arXiv:2602.04414v1 [math.SP] 4 Feb 2026

具有复值周期势的一维狄拉克算子的谱展开

O.A. VelievDoğuş大学,
Esenkent34755，伊斯坦布尔，土耳其。电子邮件:
oveлiev@dogus.edu.tr

摘要

本文构造了空间 $L_2^2(-\infty,\ \infty)$ 上具有复值周期矩阵位势 Q 的一维非自伴狄拉克算子 $L(Q)$ 的谱展开。为此，我们详细研究了关于复准动量一致的布洛赫特征值和布洛赫函数的渐近公式，以及 $L(Q)$ 的本质谱奇点。

关键词：狄拉克算子、本质谱奇点、谱展开。
美国数学学会数学分类：34L05，34L20。

1 引言与预备知识

本文在由微分表达式生成的空间 $L_2^2(-\infty,\ \infty)$ 中，为二维复值向量函数$\mathbf{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2 \end{pmatrix}(x)$ 构造一维狄拉克算子$L(Q)$的谱展开

$$l(\mathbf{y},Q)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y}'(x)+Q\mathbf{y}(x), \tag{1}$$

其中，$Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$，$p$ 和 q 是定义在 $[0,\pi]$ 上的 π-周期有界变差复值函数。众所周知，算子 $L(Q)$ 的谱 $\sigma(L(Q))$ 是算子 $L_t(Q)$ 的谱 $\sigma(L_t(Q))$ 的并集，其中 $L_t(Q)$ 是由式（1）和边界条件在 $L_2^2[0,\pi]$ 中生成的，$t\in(-1,\ 1]$

$$\mathbf{y}(\pi)=e^{i\pi t}\mathbf{y}(0). \tag{2}$$

然而，要为 $L(Q)$，构造谱展开，我们需要考察 $L_t(Q)$ 的特征值和特征函数，其中 $t\in\mathbb{C}.$。设 $\mathbf{c}(x,\ \lambda)=\begin{pmatrix} c_1(x,\ \lambda) \\ c_2(x,\ \lambda) \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{s}(x,\ \lambda)=\begin{pmatrix} s_1(x,\ \lambda) \\ s_2(x,\ \lambda) \end{pmatrix}$为方程的解

$$l(\mathbf{y},Q)=\lambda\mathbf{y} \tag{3}$$

满足以下初始条件

$$c_1(0,\lambda)=s_2(0,\lambda)=1,\ s_1(0,\lambda)=c_2(0,\lambda)=0. \tag{4}$$

将通解 $x_1\mathbf{c}(x,\ \lambda)\ +x_2\mathbf{s}(x,\ \lambda)$ 代入边界条件 (2)，并利用 (4)，可得以下方程组

$$\begin{cases} x_1(c_1(\pi,\lambda)-e^{i\pi t})+x_2 s_1(\pi,\lambda)=0 \\ x_1 c_2(\pi,\lambda)+x_2(s_2(\pi,\lambda)-e^{i\pi t})=0 \end{cases}.$$

A number λ 是 $L_t(Q)$ 的特征值，当且仅当它是特征方程的根

$$\Delta(\lambda,t)=\begin{vmatrix} c_1(\pi,\lambda)-e^{i\pi t} & s_1(\pi,\lambda) \\ c_2(\pi,\lambda) & s_2(\pi,\lambda)-e^{i\pi t} \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

利用朗斯基行列式等式 $c_1s_2-c_2s_1=1$，我们得到 $\Delta(\lambda,\ t)\ =e^{it}(F(\lambda)\ -2\cos\ \pi t)$，其中 $F(\lambda)$: $=c_1+s_2$. 为简化记号，记 $s_j(\pi,\ \lambda)$ 和 $c_j(\pi,\ \lambda)$ 分别为 s_j 和 c_j，因此， $L_t(Q)$ 的特征值 $\lambda(t)$ 是方程的根

$$F(\lambda)=2\cos\pi t. \tag{6}$$

If

$$F^{'}(\lambda(t))\neq 0\quad \&\quad s_1(\pi,\lambda(t))\neq 0, \tag{7}$$

则 $\lambda(t)$ 是单特征值，相应的特征函数 $\Phi_t(x)$ 可写成如下形式

$$\Phi_t(x)=s_1(\pi,\lambda(t))\mathbf{c}(x,\lambda(t))+\left(e^{i\pi t}-c_1(\pi,\lambda(t))\right)\mathbf{s}(x,\lambda(t)). \tag{8}$$

现在我们简要概述本文的结构。如果 p 和 q 是有界变差函数，那么由 $\mathbf{c}(x,\ \lambda)$ 和 $\mathbf{s}(x,\ \lambda)$ 的渐近公式（例如，参见 [12]）可知

$$F(\lambda)=2\cos\pi\lambda+O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{9}$$

当 $|\lambda|\to\infty$. 利用这一结果，在第 2 节中，我们证明以下关于特征值的渐近公式定理:

定理 1 $L_t(Q)$的特征值，对于 $t\in D_h(0,1)$，由两个数列组成
$\{\lambda_{n,1}(t);\ n\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\lambda_{n,1}(t);\ n\in\mathbb{Z}\}$ 它们满足以下渐近关系 *mulas*

$$\lambda_{n,1}(t)=(2n+t)+O(\frac{1}{n}),\ \lambda_{n,2}(t)=(2n-t)+O(\frac{1}{n}), \tag{10}$$

其中 $D_h(0,\ 1)\ =D_h\backslash(U_h(0)\cup U_h(1))\quad D_h=\{t\in\mathbb{C}:\quad |$虚部 $t|\leq 2h,-h\leq$实部 $t\leq 2-h\}$,$U_h(a)$ $=\{t\in\mathbb{C}:\quad |t-a|<h\}$ 且 h 是来自 $(0,1/10)$ 的固定数。这些公式关于 $t\in D_h(0,1)$ 是一致的

T定理 1 与 (8) 一起给出特征函数的以下渐近公式:

定理 2 若 $t\ \in\ D_h(0,1)$，则由 *(8)* 定义、对应于特征值 $\lambda_{n,1}(t)$ 和 $\lambda_{n,2}(t)$ 的 $\Phi_{n,1,t}(x)$ 和 $\Phi_{n,2,t}(x)$ ，属于 $L_t(Q)$，满足以下渐近公式

$$\Phi_{n,1,t}(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{i(2n+t)x}+O(\frac{1}{n})\quad \&\quad \Phi_{n,2,t}(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}e^{i(-2n+t)x}+O(\frac{1}{n}).$$

这些公式关于 $t\in D_h(0,\ 1)$ 和 $x\in[0,\pi]$. 是一致的

因此，当 n, 取较大值时，特征值 $\lambda_{n,1}(t)$ $\lambda_{n,2}(t)$ 以及特征函数 $\Phi_{n,1,t}$,$\Phi_{n,2,t}$ of $L_t(Q)$ 分别渐近接近于特征值 $2\pi n+t, 2\pi n- t$ 和特征函数

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i(2n+t)x}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(-2n+t)x}$$

的 $L_t(O)$，其中 O 表示零矩阵。此外，很容易验证，对于 $t \notin \mathbb{Z}$，边界条件 (2) 在 [13] 的意义下是强正则的。为方便读者，我们在第 2 节中给出这一验证（见注1）。因此，根据 [13]， $L_t(Q)$，在 $t \in D_h(0, 1)$，的根函数在 $L_2^2[0,\pi]$ 中构成 Riesz 基。

注意，关于 $L_2^2[a,b]$，中 Dirac 算子的根函数的基性质，已有许多论文探讨了在 $-\infty < a < b < \infty$，及各种边界条件下的情形（见 [1-3、6-9、12-14] 及其中的参考文献）。这里，我们仅使用这样一个事实：由 (1) 及强正则边界条件生成的狄拉克算子的根函数构成 Riesz 基。在第 4 节中，我们利用这一性质，构造由 (1) 在 $L_2^2(-\infty, \infty)$ 中生成的算子的谱展开。因此，我们不详细讨论有关有界区间上 Dirac 算子的研究工作。

在第4节中，我们利用第3节对谱奇异点和本质谱奇异点（ESS）的研究，应用文献 [16–19] 中提出的方法，为算子$L(Q)$构造谱展开。下面简要概述狄拉克算子 $L(Q)$ 谱展开的构造方案。 Gelfand 关于周期系数自伴微分算子谱展开的论文 [4] 指出，对于每个 $f \in L_2^2(-\infty, \infty)$，存在

$$f_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-ikt} \tag{11}$$

使得

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{(-1,1]} f_t(x)dt \tag{12}$$

