将弱化静水假设的随机原始方程诠释为三维随机纳维–斯托克斯方程的高阶近似

Arnaud Debussche[1], Étienne Mémin[2], 和 Antoine Moneyron [*,2]

[1]雷恩大学、法国国家科学研究中心、*IRMAR UMR 6625，F35000*，法国雷恩。[2]雷恩大学、法国国家信息与自动化研究院、*IRMAR UMR 6625，F35000*，法国雷恩。

2026年2月5日

arXiv:2602.04422v1 [math.AP] 4 Feb 2026

摘要

本文研究了三维纳维-斯托克斯方程随机表示的解向其对应原始方程解的收敛性。我们的分析涵盖弱收敛和强收敛两种情形，分别对应刚性盖边界条件和“全周期”边界条件。此外，我们探讨了在随机原始方程中弱化静水假设的影响，具体做法是将鞅项保留为偏离静力平衡的项。该修正模型通过一种特定的渐近尺度获得，这种尺度仅在随机框架下才可实现；模型在保留原始方程形式的同时，能够捕捉非静水效应。已有研究表明，在适当假设下，若使用适当的滤波器对无散噪声进行正则化，由此得到的广义静水模型是适定的。在这一框架下，我们证明，对于适当缩放的噪声，该模型为三维纳维-斯托克斯方程提供了高阶近似。

*通讯作者：antoine.moneyron@inria.fr

1 引言

通过随机建模来表示海洋流体流动是一个充满活力且不断发展的研究领域。由于存在从大尺度的太阳加热和大气强迫到小尺度的湍流耗散等广泛的相互作用尺度，要以高精度显式解析湍流流体运动在计算上是不可行的。因此，实际应用中只有近似模型才具有可处理性。此外，三维湍流表现出强烈的混沌行为，并且由于解的不唯一性，可能产生自发的随机性。随机建模已成为捕捉此类系统中的未解析变异和不确定性的强大而灵活的框架[6, 27, 28, 35]。与气候变化、经济和战略问题以及灾难性事件监测相关的社会需求，也要求向概率预报转变。这类方法旨在提供具有物理相关性的现实实现集合，尤其能够量化与特定事件相关的不确定性。

随机建模与微积分为应对这些挑战提供了严谨的框架。该领域早期的模型大多是现象学模型，其基础是湍流研究，而这类研究通常涉及跨尺度的能量反向散射 [33, 36], ，并通过乘性随机强迫引入随机参数化 [9, 47]。然而，这类模型中的噪声方差通常无法先验控制先验，因此需要添加涡黏性项来吸收过剩能量。尽管这种黏度的具体形式仍不确定，但通常会利用存在争议的布oussinesq湍流假设推导出合理的近似 [46]。此外，如果引入随机强迫时未将其与底层守恒定律联系起来，所得系统往往精度有限且可解释性较弱 [13]。

过去十年间，研究人员发展并研究了位置不确定性（LU）方法，以提出基于 [39]工作的、物理上自洽的随机模型 [38, 49] 。该方法基于雷诺输运定理的随机版本，并将其应用于质量、动量和能量守恒 [38]。这一框架已应用于各种经典地球物理模型 [5, 41, 42, 43], 、降阶模型[44, 45, 48], 和大涡模拟模型 [11, 12, 31]。其物理相关性也已在原型流动模型上得到检验 [5, 7, 13]。此外，随机版本的LU二维纳维–斯托克斯方程的适定性已得到确立，三维情形下鞅解的存在性也已得到证明 [18]。研究还发现，随着噪声消失，该随机模型仍保持连续，从而表明它与确定性纳维–斯托克斯方程具有很强的一致性。LU框架中所考虑的噪声称为输运噪声；由于流体动力学模型需要满足适定性，这类噪声已成为数学界的重要研究课题 [2, 3, 8, 16, 18, 21, 24, 25, 30, 32, 39]。此外，已有研究表明，这类噪声与增强耗散和混合现象相关 [22, 26]。

在确定性框架中，原始方程通常用于描述地球物理流动 [50]。这些方程源自三维纳维–斯托克斯方程，并假设垂直加速度可以忽略。这导致了经典的静力平衡，其中压力的垂直导数与密度涨落相关。尽管这种平衡在大尺度海洋动力学中具有物理有效性，但在浅水体制之外或存在热力学效应（如深对流）时便会失效。该假设进一步被称为强静力假设。值得注意的是，已知在适当的边界条件（刚性盖）下，这一确定性模型是适定的 [10] ，其随机版本也已受到数学界的广泛研究。事实上，带乘性噪声的随机原始方程的适定性已在 [17, 20], 中得到证明；最近，带有一类特定正则输运噪声的情形也在 [8]中得到证明。在一项较新的研究中，研究者表明，带输运噪声的随机原始方程类似于

LU框架，在强静力假设下并采用水世界边界条件时是适定的 [2]。然而，该研究假设水平噪声与垂直轴无关，从而简化了对正压噪声和斜压噪声的处理。这意味着，在采用刚性盖边界条件且噪声无散时，噪声是二维的。

如前文所述，强静力平衡无法描述水体强烈上涌或下沉流的深对流现象。LU设定通过将垂直加速度的鞅项视为偏差项，可以轻松弱化强静力平衡。这就得到了一类原始方程的推广形式，相关研究见 [19]。在那里，作者提出了多种模型，用于解释弱化（或弱）静水假设。这一修改能够在原始方程框架内捕捉非静水效应，其来源是一种只有在随机情形下才能实现的特定尺度变换。特别是，他们利用水平噪声与垂直轴无关这一事实（如 [2]中所述），证明了具有弱化静水假设的模型的低通滤波版本具有适定性。

此外，已有研究表明，对于三向周期区域，当纵横比 [34], 趋于零时，三维纳维–斯托克斯方程的弱解会收敛到原始方程的解。关于强解的收敛性也建立了类似结果，从而证明了对于足够薄的区域，（确定性的）三维纳维–斯托克斯方程是适定的。

沿用类似的方法，我们在随机情形下分析 LU三维纳维–斯托克斯方程与低通滤波后的 LU原始方程之间的渐近误差。一个显著的不同之处在于，我们采用刚性盖边界条件研究$L^2 - H^1$ 收敛性。然而，在研究 $H^1 - H^2$ 收敛性时，我们又回到了“完全周期”区域。具体而言，我们证明存在一些参数区间，在这些区间内，正则化三维LU纳维–斯托克斯方程可以由带有（正则化）弱静力假设的 LU原始方程有效逼近，却无法由强静力原始方程逼近。我们关注的参数是纵横比 ϵ 和垂直噪声系数 α_σ。进而，我们证明上述参数区间对应于 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1})$，但不对应于 $\alpha_\sigma \neq o(\epsilon^{-1/2})$。当 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1/2})$时，我们还证明了其收敛到强静力原始方程。

我们的研究并非只是将 [34] 的确定性结果推广到随机情形，主要挑战在于找到一个合适的框架，以便运用随机微积分的工具。具体而言，我们引入缩放梯度，用以表示缩放纳维–斯托克斯方程中的压力项，并定义缩放内积。随后，我们定义一个“修正的”Leray 投影算子，以消去这些缩放梯度项，从而运用经典勒雷理论的工具。这与 [8] 针对原始方程所采用的方法在思路上相近。特别是在我们的随机情形中，这个“修正的”投影算子至关重要，因为 It$\bar{}$o 引理会产生协变差贡献项。因此，我们的投影算子能够消去由随机压力的缩放梯度所产生的项。在这一框架下，我们推得，当纵横比趋于零时，缩放纳维–斯托克斯方程的爆破时间依概率趋于无穷。这是对随机情形下足够薄的区域上的纳维–斯托克斯方程适定性结果的一种推广。请注意，若要获得类似于确定性情形的结果，通常需要几乎必然能量估计，才能运用 [34], 的论证；而我们的研究中只有二阶矩估计。这类困难和结果在随机偏微分方程中很常见。

下面我们将介绍LU框架并明确我们的假设。随后，我们描述本研究的抽象设定，并陈述主要结果。之后，我们证明，在刚性盖边界条件下，LU三维纳维–斯托克斯方程的弱解收敛到LU原始方程的解。因此，当原始方程噪声为二维的时，后者方程在强静力假设下的解可视为前者方程解的零阶近似，

此外，我们的估计使我们能够将弱静力LU原始方程解释为LU 纳维–斯托克斯方程的高阶近似，其中对垂直速度噪声贡献采用了特定的缩放。最后，我们在“全周期”边界条件下，为强解建立了类似的结果。

2 LU 形式体系

本节中， $\mathcal{S}_0$ 表示一个三维有界空间区域。LU 公式基于以下流体拉格朗日位移 X 的时间尺度分离：

$$dX_t = u(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \tag{2.1}$$

重要的是，必须按照 It¯o 意义来理解这一分解。此外，速度分量 $u(X_t,\ t)$ 表示大尺度欧拉速度（在时空中均相关），而 $\sigma(X_t,\ t)dW$ 则是高度振荡、尚未解析的速度（时间上不相关，但空间上相关）。后一项称为（位移）噪声项。

让我们更精确地定义这一噪声项。考虑平方可积函数空间 $\mathcal{W} := L^2(\mathcal{S}_0,\ \mathbb{R}^3)$中的柱状维纳过程 W。那么，存在 $\mathcal{W}$的一组希尔伯特正交归一基 $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$，以及一列定义在滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_t,\ \mathbb{P})$ 上的相互独立的标准布朗运动 $(\hat{\beta}^i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得：

$$W = \sum_{i\in\mathbb{N}} \hat{\beta}^i e_i.$$

然而请注意，级数 $\sum_{i\in\mathbb{N}} \hat{\beta}^i e_i$ 并不在 $\mathcal{W}$ 中收敛。因此，上述恒等式只有在更大的空间 $\mathcal{U} \supset \mathcal{W}$ 中才有意义，其中嵌入映射 $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{U}$ 是希尔伯特–施密特算子。例如，$\mathcal{U}$ 可取为 $\mathcal{W}$ 中再生核希尔伯特子空间的对偶空间，其内积为 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{W}}$；例如 $H^{-s}(\mathcal{S}_0, \mathbb{R}^3)$，其中 $s > \frac{3}{2}$。然后，我们通过一个确定性的、依赖时间的相关算子 σ_t 来定义噪声。令 $\hat{\sigma}$：$[0,T] \to L^2(\mathcal{S}_0^2, \mathbb{R}^3)$ 为有界对称核，并定义

$$(\sigma_t f)(x) = \int_{\mathcal{S}_0} \hat{\sigma}(x, y, t) f(y) dy, \quad \forall f \in \mathcal{W}.$$

根据此定义， σ_t 是一个将 $\mathcal{W}$ 映射到其自身的希尔伯特–施密特算子，因此噪声可以写作

$$\sigma_t W_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} \hat{\beta}_t^i \sigma_t e_i,$$

其中该级数几乎必然在 $\mathcal{W}$ 中收敛，并且对所有 $p \in \mathbb{N}$，在 $L^p(\Omega\ \mathcal{W})$ 中收敛。我们将 $\mathcal{W}$ 解释为承载维纳过程 W_t 的空间，同时保留记号 $L^2(\mathcal{S}_0, \mathbb{R}^3)$ 表示三维速度空间。

此外，存在一个希尔伯特基 $(\phi_n)_n$，由相关算子 σ_t 的特征函数组成，并按其对应的特征值进行缩放。通过改变基，存在一列相互独立的标准布朗运动 $(\beta_t^k)_k$，定义在同一滤过概率空间上，使得

$$\sigma_t W_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_t^k \phi_k.$$

因此，$(\Omega\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_t,\ \mathbb{P}\ W)$ 构成一个随机基。我们可以为随机场 σW_t 关联一个协方差张量。给定两个点 $x,\ y \in \mathcal{S}_0$ 和两个时刻 $t,\ s \in \mathbb{R}^+$，定义

协方差张量 Q 形式上定义为

$$Q(x,y,t,s)\delta_{t,s} = \mathbb{E}[(\sigma_t dW_t)(x)(\sigma_s dW_s)(y)] = \int_{\mathcal{S}_0} \hat{\sigma}(x,z,t)\hat{\sigma}(z,y,s)dz\delta(t-s).$$

该协方差张量（按 4×4 张量的意义）的对角部分称为方差张量，记作

$$a(x,t) = \int_{\mathcal{S}_0} \hat{\sigma}(x,y,t)\hat{\sigma}(y,x,t)dy = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x,t)\phi_k(x,t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.2}$$

此外，我们假设方差张量满足可积性条件 $a \in L^1([0,T], L^2(\mathcal{S}_0, \mathbb{R}^{3\times 3}))$。在更一般的情形下——当 $\hat{}\sigma_t$ 本身是一个随机函数时——随机矩阵值过程 a 必须满足以下可积性条件，

$$\mathbb{E}\int_0^T \|a(\cdot,t)\|_{L^2(\mathcal{S}_0,\mathbb{R}^{3\times 3})} < \infty,$$

其中，范数 $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{S}_0,\mathbb{R}^{3\times 3})}$ 是空间 $L^2(\mathcal{S}_0, \mathbb{R}^{3\times 3})$ 上的希尔伯特范数，该空间配备了弗罗贝尼乌斯矩阵范数。在这些条件下，随机积分 $\int_0^t \sigma_s dW_s$ 定义了一个均值为零且方差有限的 $\mathcal{W}$ 值高斯过程：$\mathbb{E}\big[\|\int_0^t \sigma_s dW_s\|_{L^2}^2\big] < \infty$。最后，$\int_0^t (\sigma_t dW_s)(x)$ 的二次变差由有界变差过程 $\int_0^t a(x,s)ds.$ 给出

与经典的纳维-斯托克斯方程推导类似，LU 纳维-斯托克斯方程是利用随机版本的雷诺输运定理（SRTT）[38]推导出来的。设 q 是定义在随流运动的体积 $\mathcal{V}(t)$ 内的随机标量量。对于不可压缩未解析流——也就是说，当 $\nabla\cdot\sigma_t = 0$ 时——SRTT 表示为

$$d\Big(\int_{\mathcal{V}(t)} q(x,t)dx\Big) = \int_{\mathcal{V}(t)} \big(\mathbb{D}_t q + q\nabla\cdot(u-u_s)dt\big)dx, \tag{2.3}$$

$$\mathbb{D}_t q = d_t q + (u-u_s)\cdot\nabla q\, dt + \sigma dW_t\cdot\nabla q - \frac{1}{2}\nabla\cdot(a\nabla q)dt, \tag{2.4}$$

其中出现了一个额外的漂移项 $u_s = \frac{1}{2}\nabla\cdot a$，在 [5], 中称为 It¯o–Stokes 漂移。这里，$d_t q(x,t) = q(x,t+dt) - q(x,t)$ 是固定空间点 x 处的前向时间增量，而 $\mathbb{D}_t q$ 是 [38, 41], 中引入的随机输运算子，起到物质导数的作用。此外，It¯o–Stokes 漂移与方差张量 a 的散度直接相关，该张量体现了噪声非均匀性对大尺度动力学的影响。这类平流项通常作为修正项加入大尺度模拟中，以表示表面波和朗缪尔湍流的影响 [15, 37]。如 [5], 所示，LU框架具有类似特征，将小尺度非均匀性对大尺度流的影响加以推广。

此外，随机输运算子包含具有物理可解释性的项，有助于构建流体流动的大尺度表示。(2.4) 右端的最后一项是非均匀扩散，表示由未解析的小尺度变率引起的混合作用。这种随机扩散完全由噪声的方差张量决定，可以视为经典布辛涅斯克涡黏性假设的矩阵值推广。右端的第三项对应于未解析的（随机）速度涨落对大尺度量 q 的输运。值得注意的是，该回散射项注入的能量恰好与随机扩散项造成的耗散相平衡，如 [41] 所示。这种能量平衡可以解释为粗粒化方程层面涨落—耗散关系的直接体现。

3 LU 形式体系中的缩放纳维–斯托克斯方程与原始方程

为了研究 LU框架下纳维-斯托克斯方程向原始方程的收敛性，我们首先推导前者的一个缩放版本；当纵横比趋于零时，该版本在形式上收敛于后者。考虑定义在薄域 $\mathcal{S}_\epsilon = \mathcal{S}_H \times (-\epsilon,\ \epsilon) \subset \mathbb{R}3$ 上的 LU 纳维–斯托克斯方程，其中 $\mathcal{S}_H \subset \mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\mathcal{S}_H$ 的有界域。参数 $\epsilon > 0$ 表示纵横比，其定义为 $\epsilon = \frac{H}{L}$，其中 H 和 L 分别表示特征垂直长度尺度和水平长度尺度。 _

全文中，我们采用简写记号 $\nabla_H = (\partial_x \partial_y)^{\mathrm{T}}$ 和 $\nabla_3 = (\partial_x \partial_y \partial_z)^{\mathrm{T}}$，分别表示水平空间梯度和完整空间梯度。因此，对于标量场或向量值场 f，我们将水平拉普拉斯算子和三维拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_H f := \nabla_H \cdot (\nabla_H f) = (\partial_{xx} + \partial_{yy}) f, \quad \Delta_3 f := \nabla_3 \cdot (\nabla_3 f) = (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) f. \quad (3.1)$$

现在，我们给出三维 LU 纳维–斯托克斯方程，该方程通过将随机输运定理应用于质量方程和动量方程推导而得。速度场分解为 $u := (v\, w)^{\mathrm{T}}$，其中 v 表示速度的水平分量，w 表示速度的垂直分量。此外，θ 表示被动示踪物，通常代表温度或盐度。

在 LU 形式体系中，我们将 $\Upsilon^{1/2}\sigma dW_t$ 称为 LU 纳维–斯托克斯方程的噪声项，并区分其水平分量和垂直分量，使得 $\Upsilon^{1/2}\sigma dW_t = \Upsilon^{1/2}(\sigma^H dW_t\ \sigma^z dW_t)$。前置因子 $\Upsilon^{1/2}$ 包含了噪声的缩放。相应的方差张量为 Υa，这意味着 Υ具有黏度的物理单位，例如 $m^2 s^{-1}$。此外，我们将方差张量分解如下，

$$a := \begin{pmatrix} a_H & a_{Hz} \\ a_{zH} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

It¯o–Stokes 漂移由 $u_s := \frac{1}{2}\nabla \cdot a$ 给出，我们引入以下记号

$$(v_s\ w_s)^{\mathrm{T}} := u_s, \quad (v^*\ w^*)^{\mathrm{T}} := u^* := u - u_s = (v - v_s\ \ w - w_s)^{\mathrm{T}}.$$

现在我们给出 LU 纳维–斯托克斯方程。在这一表述中，假设压力是一个半鞅过程，记作 $dp_t^{SM} := pdt + dp_t^\sigma$，其中 pdt 是有界变差部分，dp_t^σ 是鞅分量。此外，我们引入一个缩放参数 α_σ，以强调噪声的垂直分量与水平分量之间的差异。这使我们能够直接与[19]中提出的设定进行比较。在那项工作中，保留了垂直动量方程中的随机贡献，以推导出静力平衡的一种放宽形式，即弱形式。正如我们将看到的，在 α_σ^2 较大而 $\alpha_\sigma \epsilon$ 较小的情形下，弱静水假设比强静水假设能提供更好的近似。

