arXiv:2602.04383v1 [math.PR] 4 Feb 2026

混合 p自旋玻璃中 de Almeida-Thouless线的局部性质

Jean-Christophe Mourrat* Adrien Schertzer*

2026年2月5日

摘要

Jagannath 和 Tobasco [11] 提出了一种广义 de Almeida-Thouless（AT）判据，旨在刻画一大类具有伊辛自旋的混合 p自旋玻璃模型的副本对称（RS）区域。在本文中，我们证明，这一广义 AT 条件一般无法刻画副本对称区域。借助 Parisi 公式的 Hopf-Lax表示，我们在混合 p自旋模型类中构造了显式反例。特别地，我们展示了一个模型，其中经典AT扰动是在副本对称自由能的唯一极小化元附近进行的，并证明即使在这一情形下，AT 判据仍无法刻画副本对称相。相比之下，经典AT条件对于 Sherrington-Kirkpatrick 模型是否成立仍是一个悬而未决的问题。

1 引言

1.1 模型

我们研究混合 p-自旋玻璃模型，现简要回顾如下。设 $(\beta_p)_{p\geq 2}$ 是一列非负系数，为简单起见，假设其中只有有限个非零项，并定义

$$\xi_0(r) = \sum_{p\geq 2} \beta_p \, r^p, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

考虑配备哈密顿量 $H_N = (H_N(\sigma))_{\sigma\in\Sigma_N}$ 的超立方体 $\Sigma_N = \{-1,1\}^N$；该哈密顿量是一个中心高斯过程，其协方差为

$$\mathbb{E}\big[H_N(\sigma^1)H_N(\sigma^2)\big] = N\,\xi_0\left(\frac{\sigma^1\cdot\sigma^2}{N}\right).$$

这类场可以显式构造为相互独立的高斯张量的线性组合：

$$\sum_{1\leq i_1,\dots,i_p\leq N} J_{i_1,\dots,i_p}\,\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_p},$$

*法国里昂高等师范学院和法国国家科学研究中心数学系

其中，系数（$J_{i_1,\dots,i_p}$）是独立同分布的标准高斯随机变量。经典的 Sherrington-Kirkpatrick（SK）模型 [18] 对应于 $\xi_0(r)=\frac{1}{2}r^2$ 的情形。相应的配分函数定义为

$$Z_N(\beta,h)=\frac{1}{2^N}\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\exp\bigl(\beta H_N(\sigma)+h\sum_{i=1}^N\sigma_i\bigr)=:E_0\exp\bigl(\beta H_N(\sigma)+h\sum_{i=1}^N\sigma_i\bigr),$$

其中，$\beta>0$ 表示逆温度，$h\in\mathbb{R}$ 表示外场，我们用 E_0 表示关于 Σ_N上的均匀测度的期望。我们所关注的一个核心对象是自由能的极限

$$F_N(\beta,h):=\frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_N(\beta,h),$$

当 N 趋于无穷时，其表达式由著名的 Parisi 公式给出 .

1.2 Parisi 公式

在接下来的两节中，我们遵循 [11]的约定。令 $\xi(r)=\beta^2\xi_0(r)$。Parisi 泛函定义为

$$\mathcal{P}(\mu;\xi_0,\beta,h)=u_\mu(0,h)-\frac{1}{2}\int_0^1\xi''(s)\,\mu([0,s])\,s\,ds,\tag{1}$$

其中，$\mu\in\mathcal{P}([0,1])$是单位区间上的概率测度，而 u_μ 表示 Parisi 偏微分方程的唯一弱解

$$\begin{cases}\partial_r u_\mu(r,x)+\dfrac{\xi''(r)}{2}\,\partial_{xx}u_\mu(r,x)+\mu([0,r])\bigl(\partial_x u_\mu(r,x)\bigr)^2=0,\quad (r,x)\in(0,1)\times\mathbb{R},\\ u_\mu(1,x)=\log\cosh(x).\end{cases}\tag{2}$$

Parisi 公式表明

$$\lim_{N\to\infty}F_N(\beta,h)=\min_{\mu\in\mathcal{P}([0,1])}\mathcal{P}(\mu;\xi_0,\beta,h).\tag{3}$$