并且 $f_{t+2}(x) = f_t(x)$。由于如上所述，对于所有 $t \neq 0$，1， t-周期边界条件都是强正则的，我们可以利用 $t \in (-1, 1]\setminus\{0,1\}$.）下 $L_t(Q)$ 根函数的 Riesz 基性质。此外，对于几乎所有 $t \in (-1, 1]$，算子$L_t(Q)$的所有特征值都是单重的。因此，该系统

$$\{\Psi_{n,j,t} : j = 1, 2; n \in \mathbb{Z}\} \tag{13}$$

$L_t(Q)$ 的特征函数按照注1的意义归一化后，构成 $L_2^2[0,\pi].$ 中的 Reisz 基。因此，对于几乎所有的 t，函数 f_t 可分解为

$$f_t = \sum_{j=1,2;\ n\in\mathbb{Z}} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}, \tag{14}$$

其中 $a_{n,\ j}(t) = (f_t, \ X_{n,\ j,\ t})$，且 $\{X_{n,,j,t} : j = 1, 2; \ n \in \mathbb{Z}\}$ 是与 (13) 对应的双正交系统。也就是说，

$$X_{n,j,t} = \frac{1}{\alpha_{n,j}(t)}\Psi^*_{n,j,t}, \ \alpha_{n,j}(t) = \left(\Psi^*_{n,j,t}, \Psi_{n,,jt}\right),$$

其中 $\Psi^*_{n,\ j,\ t}$ 表示伴随算子 $(L_t(Q))^*$ 的归一化特征函数。

将 (14) 代入 (12)，得到

$$f = \frac{1}{2} \int_{(-1,1]} \sum_{j=1,2;\ n\in\mathbb{Z}} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt. \tag{15}$$

为了从 (15) 推导出关于参数 t 的谱展开，必须证明逐项积分的合理性。自 20 世纪 50 年代以来，这一直是一个棘手而微妙的问题。此外，一般而言，(15) 中无法进行逐项积分，因为表达式

$$a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} = \frac{1}{\alpha_{n,j}(t)}(f_t, \Psi^*_{n,j,t})\Psi_{n,j,t} \tag{16}$$

对于某些 j 和 $n.$的取值，在 $(-1,1]$ 上可能不是可积的

因此，第一步是研究 (16) 的可积性。由于其可积性取决于 $1/\alpha_{n,j}(t)$ 的可积性，我们引入以下概念；这些概念的定义独立于 $f,$ 的选取，并将在构造谱展开时使用。

定义1 若存在 $j = 1,2$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，使得 $\lambda_0 =: \lambda_{n,j}(t_0)$，且对每个 ε，函数 $\frac{1}{\alpha_{n,j}}$ 在 $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ 上不可积，则称点 $\lambda_0 \in \sigma(L_{t_0}(Q)) \subset \sigma(L(Q))$ 是算子 $L(Q)$ 的本质谱奇点（*ESS*）。

因此，第3节将讨论 ESS。随后，我们利用这些结果，在第4节构造狄拉克算子 $L(Q)$。全文中，$m_0, m_1, \ldots$ 表示不依赖于 t, λ 和 $x.$ 的正常数。其含义是，对于某个不等式，存在一个常数 m_i，使得该不等式成立。

2 对 $t \in D_h(0,\pi)$的一致渐近公式

众所周知（见 [21]），若 f 是 $[0,\pi],$ 上的有界变差函数，则

$$\int_0^x f(t)\cos\lambda t dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \int_0^x f(t)\sin\lambda t dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{17}$$

当 $\lambda \to \infty$时。此外，$O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 与 $x \in [0,\pi]$无关；也就是说，(17) 中的估计关于 $x \in [0,\pi].$ 一致。因此，应用 [12], 中的定理 1 和定理 2，可得以下关于$x \in [0,\pi]$一致的渐近公式:

$$s_1(x,\lambda) = -\sin\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ s_2(x,\lambda) = \cos\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{18}$$

and

$$c_1(x,\lambda) = \cos\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ c_2(x,\lambda) = \sin\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{19}$$

因此，由 (18) 和 (19) 可得 (9)。现在，利用 (9) 和 Rouch´e 定理，我们证明存在正常数 $M(h)$ 和 $N(h)$，使得方程 (6) 和

$$\cos\pi\lambda - \cos\pi t = 0 \tag{20}$$

在圆内的零点个数相同

$$C(2n \pm t, \frac{M(h)}{n}) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - (2n \pm t)| = \frac{M(h)}{n}\right\}$$

对所有 $|n| > N(h)$ 以及 $t \in D_h(0,1).$ 成立。为此，我们证明

$$|F(\lambda) - 2\cos\pi\lambda| < |2\cos\pi\lambda - 2\cos\pi t| \tag{21}$$

对所有 $\lambda \in C(2n \pm t,\ \frac{M(h)}{n}),$ 也就是说，对于

$$\lambda = 2n \pm t + \frac{M(h)}{n}e^{i\alpha},\ \alpha \in [0, 2\pi].$$

由 (9) 可知，存在 $m_0 > 0$，使得 (21) 左端满足以下估计

$$|F(\lambda) - 2\cos\pi\lambda| < \frac{m_0}{n}, \tag{22}$$

对于 $\lambda \in C(2\pi n \pm t, \frac{M(h)}{n})$，对于所有 $|n| > N(h)$ 以及所有 $t \in D_h(0, 1)$。

现在我们估计 (21) 的右端。利用 $\cos\pi\lambda$ 关于 $2n \pm t$ 的泰勒展开，可得

$$\left|2\cos\pi\lambda - 2\cos\pi t \pm \frac{\pi M(h)}{n} e^{i\alpha}\sin\pi t\right| < \frac{m_1}{n^2}$$

其中 m_1. 为某个正数常数。另一方面，若 $t \in D_h(0, 1)$ 且 $h \in (0, 1/10)$，则利用 $\sin\pi t$ 的麦克劳林级数，可得 $|\sin t| > h/2$. 因此，我们有

$$|2\cos\pi\lambda - 2\cos\pi t| > \frac{m_0}{n},$$

对于所有 $\lambda \in C(2\pi n \pm t, \frac{M(h)}{n})$ $|n| > N(h)$、$t \in D_h(0, 1)$，以及某个 $M(h)$。将此与 (22) 结合，得到 (21)。因此，根据 Rouch´e 定理，存在一个充分大的数 $N(h)$，使得对于所有 $|n| > N(h)$，方程 (20) 和 (6) 在圆 $C(2\pi n + t, \frac{M(h)}{n})$ 和 $C(2\pi n - t, \frac{M(h)}{n})$。由于对于 $t \in D_h(0, 1)$，方程 (20) 在这些圆的每一个内部都有一个唯一的单零点，因此方程 (6) 在每个圆内也有一个唯一的单零点。

同理，我们证明了，对于 $t \in D_h(0,1)$，算子 $L_t(O)$ 和 $L_t(Q)$ 在所有圆 $C(2\pi n \pm t, \frac{M(h)}{n})$ 外部具有相同数量的特征值，即 $2(2N(h) + 1)$ 个，其中 $|n| > N(h)$。$L_t(O)$ 在这些圆外部的特征值为 $2\pi n \pm t$ for $|n| \le N(h)$。因此，$L_t(O)$ 的所有特征值的集合为

$$\left\{\lambda^0_{n,j}(t) : j = 1, 2; n \in \mathbb{Z}\right\},$$

其中 $\lambda^0_{n,1}(t) = 2n + t$ 以及 $\lambda^0_{n,2}(t) = 2n - t$。为方便记号起见，我们将 $L_t(Q)$ 的所有特征值的集合记为

$$\left\{\lambda_{n,j}(t) : j = 1, 2; n \in \mathbb{Z}\right\},$$

wh其中 $\lambda_{n,j}(t)$ 满足渐近公式 (10)。定理 1 的证明至此完成。

设 ν_1，ν_2,... 为整函数 $\frac{dF}{d\lambda}$ 的根，并设 $t = t_k (k = 1, 2, ...)$ 为集合 D_h 中满足 $\nu_s \in \sigma(L_{t_k}(q))$ 的点，其中某个 s. 满足该条件。由定理 1 可知，序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $D_h(0, \pi)$ 中没有聚点。因此，$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 只能在 0 和 1 处聚集。此外，由渐近公式可知

$$s_1(\pi, \lambda_{n,1}(t)) = -\sin\pi t + O\left(\frac{1}{n}\right),\ s_1(\pi, \lambda_{n,2}(t)) = \sin\pi t + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{23}$$

（见定理 1 和 (18)），存在一个常数 m_2，使得

$$|s_1(\pi, \lambda_{n,j}(t))| > m_2 h \tag{24}$$

当 $t \in D_h(0, 1)$ $j = 1, 2$ 且 $|n| > N(h)$。另一方面，用 (19) 代替 (18) 并重复 (23) 的证明，可得

$$c_1(\pi, \lambda_{n,j}(t)) = \cos\pi t + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{25}$$