线性状态方程的纳维–斯托克斯方程（NS）

For $(x,\ t) \in \mathcal{S}_\epsilon \times \mathbb{R}+$，具有线性状态方程的（LU）纳维–斯托克斯方程（NS） rea d,

$$d_t v + \Big((u^* dt + \Upsilon^{1/2}\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)v - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v)dt$$
$$- \Delta_{\mu,\nu}(v dt + \Upsilon^{1/2}\sigma^H dW_t) + \frac{1}{\rho_0}\nabla_H(p\,dt + dp_t^\sigma) = 0, \tag{3.2}$$

$$d_t w + \Big((u-\alpha_\sigma^2 u_s)dt + \alpha_\sigma\Upsilon^{1/2}\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)w - \frac{\alpha_\sigma^2\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 w)dt$$
$$- \Delta_{\mu,\nu}(w dt + \alpha_\sigma\Upsilon^{1/2}\sigma^z dW_t) + \frac{1}{\rho_0}\partial_z(p\,dt + dp_t^\sigma) + \frac{\rho}{\rho_0}g = 0, \tag{3.3}$$

$$d_t\theta + \Big((u^* dt + \Upsilon^{1/2}\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta)dt - \Delta_{\mu,\nu}\theta dt = 0, \tag{3.4}$$

$$\nabla_H\cdot v + \partial_z w = 0, \qquad \text{and} \qquad \rho = \rho_0(1+\theta). \tag{3.5}$$

这里，各向异性黏性算子定义为 $\Delta_{\mu,\ \nu} := \mu\Delta_H + \nu\partial_{zz}$，其中 μ 和 ν分别表示水平黏度和垂直黏度。按照薄域文献中的惯例 [4, 34], ，我们假设水平黏度和垂直黏度采用不同的缩放，即$\mu = O(1)$ 和 $\nu = O(\epsilon^2)$。为简便起见，我们遵循 [34] ，并取 $\mu = 1$ 和 $\nu = \epsilon^2$。

还假设噪声项 σdW_t 是无散的：

$$\nabla_H\cdot\sigma^H dW_t + \partial_z\sigma^z dW_t = 0. \tag{3.6}$$

注意，方程 (3.2) 和 (3.4) 可视为随机输运定理（SRTT）的特例：将带有噪声项 σdW_t的随机输运定理应用于水平动量和示踪物即可得到这两个方程。类似但有所不同的是，方程 (3.3) 是将随机输运定理应用于垂直动量，并采用缩放后的噪声项 $\alpha_\sigma\sigma dW_t$得到的。这一区别对于捕捉前文讨论的弱静力学状态至关重要。

在确定性情形中， [34]提出的方法是考虑取值于 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H \times [-1,1]$ 的缩放变量。对于 (NS) 中涉及的有界变差项，我们基本采用相同的缩放方式。然而，鞅项的存在要求预先给定一种噪声结构，以便在极限 $\epsilon \to 0$ 下恢复 LU原始方程的动力学。

3.1 关于噪声结构的讨论

3.1.1 二维情形

在给出 LU 纳维–斯托克斯方程的重缩放形式之前，我们先讨论噪声的结构 σdW_t。由于 [19] 已证明，对于二维噪声，LU原始方程存在整体解，因此我们在证明中考虑此类噪声。我们还假设它们是无散的。设 W^{2D} 是定义在 $\mathcal{S}_H$ 上的二维柱状维纳过程，$\sigma_0^{2D} dW_t^{2D}$ 为原始方程中的噪声。那么，非缩放的纳维–斯托克斯噪声选为 $\sigma^{2D} dW_t^{2D} = \sigma_0^{2D} dW_t^{2D}$。

等价地，也可以通过三维维纳过程来定义这类噪声。现在考虑 W 一个定义在 $\mathcal{S}_\epsilon$ 上的柱状维纳过程，以及作用于 $L^2(\mathcal{S}_\epsilon, \mathbb{R}^3)$ 或 $L^2(\mathcal{S}, \mathbb{R}^3)$ 的希尔伯特–施密特算子 σ。我们还用 $\hat{}\sigma$ 表示它们对应的核。此外，根据缩放性质，我们将 $\tilde{W}(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} W(x,y,\epsilon z)$ 记为一个定义在 $\mathcal{S}$ 上的柱状维纳过程。因此，假设原始方程噪声 $\sigma_0 dW_t$ 是二维的，等价于

$$\hat{\sigma}_0^H(x,y,z,x',y',z') = \hat{\sigma}_0^H(x,y,0,x',y',0), \tag{3.7}$$
$$\hat{\sigma}_0^z(x,y,z,x',y',z') = 0. \tag{3.8}$$

然后，我们通过其核来定义纳维–斯托克斯噪声 $\sigma_{NS}dW_t = (\sigma_{NS}^H dW_t, \sigma_{NS}^z dW_t)^{\mathrm{T}}$ ：对所有 $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathcal{S}_\epsilon$,

$$\hat{\sigma}_{NS}^H(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\hat{\sigma}_0^H(x, y, 0, x', y', 0), \tag{3.9}$$

$$\hat{\sigma}_{NS}^z(x, y, z, x', y', z') = 0. \tag{3.10}$$

缩放纳维–斯托克斯方程中的速度 $u_\epsilon = (v_\epsilon,\ w_\epsilon)^{\mathrm{T}}$ 和噪声 $\sigma_\epsilon dW_t = (\sigma_\epsilon^H dW_t,\ \sigma_\epsilon^z dW_t)^{\mathrm{T}}$ 是通过缩放纳维–斯托克斯量定义的（确定性情形下的类似推导见 [34] ），

$$v_\epsilon(x, y, z, t) = v(x, y, \epsilon z, t), \qquad \sigma_\epsilon^H dW_t(x, y, z, t) = \sigma^H dW_t(x, y, \epsilon z, t),$$
$$w_\epsilon(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon}w(x, y, \epsilon z, t), \qquad \sigma_\epsilon^z dW_t(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon}\sigma^z dW_t^z(x, y, \epsilon z, t).$$

此外，记 $a := \begin{pmatrix} a_H & a_{Hz} \\ a_{zH} & a_{zz} \end{pmatrix}$ 表示未重缩放的方差张量，我们将重缩放的方差张量定义为 $a^\epsilon := \begin{pmatrix} a_H^\epsilon & a_{Hz}^\epsilon \\ a_{zH}^\epsilon & a_{zz}^\epsilon \end{pmatrix}$，其中

$$a_H^\epsilon(x, y, z, t) = a_H(x, y, \epsilon z, t), \quad a_{zH}^\epsilon(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon}a_{zH}(x, y, \epsilon z, t),$$
$$a_{Hz}^\epsilon(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon}a_{Hz}(x, y, \epsilon z, t), \quad a_{zz}^\epsilon(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon^2}a_{zz}(x, y, \epsilon z, t).$$

因此，也可以通过设定如下方式定义重缩放的 It¯o–斯托克斯漂移 $u_s^\epsilon = (v_s^\epsilon\ w_s^\epsilon)^{\mathrm{T}}$:

$$v_s^\epsilon(x, y, z, t) = v_s(x, y, \epsilon z, t), \quad w_s^\epsilon(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon}w_s(x, y, \epsilon z, t),$$

其中， $u_s = (v_s w_s)^{\mathrm{T}}$ 表示未重缩放的 It¯o–斯托克斯漂移。然后，我们定义 $u_\epsilon^* = (v_\epsilon^* w_\epsilon^*)^{\mathrm{T}}$，其中 $v_\epsilon^* = v_\epsilon - v_s^\epsilon$ 和 $w_\epsilon^* = w_\epsilon - w_s^\epsilon$。

正述定义的噪声可以被写为 $\sigma_\epsilon dW_t = \tilde{\sigma}_0 dW_t$。下面将在“真正的”三维噪声这一更一般的背景下进行推导。

3.1.2 三维情形

虽然我们的主要结果仅涵盖二维噪声，但下面仍介绍三维噪声的设定，因为这有助于理解重标度论证。考虑˜一般的原始方程噪声 $\sigma_0 dW_t$，我们定义（未缩放的）纳维–斯托克斯方程噪声$\sigma dW_t = (\sigma^H dW_t,\ \sigma^z dW_t)^{\mathrm{T}}$，对于所有 $(x,\ y,\ z)$，$(x',\ y',\ z') \in \mathcal{S}_\epsilon$，定义如下：

$$\hat{\sigma}^H(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\hat{\sigma}_0^H(x, y, \epsilon^{-1}z, x', y', \epsilon^{-1}z'), \tag{3.11}$$

$$\hat{\sigma}^z(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\hat{\sigma}_0^z(x, y, \epsilon^{-1}z, x', y', \epsilon^{-1}z'). \tag{3.12}$$

˜注意，在这种情况下，只要 σdW_t 是无散的， σdW_t 也是无散的。此外，这一选择˜会得到一个等于 $\sigma_0 dW_t$的缩放纳维–斯托克斯噪声。为了看出这一点，我们首先进行

对 $\sigma_\epsilon^H dW_t$的变量变换,

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon^H(x,y,z)dW_t &= \int_{\mathcal{S}_\epsilon} \hat{\sigma}^H(x,y,\epsilon z,x',y',z')dW_t(x',y',z')dx'dy'dz' \\ &= \epsilon\int_{\mathcal{S}} \hat{\sigma}^H(x,y,\epsilon z,x',y',\epsilon z'')dW_t(x',y',\epsilon z'')dx'dy'dz'' \\ &= \epsilon\sqrt{\epsilon}\int_{\mathcal{S}} \hat{\sigma}^H(x,y,\epsilon z,x',y',\epsilon z'')d\tilde{W}_t(x',y',z'')dx'dy'dz'' = \sigma_0^H(x,y,\epsilon z)d\tilde{W}_t.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon^z(x,y,z)dW_t &= \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathcal{S}_\epsilon} \hat{\sigma}^z(x,y,\epsilon z,x',y',z')dW_t(x',y',z')dx'dy'dz' \\ &= \int_{\mathcal{S}} \hat{\sigma}^z(x,y,\epsilon z,x',y',\epsilon z'')dW_t(x',y',\epsilon z'')dx'dy'dz'' \\ &= \sqrt{\epsilon}\int_{\mathcal{S}} \hat{\sigma}^z(x,y,\epsilon z,x',y',\epsilon z'')d\tilde{W}_t(x',y',z'')dx'dy'dz'' = \sigma_0^z(x,y,z)d\tilde{W}_t.\end{aligned}$$

利用分解 $\sigma_0 d\tilde{W}_t = \sum_k \phi_k^0 d\beta_k$，我们定义 $a^0 = \sum_k \phi_k^0(\phi_k^0)^{\mathrm{T}}$ 和 $u_s^0 = \frac{1}{2}\nabla\cdot a_0$。因此，有 $a^\epsilon = a^0$ 和 $u_s^\epsilon = u_s^0$。

最后，我们可以指出，假设 $\sigma_0^H dW_t$ 与 z相互独立时，就能恢复 [2]中提出的那类噪声。恢复这类噪声的另一种可能方式是考虑一般的参考核 $\hat{\sigma}_{ref}$以及一个实数 $\gamma \in [0,1)$。随后，我们定义如下未经缩放的纳维–斯托克斯噪声,

$$\hat{\sigma}^H(x,y,z,x',y',z') = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\hat{\sigma}^H_{ref}(x,y,\epsilon^{-\gamma}z,x',y',\epsilon^{-\gamma}z'), \tag{3.13}$$

$$\hat{\sigma}^z(x,y,z,x',y',z') = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\hat{\sigma}^z_{ref}(x,y,\epsilon^{-1}z,x',y',\epsilon^{-1}z'). \tag{3.14}$$

因此，缩放噪声的核为,

$$\hat{\sigma}^H_\epsilon(x,y,z,x',y',z') = \hat{\sigma}^H_{ref}(x,y,\epsilon^{1-\gamma}z,x',y',\epsilon^{1-\gamma}z') \tag{3.15}$$

$$\hat{\sigma}^z(x,y,z,x',y',z') = \hat{\sigma}^z_{ref}(x,y,z,x',y',z'). \tag{3.16}$$

这样，上述定义的缩放噪声依分布收敛到所需形式的噪声。然而，若对 $\sigma_0 dW_t$施加无散条件，同时采用刚性盖顶边界条件，则 $\sigma_0 dW_t$ 必须是二维的。因此，上述噪声仅在非无散噪声的情形下更为一般。这种设定通常与弱可压缩动力学相关，而弱可压缩动力学传统上源自 Boussinesq假设。

3.2 缩放纳维–斯托克斯方程与原始方程

下面我们在缩放域 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H \times (-1,1)$ 上推导缩放纳维–斯托克斯方程。为此，我们定义以下缩放变量,

$$\begin{aligned} v_\epsilon(x,y,z,t) &= v(x,y,\epsilon z,t), & \sigma_\epsilon^H dW_t(x,y,z,t) &= \sigma^H dW_t(x,y,\epsilon z,t), \\ w_\epsilon(x,y,z,t) &= \frac{1}{\epsilon}w(x,y,\epsilon z,t), & \sigma_\epsilon^z dW_t(x,y,z,t) &= \frac{1}{\epsilon}\sigma^z dW_t^z(x,y,\epsilon z,t), \\ p_\epsilon(x,y,z,t) &= p(x,y,\epsilon z,t), & dp_t^{\sigma,\epsilon}(x,y,z,t) &= dp_t^\sigma(x,y,\epsilon z,t), \\ \rho_\epsilon - \rho_0 &= \epsilon(\rho-\rho_0)(x,y,\epsilon z,t), & \theta_\epsilon(x,y,z,t) &= \epsilon\theta(x,y,\epsilon z,t). \end{aligned}$$

Re标记 3.1 到目前为止，ϵ 一直被解释为纵横比 $\epsilon := \frac{H}{L}$，其中 H 和 L

分别表示典型的垂直和水平长度。不过，也可以考虑更一般的缩放方式。例如，可以引入缩放参数 $\check{\epsilon}$，其定义为

$$\check{\epsilon}^2 = \frac{Fr^2 Ro}{Bu}\epsilon^2 = Ro^3 Bu^{-2}\epsilon^2$$

其中 $Ro = \frac{U}{f_0 L}$, $Bu = \frac{R_d^2}{L^2}$和 $Fr^2 = \frac{U^2}{gH} = Ro^2 Bu^{-1}$, $R_d = \frac{(gH)^{1/2}}{f_0}$分别为罗斯贝变形半径、 f_0科里奥利参数和 U典型速度 [40]。

按照 [34], 的推导，我们得到位置不确定性下的缩放纳维–斯托克斯方程（SNS）。为保持一致，我们在 $\mathcal{S}$上采用柱状 Wiener˜过程 W 来表述方程。

缩放纳维–斯托克斯方程（SNS$^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$） 对于（$x$, t）$\in \mathcal{S}\times\mathbb{R}+$,

$$\begin{aligned}
&d_t v_\epsilon + \Big((u^*_\epsilon dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)v_\epsilon - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3 v_\epsilon)dt \\
&\qquad - \Delta_3(v_\epsilon dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0^H d\tilde{W}_t) + \frac{1}{\rho_0}\nabla_H(p_\epsilon\, dt + dp_t^{\sigma,\epsilon}) = 0, \qquad (3.17)\\
&\epsilon^2\Bigg(d_t w_\epsilon + \Big((u^*_\epsilon dt + \alpha_\sigma\Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)w_\epsilon - \frac{\alpha_\sigma^2\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3 w_\epsilon)dt \\
&\qquad - \Delta_3(w_\epsilon dt + \alpha_\sigma\Upsilon^{1/2}\sigma_0^z d\tilde{W}_t)\Bigg) + \frac{1}{\rho_0}\partial_z(p_\epsilon\, dt + dp_t^{\sigma,\epsilon}) + \frac{\rho_\epsilon}{\rho_0}g = 0, \qquad (3.18)\\
&d_t\theta_\epsilon + \Big((u^*_\epsilon dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta_\epsilon - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3\theta_\epsilon)dt - \Delta_3\theta_\epsilon dt = 0, \qquad (3.19)\\
&\nabla_H\cdot v_\epsilon + \partial_z w_\epsilon = 0, \qquad \text{and} \qquad \rho_\epsilon = \rho_0(1+\theta_\epsilon), \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

同样，假设噪声无散,

$$\nabla_3\cdot\sigma_0 d\tilde{W}_t = \nabla_H\cdot\sigma_0^H d\tilde{W}_t + \partial_z\sigma_0^z d\tilde{W}_t = 0. \qquad (3.21)$$

˜如前所述， $\sigma_0 dW_t$ 被选为下文原始方程˜中涉及的噪声。值得注意的是，Wiener 过程 W和 W并非定义在相同的空间上：˙W定义在“缩放”区域 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H\times(-1,\ 1)$上，而 W 定义在“物理”区域 $\mathcal{S}_H\times(-\epsilon,\ \epsilon)$ 上。尽管如此， $\sigma_\epsilon dW_t$ 上的无散假设意味着˜其极限 σdW_t 也是无散的。

为消去压力项，下面引入缩放梯度算子 ∇_ϵ，其定义为：对任意 $f\in H^1(\mathcal{S},\mathbb{R})$,

$$\nabla_\epsilon f = \begin{pmatrix}\nabla_H f\\ \frac{1}{\epsilon^2}\partial_z f\end{pmatrix}. \qquad (3.22)$$

因此，系统 (SNS$^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$) 可以更简洁地写为

$$\begin{aligned}
&d_t u_\epsilon + (u^*_\epsilon\cdot\nabla_3)u_\epsilon dt + \Upsilon^{1/2}(\sigma_0 d\tilde{W}_t\cdot\nabla_3)I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3 I_{\alpha_\sigma^2}u_\epsilon)dt \\
&\qquad -\Delta_3(u_\epsilon dt + \Upsilon^{1/2}I_{\alpha_\sigma}\sigma_0 d\tilde{W}_t) + \frac{1}{\rho_0}\nabla_\epsilon(p_\epsilon\, dt + dp_t^{\sigma,\epsilon}) + \frac{\rho_\epsilon}{\epsilon^2\rho_0}g\mathbf{e}_z = 0, \qquad (3.23)\\
&d_t\theta_\epsilon + \Big((u^*_\epsilon dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta_\epsilon - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3\theta_\epsilon)dt - \Delta_3\theta_\epsilon dt = 0, \qquad (3.24)\\
&\nabla_H\cdot v_\epsilon + \partial_z w_\epsilon = 0, \qquad \text{and} \qquad \rho_\epsilon = \rho_0(1+\theta_\epsilon), \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

