结（顺时针定向）。按照本文的约定，图中 T（5，2）的交叉均视为正交叉，而图中 T（5，2）所包含的辫表示为正辫群生成元 σ_i 的乘积。蓝色圆圈表示执行全扭转的圆盘。右侧：（5，2，3，-1）扭曲环面纽结。它由（5，2）环面纽结通过对最初的 3 股添加 -1 全扭转构造而成。

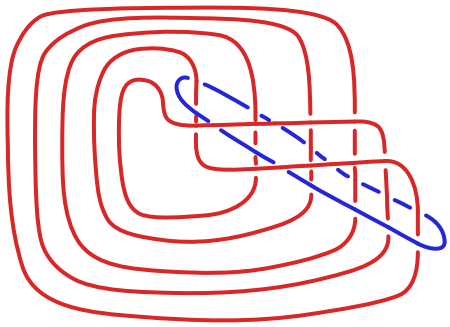

FIGURE 2.（5，2，6，s）扭曲环面纽结由（5，2）环面纽结沿本图蓝色圆圈所围圆盘进行整圈扭转构造而成。恰有 6 股红色辫股穿过此圆盘。

本文通过对扭曲环面链环这一类中的平凡链环进行分类，填补了这一空白。在 Lee 对平凡扭曲环面纽结的研究基础上，我们完整刻画了作为平凡链环的扭曲环面链环。我们的主要结果如下。

定理 1. 设 p, q, r, s 为整数，使得 最大公约数$(p, q) > 1$, $1 \leq q < p$,$2 \leq r \leq p+q$，且 $s \neq 0$。那么，扭曲环面链环 $T(p, q, r, s)$ 是平凡链环，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $(p, q, r, s) = (2n+2, 2n, 2n+1, -1)$，其中 $n \geq 1$为某个整数；*(2)* $(p, q, r, s) = (4n, n, 2n, -1)$，其中 $n \geq 2$为某个整数；*(3)* $(p, q, r, s) = (mn, m, m, -n)$，其中 $m \geq 2$和 $n \geq 2$为某些整数。

我们指出，定理1 中出现的族两两不交。

定理 1 表明，尽管扭曲环面链环的定义表面上具有灵活性，平凡链环仅出现在一组非常受限的参数族中。这一结果可视为 Lee 对平凡扭结环面结的分类向链环情形的自然推广。

从广义 T-链环的角度看，定理 1给出了由两对参数所确定的广义 T-链环子族中平凡链环的完全分类。

本文结构如下。第 2 节汇集预备材料并建立记号。在第 3 节中，我们对恰有两个分支且为平凡链环的扭曲环面链环进行分类。第 4 节处理分支数多于两个的链环情形。第 5 节完成定理 1的证明。

致谢。 作者感谢刘毅教授和 William Menasco 教授的宝贵讨论与建议。

2. Preliminaries

本节汇集有关扭曲环面链环的基本事实与约定，这些内容将在全文中使用。我们首先回顾扭曲环面链环的基本性质，包括其分支数目以及方便的辫表示。我们还记录一些标准等价关系与构造，以便将问题化简到更简单的参数范围。最后，我们回顾 Lee 的一项分类结果，该结果刻画了扭曲环面纽结何时为平凡纽结，并将在后续论证中发挥核心作用。

扭曲环面链环 $T(p, q, r, s)$ 有 gcd(p, q) 个分支。事实上，根据定义，$T(p, q, r, s)$ 是由环面链环 $T(p, q)$ 对其 r 股实施s 次全扭转得到的。由于全扭转不会改变链环分支的数量，所得链环的分支数与 $T(p, q)$ 相同，即 gcd(p, q)。注意，这对 $p < r \leq p+q$ 也成立。

如果 $r \leq p$，扭曲环面链环 $T(p, q, r, s)$ 有一种便捷的辫描述。对于 $s > 0$，它由辫表示为

$$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{p-1})^q(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{r-1})^{sr},$$

而对于 $s<0$，它表示为

$$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{p-1})^q(\sigma_{r-1}^{-1}\sigma_{r-2}^{-1}\cdots\sigma_1^{-1})^{-sr}.$$

注：本文采用了非传统的交叉定向方式。参见图 1的图注。

引理2。 扭曲环面链环 $T(p,q,r,s)$ 和 $T(q,p,r,s)$ 等价。

证明。 这由 [6,命题 22]或 [15, 引理 5]得出。 □

根据2，在下文中，我们可以假设 $q\le p$ 处理扭曲环面链环时 $T(p,q,r,s)$。

作为初步观察，我们描述一族自然地作为扭曲环面链环出现的环面链环。这一事实已在 [13]中确立；为完整起见，我们给出一个简短证明。

引理3. 扭曲环面链环 $T(p,q,q,s)$ 是环面链环 $T(q,p+qs)$。

证明. 根据引理 2，扭曲环面链环 $T(p,q,q,s)$ 等价于$T(q,p,q,s)$。(q,p,q,s) 的一个辫表示为

$$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{q-1})^p(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{q-1})^{qs}=(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{q-1})^{p+qs},$$

这恰好是环面链环 $T(q,p+qs)$ 的标准辫表示。□

在 [14], Sangyop Lee 对构成平凡结的扭曲环面纽结给出了完整分类。

定理 4 ([14]中的定理1.1）。设 p,q,r,s 为整数，使得 p 和 q 互素，$1\le q<p$，$2\le r\le p+q$，且 $s\neq 0$。扭曲环面纽结$T(p,q,r,s)$ 是平凡纽结，当且仅当满足以下条件之一：