当 $j = 1, 2$。因此，我们有

$$\frac{e^{i\pi t} - c_1(\pi, \lambda_{n,1}(t))}{s_1(\pi, \lambda_{n,1}(t))} = -i + O\left(\frac{1}{n}\right),\ \frac{e^{i\pi t} - c_1(\pi, \lambda_{n,2}(t))}{s_1(\pi, \lambda_{n,2}(t))} = i + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

该公式连同 (8)、(18) 和 (19)，完成了定理 2 的证明。

注1 算子 $(L_t(Q))^*$（即 $L_t(Q)$ 的伴随算子）为 $L_t(Q)$，其中 $\overline{\ }$

$$\overline{Q(x)} = \begin{pmatrix} \overline{p(x)} & \overline{q(x)} \\ \overline{q(x)} & -\overline{p(x)} \end{pmatrix}.$$

这些系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i(2n+t)x},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(-2n+t)x} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

and

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i(2n+\bar{t})x},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(-2n+\bar{t})x} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

分别由算子 $L_t(O)$ 和 $L_t(O)$的特征函数构成，在 $L_2^2[0,\pi]$. 中构成双正交系。对于实数 t，这两个系重合并构成标准正交基。然而，对于非实数 t，分别乘以 e^{-itx} 和e^{-itx}后，它们在空间 $L_2^2[0,\pi]$ 中的范数为一。因此，我们用 $\Psi_{n,\ j,\ t}$ 表示算子 $L_t(Q)$ 的特征函数，该函数满足以下归一化条件

$$\| e^{-itx}\Psi_{n,j,t} \| = 1,\ \arg\left(\Psi_{n,j,t}, \begin{pmatrix} e^{i(2n+t)x} \\ i(-1)^j e^{i(2n+t)x} \end{pmatrix}\right) = 0$$

注2 边界条件（*2*）可以写成如下形式

$$A\mathbf{y}(0) + B\mathbf{y}(\pi) = 0,$$

其中 $A = \begin{pmatrix} e^{i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{i\pi t} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 令 J_{ij} 为由矩阵 $\begin{pmatrix} e^{i\pi t} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi t} & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 的第 i 列和第 j 列构成的行列式。于是，我们有

$$J_{14} = -e^{i\pi t}, J_{32} = J_{23} - = -e^{i\pi t}, J_{13} = J_{24} = 0, J_{12} = e^{2i\pi t}, J_{3,4} = 1.$$

因此， $J_{14} + J_{32} \pm i(J_{42} - J_{13}) = -2e^{i\pi t} \neq 0$ 这意味着，对于所有 $t \in \mathbb{C}.$，边界条件 *(2)* 都是正则的。此外，对于该方程的判别式

$$[J_{14} + J_{32} - i(J_{13} + J_{2,4})]\, z^2 + [J_{12} + J_{34}]\, z + [J_{14} - J_{23} \pm i(J_{13} + J_{24})] = 0,$$

我们有 $(e^{2i\pi t} - 1)^2 \neq 0$ 对于 $t \neq k$，其中 $k \in \mathbb{Z}.$ 因此，当 $t \neq k$ 时，边界条件 *(2)* 是强正则的（见 *[13]*）。于是，分解 ***(14)*** 成立。

注*3* 对每个 n 和 j， λ_n，$_j$*(t)*对所有 $t \in D_h$ 均为单特征值，仅有限个点 t_1， t_2，*...*， t_m除外。通过对*(6)*应用隐函数定理，我们可以选取指标 n 和 j，使得若λ_n，$_j$*(t*$_0$*)*是单特征值，则λ_n，$_j$*(t)*在 t 的某个邻域内仍为单特征值，并且在该邻域内解析地依赖于 t。由此可知，函数 α_n^{-1}，$_j$*(t)*以及a_n，$_j$*(t)*$\Psi_{n,\ j,\ t}$ 在 $\underline{D_h}$ 上有定义，有限点集 t_1， t_2，*...*， t_m. 除外。此外，这些函数在曲线$\gamma \subset D_h$ 上两两连续，并且在 $\gamma \backslash \{t_1, t_2, ..., t_m\}$. 的任意连通子集上连续。由于这些函数在曲线 γ与 $\gamma \backslash \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ 上的积分相同，所谓在 γ 上的积分是指在 $\gamma \backslash \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ 上的积分。

3 谱奇点与 ESS

回顾可知， $L(Q)$的谱奇点是其谱 $\sigma(L(Q))$中的一点，在该点的邻域上， $L(Q)$的投影并非一致有界；等价地，点$\lambda \in \sigma(L(Q))$称为 $L(Q)$的谱奇点，如果算子 $L_t(Q)$对于 $t \in (-1,1]$ 对应于位于 λ 的小邻域内的特征值的谱投影并非一致有界。更确切地说，这里我们采用谱奇点的如下定义（见 [17]）。

定义 2 我们称 $\lambda \in \sigma(L(Q))$ 是 $L(Q)$ 的一个谱奇点，如果对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一列闭曲线 $\{\gamma_n\} :| z - \lambda | < \varepsilon\}$，使得对于每个 n，曲线 γ_n 至多包围 $L_t(Q)$ 的一个特征值（按重数计），对所有 $t \in (-1,1]$ 和

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \| e(t,\gamma_n) \| = \infty,$$

其中 $e(t,\gamma_n)$ 定义为

$$e(t,\gamma_n) = \int_{\gamma_n} (L_t(Q) - \lambda I)^{-1} \, d\lambda$$

并且 上确界 取遍所有满足 γ_n 属于 $L_t(Q)$的预解集的 t。

众所周知，若 $\lambda_{n,j}(t)$ 是 $L_t(Q)$ 的单特征值，且 $e(\lambda_{n,j}(t))$ 是通过沿闭曲线 γ 对 $L_t(Q)$ 的预解算子进行围道积分而定义的谱投影，其中该闭曲线仅包围特征值 $\lambda_{n,j}(t)$, 那么

$$e(\lambda_{n,j}(t))f = \frac{1}{\alpha_{n,j}(t)}(f, \Psi^*_{n,j,t})\Psi_{n,j,t}, \quad \|e(\lambda_n(t))\| = \left|\frac{1}{\alpha_{n,j}(t)}\right|. \tag{26}$$

因此，我们需要考虑

$$\alpha_{n,j}(t) = \left(\Psi_{n,j,t}, \Psi^*_{n,j,t}\right) \tag{27}$$

显然，若 (7) 对 $\lambda(t) = \lambda_{n,j}(t)$ 成立，则

$$\Psi_{n,j,t} = \frac{\Phi_{n,j,t}(x)}{\|\Phi_{n,j,t}(x)\|}, \ \Psi^*_{n,j,t} = \frac{\overline{\Phi_{n,j,-t}(x)}}{\|\Phi_{n,j,-t}(x)\|}, \tag{28}$$

其中

$$\Phi_{n,j,\pm t}(x) = s_1 \mathbf{c}(x, \lambda_{n,j}(\pm t)) + \left(e^{\pm i\pi t} - c_1\right) \mathbf{s}(x, \lambda_{n,j}(\pm t)).$$

利用 (27)、(28) 以及下列等式

$$s_2 + c_1 = 2\cos t, \ c_1 s_2 - c_2 s_1 = 1,$$
$$\left(e^{i\pi t} - c_1\right) + \left(e^{-i\pi t} - c_1\right) = s_2 - c_1, \left(e^{i\pi t} - c_1\right)\left(e^{-i\pi t} - c_1\right) = -s_1 c_2,$$

我们得到 $\alpha_{n,j}(t) =$

$$\frac{\int_0^\pi s_1^2 \left(c_1^2(x) + c_2^2(x)\right) + s_1 \left(s_2 - c_1\right)\left(c_1(x)s_1(x) + c_2(x)s_2(x)\right) - s_1 c_2 \left(s_1^2(x) + s_2^2(x)\right) dx}{\|s_1 \mathbf{c}(x, \lambda_{n,j}(t)) + \left(e^{i\pi t} - c_1\right)\mathbf{s}(x, \lambda_{n,j}(t))\| \, \|s_1 \mathbf{c}(x, \lambda_{n,j}(t)) + \left(e^{-i\pi t} - c_1\right)\mathbf{s}(x, \lambda_{n,j}(t))\|}. \tag{29}$$

另一方面，利用常数变易法，由以下方程可得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{c}(x,\lambda)}{\partial x \partial \lambda} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} - \lambda I \Bigg) \frac{\partial \mathbf{c}(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \mathbf{c}(x,\lambda),$$

and

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{c}(x,\lambda)}{\partial x \partial \lambda} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} - \lambda I \frac{\partial \mathbf{c}(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \mathbf{c}(x,\lambda),$$