其中我们定义 $I_\alpha = Diag(1,1,\alpha)$, 对所有 $\alpha > 0$。我们再次假设不可压缩条件 (3.21) 成立。

注意，方程 (3.18) 的第一项包含阶为 ϵ^2、 $\alpha_\sigma\epsilon^2$ 和$\alpha_\sigma^2\epsilon^2$ 的项。类比于确定性情形（其中原始方程通过忽略随 ϵ^2 缩放的项而形式地恢复），我们推断出具有强静力假设的位置不确定性下的原始方程（PE）的表达式。它们是通过忽略上述所有项而得到的。

具有强静力假设的原始方程（PE）对于（x， t） $\in \mathcal{S}\times\mathbb{R}_+$,

$$d_t v + \Big((u^* dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)v - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v)dt - \Delta_3(v dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t^H) + \frac{1}{\rho_0}\nabla_H(p\,dt + dp_t^\sigma) = 0, \quad (3.26)$$

$$d_t\theta + \Big((u^* dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_H\Big)\theta - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta)dt - \Delta_3\theta dt = 0, \quad (3.27)$$

$$\partial_z dp_t^\sigma = 0, \quad \text{and} \quad \partial_z p = -\rho g, \quad (3.28)$$

$$\nabla_H\cdot v + \partial_z w = 0, \quad \text{and} \quad \rho = \rho_0(1+\theta). \quad (3.29)$$

然而，当 $\alpha_\sigma \gg 1$时，按 $\alpha_\sigma\epsilon^2$ 和 $\alpha_\sigma^2\epsilon^2$ 缩放的项会比按 ϵ^2 缩放的项大得多。类似于 [19], 中的推理，我们仅保留前者，从而得到带有弱静水假设的非正则化原始方程，其定义如下。因此，该模型介于 LU原始方程（PE）与位置不确定性缩放纳维–斯托克斯方程（$\text{SNS}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$）之间。

带有弱静水假设的非正则化原始方程对于（x， t） $\in \mathcal{S}\times\mathbb{R}_+$,

$$d_t v + \Big((u^* dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)v - \Delta_3(v dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0^H d\tilde{W}_t) + \frac{1}{\rho_0}\nabla_H(p\,dt + dp_t^\sigma) - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3 v)dt = 0, \quad (3.30)$$

$$d_t\theta + \Big((u^* dt + \Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta - \frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3\theta)dt - \Delta\theta dt = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{\rho_0}\partial_z p = -\frac{\rho}{\rho_0}g + \alpha_\sigma^2\epsilon^2\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3 w), \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{\rho_0}\partial_z dp_t^\sigma = -\alpha_\sigma\epsilon^2[(\Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t\cdot\nabla)w] + \alpha_\sigma\epsilon^2\Delta(\Upsilon^{1/2}\sigma_0^z d\tilde{W}_t), \quad (3.33)$$

$$\nabla_H\cdot v + \partial_z w = 0, \quad \text{and} \quad \rho = \rho_0(1+\theta). \quad (3.34)$$

关于鞅压力项，我们注意到，水平动量方程包含额外的贡献项

$$\alpha_\sigma\epsilon^2\nabla_H\int_z^1[(\Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t\cdot\nabla)w]dz'. \quad (3.35)$$

该表达式涉及 v 中的三阶导数，因为根据无散条件， w 由 $w = \int_z^1(\nabla_H\cdot v)dz'$ 确定。为使这一项正则化，我们引入卷积核 K，并定义上述系统的平滑近似 ($\text{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$)。根据构造，当 $\epsilon = 0$ 或 $\alpha_\sigma = 0$时，系统 ($\text{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$) 与 (PE) 一致。

（正则化）弱静力假设下的原始方程 (PE$^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$)对于 $(x,t)\in\mathcal{S}\times\mathbb{R}+$,

$$d_t v+\Big((u^*dt+\Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)v-\Delta_3(vdt+\Upsilon^{1/2}\sigma_0^H d\tilde{W}_t)$$
$$+\nabla_H(p\,dt+dp_t^\sigma)-\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3 v)dt=0, \tag{3.36}$$

$$\partial_z p=-\frac{\rho}{\rho_0}g+\alpha_\sigma^2\epsilon^2\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^K\nabla_3 w), \tag{3.37}$$

$$\partial_z dp_t^\sigma=-\alpha_\sigma\epsilon^2 K*[(\Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t\cdot\nabla)w]+\alpha_\sigma\epsilon^2\Delta(\Upsilon^{1/2}\sigma_0^z d\tilde{W}_t), \tag{3.38}$$

$$\nabla_H\cdot v+\partial_z w=0,\ \text{and}\ \ \nabla_H\cdot\sigma_0^H d\tilde{W}_t+\partial_z\sigma_0^z d\tilde{W}_t=0,\ \text{and}\ \ \rho=\rho_0(1+\theta), \tag{3.39}$$

$$d_t\theta+\Big((u^*dt+\Upsilon^{1/2}\sigma_0 d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta-\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^0\nabla_3\theta)dt-\Delta\theta dt=0, \tag{3.40}$$

其中，我们将 $a^K[\cdot]:=\sum_{k=1}^\infty\phi_k\mathcal{C}_K^*\mathcal{C}_K[\phi_k^{\mathrm{T}}\cdot]$,记作，因此项 $\nabla_3\cdot(a^K\nabla_3 w)$ 可视为对 $\nabla_3\cdot(a\nabla_3 w)$ 的正则化。若 K 足够光滑——例如 $K\in H^3(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)$——则在适当的边界条件下，(PE$^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$) 的适定性得到保证——见 [19]。此外，通过令 $K=0$ 并忽略方程 (3.38) 中的加性噪声项，我们恢复原始方程组 (PE)。这种滤波正则化可以˜理解为截去垂直动量方程中噪声项 $(\sigma dW_t\cdot\nabla)w$ 的最高频率。这样做通常会增大该项的空间尺度，同时缓和由更高阶三阶导数产生的不规则动力学。然而，类确定性的非线性项在这种正则化下保持不变。

带正则化噪声项的缩放 LU 纳维–斯托克斯方程 (rSNS$^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$)因此，我们自然会考虑一个采用与原始方程相同滤波噪声的纳维–斯托克斯方程。为保持一致，我们引入 LU 纳维-斯托克斯系统的正则化版本,

$$d_t v_\epsilon+\Big((u_\epsilon^*dt+\Upsilon^{1/2}\sigma d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)v_\epsilon-\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v_\epsilon)dt$$
$$-\Delta_3(v_\epsilon dt+\Upsilon^{1/2}\sigma^H d\tilde{W}_t)+\frac{1}{\rho_0}\nabla_H(p_\epsilon\,dt+dp_t^{\sigma,\epsilon})=0, \tag{3.41}$$

$$\epsilon^2\Bigg(d_t w_\epsilon+(u_\epsilon^*dt\cdot\nabla_3)w_\epsilon+\alpha_\sigma\Upsilon^{1/2}K*[(\sigma d\tilde{W}_t\cdot\nabla_3)w_\epsilon]-\frac{\alpha_\sigma^2\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a^K\nabla_3 w_\epsilon)dt$$
$$-\Delta_3(w_\epsilon dt+\alpha_\sigma\Upsilon^{1/2}\sigma^z d\tilde{W}_t)\Bigg)+\frac{1}{\rho_0}\partial_z(p_\epsilon\,dt+dp_t^{\sigma,\epsilon})+\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0}g=0, \tag{3.42}$$

$$d_t\theta_\epsilon+\Big((u_\epsilon^*dt+\Upsilon^{1/2}\sigma d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta_\epsilon-\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta_\epsilon)dt-\Delta_3\theta_\epsilon dt=0, \tag{3.43}$$

$$\nabla_H\cdot v_\epsilon+\partial_z w_\epsilon=0,\qquad\text{and}\qquad\rho_\epsilon=\rho_0(1+\theta_\epsilon). \tag{3.44}$$

等价地，这可以改写为:

$$d_t u_\epsilon+(u_\epsilon^*\cdot\nabla_3)u_\epsilon dt+\Upsilon^{1/2}\mathcal{I}_K(\sigma d\tilde{W}_t\cdot\nabla_3)I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon-\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(\mathfrak{a}^K\nabla_3 I_{\alpha_\sigma^2}u_\epsilon)dt$$
$$-\Delta_3(u_\epsilon dt+\Upsilon^{1/2}I_{\alpha_\sigma}\sigma d\tilde{W}_t)+\frac{1}{\rho_0}\nabla_\epsilon(p_\epsilon\,dt+dp_t^{\sigma,\epsilon})+\frac{\rho_\epsilon}{\epsilon^2\rho_0}g\mathbf{e}_z=0, \tag{3.45}$$

$$d_t\theta_\epsilon+\Big((u_\epsilon^*dt+\Upsilon^{1/2}\sigma d\tilde{W}_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta_\epsilon-\frac{\Upsilon}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta_\epsilon)dt-\Delta_3\theta_\epsilon dt=0, \tag{3.46}$$

$$\nabla_H\cdot v_\epsilon+\partial_z w_\epsilon=0,\qquad\text{and}\qquad\rho_\epsilon=\rho_0(1+\theta_\epsilon), \tag{3.47}$$

其中使用以下记号：我们将以下算子记为 $\mathcal{I}_K = Diag(1,\ 1,\ K*)$，并且同样地，将 $I_\alpha = Diag(1,\ 1,\ \alpha)$ 用于所有 $\alpha > 0$。此外，算子 $\mathfrak{a}^K$ 定义为

$$\forall (v,w) \in L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^3), \nabla_3 \cdot \left(\mathfrak{a}^K \nabla_3 \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \nabla_3 \cdot (a \nabla_3 v) \\ \nabla_3 \cdot (a^K \nabla_3 w) \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

再次假设不可压缩条件 (3.21) 成立。在第4节中，我们比较 $(\mathrm{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma})$ 与 $(\mathrm{rSNS}^\epsilon_{\alpha_\sigma})$，以证明当 $\alpha_\sigma \epsilon \to 0 \text{as } \epsilon \to 0$ 时成立的收敛结果。接着，在第5节中，我们比较 $(\mathrm{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma})$ 与非正则化的纳维–斯托克斯系统 $(\mathrm{SNS}^\epsilon_{\alpha_\sigma})$，并得到一个弱得多的结果。

从现在起，我们分别将 $(\mathrm{rSNS}^\epsilon_{\alpha_\sigma})$ 和 $(\mathrm{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma})$ 的解记为 $(u_\epsilon,\ \theta_\epsilon)$ 和 $(u,\ \theta)$，或等价地记为 $(v_\epsilon,\ w_\epsilon,\ \theta_\epsilon)$ 和 $(v,\ w,\ \theta)$。在本文余下部分，为便于阅读，我们省略波浪号记号，以及下标 0 和指数记号。具体而言，我们用 σdW_t、a 和 u_s 分别代替 $\sigma_0 d\tilde{W}_t$、a^0 和 u^0_s。

3.3 边界条件

在本小节中，我们介绍与刚盖边界条件配合使用的初始条件和边界条件。注意，“完全周期”边界条件将在第4.3.2小节中讨论。首先，我们将边界分解为 $\partial S = \Gamma_u \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$——分别为上边界、底边界和侧边界——并为该问题配备以下自由滑移刚盖型边界条件 [8, 17, 19],

$$\begin{aligned} \partial_z v = 0, \quad & w = 0, \quad & \partial_z \theta + \alpha_\theta \theta = 0, \quad & \text{on } \Gamma_u, \\ \partial_z v = 0, \quad & w = 0, \quad & \partial_z \theta = 0, \quad & \text{on } \Gamma_b, \\ \partial_{\mathbf{n}_H} v \times \mathbf{n}_H = 0, \quad & v \cdot \mathbf{n}_H = 0, \quad & \partial_{\mathbf{n}_H} \theta = 0, \quad & \text{on } \Gamma_l. \end{aligned} \tag{3.49}$$

下文中，我们考虑满足（3.49）的 It¯o-Stokes 漂移 u_s。问题（$\mathrm{SNS}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$）和（$\mathrm{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$），以及（PE），均配备这些边界条件。

4 问题的抽象表述

4.1 函数空间

在本小节中，我们定义下文将使用的函数空间。记住，缩放空间域记为 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$。令 $d \geq 1$。我们在区域 $\Omega_S \in \{\mathcal{S}, \mathcal{S}_\epsilon, \mathcal{S}_H\}$上定义以下函数空间。首先，记 $L^0(\Omega_S,\mathbb{R}^d)$（分别为 $C^\infty_c(\Omega_S,\mathbb{R}^d)$）为从 Ω_S 到 $\mathbb{R}^d$ 的可测函数（分别为紧支撑光滑函数）的集合。此外，对于任意实数 $1 \leq q < \infty$、$1 \leq p \leq \infty$ 和 $s \geq 0$，以及任意整数 $m \geq 0$，记

$$\begin{aligned} L^q(\Omega_S,\mathbb{R}^d) &= \left\{ u \in L^0(\Omega_S,\mathbb{R}^d) \middle| \int_{\Omega_S} \|u\|^q < +\infty \right\}, \\ L^\infty(\Omega_S,\mathbb{R}^d) &= \left\{ u \in L^0(\Omega_S,\mathbb{R}^d) \middle| \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_S} \|u\| < +\infty \right\}, \\ W^{m,p}(\Omega_S,\mathbb{R}^d) &= \left\{ u \in L^p(\Omega_S,\mathbb{R}^d) \middle| \forall \alpha \text{ such that } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega_S) \right\}. \end{aligned}$$

此外，对于任意非负整数 m，我们记 $W^{m,2}(\Omega_S,\mathbb{R}^d) = H^m(\Omega_S,\mathbb{R}^d)$，并对于任意正实数 s，通过插值定义空间 $H^s(\Omega_S,\mathbb{R}^d)$。此外，对于任意巴拿赫空间 $\mathcal{B}$，以及 I 一个 $\mathbb{R}_+$ 的区间，我们用 $C(I,\mathcal{B})$（分别用 $C_w(I,\mathcal{B})$ $L^0(I,\mathcal{B})$）表示从 I 到 $\mathcal{B}$ 的连续（分别为弱连续、

可测）函数集合，以及函数空间

$$L^p(I,\mathcal{B}) = \Big\{ f \in L^0(I,\mathcal{B}) \,\Big|\, \int_I \|f\|_{\mathcal{B}}^p < \infty \Big\},$$
$$W^{s,p}(I,\mathcal{B}) = \Big\{ f \in L^p(I,\mathcal{B}) \,\Big|\, \int_I \int_I \frac{\|f(t)-f(t')\|_{\mathcal{B}}^p}{|t-t'|^{1+sp}} dt dt' < \infty \Big\},$$

with

$$\|\cdot\|_{L^p(I,\mathcal{B})} = \Big(\int_I \|\cdot\|_{\mathcal{B}}^p dt \Big)^{1/p} \quad \text{and} \quad \|\cdot\|_{W^{s,p}(I,\mathcal{B})} = \Big(\int_I \|\cdot\|_{\mathcal{B}}^p dt + \int_I \int_I \frac{\|f(t)-f(t')\|_{\mathcal{B}}^p}{|t-t'|^{1+sp}} dt dt' \Big)^{1/p},$$

它们各自的相应范数——见 [23]。对于任意区间 $I \subset \mathbb{R}+$，我们还定义$W^{s}{}_{,loc}^{\ p}(I,\mathcal{B}) := \Big\{ f\colon I \to \mathcal{B} \,\Big|\, \forall T > 0, f \in W^{s,p}([0,T],\mathcal{B}) \Big\}$。此外，对于任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$ 与 $\mathcal{H}_2$，我们定义 $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$为从 $\mathcal{H}_1$到 $\mathcal{H}_2$的希尔伯特–施密特算子空间，以及 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}$ 为其相应范数。

现在，设 ϕ_k 为第3节中所定义的算子 σ_0 的特征函数。然后用 $\phi_k = (\phi_k^H \quad \phi_k^z)^{\mathrm{T}}$表示，其中 ϕ_k^H为二维向量， ϕ_k^z 为标量。然后，我们假设噪声在边界上满足不可穿透条件，即

$$\phi_k \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\mathcal{S}. \tag{4.1}$$

此外，假设特征函数 ϕ_k 具有足够的正则性，具体如下：

$$\sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_k\|_{H^4(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)}^2 < \infty, \text{ which implies } \sup_{t\in[0,T]} \sup_k \|\phi_k\|_{L^\infty(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)} < \infty, \tag{4.2}$$

and

$$u_s \in L^\infty\Big([0,T], H^4(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)\Big),\ a \in H^1\Big([0,T], H^3(\mathcal{S},\mathbb{R}^{3\times 3})\Big),\ d_t u_s \in L^\infty\Big([0,T], H^3(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)\Big).$$

此外，请注意，上述条件意味着

$$a\nabla u_s \in L^\infty\Big([0,T], H^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)\Big).$$

这些正则性假设在实践中并不构成限制，因为大多数海洋模型都采用空间光滑的噪声 [49], ，这与实际观测到的噪声一致。

此外，我们引入与边界条件 (3.49) 相关的空间。定义如下内积：

$$(v,v^\sharp)_{H_1} = (v,v^\sharp)_{L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^2)}, \quad (v,v^\sharp)_{V_1} = (\nabla v, \nabla v^\sharp)_{L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^{2\times 2})}$$
$$(\theta,\theta^\sharp)_{H_2} = (\theta,\theta^\sharp)_{L^2(\mathcal{S},\mathbb{R})}, \quad (\theta,\theta^\sharp)_{V_2} = (\nabla\theta, \nabla\theta^\sharp)_{L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^{2\times 2})} + \alpha_\theta(\theta,\theta^\sharp)_{L^2(\Gamma_u,\mathbb{R})},$$

并令

$$(F,F^\sharp)_H = (v,v^\sharp)_{H_1} + (\theta,\theta^\sharp)_{H_2}, \quad (F,F^\sharp)_V = (v,v^\sharp)_{V_1} + (\theta,\theta^\sharp)_{V_2}, \tag{4.3}$$

对所有 $F, F^\sharp \in L^2(\mathcal{S},\mathrm{R}^3)$，使得 $F = (v,\theta)^{\mathrm{T}}$ 且 $F^\sharp = (v^\sharp,\theta^\sharp)^{\mathrm{T}}$。此外，我们将 $\|.\|_H, \|.\|_{H_i}$ 和 $\|.\|_V$，$\|.\|_{V_i}$ 分别记为相应范数。略微滥用记号，我们可以分别用 $\|.\|_H, \|.\|_V$代替 $\|.\|_{H_i}, \|.\|_{V_i}$。接着，将 $\mathcal{V}_1$ 记为由 $C^\infty(\mathcal{S},\mathbb{R}^2)$ 中满足以下条件的函数构成的函数空间：对所有 $v \in \mathcal{V}_1$， $\nabla_H \cdot \int_{-1}^1 v dz = 0$ 在 $\mathcal{S}_H$ 上成立，且$v \cdot \mathbf{n} = 0$ 在 Γ_l上成立。此外，定义 $\mathcal{V}_2$ 为由 $C^\infty(\mathcal{S},\mathbb{R})$ 中在 $\mathcal{S}$上平均值为零的函数构成的函数空间。将 H_i 记为 $\mathcal{V}_i$ 关于范数 $\|.\|_{H_i}$的闭包，而将 V_i 的闭包记为