(1) $(p,q,r,s)=(n+1,n,n+1,-1)$，其中 $n\ge 1$ 为某个整数；*(2)* $(p,q,r,s)=(n+1,n,n,-1)$，其中 $n\ge 2$ 为某个整数；*(3)* $(p,q,r,s)=(mn\pm 1,n,n,-m)$，其中 $m\ge 2$ 和 $n\ge 2$ 为某些整数；*(4)* $(p,q,r,s)=(n,1,2,-1)$，其中 $n\ge 3$ 为某个整数；*(5)* $(p,q,r,s)=(4n\pm 1,n,2n,-1)$，其中 $n\ge 2$ 为某个整数；*(6)* $(p,q,r,s)=(n+1,n-1,n,-1)$，其中 $n\ge 4$ 为某个偶整数；*(7)* $(p,q,r,s)=(f_{n+1},f_{n-1},f_n,-1)$，其中 $n\ge 4$ 为某个整数；这里 f_n 表示第 n 个斐波那契数，其定义为 $f_1=f_2=1$。

3. Case with two components

本节对恰有两个分支且为平凡链环的扭曲环面链环进行分类。由于 $T(p,q,r,s)$的分支数为 gcd(p,q)，因此双分支情形恰好对应 gcd$(p,q)=2$的情形。我们的方法如下：假设 $r\le p$，根据参数计算 $T(p,q,r,s)$ 的链接数，并令其为零。然后应用 Lee 对平凡扭曲环面结的分类（定理 4 ），以

得到有限个参数族，证明这些参数族确实给出平凡链环，最后排除剩余范围 $r > p$。

本节中，我们始终假设最大公约数$(p, q) = 2$。回顾一下，对于表示为辫的闭包的定向链环，两个分支之间的链接数等于属于不同分支的股之间带符号交叉数的一半。

命题 5。设 $T(p, q, r, s)$ 是一个具有 $r \le p$ 且恰有两个分支的扭曲环面链环（等价地，最大公约数$(p, q) = 2$）。若这两个分支之间的链接数为零，则以下情形之一成立：

(1) r 为偶数且 $pq = -r^2 s$。此时，每个分支都是类型为$(p/2, q/2, r/2, s)$的扭曲环面纽结。(2) r 为奇数。设 $r = 2r' + 1$，则有 $pq = -4r'(r' + 1)s$。此时，一个分支是类型为$(p/2, q/2, r', s)$的扭曲环面纽结，另一个分支则是类型为$(p/2, q/2, r' + 1, s)$的扭曲环面纽结。

证明。令 L_1和 L_2表示 $T(p, q, r, s)$ 的两个分支，并按照标准辫子定向定向。若 $s > 0$，则新增的扭转只会在两个分支之间产生正交叉，而 (p, q)-环面部分也会产生正的分支间交叉。因此 $\mathrm{lk}(L_1, L_2) > 0$，所以链接数不可能为零。因此 $s < 0$。

由于该链环有两个分支，$\gcd(p, q) = 2$。特别地，$2 \mid p$；在 (p, q)-环面链环的标准辫子模型中，每个分支包含$p/2$ 股。(p, q)-环面部分会在两个分支之间产生 $\frac{pq}{2}$ 个带符号交叉，因此

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{torus}} = \frac{pq}{4}.$$

现在考虑扭转部分。注意到

$$(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-1})^{sr} = \Big((\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-1})^{r}\Big)^{s} = (\Delta_r^2)^{\,s},$$

因此它是作用于前 r 股的全扭转 Δ_r^2 的幂。特别地，它的底层置换是平凡的，因此不会改变闭包中各股索引所属的分支。于是我们可以按奇数和偶数股索引来分别识别这两个分支。

一次全扭转 Δ_r^2 会使每对股交叉两次。如果前 r 股中有 a 股来自一个分支，另有 b 股来自另一个分支，那么一次全扭转会产生 $2ab$ 个带符号的分支间交叉，因此对链接数的贡献为 ab。所以，s 整圈扭转的总贡献为 $s\,ab$。

情形 *1*：r 为偶数。于是 $a = b = r/2$，因此扭转部分的贡献为

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{twist}} = \frac{r^2 s}{4}.$$

因此

$$0 = \mathrm{lk}(L_1, L_2) = \mathrm{lk}_{\mathrm{torus}} + \mathrm{lk}_{\mathrm{twist}} = \frac{pq}{4} + \frac{r^2 s}{4},$$

这等价于 $pq = -r^2 s$。在这种情况下，每个分支都由奇数编号的股或偶数编号的股组成，并且都是通过在 $(p/2, q/2)$-环面辫的前 $r/2$ 股上插入 s 圈全扭转得到的。因此，两个分支都是类型为 $(p/2, q/2, r/2, s)$ 的扭曲环面纽结。

情形 2： r 奇数。设 $r = 2r' + 1$。在前 r 股中，一个分支包含 $r' + 1$ 股，另一个分支包含 r' 股。因此 $a = r' + 1$和 $b = r'$，而扭转部分贡献

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{twist}} = s\, r'(r' + 1).$$

因此

$$0 = \mathrm{lk}(L_1, L_2) = \frac{pq}{4} + s\, r'(r' + 1),$$

这等价于 $pq = -4r'(r' + 1)s$。最后，扭曲块中包含 $r' + 1$ 股的分支，是通过在 $r' + 1$ 股上插入扭转得到的；另一个分支则是通过在 r' 股上插入扭转得到的。因此，一个分支是扭曲环面纽结（$p/2$、 $q/2$、 $r' + 1$、 s），另一个分支是（$p/2$、 $q/2$、 r'、 s）。□

结合命题 5与 Lee 对平凡扭曲环面结的分类（定理 4），我们得到作为平凡链环的双分支扭曲环面链的完整描述。

命题6. 设 p、 q、 r、 s 为满足 最大公约数$(p, q) = 2$、 $1 \le q < p$、$2 \le r \le p$ 和 $s \neq 0$ 的整数。那么，扭曲环面链环 $T(p, q, r, s)$ 恰有两个分支，每个分支都是平凡纽结，且两个分支之间的链接数为零，当且仅当下列条件之一成立：