在物理学家的开创性洞见 [13] 的基础上，[9, 19, 20, 21, 16]，得到了这一公式的严格证明。

根据参数（β，h），极小化元 μ 可能具有不同的结构。唯一的极小化元（见 [4]）称为 Parisi 测度。若 μ 是狄拉克测度，则称该系统处于副本对称 （RS）相。一个基本问题是刻画（β，h）平面上 Parisi 测度具有副本对称性的区域。

1.3 广义 AT 线

令 Z 为一个标准高斯随机变量，并定义

$$\begin{aligned}Q^*(\beta,h)&=\Bigl\{q\in[0,1]:\mathbb{E}\bigl[\tanh^2(\xi'(q)Z+h)\bigr]=q\Bigr\},\\ \alpha(q,\beta,h)&=\xi''(q)\,\mathbb{E}\bigl[\operatorname{sech}^4(\xi'(q)Z+h)\bigr],\\ \alpha(\beta,h)&=\min_{q\in Q^*(\beta,h)}\alpha(q,\beta,h).\end{aligned}$$

沿用 [11], ，我们将水平集 $\{\alpha(\beta,h) = 1\}$ 称为广义 ***de Almeida-Thouless***（*AT*）线。我们定义

$$\mathrm{AT} := \big\{(\beta,h) : \alpha(\beta,h) \le 1\big\}, \tag{4}$$

$$\mathrm{RS} := \big\{(\beta,h) : \text{the Parisi measure is a Dirac measure } \delta_q \text{ for some } q \in [0,1]\big\}. \tag{5}$$

Jagannath 和 Tobasco 猜想这两个区域相同 [11, 猜想 1.6]。 [11, 定理 1.8]及 [7] 证明了，对于任意模型 ξ_0，总有包含关系 RS $\subset$ AT。我们在此证明，反向包含关系一般并不成立。

定理 1. 存在混合 p-自旋模型 ξ_0 ，满足 $\xi_0''(0) > 0$ ，使得

$$\mathrm{AT} \not\subset \mathrm{RS}.$$

注 2. 人们自然会猜想， [11] 中的判据存在的问题在于“正确的”重叠参数 q 的选择；更确切地说，在定义 $\alpha(\beta,h)$ 时，不应对所有 $q \in Q^*(\beta,h)$ 取最小值，而应在 RS 泛函的一个极小化元处计算 $\alpha(\cdot,\beta,h)$

$$\begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ q & \mapsto & \mathcal{P}(\delta_q;\xi_0,\beta,h). \end{cases} \tag{6}$$

该函数的极小化元必然属于 $Q^*(\beta,h)$，因此，在定义 $\alpha(\beta,h)$ 时，用该函数的极小化元集合取代 $Q^*(\beta,h)$，会使 AT 集合变小；我们可以进一步探问，这个较小的集合是否确实包含于 RS。

我们将证明这同样不成立。具体而言，我们将构造一些模型ξ_0 ，满足 $\xi_0''(0) > 0$ ，并选取 β 和 h ，使得式 (6) 中的函数有唯一的极小化元 $q(\beta, h)$，且有 $\alpha(q(\beta, h)\ \beta, h) < 1$，然而相应的 Parisi 测度并非 Dirac 质量。

注 3。 假设 $\xi_0''(0) > 0$ 是自然的，它排除了 AT 条件的一种平凡退化。事实上，若 $\xi_0''(0) = 0$ 且 $h = 0$，则对所有 $\beta \ge 0$，都有 $\alpha(\beta, 0) = 0$。特别地，

$$\mathrm{AT} \cap \{h = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\},$$

这不可能与 RS 区域重合（例如参见 [3, 定理 3]）。

1.4 AT 判据

在 SK 模型这一特定情形下，de Almeida-Thouless 条件最初由 de Almeida 和 Thouless [2] 提出，用作判定复制对称解是否不稳定的标准。Toninelli [22], 取得了这一方向上最早的一项严格数学成果，他证明了 RS $\subset$ AT。Parisi 泛函满足如下形式的一阶最优性条件：概率测度μ 在 $[0,1]$ 上最小化 Parisi 泛函，当且仅当任何混合变分都无法使其取值更低；也就是说，无法用任意点 $q \in [0,1]$处的 Dirac 质量替换 μ 中的无穷小部分。等价地，对于每个 q，沿着方向 [2] 的