$\|.\|_{V_i}$。最后，定义 $H = H_1 \times H_2$ 和 $V = V_1 \times V_2$，它们也分别是 $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ 关于 $\|.\|_H$ 和 $\|.\|_V$的闭包。通常，我们会略微滥用记号，以 $(\cdot,\cdot)_H$代替 $(\cdot,\cdot)_{V'\times V}$。更一般地，若 K是 H的子空间，且 K'是其对偶空间，则我们以 $(\cdot,\cdot)_H$代替 $(\cdot,\cdot)_{K'\times K}$。下文中，$H_1$和 V_1被视为水平速度空间（$\mathbb{R}^2$值过程）。采用这一形式化记法，垂直速度 w 通过连续性方程写作水平速度 v 的泛函，即 $w(v) = \int_z^1 \nabla_H \cdot v \, dz'$。此外，我们将 H_2 和 V_2 视为示踪剂空间。此外，定义 $\mathcal{D}(A) = V \cap H^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^3)$，其中 A 定义为算子 $\mathrm{P}(-\Delta_3)$。这里，P 是下一小节中定义的投影算子。因此， $A : \mathcal{D}(A) \to H$ 是一个无界算子。

4.2 修正的 Leray 投影算子

为忽略缩放后的动量纳维–斯托克斯方程和原始方程（SNS）中的压力项，我们引入修正的 Leray 投影算子。首先定义正压投影算子和斜压投影算子

$$\mathcal{A}_2 : L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathcal{S}_H,\mathbb{R}^2), \quad \text{and} \quad \mathcal{A},\mathcal{R} : L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^2), \tag{4.4}$$

作用于速度分量，如下所示——见 [8]。对于 $v \in H$，令

$$\mathcal{A}_2[v](x,y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v(x,y,z')dz', \quad \mathcal{A}[v](x,y,z) = \mathcal{A}_2[v](x,y), \quad \mathcal{R}[v] = v - \mathcal{A}[v]. \tag{4.5}$$

注意， $\mathcal{A}$和 $\mathcal{R}$ 是关于内积 $(\cdot,\cdot)_H$的正交投影算子。为简化记号，我们将用 $\bar{v}$ 代替 $\mathcal{A}_2[v]$ 或 $\mathcal{A}[v]$，并用 $\tilde{v}$ 代替 $\mathcal{R}[v]$。现在可以定义投影算子 $\mathbf{P}$，它作用于 $\mathcal{S}$ 上的二维向量场，将正压分量的经典二维 Leray 投影与水平速度的（散度型）斜压分量结合起来，

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{2D}\mathcal{A} + \mathcal{R}, \tag{4.6}$$

其中，$\mathbf{P}^{2D}$ 表示与边界条件$\bar{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ 在 $\partial\mathcal{S}_H$上相对应的标准二维 Leray 投影算子。

此外，对于所有 u， $u^\sharp \in L^2(\mathcal{S},\ \mathbb{R}^3)$，我们引入如下内积，

$$(u,u^\sharp)_{L^2_\epsilon} = (v,v^\sharp)_{H_1} + \epsilon^2(w,w^\sharp)_{L^2(\mathcal{S},\mathbb{R})}, \tag{4.7}$$

并将 $\|\cdot\|_{L^2_\epsilon}$所对应的范数记为。类似地，对于 v， $v^\sharp \in V_1$，我们定义

$$(u,u^\sharp)_{V_\epsilon} = (v,v^\sharp)_{V_1} + \epsilon^2(w,w^\sharp)_{H^1(\mathcal{S},\mathbb{R})}, \tag{4.8}$$

并将 $\|\cdot\|_{V_\epsilon}$ 作为相应的范数。此外，我们定义空间

$$\mathcal{F} = \Big\{(v, \int_z^1 \nabla_H \cdot v dz')^{\mathrm{T}} \,\Big|\, v \in H_1\Big\}. \tag{4.9}$$

因此，我们可以引入 $\mathbf{P}_\epsilon$： $L^2(\mathcal{S},\ \mathbb{R}^3) \to \mathcal{F}$，即关于内积 $(\cdot,\ \cdot)_{L^2_\epsilon}$到 $\mathcal{F}$ 上的正交投影。特别地，所有形如 $\nabla_\epsilon f$ 的项都会被$\mathbf{P}_\epsilon$消去。

在此背景下，$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{P}_\epsilon$ 可分别视为（$\mathrm{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$）和（$\mathrm{SNS}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$）的“修正”勒让德投影算子，因为它们会消去压力梯度项（即分别消去水平压力梯度和完整的重标度压力梯度）。不过，主要区别在于，$\mathbf{P}$ 在（$\mathrm{PE}^\epsilon_{\alpha_\sigma}$）中保留斜压压力项不变——见 [8]。采用这种投影算子的依据是 [10]中提到的一条关键观察：在（确定性）

原始方程中，压力自然分解为正压分量和斜压分量。斜压模态由静力平衡明确决定，而正压模态则通过垂向平均压力影响正压动力学。因此，正压动力学类似于二维纳维–斯托克斯系统，而斜压分量则呈现出类似受迫伯格斯方程的结构，两种模态通过非线性相互作用耦合。在此背景下，投影算子$\mathbf{P}$ 对正压分量起水平勒让德投影算子的作用，确保垂向平均的大尺度流满足不可压缩性，同时在斜压动力学中则退化为恒等算子。

4.3 主要结果

4.3.1 刚性盖边界条件下的收敛估计

下文中，我们假设噪声在以下意义下是二维的：假设 $\sigma^H dW_t$ 是无散的，且与 z 坐标无关，并且

$$\forall (x,y,z)\in\mathcal{S},\quad \sigma dW_t(x,y,z)=(\sigma^H dW_t(x,y)\quad 0)^{\mathrm{T}}, \tag{4.10}$$

这与 [19], 的思路一致，并且与 [2] 中为整体适定性所给出的 z 无关性假设密切相关。此外，不失一般性，我们令噪声缩放因子为 $\Upsilon=1$。将投影算子 $\mathbf{P}_\epsilon$ 作用于 (rSNS$^\epsilon_{\alpha_\sigma}$) 的动量方程，得到以下问题，该问题配备边界条件 (3.49)，并记为 ($\mathcal{P}^{rSNS}_\epsilon$),

$$\begin{aligned} d_t u_\epsilon+\mathbf{P}_\epsilon(u^*_\epsilon dt\cdot\nabla_3)u_\epsilon+\mathbf{P}_\epsilon\mathcal{I}_K(\sigma dW_t\cdot\nabla_3)I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon-\mathbf{P}_\epsilon\frac{1}{2}\nabla_3\cdot(\mathfrak{a}^K\nabla_3 I_{\alpha_\sigma^2}u_\epsilon)dt\\ -\mathbf{P}_\epsilon\Delta_3(u_\epsilon dt+I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t)+\mathbf{P}_\epsilon\frac{\rho_\epsilon}{\epsilon^2\rho_0}g\mathbf{e}_z dt=0, \end{aligned}\tag{4.11}$$

$$d_t\theta_\epsilon+\Big((u^*_\epsilon dt+\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta_\epsilon-\frac{1}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta_\epsilon)dt-\Delta_3\theta_\epsilon dt=0, \tag{4.12}$$

其中 $\rho_\epsilon=\rho_0(1+\theta_\epsilon)$。请注意，我们省略了波浪号记法以及下标 0 和上标记法。因此，在此方程中， σdW_t、 a 和 u_s 分别指先前记作 $\sigma_0 d\tilde{W}_t$、 a^0 和 u^0_s 的量。

类似地，将$\mathbf{P}$ 作用于（PE$^\epsilon_{\alpha_\sigma}$）的水平动量方程，可得问题（$\mathcal{P}^{PE}_\epsilon$），其满足相同的边界条件（3.49），

$$\begin{aligned} d_t v+\mathbf{P}\Big((u^*dt+\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)v-\mathbf{P}\Delta_3(vdt+\sigma^H dW_t)\\ -\mathbf{P}\nabla_H\int_z^1\partial_z(p\,dt+dp^\sigma_t)dz'-\frac{1}{2}\mathbf{P}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v)dt=0, \end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\partial_z p=-\frac{\rho}{\rho_0}g+\alpha_\sigma^2\epsilon^2\frac{1}{2}\nabla_3\cdot(a^K\nabla_3 w), \tag{4.14}$$

$$\partial_z dp^\sigma_t=-\alpha_\sigma\epsilon^2 K*[(\sigma dW_t\cdot\nabla)w]+\alpha_\sigma\epsilon^2\Delta(\sigma^z dW_t), \tag{4.15}$$

$$d_t\theta+\Big((u^*dt+\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta-\frac{1}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta)dt-\Delta\theta dt=0, \tag{4.16}$$

其中 $\rho=\rho_0(1+\theta)$。

Now，我们引入如下全局鞅 Leray-Hopf 弱解的定义 ns,

定义 1（全局马尔可夫勒雷-霍普夫弱解）设$(v_0,\theta_0)\in V$ 和$\mathcal{B}$ 为一个随机基。若(v,θ) 是在 $\mathcal{B}$上定义的一对速度和示踪物随机场，且$(v,\theta)_{t=0}=(v_0,\theta_0)$，则$(\mathcal{B},v,\theta)$ 称为一个全局马尔可夫勒雷-霍普夫

弱解，其对应于$(\mathcal{P}_\epsilon^{rSNS})$且具有初始数据$(v_0,\theta_0)$，若以下命题成立。在下文中，我们用$w=\int_z^1\nabla_H\cdot v$, $u=(v,w)^{\mathrm{T}}$, $\rho=\rho_0(1+\theta)$表示。

1. 对所有 $T>0$，几乎必然地在 $\mathcal{B}$ 中，$(v、\theta)\in C_w([0,T]、H)\cap L^2([0,T]、V)$，

2. 对所有 $T>0$、所有整数 $p\geq 1$ 及所有停时 $0<\eta<\zeta<T$，$(v、w、\theta)$几乎必然地在 $\mathcal{B}$中满足以下能量估计，

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p}(\zeta)+\int_\eta^\zeta\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p-2}\|\nabla_3 u\|_{L_\epsilon^2}^2dt+\frac{1}{2}\int_\eta^\zeta\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p-2}(\mathfrak{a}^K\nabla I_{\alpha_\sigma}u,\nabla I_{\alpha_\sigma}u)_{L_\epsilon^2}dt\\ \leq\frac{1}{p}\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p}(\eta)+\frac{1}{2}\int_\eta^\zeta\sum_k\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p-2}\|\mathbf{P}_\epsilon\mathcal{I}_K(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u)+\Delta I_{\alpha_\sigma}\phi_k\|_{L_\epsilon^2}^2dt\\ +\int_\eta^\zeta\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p-2}\big(\Delta I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t,u\big)_{L_\epsilon^2}-\int_\eta^\zeta\|u\|_{L_\epsilon^2}^{2p-2}(\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0}g,w)_{L^2}dt,\quad(4.17)\end{aligned}$$

3. 对所有 $T>0$ 及所有测试函数 $(u^\sharp、\theta^\sharp)\in C_c^\infty(\mathcal{S}、\mathbb{R}^4)$，使得 $\nabla_3\cdot u^\sharp=0$，令 $w^\sharp=u^\sharp\cdot\mathbf{e}_z$。则，以下关系几乎必然地在 $\mathcal{B}$ 中成立，

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}}u^\sharp\cdot(u(T)-u(0))+\Bigg[\int_0^T-u\cdot(u^*dt\cdot\nabla_3)u^\sharp-I_{\alpha_\sigma}u\cdot\mathcal{I}_K(\sigma dW_t\cdot\nabla_3)u^\sharp\\ -\frac{1}{2}I_{\alpha_\sigma^2}u\cdot\nabla_3\cdot(\mathfrak{a}^K\nabla_3u^\sharp)dt-(udt+I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t)\Delta_3u^\sharp+w^\sharp\frac{g\rho_\epsilon}{\epsilon^2\rho_0}dt\Bigg]dxdydz=0\end{aligned}\tag{4.18}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}}\theta^\sharp\cdot(\theta(T)-\theta(0))+\Bigg[\int_0^T-\theta\Big((u^*dt+\sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)\theta^\sharp\\ -\frac{1}{2}\theta\nabla_3\cdot(a\nabla_3\theta^\sharp)dt-\theta\Delta_3\theta^\sharp dt\Bigg]dxdydz=0.\quad(4.19)\end{aligned}$$

在陈述主要结果之前，我们先介绍其陈述和证明中将使用的记号。首先，我们汇集一些有用的事实。对于每个 $\epsilon>0$，通过调整 [18], 的证明，我们推知 $(\mathcal{P}_\epsilon^{rSNS})$ 至少存在一个全局马尔可夫勒雷-霍普夫弱解 $(v_\epsilon,\theta_\epsilon)$，该解定义在一个依赖于 ϵ的随机基上，而该随机基事先并不知晓。

命题 1 该问题 $(\mathcal{P}_\epsilon^{rSNS})$，配备初始条件 $(u_0,\theta_0)\in H$，至少存在一个全局时间鞅解。

证明细节从略，因为其推理是对 [18] 中针对“直接”LU 纳维–斯托克斯方程所进行工作的直接改编。此外，由于 [19] 已证明 $(\mathcal{P}_\epsilon^{PE})$ 存在唯一的全局路径解，我们将前述随机基上的这一解记为 (v,θ)。因此，(v,θ) 和 $(v_\epsilon,\theta_\epsilon)$ 均定义在同一个依赖于 ϵ 的随机基上。不过，为了便于阅读，记号中未显式体现 (v,θ) 对 ϵ 的依赖。此外，再次由 [19] 可知，几乎必然地，对所有 $T>0$,

$$\sup_{[0,T]}\frac{1}{2}\|(v,\theta)\|_V^2+\int_0^T\|(v,\theta)\|_{\mathcal{D}(A)}^2dt<\infty.$$

采用类似的推理，我们可以证明，几乎必然地，

$$\sup_{[0,T]}\frac{1}{4}\|(v,\theta)\|_V^4+\int_0^T\|(v,\theta)\|_V^2\|(v,\theta)\|_{\mathcal{D}(A)}^2dt<\infty.$$

此外，记 $u_\epsilon=(v_\epsilon,w_\epsilon)^{\mathrm{T}}$ 和 $u=(v,w)^{\mathrm{T}}$ 为三维速度向量，其中我们使用记号 $w_\epsilon=w(v_\epsilon)$ 和 $w=w(v)$。此外，定义 $\Theta_\epsilon:=\theta_\epsilon-\theta$ 和 $U_\epsilon=(V_\epsilon,W_\epsilon)^{\mathrm{T}}$，其中 $V_\epsilon:=v_\epsilon-v$ 和 $W_\epsilon:=w_\epsilon-w$。于是，对于两个停时 η,ζ，满足 $\eta<\zeta$，我们定义

$$\mathcal{E}_\epsilon^0(\eta,\zeta):=\sup_{[\eta,\zeta]}\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2+\int_\eta^\zeta\|\nabla_3U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2dt+\sup_{[\eta,\zeta]}\frac{1}{2}\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\int_\eta^\zeta\|\nabla_3\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2dt,\tag{4.20}$$

$$\mathcal{E}^{1,4}(\eta,\zeta):=\sup_{[\eta,\zeta]}\frac{1}{2}\|(v,\theta)\|_V^4+\int_\eta^\zeta\|(v,\theta)\|_V^2\|(v,\theta)\|_{\mathcal{D}(A)}^2dt.\tag{4.21}$$

于是，下面的定理成立。

定理1 假设 $K\in H^3$，且原始方程中的噪声项 σdW_t 是二维的，并满足正则性条件(4.2)。令 $\epsilon>0$，并为$(\mathcal{P}_\epsilon^{rSNS})$ 和 $(\mathcal{P}_\epsilon^{PE})$ 赋予相同的初始条件 $(v_0,\theta_0)^{\mathrm{T}}\in V$，使得 $U_\epsilon|_{t=0}=\Theta_\epsilon|_{t=0}=0$。那么，对于所有 $T>0$ 和 $\delta>0$，存在一个常数 $C_\delta>0$，使得

$$\mathbb{E}\Big[\mathcal{E}_\epsilon^0(0,T\wedge\tau_\delta)\Big]\le C_\delta\epsilon^2\mathbb{E}\left[(1+\alpha_\sigma^2)+\int_0^{T\wedge\tau_\delta}\|v\|_{H^1}^4+(1+\|v\|_{H^1}^2)\|v\|_{H^2}^2dt\right]\tag{4.22}$$

其中 $\tau_\delta:=$下确界 $\Big\{t>0\Big|\mathcal{E}^{1,4}(0,t)\ge\delta\Big\}$，因此当 $\delta\to\infty$ 时，$\tau_\delta\to\infty$ 依概率收敛。特别是，当 $\alpha_\sigma=o(\epsilon^{-1})$ 时，$\mathcal{E}_\epsilon^0(0,T)\to0$ 依概率收敛。

注4.1

1. 定理 *3* 中提到的 *(rSNS$_\epsilon^{\alpha_\sigma}$)* 的解并不唯一，且定义在抽象随机基上，这些基先验地依赖于 ϵ。然而，该定理表明，无论选择何种基，对于所有 $T,\delta>0$，我们都可以将误差的二阶矩控制在 $\tau_\delta\wedge T$ 以内，即在空间 $L^2([0,T],V)\cap L^\infty([0,T],H)$ 中。

2. 关于 K 的正则性以及 *[19],* 中给出的证明，可以证明，满足"K-正则化弱静水假设"的问题的解关于 K 连续——尽管原论文中并未证明这一点。特别是，这表明当 K 趋于零时，（正则化）弱静水问题的解收敛到强静水问题的解；后者等价于令 $K=0$。

3. 如果缩放噪声依赖于 ϵ，那么上述收敛结果也类似，但需满足以下条件：记 $(\phi_k^\epsilon)_k$ 为缩放纳维–斯托克斯噪声 $\sigma_\epsilon dW_t$ 的特征函数，并记 $a^\epsilon:=\sum_k\phi_k^\epsilon(\phi_k^\epsilon)^{\mathrm{T}}$、$\Phi_k^\epsilon:=\phi_k^\epsilon-\phi_k$，使得每当

$$\sum_k\|\Phi_k^\epsilon\|_{L^2([0,T],H^2)}^2+\|a^\epsilon-a\|_{L^\infty([0,T],H^1)}^2=O(\alpha_\sigma^2\epsilon^2),\ and\ \sum_k\|\Phi_k^\epsilon\|_{L^\infty([0,T],L^\infty)}^2=O(\epsilon^2),\tag{4.23}$$