这些方程是对 (3) 关于 λ, 求导得到的，由此我们得出

$$\frac{\partial \mathbf{c}(x,\lambda)}{\partial \lambda} = s(x,\lambda) \int_0^x \left(c_1^2(t) + c_2^2(t)\right) dt - \mathbf{c}(x,\lambda) \int_0^x s_1(c_1(t)s_1(t) + c_2(t)s_2(t))dt$$

and

$$\frac{\partial \mathbf{s}(x,\lambda)}{\partial \lambda} = s(x,\lambda) \int_0^x (c_1(t)s_1(t) + c_2(t)s_2(t))dt - c(x,\lambda) \int_0^x \left(s_1^2(t) + s_2^2(t)\right) dt.$$

代替写作 x π，我们得到

$$F^{'}(\lambda) = \int_0^\pi s_1 \left(c_1^2(x) + c_2^2(x)\right) + (s_2 - c_1)\left(c_1(x)s_1(x) + c_2(x)s_2(x)\right) - c_2\left(s_1^2(x) + s_2^2(x)\right) dx.$$

这些计算已在 [5] 中针对自伴情形以及 q（x） $= 0$. 进行了。由于我们无法直接引用 [5] ，且为了便于读者独立阅读，我们在此给出这些计算。因此，最后一个公式与式（29）结合可推出 $\alpha_{n,\ j}$（t） =

$$\frac{-s_1 F^{'}(\lambda_{n,j}(t))}{\|s_1 \mathbf{c}(x,\lambda_{n,j}(t)) + (e^{i\pi t} - c_1)\,\mathbf{s}(x,\lambda_{n,j}(t))\|\,\|s_1 \mathbf{c}(x,\lambda_{n,j}(t)) + (e^{-i\pi t} - c_1)\,\mathbf{s}(x,\lambda_{n,j}(t))\|}. \tag{30}$$

U利用这一点，我们证明以下定理，它与 [20]中的定理 2.4.3 类似。

定理 3 若 $t_0 \neq 0$，1 且 λ_0 是 L_{t_0}（Q）的重特征值，则 λ_0 是 L（Q）的谱奇点，且不是 *ESS*。

证明。 设 λ_0 是 L_{t_0}（Q）的重特征值，其重数为 m，其中 $t_0 \neq 0$，**1**。 为证明该定理，我们建立以下关系:

$$F^{'}(\lambda) \sim (\lambda_0 - \lambda)^{m-1} \quad \& \quad (\lambda_0 - \lambda_{n,j}(t)) = (t - t_0)^{\frac{1}{m}}, \tag{31}$$

当 $\lambda \to \lambda_0$ 和 $t \to t_0$，其中 $\lambda_0 = \lambda_{n,\ j}$（$t_0$）。这里， f（x） $\sim g$（x）当 $x \to x_0$ 意味着f（x） $= O$（g（x））以及 g（x） $= O$（f（x））当 $x \to x_0$.。利用 F'（λ）在 λ_0处的泰勒展开，并考虑到

$$F^{(k)}(\lambda_0) = 0,\ F^{(m)}(\lambda_0) \neq 0 \tag{32}$$

对于 $k = 1, 2, ...(m-1)$, 我们得到 (31) 中的第一个关系式。

现在，利用 $F'(\lambda)$ 在 λ_0 处的泰勒展开以及 cos t 在 t_0, 处的展开，再结合等式$F(\lambda_0) = 2\cos\ t_0$ 和 (32)，我们得到

$$F(\lambda) = 2\cos t_0 + F^{(m)}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^m(1 + o(1)),$$

当 $\lambda \to \lambda_0$ 且

$$2\cos t = 2\cos t_0 - (\sin t_0)\,(t - t_0) - (t - t_0)^2\left(\tfrac{1}{2} + o(1)\right),$$

当 $t \to t_0$. 这些等式连同恒等式 $F(\lambda_{k,j}(t)) = 2\cos t$，得出 (31) 中的第二个关系式。结合 (31) 中的第一个与第二个关系式，我们得到如下结论。

$$F(\lambda_{k,j}(t)) - F(\lambda_{k,j}(t_0)) \sim (t - t_0)^{\frac{m-1}{m}}. \tag{33}$$

因此，利用 (30)，并按照 [20], 中定理 2.4.3 的证明进行推导，我们得到

$$\frac{1}{\alpha_{n,j}(t)} \sim (t - t_0)^{\frac{m-1}{m}} \tag{34}$$

当 $t \to t_0$，且 $t_0 \neq 0$，1 和 $\lambda_{k,\ j}(t_0)$ 是 $L_{t_0}(Q)$ 的重数为 m. 的重特征值时

■

显然，若 $\lambda_{k,\ j}(t_0)$ 是单特征值，则存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\lambda_{k,\ j}(t)$ 仍是单特征值，因此对所有 $t \in (t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon)$，$\alpha_{n,\ j}(t) \neq 0$。因此，由定理 3 和定义 1、定义 2 可得以下推论:

推论 1 谐奇异点集合是 *Bloch* 重特征值集合的子集。*ESS* 集合是谐奇异点集合的子集。 $L(Q)$ 的任一 *ESS* 都是 $L_0(Q)$ 或 $L_1(Q)$ 的重特征值。

注意， [20] 中关于Hill算子的谱奇异点与ESS的大多数结果，对狄拉克算子 $L(Q)$也可以用类似的方法加以证明。 这里，我们仅记录对构造 $L(Q)$的谱展开至关重要的结果。推论 1 也将在下一节中用于此目的。

4 谱展开

为简化技术估计，我们假设 f 是紧支撑连续函数。于是，对每个x， $f_t(x)$是 t 在 D_h 的邻域内的解析函数。因此，由柯西定理及(12)，对一切位于 D_h 内且连接点 $-1+h$ 与 $1+h$ 的曲线 l， 我们有

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_l f_t(x)dt. \tag{35}$$

我们选取曲线 l，使得(14)对所有 $t \in l$成立，从而

$$f = \frac{1}{2}\int_l \left(\sum_{j=1,2;\ n\in\mathbb{Z}} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} \right) dt. \tag{36}$$

为构造谱展开，我们需要考虑$a_{n,\ j}(t)\Psi_{n,\ j,\ t}$的可积性，以及(36)中关于某条曲线 l的逐项可积性。该曲线构造如下。设 A 为使得

$$F^{'}(\lambda_{n,j}(t)) \neq 0 \quad \& \quad s_1(\pi, \lambda_{n,j}(t)) \neq 0. \tag{37}$$

由于 $F^{'}(\lambda)$ 和 $s_1(\pi,\ \lambda)$ 是整函数，且渐近公式（9）和（18）成立，因此集合 A 由序列 t_1, t_2.....组成，其聚点为 0 和 1。 因此,

$$A = \{t_k : k \in \mathbb{N}\} \quad \& \quad \overline{A} = A \cup \{0, 1\}. \tag{38}$$

根据推论 1，只有特征值 $\lambda_{n,\ j}(0)$ 和 $\lambda_{n,\ j}(\pi)$ 可能成为 ESS，从而阻碍可积性。因此，我们选择积分曲线，使其仅经过

点 0 和 π 附近。也就是说，我们按如下方式构造积分曲线。令 h为正数，使得 $h \notin A$ 且

$$(\gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)) \cap A = \varnothing, \tag{39}$$

其中 $\gamma(0,h)$ 与 $\gamma(\pi,h)$ 为半圆

$$\gamma(0,h) = \{|t| = h, \operatorname{Im} t \geq 0\},\ \gamma(1,h) = \{|t-1| = h, \operatorname{Im} t \geq 0\}. \tag{40}$$

定义 $l(h)$ 为

$$l(h) = B(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)), \tag{41}$$

其中 $B(h) = [h, 1-h] \cup [1+h, 2-h]$. 因此， $l(h)$ 由区间 $[h, 1-h]$ 和$[1+h, 2-h]$ 以及 (40) 中所定义的半圆组成。

由于 A 的聚点为 0 和 1, 集合 $B(h)$ 可能仅包含来自 A. 的有限个点。将这些点记为 $t_1, t_2, ...,$ t_s，并令

$$E(h) = B(h) \backslash \{t_1, t_2, ..., t_s\}. \tag{42}$$

注意，所谓在 $B(h)$, 上的积分，是指在 $E(h)$ 上的积分（见注3）。在 (36) 中用 $l(h) = B(h)$ $\cup \gamma(0,h) \cup \gamma(\pi,h)$ 代替 l，我们得到

$$f = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{E(h)} f_t(x)dt + \int\limits_{\gamma(0,h)} f_t(x)dt + \int\limits_{\gamma(\pi,h)} f_t(x)dt \right), \tag{43}$$