Parisi 泛函的方向导数必须非负。这得益于 Parisi 泛函的凸性（更多详情见 [11, 7] ）。

在复本对称情形 $\mu = \delta_{q^*}$下，这一条件有一个简单的解释：参数 q^* 必须是某个与 μ 自然相关的一维函数 $G_\mu(t)$的全局极小值点（例如，参见 [11]中的命题 1.1）。通过考察该函数在 $t = q^*$处的局部性质，可以得到经典的 de Almeida-Thouless 条件：其一阶导数为零，给出 RS 自洽方程（即刻画 $Q^*(\beta, h)$的方程）；而其二阶导数的符号则给出 SK 模型的经典 AT 稳定性条件 [2], ，即 $\alpha(q^*, \beta, h) \leq 1$。

我们还提到，Chen [8]证明了，对于 $h = 0$ ，de Almeida-Thouless 条件确实刻画了 SK 模型的复本对称区域（也允许存在额外的中心高斯外场）；这一结果最近被推广到了具有多组分的自旋玻璃模型，见 [12]。对于 $h = 0$的 SK 模型，Zhou [23]描述了低于 AT 判据所预测的临界温度时，向完全 RSB 区域转变的精确过程。对于其他纯 p-自旋模型，即在 $\xi(r) = r^p$ （其中 $p \geq 3$为整数）以及对于 $h = 0$的情形，AT 判据不再提供有效信息，详见注 3。在这种情况下，Zhou [24]确定了转变温度，并描述了从 RS 区域向 1RSB 区域的转变。

在 [15, 第 2 节1] 中，对于自旋取值于 $\{-1, 0, 1\}$的自旋玻璃模型，也观察到了违背 AT 判据精神的局部最优性条件的情形。

在 [17], 中，Plefka 提出，SK 模型中可能出现两种不同的稳定性条件，而对 Plefka 条件的解释后来在 [10]中得到了阐述。

最后，在 [5, 6], 中，作者从带有算法的有限-N 系统出发研究 de Almeida-Thouless 条件，而非从帕里西变分公式出发，从而避免了繁复的帕里西理论。

2 定理 1 的证明

证明。 步骤 ***1***。帕里西公式的 ***Hopf-Lax***表示。

对于每个 β, $l \geq 0$，我们引入增广的 自由能

$$F_N^\circ(\beta, l) := -\frac{1}{N}\,\mathbb{E}\log E_0 \exp\Big(\beta\, H_N(\sigma) - \frac{N\beta^2}{2}\,\xi_0(1) + \sqrt{2l}\, z\cdot\sigma - l\, N\Big), \qquad (7)$$

其中 $z = (z_1, \ldots\ldots, z_N)$ 是一组相互独立且与 H_N 独立的标准高斯随机变量向量。在此归一化下，退火自由能恒等于零。特别地，

$$F_N^\circ(0, l) = F_1^\circ(0, l) = -\,\mathbb{E}\log\cosh\big(\sqrt{2l}\, z_1\big) + l.$$

令 ξ^* 表示 ξ 的凸共轭，

$$\xi^*(a) = \sup_{r\geq 0}\big(ar - \xi(r)\big), \qquad a \geq 0.$$

令 $t=\beta^2/2$，由 [14] 的命题 **4.1** 可得，对任意 $t>0$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,\mathbb{E}\log E_0\exp\bigl(\sqrt{2t}\,H_N(\sigma)\bigr)\le t\,\xi(1)-\sup_{l\ge 0}\Bigl\{F_N^{\circ}(0,l)-t\,\xi^*\bigl(t^{-1}l\bigr)\Bigr\}. \tag{8}$$

因此,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,\mathbb{E}\log E_0\exp\bigl(\sqrt{2t}\,H_N(\sigma)\bigr)&\le t\,\xi(1)+\mathbb{E}\log\cosh\bigl(\sqrt{2l}\,z_1\bigr)-l+t\,\xi^*\bigl(t^{-1}l\bigr)\\&=t\,\xi(1)-l^2+o(l^2)+t\,\xi^*\bigl(t^{-1}l\bigr),\end{aligned}$$