那么，当满足条件 $\alpha_\sigma=o(\epsilon^{-1})$ 时，$\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^0(0,T\wedge\tau_\delta)\big]$ 以 $\alpha_\sigma^2\epsilon^2$ 阶收敛到0。特别地，取 $\phi_k^\epsilon=\phi_k$，即 $\Phi_k^\epsilon=0$ 时，条件(4.23) 成立。

4.3.2 “完全周期”边界条件下的改进估计

现在假设区域 $\mathcal{S}_\epsilon$ 和 $\mathcal{S}$ 定义为“完全周期”区域，即$\mathcal{S}_\epsilon = \mathbb{T}_2 \times \epsilon\mathbb{T}_1$ 和 $\mathcal{S} = \mathbb{T}_3$，见 [34]。接着，将抽象问题（$\Pi_\epsilon^{rSNS}$）和（$\Pi_\epsilon^{PE}$）定义为问题（$\mathcal{P}_\epsilon^{rSNS}$）和（$\mathcal{P}_\epsilon^{PE}$）在三维周期边界条件下的对应形式，也就是说

$$v \text{ and } \theta \text{ are periodic with respect to } x, y, z. \tag{4.24}$$

在这种情况下，我们可以将 H_1 和 V_1 重新定义为正则性为 C^∞（$\mathcal{S}, \mathbb{R}^2$）的水平周期函数 v 所构成空间的闭包（按相同范数），使得 $\nabla_H \cdot \int_{-1}^{1} v dz = 0$在 $\mathcal{S}_H$上成立。类似地，我们将 H_2 和 V_2 重新定义为正则性为 C^∞（$\mathcal{S}, \mathbb{R}$）且均值为零的水平周期函数所构成空间的闭包。然后，我们相应地重新定义 H、V 和 $\mathcal{D}$（A），以及投影算子$\mathbf{P}$和$\mathbf{P}_\epsilon$。此外，噪声边界条件（4.1）被替换为关于函数 ϕ_k的周期性假设。

此外，带输运噪声的三维纳维–斯托克斯方程已被证明在 [1], 中、在关于初始条件的弱正则性假设下是适定的——通常是在Besov空间中。将这一局部适定性证明推广到带初始条件（u_0, θ_0） $\in H^1$（$\mathcal{S}, \mathbb{R}^{3+1}$）的三维纳维–斯托克斯方程的正则化LU解释，其中 u_0 为无散，并不构成任何主要困难。

命题2 问题 (Π_ϵ^{rSNS})配备初始条件 $(u_0, \theta_0) \in V$，存在唯一的最大路径解，但该解先验上仅在局部时间内存在。

因此，我们将 $(v_\epsilon, \theta_\epsilon)$ 记为 (Π_ϵ^{rSNS}) 的最大解，并将 τ_ϵ^{rSNS} 记为其对应的停时。在此情形下，以下定理成立，

定理2 假设定理*1*的假设成立。设 $(v_\epsilon, \theta_\epsilon)$ 和 (v, θ)分别为问题 (Π_ϵ^{rSNS}) 和 (Π_ϵ^{PE}) 的解，它们具有相同的初始条件 $(v_0, \theta_0) \in \mathcal{D}(A)$，且定义在同一随机基上。设 τ_ϵ^{rSNS} 为与 (Π_ϵ^{rSNS}) 相关联的停时，并对所有满足 $\eta < \zeta$ 的停时 η, ζ，定义

$$\mathcal{E}_\epsilon^1(\eta, \zeta) := \begin{cases} \sup_{[\eta,\zeta]} \frac{1}{2}\Big(\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon^2}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_V^2\Big) + \int_\eta^\zeta \Big(\|U_\epsilon\|_{D_\epsilon(A)}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2\Big) dt \ \text{if } \zeta < \tau_\epsilon^{rSNS}, \\ \infty \ \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.25}$$

那么，采用相同记号，定理*1*成立，且 $v \in L^2(\Omega; L^2([0,T]; H^3(\mathcal{S}, \mathbb{R}^2)))$。此外，对所有 $T > 0$，存在一个常数 $C_1 > 0$ 和一个停时

$$\check{\tau}_\epsilon = \inf\left\{ t \in \mathbb{R}_+ \Big| \sup_{[0,t]} (\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_V^2) + \int_0^t (\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2) dt > \frac{1}{4C_1} \right\} \le \tau_\epsilon^{rSNS}. \tag{4.26}$$

使得，对于所有的 $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^1(0, T \wedge \check{\tau}_\epsilon \wedge \tau_\delta)\big] \le C_1 \epsilon^2 (1 + \alpha_\sigma^2) \mathbb{E} \int_0^{\check{\tau}_\epsilon \wedge \tau_\delta \wedge T} (1 + \|v\|_{H^3}^2) dt. \tag{4.27}$$

此外，$\check{\tau}_\epsilon, \tau_\epsilon^{rSNS} \to \infty$ 依概率。因而，只要 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1})$，$\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^1(0, T \wedge \check{\tau}_\epsilon \wedge \tau_\delta)\big]$ 就收敛到 0；在这种情况下，$\mathcal{E}_\epsilon^1(0, T) \to 0$ 也依概率收敛。

定理1和定理2表明，正则化纳维-斯托克斯方程（$\text{rSNS}_{\alpha_\sigma}^\epsilon$）与弱静力原始方程（$\text{PE}_{\alpha_\sigma}^\epsilon$）之间的渐近误差 $\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^1(0, T \wedge \check{\tau}_\epsilon \wedge \tau_\delta)\big]$ 通常由一个 $O(\alpha_\sigma^2 \epsilon^2)$ 阶的项所界定。正如下文将要看到的，纳维–斯托克斯方程与强静力原始方程之间的误差为 $\alpha_\sigma^4 \epsilon^2$ 阶。因此，弱静力假设确实能提供更好的近似。

由此，我们确定了一个“灰色地带”：在该范围内，弱静力原始方程（$\mathrm{PE}^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$）可作为正则化纳维-斯托克斯方程组（$\mathrm{rSNS}^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$）的合适近似，而强静力原始方程（$\mathrm{PE}^{0}_{0}$）则不一定能先验地做到这一点 先验地。也就是说，该范围对应于 α_σ 通常为 $\epsilon^{-\gamma}$ 阶的情形，其中 $\gamma \in [1/2, 1)$。然而，在 $\alpha_\sigma \sim \epsilon^{-\gamma}$ 且 $\gamma \geq 1$ 的情形下，为（$\mathrm{rSNS}^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$）寻找合适的近似仍是一个悬而未决的问题。

注释 4.2

使用注*4.1.3*中的记号，在假设(4.23) 以及附加假设 $\sum_k \|\Phi^{\epsilon}_k\|^2_{H^4} \to 0$ 下，只要 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1})$，$(4.27)$ 的左端收敛于0 。

5 与（未正则化的）LU 纳维–斯托克斯方程的比较

本节中，我们考虑（未正则化的）LU 纳维–斯托克斯方程，研究其向 LU原始方程的收敛性。尽管研究“直接”系统的收敛性似乎顺理成章，但最终这种设定无法区分弱静水假设和强静水假设相对于系数 α_σ 的收敛阶，因为 ϵ 趋于 0。这种差异源于估计中出现的一个额外项，该项由两个版本的 LU 纳维–斯托克斯方程之间的正则化误差导致。因此，这种设定稍微复杂一些。由此，第 6 节和第 7 节中的证明采用此处介绍的设定（见定理 3 和 4），尽管定理1和定理2也可以用类似方法证明。请注意，由于 $K = 0$ 可以恢复强静力假设，本节的结果给出了（$\mathrm{PE}^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$）与（$\mathrm{SNS}^{\epsilon}_{\alpha_\sigma}$）之间的比较。

5.1 （非正则化）LU 纳维–斯托克斯方程的抽象表述

我们首先按照第 3 节所述的方式，推导未经正则化的缩放 LU 纳维–斯托克斯方程的抽象表述。

从现在起，为简便起见且不失一般性，我们假设 $\Upsilon = 1$。下文中，我们将“刚盖边界条件”投影算子 $\mathbf{P}_\epsilon$ 应用于 $(\mathrm{SNS}^{\epsilon}_{\alpha_\sigma})$——参见方程 (3.23) 至 (3.25)。由此，我们得到以下抽象问题 $(\mathcal{P}^{SNS}_{\epsilon})$ 的表达式，

$$
\begin{aligned}
d_t u_\epsilon + \mathbf{P}_\epsilon(u^*_\epsilon dt \cdot \nabla_3)u_\epsilon + \mathbf{P}_\epsilon(\sigma dW_t \cdot \nabla_3) I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon - \mathbf{P}_\epsilon \frac{1}{2}\nabla_3 \cdot (a \nabla_3 I_{\alpha^2_\sigma} u_\epsilon) dt \\
- \mathbf{P}_\epsilon \Delta_3 (u_\epsilon dt + I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t) + \mathbf{P}_\epsilon \frac{\rho_\epsilon}{\epsilon^2 \rho_0} g \mathbf{e}_z dt = 0, \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

$$
d_t \theta_\epsilon + \Big((u^*_\epsilon dt + \sigma dW_t) \cdot \nabla_3\Big)\theta_\epsilon - \frac{1}{2}\nabla_3 \cdot (a \nabla_3 \theta_\epsilon) dt - \Delta_3 \theta_\epsilon dt = 0, \qquad (5.2)
$$

其中 $\rho_\epsilon = \rho_0(1 + \theta_\epsilon)$。类似地，我们定义问题 (Π^{SNS}_{ϵ})，并使用“周期边界条件”投影算子，正如前文第 4 节所述。

5.2 主要结果

下面陈述我们的主要结果。基本上，前两个定理将经典的（确定性）Leray 理论结果推广到随机情形。注意，定义 1 可以加以调整，以定义问题 $(\mathcal{P}^{SNS}_{\epsilon})$ 的鞅解。

命题 3 问题 $(\mathcal{P}^{SNS}_{\epsilon})$ 配备初始条件 $(u_0, \theta_0) \in H$，至少存在一个全局时间鞅解。

命题 3 的证明源于 [18] 中对“直接”LU Navier- Stokes 方程所开展的工作。因此，只要初始条件 (u_0, θ_0) 属于 H，全局鞅解便存在。为研究该解在纵横比趋于零时的收敛性，我们将其记为 $(\hat{u}_\epsilon^{SNS}, \hat{\theta}_\epsilon^{SNS})$，并在下文引入量 $\hat{\mathcal{E}}_\epsilon^0$。它是针对问题 $(\mathcal{P}_\epsilon^{SNS})$ 调整后的 $\mathcal{E}_\epsilon^0$ 的对应量。令 $T > 0$，那么对于满足 $0 < \eta < \zeta < T$ 的所有停时 η, ζ，我们定义

$$\hat{\mathcal{E}}_\epsilon^0(\eta,\zeta) := \sup_{[\eta,\zeta]} \frac{1}{2}\|\hat{U}_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2 + \int_\eta^\zeta \|\nabla_3 \hat{U}_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2 dt + \sup_{[\eta,\zeta]} \frac{1}{2}\|\hat{\Theta}_\epsilon\|_{L^2}^2 + \int_\eta^\zeta \|\nabla_3 \hat{\Theta}_\epsilon\|_{L^2}^2 dt, \tag{5.3}$$

其中我们记 $\hat{U}_\epsilon := \hat{u}_\epsilon^{SNS} - u$ 和 $\hat{\Theta}_\epsilon := \hat{\theta}_\epsilon^{SNS} - \theta$。提醒一下，$(u, \theta)$ 表示弱静力原始方程问题 $(\mathcal{P}_\epsilon^{PE})$ 的解，并且，采用记号

$$\mathcal{E}^{1,4}(\eta,\zeta) := \sup_{[\eta,\zeta]} \frac{1}{2}\|(v,\theta)\|_V^4 + \int_\eta^\zeta \|(v,\theta)\|_V^2 \|(v,\theta)\|_{\mathcal{D}(A)}^2 dt, \tag{5.4}$$

我们有，对于 $T > 0$，几乎处处成立，

$$\mathcal{E}^{1,4}(0,T) < \infty. \tag{5.5}$$

因此，下述定理与定理 3 一脉相承，其证明基本遵循相同的思路。

定理 3 假设 $K \in H^3$，且原始方程中的噪声项 σdW_t 是二维的，并满足正则性条件 (4.2)。设 $\epsilon > 0$，并令$(\mathcal{P}_\epsilon^{rSNS})$ 和$(\mathcal{P}_\epsilon^{PE})$ 具有相同的初始条件$(v_0, \theta_0)^{\mathrm{T}} \in V$，使得 $U_\epsilon|_{t=0} = \Theta_\epsilon|_{t=0} = 0$。那么，对于所有 $T > 0$ 和 $\delta > 0$，存在一个常数 $C_\delta > 0$，使得，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{\mathcal{E}}_\epsilon^0(0, T\wedge\tau_\delta)\right] &\le C_\delta \epsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau_\delta} \|v\|_{H^1}^4 + (1+\|v\|_{H^1}^2)\|v\|_{H^2}^2 dt\right] \\ &+ C_\delta(1+\alpha_\sigma^4)\epsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau_\delta} \sum_k \|(I-K*)[\phi_k\cdot\nabla w]\|_{L^2}^2 + \|(a-a^K)\nabla w\|_{L^2}^2 dt\right],\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 $\tau_\delta :=$ 无穷大 $\left\{t > 0 \middle| \mathcal{E}^{1,\,4}(0,t) \ge \delta\right\}$，因此，当 $\delta \to \infty$ 时，$\tau_\delta \to \infty$ 依概率收敛。特别地，只要 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1/2})$，$\hat{\mathcal{E}_\epsilon^0}(0,T) \to 0$ 就依概率收敛。

注 5.1 估计式 (5.6) 表明，弱静力假设会降低 $\alpha_\sigma^4\epsilon^2$ 阶项前的常数：选择正则化核 K，使得 $\|I - K*\|_{\mathcal{L}_2(L^2(\mathcal{S},\,\mathbb{R}^3))}$ 足够小，就能减小因子的值

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau_\delta} \sum_k \|(I-K*)[\phi_k\cdot\nabla w]\|_{L^2}^2 + \|(a-a^K)\nabla w\|_{L^2}^2 dt\right]$$

如果 w 与 K 无关。然而，当 $K*$ 趋近于 I 时，w 的渐近行为尚不完全清楚。

反过来，上述估计表明，$(\mathrm{PE}_{\alpha_\sigma}^\epsilon)$ 对 $(\mathrm{rSNS}_{\alpha_\sigma}^\epsilon)$ 的逼近远优于对 $(\mathrm{SNS}_{\alpha_\sigma}^\epsilon)$ 的逼近。考虑到这些问题的构造方式，这一结果并不意外。值得注意的是，利用类似论证，也可以证明强静力原始方程与正则化纳维-斯托克斯方程之间的收敛误差同样为 $O(\alpha_\sigma^4\epsilon^2)$ 阶。证明过程几乎完全相同，因此省略。由此，收敛误差

在弱静力假设下，原始方程与正则化纳维-斯托克斯方程之间的误差渐近地小于在强静力假设下的误差。

按照第4节的方法，我们定义问题（Π_ϵ^{SNS}），它是具有周期边界条件的问题（$\mathcal{P}_\epsilon^{SNS}$）的对应问题。于是有以下命题成立。

命题4 问题(Π_ϵ^{SNS})配备初始条件$(u_0, \theta_0) \in V$，存在唯一的最大路径解，该解先验而言仅在局部时间内存在。

仿照命题2的论证，命题4的证明可由 [1]直接改编。由此可知，只要初始条件属于 V，问题（Π_ϵ^{SNS}）就存在唯一的最大路径解。因此，我们给出定理4的一个类似结果。

定理 4 假设定理 *3* 的假设成立。设$(v_\epsilon, \theta_\epsilon)$ 和(v, θ) 分别为问题(Π_ϵ^{SNS}) 和(Π_ϵ^{PE}) 的解，它们具有相同的初始条件$(v_0, \theta_0) \in \mathcal{D}(A)$，且定义在同一随机基上。设 τ_ϵ^{SNS}为与(Π_ϵ^{SNS})相关的停时，并对所有满足 $\eta < \zeta$的停时 η、 ζ，定义

$$\hat{\mathcal{E}}_\epsilon^1(\eta,\zeta) := \begin{cases} \sup_{[\eta,\zeta]} \frac{1}{2}\Big(\|\hat{U}_\epsilon\|_{V_\epsilon^2}^2 + \|\hat{\Theta}_\epsilon\|_V^2\Big) + \int_\eta^\zeta \Big(\|\hat{U}_\epsilon\|_{D_\epsilon(A)^2}^2 + \|\hat{\Theta}_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2\Big)dt \ \text{if } \zeta < \tau_\epsilon^{SNS}, \\ \infty \ \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.7}$$

接着，使用相同的记号，定理 *3* 成立，并且 $v \in L^2(\Omega\ L^2([0,T], H^3(\mathcal{S}, \mathbb{R}^2))$。此外，对于所有 $T > 0$，存在一个常数 $C_1 > 0$ 和一个停时

$$\check{\tau}_\epsilon = \inf\Big\{t \in \mathbb{R}_+ \Big| \sup_{[0,t]}(\|\hat{U}_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2 + \|\hat{\Theta}_\epsilon\|_V^2) + \int_0^t (\|\hat{U}_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 + \|\hat{\Theta}_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2)dt > \frac{1}{4C_1}\Big\} \le \tau_\epsilon^{SNS}. \tag{5.8}$$

使得，对于所有 $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^1(0, T \wedge \check{\tau}_\epsilon \wedge \tau_\delta)\big] \le C_1\epsilon^2(1+\alpha_\sigma^4)\mathbb{E}\int_0^{\check{\tau}_\epsilon \wedge \tau_\delta \wedge T} \Bigg((1 + \|v\|_{H^3}^2) \\ \times (1 + \|(a-a^K)\nabla w\|_{H^1}^2 + \sum_k \|(I-K*)[(\phi_k \cdot \nabla_3)w]\|_{H^1}^2)\Bigg)dt. \tag{5.9}$$

此外，$\check{}\tau_\epsilon, \tau_\epsilon^{SNS} \to \infty$ 依概率成立。因此，当 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1/2})$ 时，$\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^1(0, T \wedge \check{}\tau_\epsilon \wedge \tau_\delta)\big]$ 收敛至 0；在这种情况下，$\mathcal{E}_\epsilon^1(0,T) \to 0$ 也依概率收敛。

在定理 4 中，τ_ϵ^{SNS}趋于无穷大，体现了随机情形下对足够薄的区域上纳维-斯托克斯方程适定性的一种推广。然而，若要通过文献 [34], 中的方法获得与确定性情形下同样强的结果，通常需要几乎必然估计；而在我们的工作中，这些估计仅在二阶矩意义下先验成立。这是由于我们的噪声无界所致——参见 [14]。同样，这类结果在随机偏微分方程的背景下是标准的。