其中

$$\begin{aligned}
\int\limits_{E(h)} f_t(x)dt &= \int\limits_{E(h)} \sum_{j=1,2;k\in\mathbb{Z}} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dt, \\
\int\limits_{\gamma(0,h)} f_t(x)dt &= \int\limits_{\gamma(0,h)} \sum_{j=1,2;k\in\mathbb{Z}} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dtdt, \\
\int\limits_{\gamma(1,h)} f_t(x)dt &= \int\limits_{\gamma(1,h)} \sum_{j=1,2;k\in\mathbb{Z}} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dtdt.
\end{aligned} \tag{44}$$

因此，谱展开的构造包括以下步骤:

步骤 1. 我们证明，对于每个 $x \in [0,\pi]$，表达式 $a_{k,\ j}(t)\Psi_{k,\ j,\ t}(x)$ 关于 t 在 $E(h)$ $\gamma(0,\ h)$ 和 $\gamma(1,\ h)$ 上可积（定理 4 ）。

步骤 2. 我们证明，式（44）中的级数可以逐项积分（定理5）。**步骤 3.** 我们分别用关于 $[-h, h]$和 $[1-h, 1+h]$, 的积分替换关于 $\gamma(0,\ h)$ 和 $\gamma(1,\ h)$ 的积分（定理 6）。

为证明定理4，我们首先建立以下引理:

引理1 对于每个 $j = 1,2$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ ，存在 M 使得

$$|\Psi_{n,j,t}(x)| \leq M, \tag{45}$$

对所有 $x \in [0,\pi]$ 和 $t \in \left(D_h \backslash \overline{A}\right)$, 其中

$$|\Psi_{n,j,t}(x)|^2 = \frac{\left|s_1 \mathbf{c}(x, \lambda_{n,j}(t)) + \left(e^{i\pi t} - c_1\right) \mathbf{s}(x, \lambda_{n,j}(t))\right|^2}{\left\|s_1 \mathbf{c}(x, \lambda_{n,j}(t)) + \left(e^{i\pi t} - c_1\right) \mathbf{s}(x, \lambda_{n,j}(t))\right\|^2}. \tag{46}$$

证明。我们分别估计式（46）中分数的分子 $A(x,\lambda)$ 和分母 $B(\lambda)$。利用不等式 $|a|^2+|b|^2\geq 2|ab|$，得到

$$|A(x,\lambda)|\leq 2(|s_1\mathbf{c}(x,\lambda)|^2+\left|\left(e^{i\pi t}-c_1\right)\mathbf{s}(x,\lambda)\right|^2).$$

另一方面，对于复平面的任意紧子集 K，存在正数 M_1，使得

$$|\mathbf{c}(x,\lambda)|^2\leq M_1,\ \ |\mathbf{s}(x,\lambda)|^2\leq M_1$$

对所有 $x\in[0,\pi]$ 和 $\lambda\in K.$ 成立。因此，我们有

$$\left|s_1\mathbf{c}(x,\lambda_{n,j}(t))+\left(e^{i\pi t}-c_1\right)\mathbf{s}(x,\lambda_{n,j}(t))\right|^2\leq 2M_1(|s_1(\lambda_{n,j}(t))|^2+\left|\left(e^{i\pi t}-c_1(\lambda_{n,j}(t))\right)\right|^2) \tag{47}$$

对所有 $x\in[0,\pi]$ 和 $t\in\left(D_h\backslash A\right)$.成立

为了估计分母 $B(\lambda)$，我们使用如下显然的不等式

$$\frac{|(\mathbf{c}(\cdot,\lambda),\mathbf{s}(\cdot,\lambda))|}{\|\mathbf{c}(\cdot,\lambda)\|\,\|\mathbf{s}(\cdot,\lambda)\|}=:m(\lambda)<1,$$

由于解$\mathbf{c}(x,\lambda)$与$\mathbf{s}(x,\lambda)$的线性无关性。显然，$m(\lambda)$连续依赖于 $\lambda.$。因此，对于复平面的任意紧子集 K，存在正数 $m_3=m(\lambda_0)<1$，使得

$$\frac{|(\mathbf{c}(\cdot,\lambda),\mathbf{s}(\cdot,\lambda))|}{\|\mathbf{c}(\cdot,\lambda)\|\,\|\mathbf{s}(\cdot,\lambda)\|}\leq m_3$$

对所有 $\lambda\in K.$ 成立。于是，我们有

$$B(\lambda)\geq|s_1|^2\|\mathbf{c}(\cdot,\lambda)\|^2+\left|e^{i\pi t}-c_1\right|^2\|\mathbf{s}(\cdot,\lambda)\|-2\left|s_1\left(e^{i\pi t}-c_1\right)\right|m_3\|\mathbf{c}(x,\lambda)\|\,\|\mathbf{s}(x,\lambda)\|^2\geq$$

$$(1-m_3)|s_1|^2\|\mathbf{c}(\cdot,\lambda)\|^2+\left|e^{i\pi t}-c_1\right|^2\|\mathbf{s}(\cdot,\lambda)\|^2.$$

另一方面，存在 m_4 使得

$$\|\mathbf{c}(\cdot,\lambda)\|^2\geq m_4\quad\&\quad\|\mathbf{s}(\cdot,\lambda)\|^2\geq m_4$$

对所有 $\lambda\in K.$ 成立。因此，我们有

$$\left\|s_1\mathbf{c}(x,\lambda_{n,j}(t))+\left(e^{i\pi t}-c_1\right)\mathbf{s}(x,\lambda_{n,j}(t))\right\|^2\geq(1-m_3)m_4(|s_1(\lambda_{n,j}(t))|^2+\left|\left(e^{i\pi t}-c_1(\lambda_{n,j}(t))\right)\right|^2)$$

对所有 $t\in\left(D_h\overline{\backslash A}\right)$. 成立。该不等式结合(47)和(46)可推出(45)。 ■

现在我们可以考虑**步骤 1**。更确切地说，我们证明如下结论。

定理4 设 f 为连续的紧支撑函数。则对每个 $x\in[0,\pi]$，表达式$a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)$关于 t 在集合 $E(h)$ $\gamma(0,h)$和$\gamma(1,h)$上可积。此外，若$\lambda_{n,j}(0)$和$\lambda_{n,j}(1)$不是*ESS*，则该表达式分别在$(-h,h)$和$(1-h,1+h)$上可积。

证明。如果 f 是连续的紧支撑函数，那么根据 $a_{n,\ t}(t)$ 和 f_t 的定义（见（14）和（11）），并结合施瓦茨不等式，可得存在一个正数 m_5，使得

$$|a_n(t)\Psi_{n,j,t}|\leq m_5\left|\tfrac{1}{\alpha_n(t)}\right|,\forall t\in\left(D_h(0,1)\backslash\overline{A}\right). \tag{48}$$

另一方面，如果 $\lambda_{n,j}(t_0)$ 是一个单特征值，那么 $\alpha_{n,j}(t_0) \neq 0$ 和 $\alpha_n^{-1}{}_{,j}(t)(f_t, \Psi^*_{n,j,t})\Psi_{n,j,t}$ 在 t_0 的某个邻域内是连续函数。这意味着 $a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}$ 沿曲线 $\gamma(0,h)$ 和 $\gamma(1,h)$ 关于 t 连续变化。此外，该表达式在 $E(h)$ 的每个子区间上连续。注意，由（42）可知， $E(h)$ 由有限个区间组成。因此，对于每个固定的 x， $a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}(x)$ 关于 t 在集合 $E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)$ 上分段连续。由于（48）成立，且 $(E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)) \subset \left(D_h \backslash A\right)$ 和 $\left|\alpha_n^{-1}(t)\right|$ 在 $E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)$ 上可积，因此 $a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)$ 关于 t 在集合 $E(h)$ $\gamma(0,h)$ 和 $\gamma(1,h)$ 上可积。

若 $\lambda_{n,j}(0)$ 和 $\lambda_{n,j}(1)$ 不是 ESS，则由定义1， α_n^{-1} 在 $(-h,h)$ 和 $(1-h,1+h)$ 上分别可积。因此，对 $a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}(x)$ 在 $E(h)$ 上的可积性重复上述论证，即完成定理的证明。 ■

由 (34)、(48) 和注3，我们得到该定理的如下推论。

推论 2 函数 $\alpha_{n,j}^{-1}$ 和 $a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}$ 对任意 $\varepsilon > 0$. 都在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \cup [1+\varepsilon, 2-\varepsilon]$ 上可积