(1) $(p, q, r, s) = (2n + 2, 2n, 2n + 1, -1)$ 对某个整数 $n \ge 1$ 成立；(2) $(p, q, r, s) = (8,\ 2,\ 4,\ -1)$；(3) $(p, q, r, s) = (2n,\ 2,\ 2,\ -n)$ 对某个整数 $n \ge 2$ 成立。

证明. 假设 $T(p, q, r, s)$ 有两个分支，且两者都是平凡纽结，并且它们之间的链接数为零。如前所述，当 $s > 0$ 时，扭曲环面链环的链接数为正；因此必须有 $s < 0$。

根据命题 5，链接数为零对参数施加了严格的代数约束，并表明两个分支本身都是扭曲环面纽结。因此，在下列每种情形中，这些分支都必须出现在定理 4所给出的平凡扭曲环面结列表中。

情形 1： $r \ge 4$ **和** r **均为偶数。** 命题 5 给出

$$pq = -r^2 s,$$

且每个分支都是类型为（$p/2$，$q/2$，$r/2$，s）的扭曲环面纽结。记$p' = p/2$、$q' = q/2$和 $r' = r/2$，可得

$$p'q' = -r'^2 s,$$

且（p'，q'，r'，s）必须是平凡纽结。

与定理 4 中列出的七个族相比较，直接检验表明唯一的可能性是情形 (4)，即 $(n,\ 1,\ 2,\ -1)$。这迫使$r'=2,\ \ s=-1$，以及 $p'q'=4$，因此 $(p',\ q')\ =\ (4,\ 1)$。因此

$$(p,q,r,s)=(8,2,4,-1).$$

情形 2： $r\geq 5$ **且** r **为奇数。** 记 $r=2r'+1$。根据命题 5，两个分支分别是以下类型的扭曲环面纽结

$$(p/2,q/2,r'+1,s)\quad\text{and}\quad(p/2,q/2,r',s),$$

且链接数为零意味着

$$pq=-4r'(r'+1)s.$$

两个分支都必须是平凡纽结。

在定理 4 的各个情形中，唯一满足 $s\neq -1$ 的族是情形 (3)。然而，r' 和 $r'+1$ 不可能同时与该族中的第三个参数相匹配。因此，$s=-1$。

将 $(p/2,\ q/2,\ r',\ -1)$ 与定理 4中的其余情形进行比较，唯一可能的是情形 (2)，即 $(n+1,\ n,\ n,\ -1)$。因此

$$(p/2,q/2,r')=(n+1,n,n),$$

而另一个分支是 $(n+1,n,n+1,-1)$，它也是一个平凡纽结（由定理 4 的情形 (1)）。代回后得到

$$(p,q,r,s)=(2n+2,2n,2n+1,-1),\qquad n\geq 2.$$

情形 3： $r=2$。此处命题 5 给出

$$pq=-4s,$$

且每个分支都是环面纽结 $(p/2,q/2)$。要使它们成为平凡结，必须有 $q/2=1$，从而 $q=2$。记 $p=2n$，其中 $n\geq 2$，我们得到$s=-n$，因此

$$(p,q,r,s)=(2n,2,2,-n).$$

情形 4： $r=3$。此处 $r'=1$，且命题 5 给出

$$pq=-8s.$$

这两个分支分别是环面纽结 $(p/2,q/2)$ 和扭曲环面纽结 $(p/2,q/2,2,s)$。要使该环面纽结成为平凡纽结，必须有 $q=2$，从而 $p=-4s$。

因此，第二个分支为 $(-2s,\ 1,\ 2,\ s)$。与定理 4比较后，唯一符合条件的情况是 $s=-1$，从而得到

$$(p,q,r,s)=(4,2,3,-1),$$

这对应于族 $(2n+2,\ 2n,\ 2n+1,\ -1)$，其中 $n=1$。

结合所有情况，证明即告完成。 □

引理 7。 对于整数 $n\geq 1$，扭曲环面链环 T（$2n+2$、$2n$、$2n+1$、-1）是平凡链环。

证明。设 σ_i、$i = 1$、.....、$k-1$ 是具有 k 股的辫群的生成元。对于不相邻的不同指标 i、j，有 $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$，而 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$。

根据定义，链环 $T(2n+2,\ 2n,\ 2n+1,\ -1)$ 是辫的闭包

$$(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n}(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n+1},$$

它等于辫的闭包

$$(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n+1}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n}.$$

我们声称以下公式，其证明推迟到下一个引理——引理 8：对于整数 $k \geq 0$ 和 $n \geq 1$，满足 $(2n-k-1) \geq 0$，

$$\begin{aligned}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n+1}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n}\\ =&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n-k}\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n-k-1}.\end{aligned}$$

应用该公式可得

$$\begin{aligned}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n+1}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n}\\ =&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_2.\end{aligned}$$

如图 3所示，该辫的闭包如下：奇数编号的股 1、3、5、.....、$2n+1$ 构成一个分支，而偶数编号的股 2、4、6、.....、$2n+2$ 构成另一个分支。这两个分支彼此不相连，且每个分支都是一个平凡纽结。

因此，闭包是由两个分支组成的平凡链环，所以对所有 $n \geq 1$，$T(2n+2,\ 2n,\ 2n+1,\ -1)$ 都是平凡链环。□

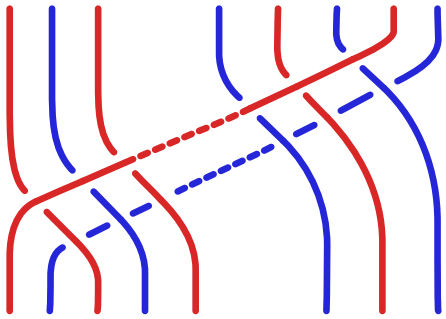

FIGURE 3. 辫 $(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})\ \sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_2$。其闭包是由两个分支组成的平凡链环，分别由红色辫股和蓝色辫股构成。红色分支位于蓝色分支上方，且每个分支都是平凡纽结。