此外，定理 4 也可像定理 3 一样，用于估计强静力原始方程与正则化纳维-斯托克斯方程之间的收敛性。证明过程几乎完全相同，因此略去。

接下来的两个章节专门用于证明定理 3 和 4。定理1和定理2的证明略去，因为它们与定理 3 和 4 的证明几乎完全相同。事实上，后者的情形稍微复杂一些，因为最终的能量估计中出现了额外的 K相关项。因此，下面将详细给出这些证明。我们强调，这些证明仅适用于二维噪声情形，因为建立 LU原始方程 [19]的适定性需要这一假设。

6 定理 3 的证明

首先，我们证明以下引理，它将在后续证明中发挥作用。

引理 6.1 对于所有 $T>0$，都存在一个与 ϵ 无关的常数 C，使得

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{[0,T]}\|u_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^4\Big]+\mathbb{E}\int_0^T\|v_\epsilon\|_H^2\|v_\epsilon\|_V^2+\epsilon^4\|w_\epsilon\|_{L^2}^2\|w_\epsilon\|_V^2dt\le C,$$

证明： 由定义 1 中的能量估计 (4.17)、$p=2$、Burkholder-Davis-Gundy 不等式以及 [29]的随机 Grönwall 引理可立即得到这一结果。

□

令 T，$\delta>0$。设两个停时 η 和 ζ 满足 $T\wedge\tau_\delta\ge\zeta>\eta\ge0$，其中 τ_δ如定理 3 中所定义。为了应用随机 Grönwall 引理 [29], ，我们需要估计以下量,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[\eta,\zeta]}\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2+\int_\eta^\zeta\|\nabla_3U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2dt\right]=\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]}\frac{1}{2}\|\mathbb{1}_{[\eta,\zeta]}(t)U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2+\int_0^T\|\mathbb{1}_{[\eta,\zeta]}(t)\nabla_3U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2dt\right].\tag{6.1}$$

为简便起见，我们将估计写为 $(\eta,\ \zeta)=(0,\ T)$ 的形式；对于一般的一对停时 $(\eta,\ \zeta)$，证明类似。为此，我们首先展开项$\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2(t)$，如下所示，对所有 $t>0$，

$$\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2(t)=\frac{1}{2}\|u_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2(t)+\Big(\frac{1}{2}\|u\|_{L^2_\epsilon}^2(t)-(u_\epsilon,u)_{L^2_\epsilon}(t)\Big).\tag{6.2}$$

接下来，我们估计方程 (6.2) 右端的两项。第一项可直接根据全局鞅 Leray-Hopf 弱解的定义进行估计,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2(t)+\int_0^t\|\nabla_3u_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2dt+\frac{1}{2}\int_0^t(a\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon,\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon)_{L^2_\epsilon}dt\\ \le\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2_\epsilon}^2+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_k\|\mathbf{P}_\epsilon(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon)+\Delta I_{\alpha_\sigma}\phi_k\|_{L^2_\epsilon}^2dt\\ +\int_0^t\big(\Delta I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t,u_\epsilon\big)_{L^2_\epsilon}-\int_0^t(\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0}g,w_\epsilon)_{L^2}dt.\end{aligned}\tag{6.3}$$

现在还需估计 (6.2) 右端的第二项。证明分为三个步骤。第一步专门估计方程 (6.2) 的第二项。然后，在第二步中，我们推导量 $\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2$ 和 $\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2$ 的演化公式。为便于阅读，我们将其分为两个子步骤，每个量对应一个子步骤。最后，在第三步中，我们给出定理 3 的证明所需的最终论证。

步骤 *1*：估计 (6.2) 右端的第二项。令 $T\in\mathbb{R}_+^*$。接下来，我们采用如下约定：对于所有 $T>0$，对于所有函数 $u^\sharp\in L^2([0,T],\ V)$,

$$\int_0^T\Big(u^\sharp,d_tu\Big)_{L^2_\epsilon}=\int_0^T\Big(u^\sharp,F_0dt\Big)_{L^2_\epsilon}+\int_0^T\Big(u^\sharp,G_0dW_t\Big)_{L^2_\epsilon},\tag{6.4}$$

其中，利用问题的表达式（$\mathcal{P}_\epsilon^{PE}$），我们将 $F_0dt=(F_0^H\ F_0^z)^{\mathrm{T}}dt$ 记为

$G_0 dW_t = (G_0^H\ G_0^z)^{\mathrm{T}} dW_t$，其中

$$F_0^H dt + G_0^H dW_t = \mathbf{P}\Big((u^* dt + \sigma dW_t)\cdot\nabla_3\Big)v - \mathbf{P}\Delta_3(v dt + \sigma^H dW_t) \\ - \mathbf{P}\nabla_H \int_z^1 \partial_z(p\,dt + dp_t^\sigma)dz' - \frac{1}{2}\mathbf{P}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v)dt, \quad (6.5)$$

and

$$F_0^z dt + G_0^z dW_t = \int_z^1 \nabla_H\cdot F_0^H dt\, dz' + \int_z^1 \nabla_H\cdot G_0^H dW_t\, dz'. \quad (6.6)$$

可以验证，方程 (6.4) 和 (6.5) 中的所有项都有意义。我们特别指出以下记号滥用，

$$\Big(u^\sharp, d_t u\Big)_{L_\epsilon^2} = \Big(v^\sharp, d_t v\Big)_{L^2} + \epsilon^2\Big(w^\sharp, d_t w\Big)_{L^2}, \quad (6.7)$$

其中最后一项写作 $\epsilon^2\Big(w^\sharp, d_t w\Big)_{L^2} \equiv \epsilon^2\langle F_0^z dt + G_0^z dW_t,\ \ w^\sharp\rangle_{(H^1_{0,z}(\mathcal{S},\ \mathbb{R}))'\times H^1_{0,\ z}(\mathcal{S},\ \mathbb{R})}$，其中 $H^1_{0,\ z}(\mathcal{S},\ \mathbb{R})$ 是正则性为 $H^1(\mathcal{S},\ \mathbb{R})$ 且在上下边界 Γ_u 和 Γ_b上消失的函数空间。我们强调，方程 (6.4) 中引入的记号滥用只是一种方便的形式化写法，用于缩短公式表达。此外，它仅出现在当前证明的步骤 1 和 2.1 中。

记 $\mathcal{H}_{3D} = \{u = (v\ w)^{\mathrm{T}} | v \in H, w = \int_z^1 \nabla_H\cdot\ v\}$。根据经典论证，$H$在 $C^\infty(\mathcal{S}, \mathrm{R}^2)$ 中存在希尔伯特基，进而注意到条件 $w = \int_z^1 \nabla_H\cdot\ v$是闭的，可知 $\mathcal{H}_{3D}$存在正则性为 $C^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R}^3)$ 的基。因此，任取这样的希尔伯特基 $(e_n) \in C^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R}^3)$，它属于 $\mathcal{H}_{3D}$，我们将 $u_n := \mathrm{P}_n u$ 记作从 u到 $Span(e_i, 0 \le i \le n)$ 的投影，于是 u_n是半鞅，且 $u_n \in C([0,T], C^\infty(\mathcal{S}, \mathrm{R}^2))$ 几乎处处成立。此外，$d_t u_n = \mathrm{P}_n[F_0 dt + G_0 dW_t]$ 且 $(u_n)|_{t=0} = \mathrm{P}_n u_0$。另外，我们记 $u_n = (v_n, w_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $w_n = \int_z^1 \nabla_H\cdot\ v_n dz'$ 满足无散条件。因此，我们可以将前述记号滥用推广到 u的投影 u_n。对 $(u_\epsilon, u_n)_{L_\epsilon^2}$ 应用 It$\bar{\mathrm{o}}$ 引理——也就是说，取 $u^\sharp = u_\epsilon$——我们推得

$$-\int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u_n\Big)_{L_\epsilon^2} + \int_0^T \Big((u_\epsilon^* dt\cdot\nabla_3)u_\epsilon + (\sigma dW_t\cdot\nabla_3)I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon, u_n\Big)_{L_\epsilon^2} \\ -\frac{1}{2}\int_0^T (\nabla_3\cdot(a\nabla_3 I_{\alpha_\sigma^2}u_\epsilon), u_n)_{L_\epsilon^2} - \int_0^T \big(\Delta(u_\epsilon dt + I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t), u_n\big)_{L_\epsilon^2} = \|u_0\|^2_{L_\epsilon^2(\mathcal{S})} - \big(u_\epsilon, u_n\big)_{L_\epsilon^2}(T) \\ + \int_0^T \Bigg[\sum_k (\mathbf{P}(\phi_k\cdot\nabla v_n) + \Delta\phi_k^H + \nabla_H\tilde{\pi}_k, \mathbf{P}_\epsilon^H(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon) + \Delta\phi_k^H)_{L^2} \\ +\epsilon^2\Big(\int_z^1 \nabla_H\cdot\mathcal{R}(\phi_k\cdot\nabla v_n) + \Delta\phi_k^z + \int_z^1 \Delta_H\tilde{\pi}_k, \mathbf{P}_\epsilon^z(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon) + \alpha_\sigma\Delta\phi_k^z\Big)_{L^2} - (\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0}g, w_n)_{L^2}\Bigg]dt, \quad (6.8)$$

注意到有界变差压力项相互抵消，因为 u_n 是无散的。此处可以使用 It$\bar{\mathrm{o}}$ 引理，因为 $u_n \in Span(e_i, 0 \le i \le n)$，因此形如 $(\cdot\ u_n)_{\ L_\epsilon^2}$ 的内积可以视为有限维空间上的内积。为了推导出涉及项 $\int_0^T \big(u_\epsilon, d_t u\big)_{L_\epsilon^2}$的关系，我们希望在 $n \to \infty$时取极限。由于过程 v属于 $L^2(\Omega\ C([0,T], V) \cap L^2([0,T], \mathcal{D}(A)))$，我们只需证明几乎处处有：

$$\int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u_n\Big)_{L_\epsilon^2} \to \int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u\Big)_{L_\epsilon^2}$$

the 其他项则可通过调整 [34]中的论证使其有意义。我们将其写作 e

u_n的演化方程为 $d_t u_n = \mathbf{P}_n F_0 dt + \mathbf{P}_n G_0 dW_t$，因此，使用上述记号，

$$\int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u_n\Big)_{L^2_\epsilon} = \int_0^T \Big(u_\epsilon, \mathbf{P}_n F_0 dt + \mathbf{P}_n G_0 dW_t\Big)_{L^2_\epsilon}. \tag{6.9}$$

根据标准论证，得益于原始方程解的正则性 u ——也就是说，我们有 $u \in C([0,T], V) \cap L^2([0,T], \mathcal{D}(A))$ 几乎处处成立——我们推得，几乎处处，

$$\int_0^T \Big(u_\epsilon, \mathbf{P}_n F_0 dt\Big)_{L^2_\epsilon} \to \int_0^T \Big(u_\epsilon, F_0 dt\Big)_{L^2_\epsilon}. \tag{6.10}$$

此外，由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，记 $\mathcal{U} := H^{-s}(\mathcal{S}, \mathbb{R}^3)$，其中 $s > \frac{3}{2}$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \Big(u_\epsilon, (\mathbf{P}_n G_0 - G_0) dW_s\Big)_{L^2_\epsilon}\right|^2\right] &\le C\mathbb{E}\int_0^T \|(u_\epsilon, (\mathbf{P}_n G_0 - G_0)[\cdot])_{L^2_\epsilon}\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathcal{U},\mathbb{R})} ds \\ &\le C\Big(\int_0^T \|(\mathbf{P}_n G_0 - G_0)[\cdot]\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathcal{U}, L^2(\mathcal{S},\mathbb{R}^3))} ds\Big)\mathbb{E}\sup_{[0,T]}\|u_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

这表明左端在二次均值意义下收敛，因此通过抽取子列可得其几乎处处收敛。因此，在方程 (6.9) 中取 (u_n) 的一个适当子列的极限，我们推得

$$\int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u_n\Big)_{L^2_\epsilon} \to \int_0^T \Big(u_\epsilon, F_0 dt + G_0 dW_t\Big)_{L^2_\epsilon} = \int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u\Big)_{L^2_\epsilon}. \tag{6.12}$$

因此，对方程（6.8）中的这一子列取极限可得，

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \Big(u_\epsilon, d_t u\Big)_{L^2_\epsilon} + \int_0^T \Big((u_\epsilon^* dt \cdot \nabla_3) u_\epsilon + (\sigma dW_t \cdot \nabla_3) I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon, u\Big)_{L^2_\epsilon} \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^T \big(\nabla_3 \cdot (a \nabla_3 I_{\alpha_\sigma^2} u_\epsilon), u\big)_{L^2_\epsilon} - \int_0^T \big(\Delta(u_\epsilon dt + I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t), u\big)_{L^2_\epsilon} = \|u_0\|^2_{L^2_\epsilon(\mathcal{S})} \\ &\quad + \int_0^T \Bigg[\sum_k (\mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta\phi_k^H + \nabla_H \tilde{\pi}_k, \mathbf{P}_\epsilon^H(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \Delta\phi_k^H)_{L^2} \\ &+\epsilon^2\Big(\int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta\phi_k^z + \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k, \mathbf{P}_\epsilon^z(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \alpha_\sigma \Delta\phi_k^z\Big)_{L^2} - (\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0} g, w)_{L^2}\Bigg] dt. \end{aligned} \tag{6.13}$$

此外，使用与上述类似的逼近论证并应用伊藤引理，我们推得

$$\begin{aligned}\int_0^T \big(u_\epsilon, d_t u\big)_{L^2_\epsilon} dt &= \int_0^T (d_t v, v_\epsilon)_{L^2} + \epsilon^2 \langle d_t w, w_\epsilon\rangle_{(H^1_{z0})'\times H^1_{z0}} dt \\ &= \int_0^T (d_t v, V_\epsilon)_{L^2} + (d_t v, v)_{L^2} + \epsilon^2 \langle d_t w, W_\epsilon\rangle_{(H^1_{z0})'\times H^1_{z0}} + \epsilon^2 \langle d_t w, w\rangle_{(H^1_{z0})'\times H^1_{z0}} dt \\ &= \int_0^T \Big(d_t v, V_\epsilon + \epsilon^2 \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon\Big)_{L^2} + \frac{1}{2}\int_0^T d_t\Big(\|v\|^2_{L^2} + \epsilon^2 \|w\|^2_{L^2}\Big) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_k \|\mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^H + \nabla_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} dt \\ &\quad - \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T \sum_k \| \int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^z + \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} dt. \end{aligned} \tag{6.14}$$

综合方程 (6.13) 和 (6.14)，最终可得：

$$\begin{aligned}&\big(u_\epsilon, u\big)_{L^2_\epsilon}(T) - \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2_\epsilon}(T) + \int_0^T \left((u_\epsilon^* dt \cdot \nabla_3) u_\epsilon + (\sigma dW_t \cdot \nabla_3) I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon, u\right)_{L^2_\epsilon} \\ &\quad - \int_0^T \big(\Delta(u_\epsilon dt + I_{\alpha_\sigma}\sigma dW_t), u\big)_{L^2_\epsilon} - \int_0^T \frac{1}{2}\big(\nabla_3 \cdot (a \nabla_3 I_{\alpha^2_\sigma} u_\epsilon), u\big)_{L^2_\epsilon(Q_T)} dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2_\epsilon} \\ &\quad + \int_0^T \Big(d_t v, V_\epsilon + \epsilon^2 \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon\Big)_{L^2} + \int_0^T \Bigg[- \frac{1}{2}\sum_k \|\mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^H + \nabla_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} \\ &-\frac{\epsilon^2}{2}\sum_k \| \int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^z\|^2_{L^2} + \sum_k (\mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^H + \nabla_H \tilde{\pi}_k, \mathbf{P}^H_\epsilon(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \Delta \phi_k^H)_{L^2} \\ &+\epsilon^2 (\int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^z + \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k, \mathbf{P}^z_\epsilon(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \alpha_\sigma \Delta \phi_k^z)_{L^2} - (\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0} g, w)_{L^2} \Bigg] dt. \end{aligned} \tag{6.15}$$

步骤 *2.1*：关于 U_ϵ 的部分估计。将方程 (6.3) 与方程 (6.15) 相减，并利用方程 (6.2)，我们得到

$$\begin{aligned}&- \frac{1}{2}\|U_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon}(T) - \int_0^T \|U_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon} dt + \int_0^T \left((u_\epsilon^* dt \cdot \nabla_3) u_\epsilon + (\sigma dW_t \cdot \nabla_3) I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon, u\right)_{L^2_\epsilon} \\ &\quad - \frac{1}{2}\big(a \nabla_3 I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon, \nabla_3 I_{\alpha_\sigma} U_\epsilon\big)_{L^2_\epsilon(Q_T)} + \big(\Delta u, U_\epsilon\big)_{L^2_\epsilon(Q_T)} \geq \int_0^T \Big(d_t v, V_\epsilon + \epsilon^2 \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon\Big)_{L^2} dt \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_k \|\mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^H + \nabla_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} + \|\mathbf{P}^H_\epsilon(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \Delta \phi_k^H\|^2_{L^2} dt \\ &- \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T \sum_k \| \int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^z + \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} + \|\mathbf{P}^z_\epsilon(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \alpha_\sigma \Delta \phi_k^z\|^2_{L^2} dt \\ &\quad + \int_0^T \Bigg[\sum_k (\mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^H + \nabla_H \tilde{\pi}_k, \mathbf{P}^H_\epsilon(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \Delta \phi_k^H)_{L^2} \\ &\quad + \epsilon^2 (\int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) + \Delta \phi_k^z + \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k, \mathbf{P}^z_\epsilon(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) + \alpha_\sigma \Delta \phi_k^z)_{L^2} \Bigg] dt \\ &\quad - \int_0^T \big(\Delta I_{\alpha_\sigma} \sigma dW_t, U_\epsilon\big)_{L^2_\epsilon} + \int_0^T (\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0} g, W_\epsilon)_{L^2} dt. \end{aligned} \tag{6.16}$$

此外，将方程 (4.13) 与 V_ϵ 作 $(\cdot,\cdot)_{L^2_\epsilon}$ 内积，我们得到

$$(d_t v, V_\epsilon)_{L^2} + (-\Delta v, V_\epsilon)_{L^2} dt + (-\Delta \sigma dW_t^H, V_\epsilon)_{L^2} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot a\nabla v, V_\epsilon)_{L^2} dt \\ + (\nabla_H(\tilde{p}dt + d\tilde{p}_t^\sigma), V_\epsilon)_{L^2} = -((u^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla v, V_\epsilon)_{L^2} dt. \quad (6.17)$$