为证明 (44) 中的级数可以逐项积分（见 **步骤2**），我们使用 $L_t(Q)$ 和 $(L_t(Q))^* = L_t(Q)$ 的特征函数 $\Psi_{n,j,t}(x)$ 及 $\Psi^*_{n,j,t}(x)$ 的以下渐近公式，以及以下引理。若 $t \in E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)$, 则由定理 2 和注1可知

$$\Psi_{n,j,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|e^{itx}\|} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+t)x} + h_{n,j}(x) \tag{49}$$

and

$$\Psi^*_{n,j,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|e^{itx}\|} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+\bar{t})x} + h^*_{n,j,t}(x), \tag{50}$$

其中

$$\|h_{n,j,t}\| = O(\frac{1}{n}), \ \ \left\|h^*_{n,j,t}\right\| = O(\frac{1}{n}) \tag{51}$$

对于 $j = 1, 2$, 当 $|n| \to \infty$ 和 $O(\frac{1}{n})$ 不依赖于 $t \in E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)$. 利用这些公式，我们估计余项

$$R_N(x,t) = \sum_{j=1,2;\ |k|>N} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)$$

级数 (44) 的余项。具体而言，我们证明如下结论。

引理 2 存在正常数 $N(h)$ 和 m_6，它们与 t 无关，使得

$$\| R_n(\cdot,t) \|^2 \leq m_6 \sum_{j=1,2;\ |k|>n} \left| \left(f_t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|e^{itx}\|} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+\bar{t})x} \right) \right|^2 + \frac{1}{n} \tag{52}$$

对于 $n > N(h)$ 和 $t \in E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)$.

证明。为证明（52），我们首先证明不等式

$$\sum_{j=1,2;\ |k|>n} | a_{k,j}(t) |^2 \leq m_7 \left(\sum_{j=1,2;\ |k|>n} \left| \left(f_t, \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+\bar{t})x} \right) \right|^2 + \frac{1}{n} \right), \tag{53}$$

其中$a_{k,\ j}(t)$在（14）中定义，然后证明不等式

$$\| R_n(\cdot,t) \|^2 \leq m_8 \sum_{j=1,2;\ |k|>n} | a_{k,j}(t) |^2 . \tag{54}$$

由（50）可得

$$| a_{k,j}(t) |^2 \leq 2 \left(\left| \left(f_t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|e^{itx}\|} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+\bar{t})x} \right) \right|^2 + | (f_t, h^*_{n,j,t}) |^2 \right), \tag{55}$$

对于 $j = 1,2$ 和 $| k | > n$. 由于 f 是连续的紧支撑函数，利用施瓦茨不等式和（51），我们得到

$$| (f_t, h^*_{n,j,t}) |^2 < m_9 n^{-2}. \tag{56}$$

因此，（53）由（55）得出。

现在我们证明（54）。由于系统

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n)x} : j = 1,2; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

是一个标准正交基，由贝塞尔不等式可得

$$\sum_{j=1,2;\ |k|>n} \left| \left(f_t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|e^{itx}\|} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+\bar{t})x} \right) \right|^2 \leq \| \frac{e^{itx}}{\|e^{itx}\|} f_t \|^2 < m_{10} \tag{57}$$

对于所有 $t \in E(h) \cup \gamma(0,h) \cup \gamma(1,h)$。因此，由（57）和（53）可得

$$\sum_{j=1,2;\ |k|>n} | a_{k,j}(t) |^2 \leq m_{11}.$$

另一方面，由（51）也可推出

$$\|a_{k,j}(t) h_{k,j,t}\| \leq m_{12}(| a_{k,j}(t) |^2 + n^{-2}).$$

因此，该级数

$$\Sigma_1 := \sum_{j=1,2;\ |k|>n} a_{k,j}(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|e^{itx}\|} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^j i \end{pmatrix} e^{i((-1)^{j-1}2n+t)x}$$

and

$$\Sigma_2 : \sum_{j=1,2;\ |k|>n} a_{k,j}(t) h_{k,j,t}(x)$$

在 $L^2_2(0,\ \pi)$ 的范数下收敛，并且有

$$\| R_n(\cdot,t) \|^2 = \|\Sigma_1 + \Sigma_2\|^2 \leq 2 \|\Sigma_1\|^2 : +2 \|\Sigma_2\|^2 . \tag{58}$$

仿照证明 (57) 中的论证，我们得到

$$\|\Sigma_1\|^2 \leq m_{13} \sum_{j=1,2;\ |k|>n} | a_{k,j}(t) |^2 . \tag{59}$$

现在我们来估计 $\|\Sigma_2\|$. 由 (51) 可知

$$\|\Sigma_2\| \leq m_{14} \sum_{j=1,2;\ |k|>n} \mid a_{k,j}(t) \mid \frac{1}{\mid n \mid}.$$

因此，对 l_2^2，使用施瓦茨不等式，我们得到

$$\|\Sigma_2\|^2 = \left(\sum_{j=1,2;\ |k|>n} \mid a_{k,j}(t) \mid^2 \right) O(n^{-1}). \tag{60}$$

Th因此，(54) 可由 (58)-(60) 得出。引理的证明由 (53) 和 (54) 得出。 ■

现在，我们不使用 [16], 的引理 2，而是利用引理 2 并重复 [16], 的定理 3 和定理 4 的证明，得到以下结果:

定理5 对于每个紧支撑连续函数 f ，等式

$$\int\limits_{E(h)} f_t(x)dt = \sum_{j=1,2;k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E(h)} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dt, \tag{61}$$

$$\int\limits_{\gamma(0,h)} f_t(x)dt = \sum_{j=1,2;k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\gamma(0,h)} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dt, \tag{62}$$

$$\int\limits_{\gamma(1,h)} f_t(x)dt = \sum_{j=1,2;k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\gamma(1,h)} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dt, \tag{63}$$

成立，其中 $0 < h < \frac{1}{10}$. *(61)-(63)* 中的级数对于每个a、 $b \in \mathbb{R}$., 均在 $L_2^2(a, b)$ 的范数下收敛

至此，步骤 2 完成。在步骤 3 中，我们将 (62) 和 (63) 右端的 $\gamma(0, h)$ 和 $\gamma(\pi, h)$ 分别替换为 $[-h, h]$ 和 $[1-h, 1+h]$。根据推论 1，只有周期特征值和反周期特征值（λ_n、$_j(0)$ 以及 λ_n、$_j(1)$）可能成为 ESS，因此项 a_k、$_j(t)\Psi_k$、$_j$、$_t(x)$ 可能在 $[-h, h]$ 上不可积。幸运的是，对于充分大的 k，总和 $a_k,1(t)\Psi_{k,j,1} + a_k,2(t)\Psi_k,2,t(x)$（它是与相邻特征值对 $\lambda_k,1(t)$ 和 $\lambda_k,2(t)$ 对应的 $L_t(Q)$ 的总投影）在 $[-h, h]$ 上可积。

为证明这一结论及类似结论，我们考虑总投影

$$P_t(\gamma) f := \int_\gamma (L_t(Q) - \lambda I)^{-1} f d\lambda$$

它定义为沿位于 $L_t(Q)$ 的预解算子集中的闭曲线 γ 的积分。下面我们通过求解狄拉克方程，以标准方式求出 $(L_t(Q) - \lambda I)^{-1} f$

$$Jy'(x) + Q(x)y - \lambda y = f,$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 应用常数变易法，我们得到

$$y(x) = Y(x,\lambda)\alpha - Y(x,\lambda) \int_0^x Y^{-1}(s,\lambda)Jf(s)ds),$$

其中 $Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) & s_1(x,\lambda) \\ (x,\lambda) & s_2(x,\lambda) \\ c_2 & \end{pmatrix}$, $Y^{-1}(x,\lambda) \begin{pmatrix} s_2(x,\lambda) & -s_1(x,\lambda) \\ -c_2(x,\lambda) & c_1(x,\lambda) \end{pmatrix}$ 且 $\alpha \in \mathbb{C}^2$.由边界条件 (2) 可知

$$\alpha = (Y(\pi,\lambda) - e^{i\pi t}I)^{-1} Y(\pi,\lambda) \int_0^\pi Y^{-1}(s,\lambda) J f(s) ds).$$

因此，我们有

$$(L_t(Q) - \lambda I)^{-1} f(x) = Y(x,\lambda)(Y(\pi,\lambda) - e^{i\pi t}I)^{-1} Y(\pi,\lambda) \int_0^\pi Y^{-1}(s,\lambda) J f(s) ds - \quad (64)$$
$$Y(x,\lambda) \int_0^x Y^{-1}(s,\lambda) J f(s) ds,$$

其中

$$(Y(\pi,\lambda) - e^{i\pi t}I)^{-1} = \frac{1}{\Delta(\lambda,t)} \begin{pmatrix} s_2(\pi,\lambda) - e^{i\pi t} & -s_1(\pi,\lambda) \\ -c_2(\pi,\lambda) & c_1(\pi,\lambda) - e^{i\pi t} \end{pmatrix} \quad (65)$$