现在我们转向上述证明中所述主张的证明：

引理 8。 对于满足 $(2n-k-1) \geq 0$ 的整数 $k \geq 0$ 和 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n+1}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n}\\=&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n-k}\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n-k-1}.\end{aligned}$$

证明。 我们通过归纳法证明这一结论。对于 $k=0$，这是显然的。一般地，假设 k 和 $k+1$ 在取值范围内，且对于 k，该结论成立。我们希望证明 $k+1$ 的情形，这等价于证明下列等式

$$\begin{aligned}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n-k}\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n-k-1}\\\stackrel{?}{=}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})^{2n-k-1}\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n-k}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})^{2n-k-2}.\end{aligned}$$

消去等式两边同时出现的项，只需证明

$$(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1}) \stackrel{?}{=} \sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n-k}.$$

Note that the left hand side is

$$\begin{aligned}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1})\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{2n+1})\\=&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_{2n-k}^{-1})\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}(\sigma_{2n-k}\sigma_{2n+1-k}\dots\sigma_{2n+1}).\end{aligned}$$

我们断言，这等于

$$\begin{aligned}&(\sigma_{2n}^{-1}\sigma_{2n-1}^{-1}\dots\sigma_{2n-k}^{-1})\sigma_{2n-k}\sigma_{2n+1-k}\dots\sigma_{2n}\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}\sigma_{2n-k}\\=&\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}\sigma_{2n-k},\end{aligned}$$

这正是等式右端。

剩下的工作是证明该断言，或等价地证明

$$\begin{aligned}&\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}\sigma_{2n-k}\sigma_{2n+1-k}\dots\sigma_{2n+1}\\=&\sigma_{2n-k}\sigma_{2n+1-k}\dots\sigma_{2n}\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_{2n+1-k}\sigma_{2n-k}.\end{aligned}$$

这是用如下形式的简单归纳法证明的:

$$\begin{aligned}&\sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n+1}\\=&\sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n+1}\\=&\sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n+1}\\=&\sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n+1}\\=&\sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n-2}\\=&\sigma_{2n-2}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n+1}\ \sigma_{2n}\ \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n-2}.\end{aligned}$$

□

引理 9. 扭曲环面链环 $T(8,2,4,-1)$ 是二分支平凡链环 .

证明。 这作为其特殊情形 $n=2$ 由引理 15 得到。 □

引理 10. 对每个整数 $n \geq 2$，扭曲环面链环 $T(2n,2,2,-n)$是二分支平凡链环。

证明。 由引理 16。 □

根据前面的引理，命题 6 所列出的每种情形确实都会得到一个平凡链环。

现在我们证明，当扭转股的数量超过底层环面链环中的股数时，所得的扭曲环面链环绝不可能是平凡链环。

命题11。设 p、q、r、s 为整数，使得最大公约数$(p,q) = d \geq 2$,$1 \leq q < p$, $2 \leq p < r \leq p+q$，且 $s \neq 0$。那么扭曲环面链环$T(p,q,r,s)$ 不是平凡链环。

证明。首先假设 $p > 2$。扭曲环面链环 $L = T(p,q,r,s)$有$d =$ 个分支，其数量为最大公约数(p,q)。

在 L的标准辫描述中，底层(p,q)-环面链环的每个分支恰由 p/d 股表示。扭转块作用于 r 股相邻股，这些相邻股分布在 d 个分支中。因此，每个分支 L_i 继承了作用于 r_i' 股的扭转，其中

$$0 \leq r_i' \leq \frac{p}{d} + \frac{q}{d}, \qquad r_1' + \cdots + r_d' = r,$$

并且每个分支 L_i 本身都是形如

$$L_i = T\Big(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}, r_i', s\Big).$$

我们断言，至少存在一个指标 i使得

$$r_i' > \frac{p}{d}.$$

事实上，若对于所有$_i$都有 $r_i' \leq \frac{p}{d}$，则

$$r = r_1' + \cdots + r_d' \leq d \cdot \frac{p}{d} = p,$$

这与假设 $r > p$矛盾。

因此，L至少有一个分支是形如 $T(p/d,\ q/d,\ r_i',\ s)$ 的扭曲环面纽结，其中 $r_i' > p/d$。根据定理 4，这种扭曲环面纽结绝不可能是平凡纽结，因为所列出的每种平凡纽结情形中，第三个参数都不大于第一个参数。因此，$T(p,\ q,\ r,\ s)$ 至少有一个分支是非平凡纽结，所以该链环不可能是平凡链环。

最后，若 $p = 2$，则不存在满足 $1 \leq q < p$ 且 $\gcd(p,\ q) = 2$ 的整数 q，因此这种情形不会出现。□

现在我们可以总结本节的结果。结合对链接数消失情形的分析、Lee 对平凡扭曲环面结的分类，以及对范围 $r > p$ 的排除，我们得到了恰有两个分支且为平凡链环的扭曲环面链环的完整分类。

定理 12. 设 p,q,r,s 为整数，且 最大公约数$(p,q) = 2$，$1 \leq q < p$,$2 \leq r \leq p+q$，以及 $s \neq 0$。那么，扭曲环面链环 $T(p,q,r,s)$ 是平凡链环，当且仅当满足以下条件之一：

(1) $(p,q,r,s) = (2n+2, 2n, 2n+1, -1)$ *for some integer* $n \geq 1$;

(2) $(p,q,r,s) = (8,\ 2,4,-1)$; (3) $(p,q,r,s) = (2n,\ 2,\ 2,\ -n)$ 对于某个整数 $n \geq 2$。

证明。令 $p,\ q,\ r,\ s$ 满足最大公约数$(p,\ q) = 2$、$1 \leq q < p$、$2 \leq r \leq p+q$和 $s \neq 0$。