结合方程 (6.16) 和 (6.17)，我们推得以下关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon}(T) + \int_0^T \|\nabla_3 U_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon} dt + \frac{1}{2}\int_0^T \big(a\nabla_3 I_{\alpha_\sigma} U_\epsilon, \nabla_3 I_{\alpha_\sigma} U_\epsilon\big)_{L^2_\epsilon} dt \\
&\le -\epsilon^2 \int_0^T \Big(d_t v, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon\Big)_{L^2} + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_k \|\mathbf{P}_\epsilon^H(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) - \mathbf{P}(\phi_k \cdot \nabla v) - \nabla_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} \\
&\qquad + \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T \sum_k \|\mathbf{P}_\epsilon^z(\phi_k \cdot \nabla I_{\alpha_\sigma} u_\epsilon) - \int_z^1 \nabla_H \cdot \mathcal{R}(\phi_k \cdot \nabla v) - \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k\|^2_{L^2} \\
&\quad - \alpha_\sigma^2 \epsilon^2 \frac{1}{2}\Big(a\nabla_3 w, \nabla_3 W_\epsilon\Big)_{L^2(Q_T)} + \epsilon^2 \Big(\Delta w, W_\epsilon\Big)_{L^2(Q_T)} + \int_0^T \Big[\alpha_\sigma \epsilon^2 \big(\Delta \sigma dW_t^z, W_\epsilon\big)_{L^2} \\
&\qquad + \epsilon^2 \Big(\Big((u_\epsilon^* dt + \alpha_\sigma \sigma dW_t)\cdot \nabla_3\Big) w_\epsilon, w\Big)_{L^2} + \Big(\Big((u_\epsilon^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla_3\Big) v_\epsilon, v\Big)_{L^2} \\
&\qquad + \Big((u^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla v, V_\epsilon\Big)_{L^2} - (\partial_z(\tilde{p}dt + d\tilde{p}_t^\sigma), W_\epsilon)_{L^2} + (\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0} g, W_\epsilon)_{L^2}\Big]. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

此外，我们可以简化以下项，

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big((u_\epsilon^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla_3\Big) v_\epsilon, v\Big)_{L^2} + \Big((u^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla v, V_\epsilon\Big)_{L^2} \\
&= \Big(\Big((u_\epsilon^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla_3\Big) v_\epsilon, v\Big)_{L^2} - \Big((u^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla v_\epsilon, v\Big)_{L^2} \\
&= \Big((U_\epsilon \cdot \nabla_3) v_\epsilon, v\Big)_{L^2} dt = \Big((U_\epsilon \cdot \nabla_3) V_\epsilon, v\Big)_{L^2} dt.
\end{aligned}$$

因此，方程 (6.18) 可以改写为:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon}(T)+\int_0^T\|\nabla_3 U_\epsilon\|^2_{L^2_\epsilon}dt+\frac{1}{2}\int_0^T\left(a\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon,\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\right)_{L^2_\epsilon}dt\\
&\qquad\le\int_0^T\left(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)V_\epsilon,v\right)_{L^2}dt+\epsilon^2\int_0^T\left(\Big(u^*_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)w_\epsilon,w\right)_{L^2}dt\\
&\qquad+\int_0^T-\alpha_\sigma^2\epsilon^2\frac{1}{2}(a\nabla_3 w,\nabla_3 W_\epsilon)_{L^2}+(-\partial_z\tilde{p}+\frac{\rho_\epsilon}{\rho}g+\epsilon^2\Delta w,W_\epsilon)_{L^2}dt\\
&-\epsilon^2\int_0^T\Big(d_t v,\int_z^1\nabla_H W_\epsilon\Big)_{L^2}+\frac{1}{2}\int_0^T\sum_k\|\mathbf{P}^H_\epsilon(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon)-\mathbf{P}(\phi_k\cdot\nabla v)-\nabla_H\tilde{\pi}_k\|^2_{L^2}\\
&\qquad+\frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T\sum_k\|\mathbf{P}^z_\epsilon(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon)-\int_z^1\nabla_H\cdot\mathcal{R}(\phi_k\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\|^2_{L^2}\\
&\qquad+\sum_k\int_0^T\Big[\alpha_\sigma\epsilon^2\Big((\phi_k\cdot\nabla_3)W_\epsilon,w\Big)_{L^2}+\alpha_\sigma\epsilon^2\big(\Delta\phi^z_k,W_\epsilon\big)_{L^2}-(\partial_z\pi_k,W_\epsilon)_{L^2}\Big]d\beta^k\\
&\qquad:=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+\sum_k J^k_7 d\beta^k.\quad(6.19)
\end{aligned}
$$

此外，使用与 [34], 中相同的论证

$$
\begin{aligned}
J_1&=\int_0^T\left(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)V_\epsilon,v\right)_{L^2}dt\le\int_0^T|((V_\epsilon\cdot\nabla_H)V_\epsilon,v)_{L^2}|+|(W_\epsilon\partial_z V_\epsilon,v)_{L^2}|dt\\
&\le\int_0^T|((V_\epsilon\cdot\nabla_H)V_\epsilon,v)_{L^2}|+|((\nabla_H\cdot V_\epsilon)V_\epsilon,v)_{L^2}|+|(W_\epsilon V_\epsilon,\partial_z v)_{L^2}|dt\\
&\le C\int_0^T\|v\|_{L^6}(\|V_\epsilon\|_{L^3}\|\nabla V_\epsilon\|_{L^2}+\|V_\epsilon\|_{L^3}\|\nabla V_\epsilon\|_{L^2})+\|V_\epsilon\|^{3/2}_V\|V_\epsilon\|^{1/2}_H\|v\|^{1/2}_V\|v\|^{1/2}_{\mathcal{D}(A)}dt\\
&\le\int_0^T C_\xi(1+\|v\|^2_V\|v\|^2_{\mathcal{D}(A)})(\|V_\epsilon\|^2_H+\epsilon^2\|W_\epsilon\|^2_{L^2})+\xi\|V_\epsilon\|^2_V dt
\end{aligned}
$$

and,

$$
\begin{aligned}
J_2&=\epsilon^2\int_0^T\Big((u^*_\epsilon\cdot\nabla_3)w_\epsilon,w\Big)_{L^2}dt=\epsilon^2\int_0^T\int_{\mathcal{S}}\Big((v^*_\epsilon\cdot\nabla_H)W_\epsilon-w^*_\epsilon(\nabla_H\cdot V_\epsilon)\Big)wdt\\
&\le C_\xi\epsilon^2\int_0^T(\|v^*_\epsilon\|^{1/2}_H\|v^*_\epsilon\|^{1/2}_V\|\nabla_3 W_\epsilon\|_{L^2}+\|w^*_\epsilon\|^{1/2}_H\|w^*_\epsilon\|^{1/2}_V\|\nabla_3 V_\epsilon\|_{L^2})\|v\|^{1/2}_V\|v\|^{1/2}_{\mathcal{D}(A)}dt\\
&\le C_\xi\epsilon^2\int_0^T(\|v^*_\epsilon\|^2_H\|v^*_\epsilon\|^2_V+\epsilon^4\|w^*_\epsilon\|^2_{L^2}\|w^*_\epsilon\|^2_V+\|v\|^2_V\|v\|^2_{\mathcal{D}(A)})dt+\xi\int_0^T\|V_\epsilon\|^2_V+\epsilon^2\|\nabla_3 W_\epsilon\|^2_{L^2}dt\\
&\le C_\xi\epsilon^2\int_0^T(1+\|v_\epsilon\|^2_H\|v_\epsilon\|^2_V+\epsilon^4\|w_\epsilon\|^2_{L^2}\|w_\epsilon\|^2_V+\|v\|^2_V\|v\|^2_{\mathcal{D}(A)})dt+\xi\int_0^T\|V_\epsilon\|^2_V+\epsilon^2\|\nabla_3 W_\epsilon\|^2_{L^2}dt.
\end{aligned}
$$

此外,

$$
\begin{aligned}
J_3&\le|\int_0^T(\partial_z\tilde{p}+\alpha_\sigma^2\epsilon^2\frac{1}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 w)+\frac{\rho_\epsilon}{\rho_0}g,W_\epsilon)_{L^2}dt|\\
&\le C\int_0^T\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}\|W_\epsilon\|_{L^2}+\alpha_\sigma^2\epsilon^2\frac{1}{2}|(\nabla_3\cdot((a-a^K)\nabla_3 w),W_\epsilon)_{L^2}|dt\\
&\le C_\xi\int_0^T(\|\Theta_\epsilon\|^2_{L^2}+\alpha_\sigma^4\epsilon^2\|(a-a^K)\nabla w\|^2_{L^2})dt+\xi\int_0^T(\|V_\epsilon\|^2_V+\epsilon^2\|W_\epsilon\|^2_{H^1})dt.\quad(6.20)
\end{aligned}
$$

最后，我们估计以下项，

$$J_4 = \epsilon^2 \Big| \int_0^T \Big(d_t v, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon \Big)_{L^2} \Big| = \epsilon^2 \Big| \int_0^T \Big(\mathbf{P}\Big((u^* dt + \sigma dW_t)\cdot \nabla_3 \Big) v - \mathbf{P}\Delta_3 (v dt + \sigma^H dW_t) \\ - \mathbf{P}\nabla_H \int_z^1 \partial_z (p\, dt + dp_t^\sigma) dz' - \frac{1}{2}\mathbf{P}\nabla_3 \cdot (a\nabla_3 v) dt, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon \Big)_{L^2} \Big| \\ \leq C\epsilon^2 \int_0^T [(1 + \|a\|_{H^3})\|v\|_{\mathcal{D}(A)} + \|\theta\|_{H^1}]\|W_\epsilon\|_{H^1} dt \\ + C\epsilon^2 \int_0^T \Big| \Big((u^* \cdot \nabla_3) v, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon \Big)_{L^2} \Big| dt. \quad (6.21)$$

右端的最后一项可以表示为

$$\int_0^T \Big| \Big((u^* \cdot \nabla_3) v, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon \Big)_{L^2} \Big| dt = \int_0^T \Big| \Big((v^* \cdot \nabla_H) v, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon \Big)_{L^2} \Big| dt \\ + \int_0^T \Big| \Big(w^* \partial_z v, \int_z^1 \nabla_H W_\epsilon \Big)_{L^2} \Big| dt \\ \leq C \int_0^T [\|v^*\|_{L^3}\|v\|_{\mathcal{D}(A)} + \|v\|_{L^6}(\|w^*\|_{L^3} + \|\partial_z w^*\|_{L^3})]\|\nabla_H W_\epsilon\|_{L^2} dt \\ \leq C \int_0^T [(1 + \|v^*\|_V)\|v\|_{\mathcal{D}(A)} + \|v\|_V \|v^*\|_V]\|W_\epsilon\|_{H^1} dt \\ \leq C_\xi \int_0^T [1 + \|v\|_V^2 \|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2 + \|v\|_V^4] dt + \xi \int_0^T \|W_\epsilon\|_{H^1}^2 dt \quad (6.22)$$

因此，将前面的估计汇总到方程（6.19）中，先取上确界，再取期望，

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{[0,T]} \frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2 + \int_0^T \|\nabla_3 U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2 dt \Big] \leq C\epsilon^2 \mathbb{E}\Big[\int_0^T \|v\|_{H^1}^4 + \|v\|_{H^2}^2 (1 + \|a\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{H^2}^2) dt \Big] \\ + C\mathbb{E}\Big[\int_0^T (\|v\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^2}^2 + 1)(\|U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2) + \alpha_\sigma^4 \epsilon^2 \|(a - a^K)\nabla w\|_{L^2}^2 dt \Big] \\ - \mathbb{E}\Big[\frac{1}{2} \int_0^T \big(a\nabla_3 I_{\alpha_\sigma} U_\epsilon, \nabla_3 I_{\alpha_\sigma} U_\epsilon \big)_{L_\epsilon^2} dt \Big] + \mathbb{E}\Big[J_5 + J_6 + \sup_{[0,T]} | \int_0^\cdot \sum_k J_7^k d\beta^k | \Big]. \quad (6.23)$$

在下一个子步骤中，我们对 Θ_ϵ 建立一个估计。剩余项 $\mathbb{E}\Big[J_5 + J_6 + \sup_{[0,T]} | \int_0^\cdot \sum_k J_7^k d\beta^k | \Big]$ 的估计更具挑战性，将在步骤 3 中处理。

步骤 *2.2*：对 Θ_ϵ 进行估计。此外，对 $\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2$ 应用 It$\bar{\text{o}}$ 引理，并再次使用逼近论证，我们得到

$$\frac{1}{2} d_t \|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2 dt + \frac{1}{2}(a\nabla_3 \Theta_\epsilon, \nabla_3 \Theta_\epsilon)_{L^2} dt \\ = \frac{1}{2} \sum_k \|\phi_k \cdot \nabla_3 \Theta_\epsilon\|_{L^2}^2 dt - (U_\epsilon \cdot \nabla\theta, \Theta_\epsilon)_{L^2} dt, \quad (6.24)$$

因为 u^*, u_ϵ^* 和 ϕ_k 均为无散的。此外,

$$\begin{aligned}(U_\epsilon\cdot\nabla\theta,\Theta_\epsilon)_{L^2}&=((\nabla_H\cdot V_\epsilon)\theta,\Theta_\epsilon)_{L^2}+(V_\epsilon\cdot\nabla_H\Theta_\epsilon,\theta)_{L^2}+(W_\epsilon\partial_z\theta,\Theta_\epsilon)_{L^2}\\&\le\|V_\epsilon\|_V\|\theta\|_{H^2}\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}+\|V_\epsilon\|_H\|\theta\|_{H^2}\|\Theta_\epsilon\|_{H^1}+\|V_\epsilon\|_V\|\Theta_\epsilon\|_{L^3}\|\partial_z\theta\|_{L^3}\\&\le C\|\theta\|_{H^2}^2(1+\|\theta\|_{H^1}^2)(\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\|V_\epsilon\|_H^2)+\xi(\|V_\epsilon\|_V^2+\|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2).\end{aligned}\tag{6.25}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2dt\Big]&\le C\mathbb{E}\Big[\int_0^T\|\theta\|_{H^2}^2(1+\|\theta\|_{H^1}^2)(\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\|V_\epsilon\|_H^2)dt\Big]\\&+\xi\mathbb{E}\Big[\int_0^T\Big(\sum_k\|\phi_k\|_{H^2}^2\Big)\|\nabla_3\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+(\|V_\epsilon\|_V^2+\|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2)dt\Big],\end{aligned}\tag{6.26}$$

因此,

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2dt\Big]\le C\mathbb{E}\Big[\int_0^T\|\theta\|_{H^2}^2(1+\|\theta\|_{H^1}^2)(\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\|V_\epsilon\|_H^2)dt\Big].\tag{6.27}$$

步骤 *3*：定理 *3* 的证明。 现在我们结合关于 U_ϵ 和 Θ_ϵ 的前述估计：将方程 (6.23) 和 (6.27) 相加，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]}\frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2+\int_0^T\|\nabla_3U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2dt\right]+\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2dt\Big]\\&\le C\epsilon^2\mathbb{E}\left[\int_0^T\|v\|_{H^1}^4+\|v\|_{H^2}^2(1+\|a\|_{L^\infty}^2)dt+\|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2+\alpha_\sigma^4\|(a-a^K)\nabla w\|_{L^2}^2dt\right]\\&\qquad+C\mathbb{E}\left[\int_0^T(\|\theta\|_{H^1}^2\|\theta\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2+1)(\|U_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2+\|\Theta_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2)dt\right]\\&\quad-\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\int_0^T\big(a\nabla_3I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon,\nabla_3I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\big)_{L_\epsilon^2}dt\Big]+\mathbb{E}\Big[J_5+J_6+\sup_{[0,T]}|\int_0^\cdot\sum_kJ_7^kd\beta^k|\Big].\end{aligned}\tag{6.28}$$

剩下需要估计的项是 J_5、 J_6 和 $\sup_{[0,T]}|\int_0^\cdot\sum_kJ_7^kd\beta^k|$。我们先处理最后一项，因为可以利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式轻松地对其进行界定。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]}|\int_0^\cdot\sum_kJ_7^kd\beta^k|\right]\\&\le C\mathbb{E}\Big(\sum_k\int_0^T\Big(\alpha_\sigma\epsilon^2\Big((\phi_k\cdot\nabla_3)W_\epsilon,w\Big)_{L^2}+\alpha_\sigma\epsilon^2\big(\Delta\phi_k^z,W_\epsilon\big)_{L^2}-(\partial_z\pi_k,W_\epsilon)_{L^2}\Big)^2dt\Big)^{1/2}\\&\le C\alpha_\sigma\epsilon^2\mathbb{E}\Big(\sum_k\int_0^T\Big((I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w,W_\epsilon\Big)_{L^2}^2dt\Big)^{1/2}\\&\le C\alpha_\sigma\epsilon^2\mathbb{E}\Big(\int_0^T\Big(\sum_k\|(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\|_{L^2}^2\Big)\|W_\epsilon\|_{L^2}^2dt\Big)^{1/2}\\&\le C\alpha_\sigma\epsilon^2\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]}\|W_\epsilon\|_{L^2}\Big(\int_0^T\Big(\sum_k\|(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\|_{L^2}^2\Big)dt\Big)^{1/2}\right]\\&\le C\epsilon^2\mathbb{E}\sup_{[0,T]}\|W_\epsilon\|_{L^2}^2+C\alpha_\sigma^2\epsilon^2\mathbb{E}\int_0^T\Big(\sum_k\|(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\|_{L^2}^2\Big)dt,\end{aligned}\tag{6.29}$$

其中我们还使用了杨氏不等式。最后，我们估计 $\mathbb{E}[J_5+J_6]$，它可以解释为源自 It¯o 引理的协变差项。首先，我们将 J_5+J_6 重写如下，

$$
\begin{aligned}
2(J_5+J_6) &= \sum_k \|\mathbf{P}_\epsilon^H(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon)-\mathbf{P}(\phi_k\cdot\nabla v)-\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{L^2}^2 \\
&+\epsilon^2\sum_k\|\mathbf{P}_\epsilon^z(\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon)-\int_z^1\nabla_H\cdot(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\|_{L^2}^2 \\
&=\sum_k\Big\|\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}u_\epsilon-\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\phi_k\cdot\nabla v)\\ \int_z^1\nabla_H\cdot(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\Big]\Big\|_{L_\epsilon^2}^2 \\
&=\sum_k\Big\|\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon+\begin{pmatrix}\phi_k\cdot\nabla v-\mathbf{P}(\phi_k\cdot\nabla v)\\ \alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-\int_z^1\nabla_H\cdot(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\Big]\Big\|_{L_\epsilon^2}^2 \\
&=\sum_k\Big\|\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon+\begin{pmatrix}(\mathbf{I}^{2D}-\mathbf{P}^{2D})\overline{\phi_k\cdot\nabla v}\\ \alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\Big]\Big\|_{L_\epsilon^2}^2 \\
&=\sum_k\Big\|\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon+\begin{pmatrix}-\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\Big]\Big\|_{L_\epsilon^2}^2 \\
&\le(a\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon,\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon)_{L_\epsilon^2}+\sum_k\|\mathbf{P}_\epsilon\begin{pmatrix}-\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\|_{L_\epsilon^2}^2 \\
&+\Big(\phi_k\cdot\nabla V_\epsilon,\mathbf{P}_\epsilon^H[-\nabla_H\tilde{\pi}_k]\Big)_{L^2}+\alpha_\sigma\epsilon^2\Big(\phi_k\cdot\nabla W_\epsilon,\mathbf{P}_\epsilon^z[\alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k]\Big)_{L^2} \\
&\le(a\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon,\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon)_{L_\epsilon^2}+\xi\|V_\epsilon\|_V^2+C_\xi\sum_k\|\phi_k\|_{L^\infty}^2\|\mathbf{P}_\epsilon^H\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{L^2}^2 \\
&+\xi\epsilon^2\|W_\epsilon\|_V^2+C_\xi\alpha_\sigma^2\epsilon^2\sum_k\|\phi_k\|_{L^\infty}^2\|\mathbf{P}_\epsilon^z[\alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k]\|_{L^2}^2 \\
&+\sum_k\|\mathbf{P}_\epsilon\begin{pmatrix}-\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\|_{L_\epsilon^2}^2.
\end{aligned}
$$