且 $\Delta(\lambda,\ t) = e^{it}(F(\lambda) - 2$ 余弦 $\pi t)$（见 (5)）。现在，我们可以将 (62) 右侧关于$\gamma(0,\ h)$的积分替换为关于 $[-h,h].$ 的积分

定理 6 若 f 是连续且紧支撑的函数，，则

$$\int_{\gamma(0,h)} f_t dt = \int_{-h,}^{h} \sum_{\substack{j=1,2; \\ |n|\le N(h)}} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} dt + \sum_{|n|>N(h)} \int_{-h,}^{h} a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t} + a_{n,2}(t)\Psi_{n,2,t} dt, \quad (66)$$

其中 $N(h)$ 在定理*1*中定义。此外，

$$\int_{[-h,h]} \left(\sum_{j=1,2;\ |n|\le N(h)} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} \right) dt = \lim_{\delta\to 0} \sum_{\substack{j=1,2; \\ |n|\le N(h)}} \int_{\delta<|t|\le h} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} dt \quad (67)$$

and

$$\int_{[-h,h]} \sum_{j=1,2} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} dt = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1,2} \int_{\delta<|t|\le h} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} dt, \quad (68)$$

对于 $|n| > N(h)$。此外，若 $\lambda_{n,\ j}(0)$（其中 $|n| > N(h)$）不是 *ESS*，则

$$\int_{[-h,h]} a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t} + a_{n,1}(t)\Psi_{n,2,t} dt = \int_{[-h,h]} a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t} dt + \int_{[-h,h]} a_{n,2}(t)\Psi_{n,2,t} dt. \quad (69)$$

(66) 中的级数对于任意 $a, b \in \mathbb{R}.$，在 $L_2^2(a,b)$ 的范数下收敛

证明。 由定理1可知，对于 $|n| > N(h)$，圆

$$C(n) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2n| = 1\}$$

内部仅包含两个特征值（按重数计），记为 $\lambda_{n,1}(t)$ 和 $\lambda_{n,t}(t)$，它们是算子 $L_t(Q)$ 对于 $|t| \le h$ 的特征值。此外， $C(n)$ 属于 L_t 对于 $|t| \le h.$ 的预解集。同样，存在一条闭曲线 $\Gamma(0)$，使得 $\Gamma(0)$ 属于 L_t 对于$|t| \le h$ 的预解集，并且 L_t 对于 $|t| \le h$ 的所有不位于 $C(n)$ 对于 $n > N(h)$ 中的特征值，都包含在由 $\Gamma(0)$ 围成的区域内。考虑总投影

$$T_{C(n)}(x,t) := \int_{C(n)} (L_t(Q) - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda \quad \& \quad T_{\Gamma(0)}(x,t) := \int_{\Gamma(0)} (L_t(Q) - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda.$$

由于 $\Delta(\lambda,t)$ 在紧集 $C(n)\times U_h(0)$, 上连续，其中 $\overline{U_h(0)}=\{t\in\overline{\mathbb{C}:}\ |t|\le h\}$，因此存在一个正数常数 m_{15}，使得 $|\Delta(\lambda,t)|\ge m_{15}$ 对所有满足 $(\lambda,t)\in C(n)\times U_h(0)$ 且 $(\lambda,t)\in\Gamma(0)\times U_h(0)$ 的情形成立。利用这一不等式以及（64）和（65），并注意到 $f_t(x)$ 是有限和，我们得出存在一个正数常数 m_{16}，使得

$$\left|T_{C(n)}(x,t)\right|\le m_{16},\ \ \left|T_{\Gamma(0)}(x,t)\right|\le m_{16} \tag{70}$$

对所有 $(x,t)\in[0,\pi]\times\overline{U_h(0)}$。因此，通过重复 [16], 中定理5的证明，我们完成了该定理的证明。

■

下述结论可用同样的方法证明。

定理7 若 f 是连续且紧支撑的函数，则

$$\int\limits_{\gamma(1,h)} f_t(x)dt=\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}\sum_{n=-N(h)-1}^{N(h)}\sum_{j=1,2}a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}(x)dt+ \tag{71}$$

$$\sum_{n\notin(-N(h)-1,N(h))}\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}\left(a_{n,1}(t)\Psi_{n,t}(x)+a_{n+1,2}(t)\Psi_{n+1,2,t}(x)\right)dt.$$

此外，

$$\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}\sum_{n=-N(h)-1}^{N(h)}\sum_{j=1,2}a_{n,j}(t)\Psi_{n,t}dt=\lim_{\delta\to0}\sum_{n=-N(h)-1}^{N(h)}\sum_{j=1,2}\int\limits_{\delta<|\pi-t|\le h}a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt,$$

and

$$\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t}+a_{(n+1),2}(t)\Psi_{(n+1),2,t}dt \tag{72}$$

$$=\lim_{\delta\to0}\left(\int\limits_{\delta<|\pi-t|\le h}a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t}dt+\int\limits_{\delta<|\pi-t|\le h}a_{n+1,2}(t)\Psi_{n+1,2,t}dt\right),$$

对于 $n\notin(-N(h)-1,N(h))$。此外，若 $\lambda_{n,j}(\pi)$ 不是 *ESS*，则

$$\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t}+a_{(n+1),2}(t)\Psi_{(n+1),2,t}dt=\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t}dt+\int\limits_{[\pi-h,\pi+h]}a_{n+1,2}(t)\Psi_{n+1,2,t}dt.$$

*(71)*中的级数对每个 $a,b\in\mathbb{R}$.都在 $L_2^2(a,b)$ 的范数下收敛

现在，为了根据定理5至定理7得到关于准动量的最终谱展开定理 t，我们引入一些符号和定义。设 $\Lambda_s(0)$（$s=1$、 2、..... s_0）和 $\Lambda_s(1)$（$s=1$、2、..... s_1）分别为周期特征值和反周期特征值，它们是 $L(Q)$ 的 ESS，且位于集合

$$\mathbb{E}(0):=\{\lambda_{n,j}(0):j=1,2;\ \ |n|\le N(h)\}$$

and

$$\mathbb{E}(1):=\{\lambda_{n,j}(1):j=1,2;\ \ -N(h)-1\le n\le N(h)\}.$$

引入以下记号:

$$\mathbb{T}(\Lambda_s(0))=:\{(n,j):|n|\le N(h),\ j=1,2,\ \lambda_{n,j}(0)=\Lambda_s(0)\},$$

$$\mathbb{T}(\Lambda_s(1)) =: \{(n,j) : -N(h)-1 \le n \le N(h),\ j=1,2,\ \lambda_{n,j}(1) = \Lambda_s(1)\}$$

and

$$\mathbb{T}(0)= \bigcup_{s=1,2,\dots,s_0} \mathbb{T}(\Lambda_s(0)),\ \mathbb{T}(1)= \bigcup_{s=1,2,\dots,s_1} \mathbb{T}(\Lambda_s(1)).$$

采用这些记号，分别来自 $\mathbb{E}(0)$ 和 $\mathbb{E}(1)$ 的特征值$\lambda_{n,\ j}(0)$ 和$\lambda_{k,\ j}(1)$ 为 ESS，当且仅当数对 $(n,\ j)$ 和 $(k,\ j)$ 分别属于 $\mathbb{T}(0)$ 和 $\mathbb{T}(1)$。换言之，如果相应的指标数对属于以下集合，那么$\lambda_{n,\ j}(0)$ 和$\lambda_{k,\ j}(1)$ 就不是 ESS

$$\mathbb{K}(0) := \{(n,j) : j=1,2;\ \ |n| \le N(h)\} \setminus \mathbb{T}(0)$$

and

$$\mathbb{K}(1) := \{(n,j) : j=1,2;\ \ -N(h)-1 \le n \le N(h)\} \setminus \mathbb{T}(1),$$

分别。利用这一记号，我们证明如下谱展开。

定理8 对每个紧支撑连续函数 f，如下谱展开成立：

$$f = \sum_{j=1,2;\ n\in\mathbb{Z}} \int_{B(h)} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt + \sum_{(n,j)\in\mathbb{K}(0)} \int_{[-h,h]} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt + \sum_{(n,j)\in\mathbb{K}(1)} \int_{[1-h,1+h]} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt + \tag{73}$$

$$\sum_{|n|>N} \int_{[-h,h]} \left[a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t} + a_{n,2}(t)\Psi_{n,2,t}\right]dt + \sum_{n\notin(-N(h)-1,N(h))} \int_{[1-h,1+h]} \left[a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t} + a_{n+1,2}(t)\Psi_{n+1,2,t}\right]dt +$$

$$\sum_{s=1}^{s_0} \int_{[-h,h]} \sum_{(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt + \sum_{s=1}^{s_1} \int_{[1-h,1+h]} \sum_{n\in\mathbb{T}(\Lambda_s(1))} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}.$$