最后一行由泰勒展开得出，其中 $l\to 0$。

步骤 ***2.*** 模型的选择。

现在我们专门考虑零外场的情形， $h=0$，并声称

$$\mathrm{RS}\cap(\mathbb{R}_+\times\{0\})=\bigl\{(\beta,0):\lim_{N\to\infty}F_N(\beta,0)=\tfrac{\beta^2}{2}\,\xi_0(1)\bigr\}.$$

这是由以下事实得出的：根据定义,

$$\mathrm{RS}:=\bigl\{(\beta,h):\text{the Parisi measure is a Dirac measure }\delta_q\text{ for some }q\in[0,1]\bigr\},$$

并且注意到，当 $h=0$ 时，点 **0** 总属于 **Parisi** 测度的支撑集（参见 [3, 定理 1]）。因此，在零场下的 **RS** 区域中，**Parisi** 测度必为 δ_0 （由 **Parisi** 极小化子的唯一性可知）。在这种情况下，直接考察 **Parisi** 公式可得

$$\lim_{N\to\infty}F_N(\beta,0)=\frac{\beta^2}{2}\,\xi_0(1),$$

由此即可得出结论。现在我们考虑混合模型

$$\xi_0(r)=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{p}(Cr)^p,$$

其中 $p\ge 3$ 固定， $C>0$ 将取为较大的值。这对应于 **SK** 模型与低温下的 p-自旋相互作用的叠加。由于 **AT** 条件具有局部性质，这种额外的相互作用不会被检测到。对于这一 ξ_0 的选取，我们估计

$$\xi_0^*\left(\frac{l}{t}\right)=\sup_{r\ge 0}\Bigl(\frac{l}{t}r-\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{p}(Cr)^p\Bigr)\le\sup_{r\ge 0}\Bigl(\frac{l}{t}r-\frac{1}{p}(Cr)^p\Bigr)=\frac{p-1}{p}\Bigl(\frac{l}{Ct}\Bigr)^{\frac{p}{p-1}}.$$

选取 $l=C^{-1}$，我们得到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,\mathbb{E}\log E_0\exp\bigl(\sqrt{2t}\,H_N(\sigma)\bigr)\le t\,\xi_0(1)-\frac{1}{C^2}+o\left(\frac{1}{C^2}\right)+t\,\frac{p-1}{p}\Bigl(\frac{1}{C^2t}\Bigr)^{\frac{p}{p-1}}.$$

当 $C = C(\beta, p)$ 足够大时，可得

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log E_0 \exp\big(\beta H_N(\sigma)\big) < \frac{\beta^2}{2} \xi_0(1).$$

因此，对于任意固定的 β，都可以将 $C(\beta, p)$ 取得足够大，使得所得模型不是副本对称的。

现在我们考察广义 AT 判据在这种情形下的预测。对于当前模型，有 $0 \in Q^*(\beta,0)$，因此

$$\alpha(\beta, 0) = \min_{q\in Q^*(\beta,0)} \alpha(q, \beta, 0) \le \alpha(0, \beta, 0) = \beta^2.$$

特别地，对于每个 $\beta < 1$，无论 C 取何值，我们都有 $(\beta,0) \in \mathrm{AT}$。然而，对于每个 $\beta < 1$，都可以将 $C(\beta, p)$ 取得足够大，使得该系统不再是副本对称的。这表明 [11] 的判据无法刻画 RS 区域。我们还需证明备注 2 中的结论。我们定义临界温度

$$\beta_c := \sup\{\beta \ge 0 : \ (\beta, 0) \in \mathrm{RS}\}.$$

如上所述，这等价于

$$\beta_c := \sup\{\beta \ge 0 : \ \lim_{N\to\infty} F_N(\beta, 0) = \tfrac{\beta^2}{2} \xi_0(1)\}.$$

将 C 取得足够大后，我们有 $\beta_c < 1$。由 $\beta \mapsto \lim_{N\to\infty} F_N(\beta, 0)$ 的连续性（因为每个 $F_N(\beta, 0)$ 都是关于 β 的凸函数，且 $F_N(\beta, 0) \to F(\beta)$ 逐点收敛至一个有限极限，因此极限自由能 F 也是关于 β 的凸函数），我们有