（⇒）假设 $T(p,\ q,\ r,\ s)$ 是一个平凡链环。由于最大公约数$(p,\ q) = 2$，其底层环面链环 $T(p,\ q)$ 恰好有两个分支，因此 $T(p,\ q,\ r,\ s)$ 也恰好有两个分支。特别地，每个分支都是一个平凡纽结，且两个分支之间的链接数为零。

如果 $r \leq p$，命题 6 适用，并表明 T（$p,\ q,\ r,\ s$）必须属于以下三个族之一：

$$(2n+2, 2n, 2n+1, -1), \qquad (8, 2, 4, -1), \qquad (2n, 2, 2, -n).$$

如果不是 $p < r \leq p+q$，命题 11 则意味着 T（$p,\ q,\ r,\ s$）不可能是平凡链环，这与我们的假设矛盾。因此 $r \leq p$，并且 T（$p,\ q,\ r,\ s$）必须是上面列出的三个族之一。

（⇐）反过来，假设 $T(p,q,r,s)$ 属于陈述中的三个族之一。根据引理 10，对于所有 $n \geq 2$，链环 $T(2n, 2, 2, -n)$ 都是平凡链环。根据引理 9，链环 $T(8, 2, 4, -1)$ 是平凡链环。最后，根据引理 7，族 $T(2n+2, 2n, 2n+1, -1)$ 由平凡链环组成。

因此，列出的每个族都给出一个平凡链环，证明至此完成。 □

4. 分支多于两个的情形

本节研究分支多于两个的扭曲环面链环 $T(p,\ q,\ r,\ s)$，也就是说，最大公约数 $\gcd(p,\ q) = d > 2$。我们的目标是确定这类链环中哪些是平凡链环。

与两个分支的情形一样，一个基本限制来自这样一个事实：平凡链环的每个由两个分支组成的子链环本身都必须是平凡的两分支链环。因此，从一个 $d > 2$ 的扭曲环面链环中任取两个分支，所得子链环必须属于命题 6 中分类的三个族之一。这一观察极大地限制了可能的参数选择。

我们首先证明，命题 6 中的两个分支平凡链环族，不可能同时作为同一个零链接数扭曲环面链环的子链环。随后，我们利用这一刚性，并分析扭转参数 r 与底层环面链环的 d 分支之间的相互作用，从而得到一份可能的参数族简表。最后，我们验证这些剩余的族确实给出平凡链环。由此，我们完整分类了具有三个或更多分支的扭曲环面平凡链环。

引理 13. 没有任何两个分支的链接数为 0 的扭曲环面链环，能够包含分别属于两个不同族的、彼此不同的二分支子链环命题 *6*中的族，即

$$(2n+2, 2n, 2n+1, -1), \qquad (8, 2, 4, -1), \qquad (2n, 2, 2, -n).$$

换言之，分支之间链接数为零的扭曲环面链环，其二分支子链环不可能分别属于命题 6 中的两个不同族。

证明。 回顾命题 6 中的链环的两个分支如下：

- 对于 $(2n+2, 2n, 2n+1, -1)$，其分支为扭曲环面纽结 $(n+1, n, n+1, -1)$ 和 $(n+1, n, n, -1)$。
- 对于 $(8, 2, 4, -1)$，两个分支均为 $(4, 1, 2, -1)$。
- 对于 $(2n, 2, 2, -n)$，两个分支均为环面纽结 $T(n, 1)$（等价地，扭曲环面纽结 $(n, 1, 1, -n)$）；特别地，每个分支都有 $(p, q) = (n, 1)$。

反设一个具有两个分支且链接数为零的扭曲环面链环 L 包含来自上文列出的两个不同族的代表，且它们作为两个分支子链环出现。那么 L 包含 $(p/2, q/2)$-数据彼此不一致的分支，因为：

- 在第一族中，分支具有 $(p/2, q/2) = (n+1, n)$;
- 在第二族中，分支具有 $(p/2, q/2) = (4, 1)$;
- 在第三族中，分支具有 $(p/2, q/2) = (n, 1)$.

特别地，如果 L 包含一个类型为 $(n+1, n, *, -1)$ 的分支，同时还包含一个类型为 $(4, 1, 2, -1)$ 的分支，那么就会有 $(n+1, n) = (4, 1)$，这是不可能的。同样，如果 L 包含类型为 $(4, 1, 2, -1)$ 和 $(n, 1, *, -n)$ 的分支，那么我们就需要 $(4, 1) = (n, 1)$，因此 $n = 4$；但此时相应的扭转参数 s 将分别为 -1 和 -4，这与它们都是同一个零链接数扭曲环面链环的分支（其各分支共享相同的扭转参数 s）相矛盾。最后，如果 L包含来自第一族和第三族的分支，那么我们就需要 $(n+1, n) = (n, 1)$，而这对 $n \geq 1$ 来说是不可能的。

因此，这样的 L 不可能包含属于命题6中两个不同族的二分支子链环。□

命题 14。设 p, q, r, s 为整数，且 最大公约数$(p, q) = d > 2$, $1 \leq q < p$, $2 \leq r \leq p$，并且 $s \neq 0$。假设 (p, q, r, s) 是一个至少有三个分支的平凡链环。那么必然有 $r \geq d$，且 (p, q, r, s) 必须属于以下两个族之一：

(1) $(p, q, r, s) = (4n, n, 2n, -1)$ 其中某个整数为 $n \geq 3$；(2) $(p, q, r, s) = (mn, m, m, -n)$ 其中某些整数为 $m \geq 3$ 和 $n \geq 2$。

特别地，对于任何满足 最大公约数$(p, q) > 2$ 的其他参数选择，都无法得到含有三个或更多分支的平凡链环。

证明。 设 $d =$最大公约数$(p, q) > 2$。底层的环面链环 $T(p, q)$ 有 d个分支，每个分支（在标准辫图中）由 p/d 股表示。

步骤 1：化简为 $r \geq d$。 如果 $r < d$，那么在 $T(p, q)$ 的 d 个分支中，至少存在一个分支，其股与我们进行扭转的 r 个相邻股块不相交。