*(73)*中的级数对每个 a、$b\in\mathbb{R}$.均在 $L_2^2(a,b)$ 的范数下收敛

此外，*(68)*、*(72)*以及下列等式成立

$$\int_{[-h,h]} \sum_{(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt = \lim_{\delta\to 0} \sum_{(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))} \int_{\delta<|t|\le h} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}(x)dt, \tag{74}$$

$$\int_{[1-h,1+h]} \sum_{(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(1))} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}dt = \lim_{\delta\to 0} \sum_{(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(1))} \int_{\delta<|t-1|\le h} a_{n,1}(t)\Psi_{n,1,t}. \tag{75}$$

证明。由定理5、定理6和定理7，(73)右端的第一、第四和第五个积分存在。由定理4，根据 $\mathbb{K}(0)$与 $\mathbb{K}(1)$的定义可知，第二和第三个积分也存在。现在我们证明第六个积分存在。具体而言，我们证明：若 f是连续的紧支撑函数，则表达式

$$\sum_{(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))} a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t} \tag{76}$$

在 $[-h,h]$. 上可积。若对某个 $p\ge 2,\ \ \Lambda_s(0)$是 $L_0(Q)$的 p重特征值，则它是方程(6)关于 $t=0$的 p重根。因此，由隐函数定理，存在圆盘 $U_\varepsilon(0) = \{t\in\mathbb{C} :\ \ |t|<\varepsilon\}$ 以及常数 $r_2 > r_1 > 0$，使得下列结论成立：

(i) 在 $\Lambda_s(0)$ 的 r_1 邻域内，算子 L_t 对于 $t\in U_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$ 恰有 p 个单特征值，即 $\lambda_{n,\ j}(t)$，其中 $(n,\ j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))$。

(*ii*) 在 $\Lambda_s(0)$ 的 r_2 邻域内，算子 L_t 对于 $t=0$ 和 $t\in U_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$ 除了 $\Lambda_s(0)$ 和 $\lambda_{n,\,j}(t)$ 之外没有其他特征值，其中 $(n,\ j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))$，分别如此。

令 C 为以 $\Lambda_j(0)$ 为圆心、 r 为半径的圆，其中 $r_1<r<r_2$. 将$C(n)$替换为 C，并重复证明 (70) 的过程，可得存在一个正数常数m_{17}，使得$-|T_C(x,\ t)|\le m_{17}$对所有 $(x,\ t)\in[0,\pi]\times U_h(0)$。因此，仿照定理 6 的证明可得，(76) 在 $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 上可积。结合推论 2 可知，(76) 在 $[-h,h]$ 上可积，且 (74) 成立。因此，第六个积分 (73) 存在。同理，我们证明了第七个积分存在，且 (75) 成立。等式 (68) 和 (72) 分别在定理 6 和定理 7 中得到了证明。现在，由 (43)、(61)、(66) 和 (71) 可得 (73)。∎

结论 *1* 下面说明谱展开公式为何具有形式 *(73)*。表达式 $a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}(x)$ 在 $B(h)$ 上可积，因为对于 $t\in B(h)$，$\lambda_{n,j}(t)$ 不是 *ESS*。因此，在 *(73)* 的第一个求和中，无需合并这些项。此外，基于同样的原因，如果 $(n,j)\in\mathbb{K}(0)$ 且 $(n,j)\in\mathbb{K}(1)$，那么这些表达式分别在 $[-h,h]$ 和 $[1-h,1+h]$ 上可积（参见 $\mathbb{K}(0)$ 和 $\mathbb{K}(1)$ 的定义）。因此，在 *(73)* 的第二个和第三个求和中，我们也无需合并任何项。然而，如果 $(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_s(0))$，那么 $\lambda_{n,j}(0)=\Lambda_s(0)$ 是一个 *ESS*，而项 $a_{n,j}(t)\Psi_{n,j,t}(x)$ 在 $[-h,h]$. 上不可积。幸运的是，这些项在 $(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_j(0))$ 上的和是可积的。这就是为什么我们需要在 *(73)* 的第六个求和中合并这些项（将这些项放在一起）。请注意，这个和是可积的，因为它表示与特征值 $\{\lambda_{n,j}(t)$ 相对应的 $L_t(Q)$ 的总投影：$(n,j)\in\mathbb{T}(\Lambda_j(0))\}$，而总投影的连续性是微扰理论中的自然现象。类似的情况也出现在 *(73)* 的第七个求和中。如果 $|n|>N$，那么特征值$\lambda_{n,j}(0)$ 的重数不超过 *2*，并且当且仅当 $\lambda_{n,}1(0)=\lambda_{n,}2(0)$ 时，它是二重特征值。在这种情况下，该二重特征值可能成为 *ESS*。此时，项 $a_{n,}1(t)\Psi_{n,}1,_t$ 和$a_{n,}2(t)\Psi_{n,}2,_t$ 在 $[-h,h]$ 上都不可积，而它们的和是可积的。这就是为什么我们在 *(73)* 的第四个求和中合并这两项。相同的推理也适用于 *(73)* 的第五个求和。

参考文献

[1] P. Djakov 和 B. Mityagin，关于一维周期 Dirac 算子的 Riesz 投影的 Bari–Markus 性质，《数学新闻》，283，第 3 期，443–462 页（2010）。[2] P. Djakov 和 B. Mityagin，关于由 Hill 算子和一维 Dirac 算子的根函数构成 Riesz 基的存在判据，《泛函分析杂志》，263，第 8 期，2300–2332 页（2012）。[3] P. Djakov 和 B. Mityagin，具有正则边界条件的一维 Dirac 算子的谱分解的无条件收敛，《印第安纳大学数学杂志》，61，第 1 期，359–398 页（2012）。[4] I. M. Gelfand，具有周期系数的方程的特征函数级数展开，《苏联数学文献》73，1117–1120 页（1950）。[5] B. M. Levitan，I. S. Sargsyan，《常微分算子的谱与迹》，莫斯科国立大学出版社，莫斯科，2003。[6] A. A. Lunyov 和 M. M. Malamud，关于 Dirac 型 2×2 系统的根向量系的 Riesz 基性质，《数学文献》，90，第 2 期，556–561 页（2014）。[7] A. A. Lunyov 和 M. M. Malamud，关于一阶系统边值问题的根子空间的完备性和 Riesz 基性质及其应用，《谱理论杂志》，5，第 1 期，17–70 页（2015）。

[8] A. A. Lunyov 和 M. M. Malamud，关于 Dirac 型算子的根向量系的 Riesz 基性质，2×2《数学分析与应用杂志》，441，57–103 页（2016）。[9] A. A. Lunyov，M. M. Malamud，关于 Dirac 型系统边值问题的特征行列式公式及其应用，《数学进展》478，110389（2025）。[10] D. C. McGarvey，具有周期系数的微分算子，发表于 $L_p(-\infty,\infty)$，《数学分析与应用杂志》，11，564–596 页（1965）。[11] D. McGarvey，涉及大参数的线性微分周期系，《 微分方程，**2**，115–142 页（1966）。[12] A. M. Savchuk 和 I. V. Sadovnichaya，复值可积位势下 Dirac 系统基本解的渐近公式，《微分方程》，40 第 5 期，545–556 页（2013）。[13] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov，具有复值可积位势的狄拉克算子，《数学札记》，96，第 5–6 期，777–810 页（2014）。[14] A. A. Shkalikov，一阶常微分方程组的正则谱问题，《俄罗斯数学评论》，76:5，939–941 页（2021）。[15] V. A. Tkachenko，非自伴周期 Dirac 算子，《算子理论：进展与应用》第 121 卷，485–512 页（2001）。[16] O. A. Veliev，Hill 算子的本质谱奇点与谱展开，《纯粹与应用分析通讯》，16，第 6 期，2227–2251 页（2017）。[17]O. A. Veliev，渐近谱周期微分算子，《数学札记》，第 104 卷，第 3 期，364–376 页（2018）。[18] O. A. Veliev，非自伴周期微分算子的带括号谱展开级数，《纯粹与应用分析通讯》，18，第 1 期，397–424 页（2019）。[19] O. A. Veliev，具有周期矩阵系数的非自伴微分算子的谱展开，《数学札记》，第 112 卷，第 6 期，1025–1043 页（2022）。[20] O. A. Veliev，具有周期位势的非自伴薛定谔算子：标量与向量情形的谱理论及其推广，Springer，瑞士，487 页，2025。[21] Zygmund, A.，《三角级数》，2 卷（剑桥大学出版社）