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\beta_c, 0) = \tfrac{\beta_c^2}{2} \xi_0(1).$$

回忆一下，对于每个 β，只要 Parisi 极小化子是一个狄拉克质量，RS 区域内的极限自由能就由下式给出

$$\inf_{q\in[0,1]} F_{\mathrm{RS}}(q, \beta),$$

其中

$$F_{\mathrm{RS}}(q, \beta) = \mathbb{E}\left[\log\cosh\big(\beta\sqrt{\xi_0'(q)}\, Z\big)\right] + \frac{\beta^2}{2}\Big(\xi_0(1) - \xi_0(q) - (1-q)\xi_0'(q)\Big),$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$。这直接由极小化元为狄拉克测度时的 Parisi 公式 (3) 得出。由 Parisi 极小化子的唯一性，我们推得 0 是 $F_{\mathrm{RS}}(\cdot, \beta_c)$ 的唯一极小化元。现在证明，对于充分小的某个 $\delta > 0$，0 仍是 $F_{\mathrm{RS}}(\cdot, \beta_c + \delta)$ 的唯一极小化元。在 $\beta = \beta_c$ 处，RS 泛函 $F_{\mathrm{RS}}(\cdot, \beta)$ 在 $q = 0$ 处有一个非退化局部极小值，即，

$$\partial_q F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) = 0 \qquad \text{and} \qquad \partial_q^2 F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) = \frac{\beta_c^2}{2}(1 - \beta_c^2) > 0.$$

因此，存在 $\varepsilon \in$ （0，1）和 $c > 0$，使得

$$F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) \geq F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) + cq^2, \qquad q \in [0, \varepsilon].$$

Ne现在考虑紧集 $[\varepsilon, 1]$。由 $(q, \beta) \mapsto F_{\mathrm{RS}}(q, \beta)$ 的连续性，函数

$$q \longmapsto F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) - F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c)$$

在 $[\varepsilon, 1]$ 上取得其最小值，并且由于在 β_c 处极小化元的唯一性，该最小值严格为正。记

$$\eta := \min_{q \in [\varepsilon, 1]} \big(F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) - F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) \big) > 0.$$

由紧集 $[\varepsilon, 1] \times [\beta_c, \beta_c + 1]$ 上的一致连续性，存在 $\delta_0 > 0$ 使得对所有 $\beta \in [\beta_c, \beta_c + \delta_0]$ 和所有 $q \in [\varepsilon, 1]$,

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{RS}}(q, \beta) &= F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) + F_{\mathrm{RS}}(q, \beta) - F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) \\ &\geq F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) - \frac{\eta}{2} \\ &= F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) - F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) + F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) - \frac{\eta}{2}, \\ &\geq F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) + \frac{\eta}{2}, \end{aligned}$$

最后一行由 η 的定义得到。结合 $\beta \mapsto F_{\mathrm{RS}}(0, \beta)$ 的连续性与后一个方程，我们得到

$$F_{\mathrm{RS}}(q, \beta) \geq F_{\mathrm{RS}}(0, \beta) + \frac{\eta}{4}.$$

另一方面，由一致连续性，0 附近的局部二次界仍然成立，因此，对所有 $\epsilon_1 > 0$、$\beta \in [\beta_c, \beta_c + \delta(\epsilon_1)]$ 以及所有 $q \in [0, \varepsilon]$,

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{RS}}(q, \beta) &= F_{\mathrm{RS}}(0, \beta) + F_{\mathrm{RS}}(q, \beta) - F_{\mathrm{RS}}(0, \beta) \\ &\geq F_{\mathrm{RS}}(0, \beta) + F_{\mathrm{RS}}(q, \beta_c) - F_{\mathrm{RS}}(0, \beta_c) - 2\epsilon_1 \\ &\geq F_{\mathrm{RS}}(0, \beta) + cq^2 - 2\epsilon_1. \end{aligned}$$

取 $\delta = \min\big(\delta_0, \quad \delta(\varepsilon_1)\big)$，并结合这两个估计，我们得出结论：对于所有 $\beta \in [\beta_c, \beta_c + \delta]$, $q = 0$仍是 $q \mapsto F_{\mathrm{RS}}(q, \beta)$ 的唯一全局极小值点。至此，证明完成，备注 2 中的断言也得证。 □