取这个分支，再取一个与该股块相交的分支。由这两个分支确定的二分支子链环是环面链环 $T(2p/d,\ 2q/d)$，其链接数等于 $\frac{pq}{d^2} \neq 0$。因此，这个二分支子链环不是平凡链环，这与假设 $(p,\ q,\ r,\ s)$ 是平凡链环相矛盾。因此 $r \geq d$。

步骤 2：每个由两个分支组成的子链环都必须属于命题 6 中的三个族之一。 由于 (p, q, r, s) 是一个至少有三个分支的平凡链环，因此每个由两个分支组成的子链环都是平凡链环。此外，在假设 $r \geq d$ 成立的情况下，扭转涉及任意选定的一对分支中的股，因此每个由两个分支组成的子链环本身都是一个扭曲环面链环，其参数由限制到这两个分支后得到。特别地，限制之后便属于命题6所涵盖的两个分支情形。因此，每个由两个分支组成的子链环都必须属于三个平凡链环族之一

$$(2N+2, 2N, 2N+1, -1), \qquad (8, 2, 4, -1), \qquad (2N, 2, 2, -N).$$

步骤 3：排除具有至少三个分支的链环中的族 $(2n+2, 2n, 2n+1, -1)$。

假设 (p, q, r, s) 的某个由两个分支组成的子链环属于类型 $(2n+2, 2n, 2n+1, -1)$。这种链环的两个分支是扭曲环面纽结 $(n+1, n, n+1, -1)$ 和 $(n+1, n, n, -1)$。

首先假设 (p, q, r, s) 恰有三个分支。由于每个由两个分支构成的子链环也必定属于 $(2n+2, 2n, 2n+1, -1)$ 这一类型，因此每一对分支都必须由一个 $(n+1, n, n+1, -1)$ 类型的分支和一个 $(n+1, n, n, -1)$ 类型的分支构成。这将迫使每个分支同时属于这两种类型，这不可能。因此，当链环恰有三个分支时，这一族不可能出现。

现在假设 (p, q, r, s) 的分支数多于三个。那么至少有两个分支属于同一类型：要么都是 $(n+1, n, n+1, -1)$，要么都是 $(n+1, n, n, -1)$。考虑两个属于 $(n+1, n, n+1, -1)$ 类型的分支。它们构成的二分支子链环便是扭曲环面链环 $(2n+2, 2n, 2n+2, -1)$。根据命题 5，该链环的链接数非零，因此不是平凡链环。这与 (p, q, r, s) 的每个二分支子链环都是平凡链环的假设矛盾。当存在两个 $(n+1, n, n, -1)$ 时，也可作类似论证。

因此，任何具有至少三个分支的平凡链环，都不可能含有类型为 $(2n+2,\ 2n,\ 2n+1,\ -1)$ 的二分支子链环。

步骤 4：其余两个族迫使参数具有所述形式。 根据引理 13，所有二分支子链环均为平凡链环的扭曲环面链环，不可能包含命题 6 中不同族的二分支子链环。因此，所有二分支子链环都必须属于同一个剩余族。

情形 A：所有二分支子链环都是 $(8,2,4,-1)$。对于任意一对分支，其限制具有环面参数 $(2p/d,\ 2q/d)$，扭转参数为 s，

以及 r-参数 $(2r/d)$。因此

$$\frac{2p}{d} = 8, \qquad \frac{2q}{d} = 2, \qquad \frac{2r}{d} = 4, \qquad s = -1.$$

因此 $p = 4d$、$q = d$、$r = 2d$ 和 $s = -1$，即

$$(p, q, r, s) = (4n, n, 2n, -1) \quad \text{with } n = d \geq 3.$$

情形 B：所有二分支子链环均为 $(2N, 2, 2, -N)$。类似地，我们得到

$$\frac{2q}{d} = 2 \;\Rightarrow\; q = d, \qquad \frac{2r}{d} = 2 \;\Rightarrow\; r = d,$$

and

$$\frac{2p}{d} = 2N \;\Rightarrow\; p = Nd, \qquad s = -N.$$

写作 $m = d$ 和 $n = N$，我们得到

$$(p, q, r, s) = (mn, m, m, -n),$$

其中 $m = d \geq 3$ 和 $n \geq 2$。

这证明了，对于至少包含三个分支的平凡链环（且 $\gcd(p, q) > 2$），唯一可能的参数族就是命题中所述的那些参数族。□

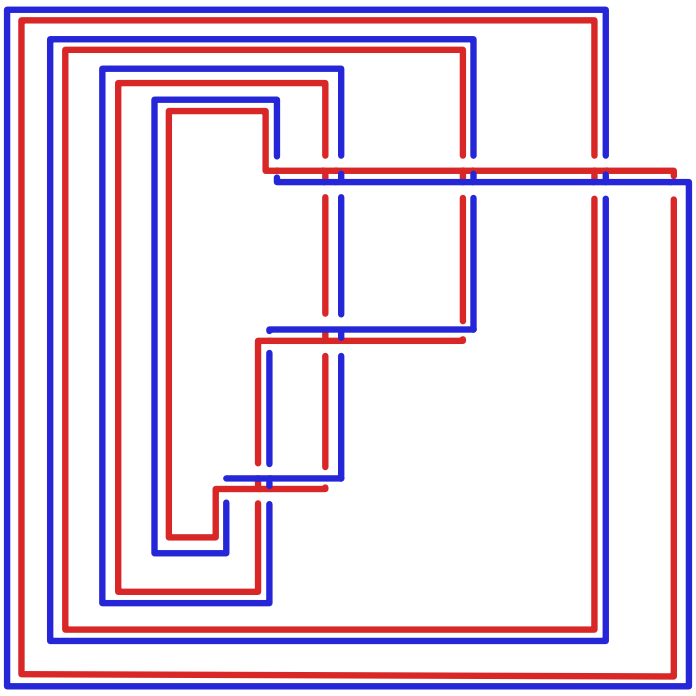

FIGURE 4. 嵌入平环的投影，其两个边界分量分别涂成红色和蓝色。对于任意 n，链环 $(4n, n, 2n, -1)$ 支撑在此平环上。

下面的引理可以基于[13, 定理 1], [9, 定理 4。3], 和 [10, 定理 5。4]的方法给出其他证明。为完整起见，我们在此给出另一种证明。

引理 15. 对于每个整数 $n \geq 2$，扭曲环面链环 $T(4n, n, 2n, -1)$都是一个 n 分支平凡链环。

证明。 考虑图 $A \subset S^3$ 中所示的嵌入平环 4。对于每个 $n \geq 2$，选取 n 个互不相同的数 $0 < a_1 < \cdots < a_n < 1$ 并令

$$\Gamma_n = \bigsqcup_{j=1}^{n} \big(S^1 \times \{a_j\}\big) \subset S^1 \times I.$$

在图 $S^1 \times I \hookrightarrow S^3$ 4 所示的嵌入 下， 的像恰好是扭曲环面链环 $T(4n, n, 2n, -1)$。

我们断言 A 在 S^3 中与一个标准嵌入平环环境同痕。只需注意到，其核心曲线是一个平凡纽结，且对应于此平环的标架为零。 的核心曲线是扭曲环面纽结 $T(4, 1, 2, -1)$，根据定理 4，它是一个平凡纽结。通过计算链接数可知，标架为零。因此，在这样的环境同痕下，链环 $\Gamma_n \subset A$ 被映为 n 标准平环中的平行核心圆。这些圆两两互不链接，且每个圆都界定 S^3中的一个嵌入圆盘；因此，它们的并是一个 n分支平凡链环。

因此， $T(4n, n, 2n, -1)$与 Γ_n的像同痕，故为n分支平凡链环。□

引理16. 对于整数 m、 $n \geq 2$，扭曲环面链环 $T(mn, m, m, -n)$是平凡链环。

证明。 由引理3可知，形如 $T(p, q, q, s)$的扭曲环面链环等价于环面链环 $T(q, p + qs)$。将此结果应用于 $p = mn$， $q = m$和$s = -n$，得到

$$T(mn, m, m, -n) = T\big(m, mn + m(-n)\big) = T(m, 0).$$

环面链环 $T(m, 0)$由 m 个平行且互不相链的分支组成，因此是 m分支平凡链环。□

定理 17. 设 p、 q、 r、 s 为整数，满足最大公约数$(p, q) = d > 2$、 $1 \leq q < p$、$2 \leq r \leq p + q$和 $s \neq 0$。那么， $T(p, q, r, s)$ 是平凡链环，当且仅当满足以下条件之一：

(1) $(p, q, r, s) = (4n, n, 2n, -1)$ 对于某个整数 $n \geq 3$; (2) $(p, q, r, s) = (mn, m, m, -n)$ 对于某些整数 $m \geq 3$ 和 $n \geq 2$。

特别地，在情形 *(1)* 中，链环有 $d = n$ 个分支；在情形 *(2)* 中，它有 $d = m$ 个分支。

证明。 令 $d =$ 为 p, q 的最大公约数。则 $T(p, q, r, s)$ 恰有 d 个分支。

*(⇒)*假设 $T(p, q, r, s)$ 是一个平凡链环。根据命题 11， $r \leq p$。

由于 $r \le p$，命题 14 适用：它表明，在假设最大公约数$(p,\ q) > 2$，$2 \le r \le p$，且 $s \neq 0$ 的条件下，对于一个至少有三个分支且其所有二分支子链环都是平凡链环的扭曲环面链环，唯一可能的参数族为

$$(p, q, r, s) = (4n, n, 2n, -1) \quad \text{for some } n \ge 3,$$

or

$$(p, q, r, s) = (mn, m, m, -n) \quad \text{for some } m \ge 3,\ n \ge 2.$$

因此，$T(p,\ q,\ r,\ s)$ 必属于陈述中列出的两种类型之一。

(⇐) 反过来，假设 $(p,\ q,\ r,\ s)$ 满足两个条件之一。

若 $(p,\ q,\ r,\ s) = (4n,\ n,\ 2n,\ -1)$ 满足 $n \ge 3$，则 $T(p,\ q,\ r,\ s)$ 根据引理15是平凡链环。

若 $(p,\ q,\ r,\ s) = (mn,\ m,\ m,\ -n)$ 满足 $m \ge 3$ 且 $n \ge 2$，则 $T(p,\ q,\ r,\ s)$ 根据引理16是平凡链环。

因此，列出的每个族确实都得到一个平凡链环，从而完成证明。□

5. Classification of Twisted Torus Links That Are Unlinks

现在，我们完成对平凡链环型扭曲环面链环的分类。结合二分支情形的结果与具有三个或更多分支的链环的结果，我们得到了完整的刻画。

定理18. 设 p, q, r, s 为整数，满足 最大公约数$(p, q) > 1$, $1 \le q < p$,$2 \le r \le p+q$，且 $s \neq 0$。那么，扭曲环面链环 $T(p, q, r, s)$ 是平凡链环，当且仅当满足以下条件之一：

(1) $(p, q, r, s) = (2n + 2,\ 2n,\ 2n + 1,\ -1)$，其中 $n \ge 1$为某个整数；*(2)* $(p, q, r, s) = (4n,\ n,\ 2n,\ -1)$，其中 $n \ge 2$为某个整数；*(3)* $(p, q, r, s) = (mn,\ m,\ m,\ -n)$，其中 $m \ge 2$ 和 $n \ge 2$为某些整数。

证明。 设 p, q, r, s 满足 $\gcd(p, q) > 1$, $1 \le q < p$, $2 \le r \le p + q$ 和 $s \neq 0$，并令 $d = \gcd(p, q)$。回忆一下，扭曲环面链环 $T(p, q, r, s)$ 恰有 d 个分支。