致谢。 我们衷心感谢欧洲研究理事会玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动资助项目 SLOHD（101203974）的支持。

参考文献

[1] M. Aizenman, J. L. Lebowitz, D. Ruelle. 关于 Sherrington-Kirkpatrick 自旋玻璃模型的一些严格结果。《数学物理通讯》，112，3–20，1987年。[2] J.R.L. de Almeida, D.J. Thouless. 自旋玻璃模型中 Sherrington-Kirkpatrick 解的稳定性。《物理学杂志 A：数学与一般》，11，983，1978年。[3] A. Auffinger, W.-K. Chen. 关于 Parisi 测度的性质。《概率论及相关领域》，161，817–850，2015年。[4] A. Auffinger, W.-K. Chen. Parisi 公式有唯一的极小化元。《数学物理通讯》，335，1429–1444，2015年。[5] E. Bolthausen. SK 复制对称公式的一种 Morita 型证明。《经典与无序系统的统计力学》，《Springer 数学与统计学会议录》，63–93，2018年。[6] C. Brennecke, H.-T. Yau. 重新审视 SK 模型的复制对称公式。《数学物理杂志》，63，073302，2022年。[7]W.-K. Chen. Parisi 泛函的变分表示与二维 Guerra-Talagrand 界。《概率年刊》，45(6A)，3929-3966，2017年。[8] W.-K.Chen.关于中心高斯外场下 SK 模型的 Almeida-Thouless 转变线。《电子概率通讯》，26，1–9，2021年。[9] F. Guerra. 平均场自旋玻璃模型中的破缺复制对称界。《数学物理通讯》，233，1–12，2003年。[10] S. Gufler, A. Schertzer, M. A. Schmidt. 关于 SK 模型中 TAP 自由能的凹性。《随机过程及其应用》，164，第160–182页，ISSN 0304-4149，2023年。[11] A. Jagannath, I. Tobasco. 混合 p 自旋玻璃相图的一些性质。《概率论及相关领域》，167，615–672，2017年。[12] H. Kim. 关于中心高斯外场下多组分 SK 模型的 Almeida-Thouless 转变面。预印本，arXiv:2509.18066。[13] M. M´ezard, G. Parisi, and M. Virasoro.《自旋玻璃理论及其拓展：复制方法及其应用导论》。世界科学出版社，第9卷，1987年。[14] J.-C. Mourrat. Parisi 公式是 Wasserstein 空间中的 Hamilton-Jacobi 方程。《加拿大数学杂志》，74(3):607–629，2022年。[15] D. Panchenko. 广义 Sherrington-Kirkpatrick 平均场模型中的自由能。《数学物理评论》17 (7)，793–857，2005年。

[16] D. Panchenko. Sherrington-Kirkpatrick 模型. 施普林格数学专著, 2013.[17] T. Plefka. 无限程伊辛自旋玻璃模型的TAP方程收敛条件. 《物理学杂志*A*》**15**, 1971–1978, 1982.[18] D. Sherrington, S. Kirkpatrick. 自旋玻璃的可解模型. 《物理评论快报》**35**, 1792–1796, 1975.[19] M. Talagrand. Parisi 公式.《数学年刊》, **163**, 第1期, 221–263, 2006.[20] M. Talagrand. 自旋玻璃的平均场模型. 第一卷：基本例子. 现代数学综述丛书.施普林格柏林，海德堡,**54**, 2010.[21] M. Talagrand. 自旋玻璃的平均场模型. 第二卷：高级副本对称与低温. 现代数学综述丛书.施普林格出版社柏林-海德堡, **54**, 2011.[22] F. L. Toninelli. 关于Sherrington-Kirkpatrick平均场自旋玻璃模型中的Almeida-Thouless 转变线.《欧洲物理快报》,**60** (5), 764, 2002.[23]Y. Zhou. 关于伊辛纯 p-自旋玻璃中的Gardner转变. 预印本, arXiv:2408.14630.[24]Y. Zhou. Sherrington-Kirkpatrick 模型在低温下完全副本对称破缺的存在性. 预印本, arXiv:2504.00269.