(⇒) 假设 $T(p, q, r, s)$ 是一个平凡链环。

情形 1： $d = 2$。 在此情形下， $T(p, q, r, s)$ 恰有两个分支。根据二分支扭结环面平凡链环的分类（定理 12），这些参数必须满足

$$(p, q, r, s) = (2n + 2, 2n, 2n + 1, -1), \quad (8, 2, 4, -1), \quad \text{or} \quad (2n, 2, 2, -n),$$

对于适当的整数 n。链环 $(8,2,4,-1)$ 恰好是族 $(4n, n, 2n, -1)$ 的情形 $n = 2$，并且当 $m = 2$ 时，族 $(2n, 2, 2, -n)$ 与 $(mn, m, m, -n)$ 重合。因此，所有满足 $d = 2$ 的可能性都包含在陈述中列出的三个族之中。

情形 2： $d > 2$。则 $T(p,q,r,s)$ 至少有三个分支。在此情形下，定理 17 适用，并表明 (p,q,r,s) 必为以下两种形式之一：

$$(p,q,r,s) = (4n, n, 2n, -1) \quad \text{for some } n \geq 3,$$

or

$$(p,q,r,s) = (mn, m, m, -n) \quad \text{for some } m \geq 3,\ n \geq 2.$$

这恰好对应定理陈述中的第（2）项和第（3）项。

这就证明了正向蕴含。

(⇐) 反之，如果 (p,q,r,s) 属于上述三个族之一，那么根据上文引用的相同结果，$T(p,q,r,s)$ 是一个平凡链环。□

References

[1] Birman, J., and Kofman, I. 洛伦兹链环的新变化。 *J. Topol. 2*, 2（2009年），227–248。1

[2] Bowman, R. S., Taylor, S., and Zupan, A. 扭曲环面纽结的桥谱。 *Int. Math. Res. Not. IMRN* 16 2015 7336 7356 1，（），–。，，，，，E. 次简单的双曲纽结。

[3] Champanerkar A. Kofman I. and Patterson *J. Knot Theory Ramifications 13* 7 2004 965 987 1，（），–。，由至少含两个整圈扭转的

[4] de Paiva T. 正辫构成的双曲纽结。 *Proc. Amer. Math. Soc. 150* 12 2022 5449 5458 1，（），–。，扭曲环面纽

[5] de Paiva T. 结外部中意想不到的本质曲面。 *Algebr. Geom. Topol. 22* 8 2022 3965 3982 1，（），–。，双曲扭

[6] de Paiva T. 曲环面链环。 *Geom. Dedicata 217*, 2（2023年），论文第42号，16。1，2，4[7] de Paiva, T. *Proc. Amer.* 沿环面链环进行全扭 *Math. Soc. 151* 6 2023 2671 2677 1

转得到的环面洛伦兹链环。，（），–。[8] de Paiva T. Hui C. O. Y. ，，， and Migueles, J. A. R. 体积、类洛伦兹模板与辫， 2024 1。，，，

[9] de Paiva T. and Purcell J. S. *Int. Math. Res. Not.* 卫星纽结与洛伦兹纽 *IMRN* 19 2023 16540 16573 15

结。，（），–。[10] de Paiva T. and Purcell J. S.，，，通过扭转得到的双曲及卫星洛伦兹链环。

arXiv preprint arXiv:2301.01934, to appear in Michigan M. Journal（2026年）。15[11] Dean, J. C. *Hyperbolic knots with small Seifert-fibered Dehn surgeries*。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡， 1996 1。博士论文——德

[12] Guntel B. J. 克萨斯大学奥斯汀分校。，具有不同本原/本原及本原/塞弗特表示的纽结。

J. Knot Theory Ramifications 21 1 2012 1250015, 12 1，（），。，扭曲环面纽结

[13] Lee S. *T p q kq s*（，；，）是缆纽结。 *J. Knot Theory Ramifications* *21* 1 2012 1250005, 4 4 ，（），。， 15

[14] Lee S. ，平凡的扭曲环面纽结。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，18（ 2014 4958 4996 1 4），–。，，扭曲环面纽结的纽结类型。 *J. Knot Theory Ramifications 26*,

[15] Lee S. 12（2017年）， 1750074, 7 4。，通过扭转环面纽结得到的卫星纽结：扭曲环面纽结的双曲性。

[16] Lee S. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 3 2018 785 815 1，（），–。，通过扭转环面纽结得到的

[17] Lee S. 复合纽结。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，18 2019 5744 5776（），–。[18] Lee S. and de Paiva，，，

T. 通过对环面纽结进行负向扭转得到的环面纽结。*J. Knot Theory Ramifications 31*, 1（2022年），论文第2150080号，19。1

[19] Lorenz, E. N. 确定性非周期流。 *J. Atmospheric Sci. 20*, 2（1963年）, 130–141。1[20] Moriah, Y., and Sedgwick *Topology* , E. 扭曲环面纽结的海加德分解。, *Appl. 156* 5 2009 885 896 1 （）, –。[21] Morimoto K. , 关于扭曲环面纽结的缠结分解。 *J. Knot Theory* , （）, 。 *Ramifications 22* 9 2013 1350049, 12 1 [22] Morimoto K. and Yamada Y. , , , 关于带扭转的环面纽结外部中的本质环面。 *Kobe J. Math. 26*, 1 2 2009 29 34 1 - （）, –。, 关于扭曲环面纽结的纽结弗洛尔同调。 [23] Vafaee F. *Int. Math. Res. Not.* , （）, –。 *IMRN* 15 2015 6516 6537 1

Hong Chang, Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University Beijing , , P.R.China, changhong@pku.edu.cn

Thiago de Paiva, Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University Beijing , , P.R.China, thhiagodepaiva@gmail.com

Qing Lan Beijing International Center for Mathematical Research Peking , , „, , University Beijing P.R.China lanqing@stu.pku.edu.cn