利用噪声正则性假设 4.2，我们推得

$$
\begin{aligned}
(J_5+J_6)&\le\frac{1}{2}(a\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon,\nabla I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon)_{L_\epsilon^2}+\xi\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2 \\
&+C_\xi(\sup_k\|\phi_k\|_{L^\infty}^2)(1+\alpha_\sigma^2)\sum_k\|\mathbf{P}_\epsilon\begin{pmatrix}-\nabla_H\tilde{\pi}_k\\ \alpha_\sigma\phi_k\cdot\nabla w-w(\widetilde{\phi_k}\cdot\nabla v)-\int_z^1\Delta_H\tilde{\pi}_k\end{pmatrix}\|_{L_\epsilon^2}^2 \quad (6.30)
\end{aligned}
$$

现在，我们估计右端的最后一项，

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \|\mathbf{P}_\epsilon \begin{pmatrix} -\nabla_H \tilde{\pi}_k \\ \alpha_\sigma \phi_k \cdot \nabla w - w(\widetilde{\phi_k} \cdot \nabla v) - \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k \end{pmatrix} \|_{L^2_\epsilon}^2 \\
&\quad = \sum_k \|\mathbf{P}_\epsilon \begin{pmatrix} -\nabla_H \tilde{\pi}_k \\ (I-K*)[\alpha_\sigma \phi_k \cdot \nabla w - w(\widetilde{\phi_k} \cdot \nabla v)] - \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k - \frac{1}{\epsilon^2}\partial_z \tilde{\pi}_k \end{pmatrix} \|_{L^2_\epsilon}^2 \\
&\quad = \sum_k \|\mathbf{P}_\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ (I-K*)[\alpha_\sigma \phi_k \cdot \nabla w - w(\widetilde{\phi_k} \cdot \nabla v)] - \int_z^1 \Delta_H \tilde{\pi}_k \end{pmatrix} \|_{L^2_\epsilon}^2 \\
&\quad \le C\epsilon^2 \sum_k \|\tilde{\pi}_k\|_{H^2}^2 + C\epsilon^2 \sum_k \|(I-K*)[\alpha_\sigma \phi_k \cdot \nabla w - w(\widetilde{\phi_k} \cdot \nabla v)]\|_{L^2}^2 \\
&\quad \le C\epsilon^2 (1 + \|v\|_{H^2}^2 + \alpha_\sigma^2 \sum_k \|(I-K*)[\phi_k \cdot \nabla w]\|_{L^2}^2),
\end{aligned}
$$

这里用到了$\mathbf{P}_\epsilon(\nabla_H \tilde{\pi}_k \ \frac{1}{\epsilon^2}\partial_z \tilde{\pi}_k)^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}_\epsilon \nabla_\epsilon \tilde{\pi}_k = 0$这一事实。因此，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]} \frac{1}{2}\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2 + \int_0^T \|\nabla_3 U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2 dt\right] + \mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sup_{[0,T]} \|\Theta_\epsilon\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\Theta_\epsilon\|_{H^1}^2 dt\Big] \\
&\qquad \le C\epsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \|v\|_{H^1}^4 + \|v\|_{H^2}^2(1+\|a\|_{L^\infty}^2)dt + \|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2 dt\right] \\
&\qquad + C\mathbb{E}\left[\int_0^T (\|\theta\|_{H^1}^2\|\theta\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2 + 1)(\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2)dt\right] \\
&\qquad + C(1+\alpha_\sigma^4)\epsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_k \|(I-K*)[\phi_k \cdot \nabla w]\|_{L^2}^2 + \|(a-a^K)\nabla w\|_{L^2}^2 dt\right]. \quad (6.31)
\end{aligned}
$$

如证明开头所述，我们可以用η 和 ζ来改写估计式 (6.31)，从而得到，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^0(\eta,\zeta)\big] \le C\epsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_\eta^\zeta \|v\|_{H^1}^4 + \|v\|_{H^2}^2(1+\|a\|_{L^\infty}^2)dt + \|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2 dt\right] \\
&\qquad + C\mathbb{E}\left[\int_\eta^\zeta (\|\theta\|_{H^1}^2\|\theta\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2 + 1)(\|U_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2 + \|\Theta_\epsilon\|_{L^2_\epsilon}^2)dt\right] \\
&\qquad + C(1+\alpha_\sigma^4)\epsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_k \|(I-K*)[\phi_k \cdot \nabla w]\|_{L^2}^2 + \|(a-a^K)\nabla w\|_{L^2}^2 dt\right]. \quad (6.32)
\end{aligned}
$$

因此，由于下式成立，我们可以应用 [29], 的随机 Grönwall 引理得出结论，

$$
\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_\delta} \|v\|_{H^1}^4 + \|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^2 + \|\theta\|_{H^1}^4 + \|\theta\|_{H^1}^2\|\theta\|_{H^2}^2 dt \le C_\delta. \quad (6.33)
$$

此外，当 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1/2})$ 时，$\mathbb{E}\big[\mathcal{E}_\epsilon^0(0, T\wedge\tau_\delta)\big]$ 以 $\alpha_\sigma\epsilon$ 的阶收敛到 0。在这种情况下，$\mathcal{E}_\epsilon^0(0, T\wedge\tau_\delta)$ 依概率收敛到 0。取极限 $\delta \to \infty$，我们可推得 $\mathcal{E}_\epsilon^0(0,T) \to 0$ 依概率。

□

7 定理 4 的证明

本节中，为证明定理 4，我们改用“完全周期”边界条件。请注意，此时此前给出的所有结果仍然成立，证明也完全相同。下文采用与第 6 节相同的记号。定理 4 的证明分为三个步骤：首先，我们推导原始方程的能量估计（引理 7.1），然后建立定理 4 中所述的能量估计。

7.1 原始方程中的 $H^2 - H^3$ 估计

本小节证明以下引理，它给出了周期边界条件下原始方程的一个改进能量估计。

引理 7.1 在定理 *4* 的假设下，设 $T, \delta > 0$。存在一个常数$C > 0$，使得

$$\mathbb{E} \sup_{[0,\tau_\delta \wedge T]} \|v\|^2_{\mathcal{D}(A)} + \mathbb{E} \int_0^{\tau_\delta \wedge T} \|v\|^2_{\mathcal{D}(A^{3/2})} dt \le C, \tag{7.1}$$

其中 τ_δ 的定义与定理 *3* 中相同。

证明：基本上，我们将 [34] 提出的方法应用于随机情形。请注意，在问题（Π_ϵ^{PE}）中，水平动量方程为:

$$\begin{aligned} d_t v + \mathbf{P}\Big[\Big((v^* dt + \sigma dW_t^H)\cdot\nabla_H\Big)v + (w^* dt + \sigma dW_t^z)\partial_z v\Big] + A(v dt + \sigma dW_t^H) \\ + \nabla_H(\tilde{p}\, dt + d\tilde{p}_t^\sigma) - \frac{1}{2}\mathbf{P}[\nabla_3 \cdot (a\nabla_3 v)]dt = 0, \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中， $\tilde{p}$ 和 $d\tilde{p}_t^\sigma$ 分别表示 p 和 dp_t^σ的斜压分量。根据 It¯o 引理，并利用周期边界条件下 $A^2 v = (-\Delta)^2 v$这一事实，我们推得

$$\begin{aligned} d_t\|v\|^2_{\mathcal{D}(A)} &+ \left(\Big((v^* dt + \sigma dW_t^H)\cdot\nabla_H\Big)v + (w^* dt + \sigma dW_t^z)\partial_z v, (-\Delta)^2 v\right)_{L^2} \\ &+ \underbrace{\Big((-\Delta)(v dt + \sigma dW_t^H), (-\Delta)^2 v\Big)_H}_{=\|v\|^2_{\mathcal{D}(A^{3/2})}dt + ((-\Delta)^{3/2}\sigma dW_t^H, (-\Delta)^{3/2}v)_H} + \Big(\nabla_H(\tilde{p}\, dt + d\tilde{p}_t^\sigma) - \frac{1}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v)dt, (-\Delta)^2 v\Big)_{L^2} \\ &\le \frac{1}{2}\sum_k \|\mathbf{P}[(\phi_k\cdot\nabla_3)v] + \nabla_H\tilde{\pi}_k - \Delta\phi_k^H\|^2_{\mathcal{D}(A)}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

此外，我们有

$$\left(\Big(v^*\cdot\nabla_H\Big)v + w^*\partial_z v, (-\Delta)^2 v\right)_{L^2} \le -\Big(\nabla[(v^*\cdot\nabla_H)v + w^*\partial_z v], \nabla\Delta v\Big)_{L^2}, \tag{7.4}$$

并且，对于 $i \in \{x, y, z\}$ 和 $k \in \{x, y\}$，采用爱因斯坦求和约定（其中 $j \in \{x, y, z\}$），

$$\Big[\nabla[(u^*\cdot\nabla)v]\Big]_{ik} = \partial_i(u_j^*\partial_j v_k) = (\partial_i u_j^*)(\partial_j v_k) + u_j^*\partial_{ij} v_k.$$

因此，由 [34],的 Ladyzhenskaya 型关系和杨氏不等式可得,

$$\begin{aligned} \Big(\nabla[(v^*\cdot\nabla_H)v + w^*\partial_z v], \nabla\Delta v\Big)_{L^2} &\le C(1 + \|v\|_{H^1}^{1/2}\|v\|_{H^2}\|v\|_{H^3}^{3/2}) \\ &\le C_\xi(1 + \|v\|_{H^1}^2\|v\|_{H^2}^4) + \xi\|v\|_{H^3}^2 \end{aligned} \tag{7.5}$$

此外,

$$\Big(\nabla_H\tilde{p},(-\Delta)^2v\Big)_{L^2}=\Big(\nabla_H\int_z^1[\theta-\frac{\alpha_\sigma^2\epsilon^2}{2}\nabla_3\cdot(a^K\nabla_3 w)]dz',(-\Delta)^2v\Big)_{L^2} \tag{7.6}$$

$$\leq(\|\theta\|_{H^2}+\|\nabla_3\cdot(a^K\nabla w)\|_{H^2})\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})} \tag{7.7}$$

$$\leq C_\xi(\|\theta\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^2}^2)+\xi\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2, \tag{7.8}$$

利用 $K\in H^3(\mathcal{S},\ \mathbb{R}^3)$ 以及 $a^K[\cdot]=\sum_{k=1}^\infty\phi_k\mathcal{C}_K^*\mathcal{C}_K[\phi_k^{\mathrm{T}}\cdot]$,与 $\mathcal{C}_K[\cdot]=K*[\cdot]$ 这一事实。此外，再次采用爱因斯坦求和约定，其中 $i,\ j,\ k\in\{x,y\}$ 和 $l,\ m\in\{x,y,z\}$,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\Big(\nabla_3\cdot(a\nabla_3 v)dt,\mathbf{P}(-\Delta)^2v\Big)_{L^2}&=-\frac{1}{2}\Big(\partial_i(a_{ij}\partial_j v_k),\partial_{ll}\partial_{mm}v_k\Big)_{L^2}\\&=\frac{1}{2}\Big(\partial_{lm}(a_{ij}\partial_j v_k),\partial_{ilm}v_k\Big)_{L^2}\\&\leq\frac{1}{2}\Big(a_{ij}\partial_{jlm}v_k,\partial_{ilm}v_k\Big)_{L^2}+C\|v\|_{\mathcal{D}(A)}\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})},\end{aligned} \tag{7.9}$$

根据 (4.2)， a 足够光滑。对于协变差项，我们注意到 $A^v\mathbf{P}=\mathbf{P}(-\Delta)$ 在 $L^2(\mathbb{T}_3,\ \mathbb{R}^2)$ 上成立。因此,

$$\begin{aligned}&\sum_k\|\mathbf{P}[(\phi_k\cdot\nabla_3)v]+\nabla_H\tilde{\pi}_k-\Delta\phi_k^H\|_{\mathcal{D}(A)}^2\\&\quad\leq\sum_k\|\mathbf{P}(-\Delta)[(\phi_k\cdot\nabla_3)v+\nabla_H\tilde{\pi}_k-\Delta\phi_k^H]\|_H^2\\&\quad\leq\sum_k\|A^v[(\phi_k\cdot\nabla_3)v+\nabla_H\tilde{\pi}_k-\Delta\phi_k^H]\|_H^2\\&\quad\leq C_\xi\bigg(\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\sum_k(\|\phi_k^H\|_{H^4}^2+\|\phi_k\|_{L^\infty}^2\|v\|_V^2+\|\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{\mathcal{D}(A)}^2)\bigg)\\&\qquad\qquad+(a_{ij}\partial_{jlm}v_k,\partial_{ilm}v_k)_{L^2}+\xi\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2,\end{aligned} \tag{7.10}$$

对于 $\xi>0$。汇总前面的估计，随时间积分，然后取上确界和期望，我们得到，对于所有满足$\eta<\zeta$的停时 $\eta,\zeta\leq\tau_\delta\wedge T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2dt\leq C\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\Big(1+\|v\|_V^2\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^4+\|\theta\|_{H^2}^2+\sum_k\|\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{\mathcal{D}(A)}^2\Big)dt\\+C\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\Big|\int_\eta^\zeta((\sigma^HdW_t\cdot\nabla)v-\Delta\sigma^HdW_t,\mathbf{P}(-\Delta)^2v)_{L^2}\Big|.\end{aligned} \tag{7.11}$$

根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，并利用插值不等式，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\Big|\int_\eta^\zeta((\sigma^H dW_t\cdot\nabla_H)v-\Delta\sigma^H dW_t+\nabla_H d\tilde{p}_t^\sigma,\mathbf{P}(-\Delta)^2v)_{L^2}\Big|\\
&\quad\le\mathbb{E}\bigg[\Big(\sum_k\int_\eta^\zeta((\phi_k^H\cdot\nabla_H)v-\Delta\phi_k^H+\nabla_H\tilde{\pi}_k,\mathbf{P}(-\Delta)^2v)_{L^2}^2\Big)^{1/2}\bigg]dt\\
&\quad\le C\mathbb{E}\bigg[\Big(\sum_k\int_\eta^\zeta(1+\|\nabla[(\phi_k^H\cdot\nabla_H)v-\Delta\phi_k^H+\nabla_H\tilde{\pi}_k]\|_{L^2}^2)\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2\Big)^{1/2}\bigg]dt\\
&\quad\le C\mathbb{E}\bigg[\Big(\int_\eta^\zeta(1+\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\sum_k\|\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{\mathcal{D}(A)}^2)\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2\Big)^{1/2}\bigg]dt\\
&\quad\le C\mathbb{E}\bigg[\Big(1+\sup_{[\eta,\zeta]}(\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\sum_k\|\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{\mathcal{D}(A)}^2)\Big)^{1/2}\Big(\int_\eta^\zeta\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2\Big)^{1/2}\bigg]dt\\
&\quad\le C_\xi\mathbb{E}\bigg[1+\sup_{[\eta,\zeta]}(\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\sum_k\|\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{\mathcal{D}(A)}^2)\bigg]dt+\xi\mathbb{E}\bigg[\int_\eta^\zeta\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2\bigg]dt.\quad(7.12)
\end{aligned}$$

此外，由于 $K\in H^3(\mathcal{S},\ \mathbb{R})$，我们推知

$$\sum_k\|\nabla_H\tilde{\pi}_k\|_{\mathcal{D}(A)}^2\le C(1+\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2).\tag{7.13}$$

因此，

$$\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|v\|_{\mathcal{D}(A^{3/2})}^2dt\le C\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\Big(1+\|v\|_V^2\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2\Big)\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2+\|\theta\|_{H^2}^2dt.\tag{7.14}$$

由此结果可通过随机 Grönwall 引理得出结论。

□

7.2 误差的 H^1-H^2 估计

本小节将证明定理 4 中的结果，并重点讨论估计式 (5.9)。

下文中，为简化记号，我们用 τ_ϵ 代替 τ_ϵ^{SNS}。设 τ 为一个停时，使得 $0<\tau<\tau_\epsilon$。此外，为滥用记号，我们分别用 U_ϵ、V_ϵ 和 W_ϵ 代替 $(U_\epsilon)_{\cdot\wedge\tau}$、$(V_\epsilon)_{\cdot\wedge\tau}$ 和 $(W_\epsilon)_{\cdot\wedge\tau}$。首先，我们陈述 V_ϵ 和 W_ϵ 的演化方程；由于 u_ϵ 是 (Π_ϵ^{SNS}) 的局部时间强解，这些方程是有意义的，

$$\begin{aligned}
&d_tV_\epsilon+\Big((u_\epsilon^*dt+\sigma dW_t)\cdot\nabla_H\Big)V_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla\Big)vdt-\frac{1}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3V_\epsilon)dt\\
&\qquad\qquad-\Delta V_\epsilon dt+\nabla_H(P_\epsilon dt+dP_t^{\sigma,\epsilon})=0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&d_tW_\epsilon+\Big((u_\epsilon^*dt+\alpha_\sigma\sigma dW_t)\cdot\nabla\Big)W_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla\Big)wdt-\frac{\alpha_\sigma^2}{2}\nabla_3\cdot(a\nabla_3W_\epsilon)dt-\Delta W_\epsilon\,dt\\
&+\frac{1}{\epsilon^2}\partial_z(P_\epsilon dt+dP_t^{\sigma,\epsilon})+\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\rho_\epsilon-\rho}{\rho_0}gdt=-(I-K*)(\alpha_\sigma\sigma dW_t\cdot\nabla)w+\frac{\alpha_\sigma^2}{2}\nabla_3\cdot((a-a^K)\nabla w)dt.
\end{aligned}$$

App应用伊藤引理，并使用与下述类似的逼近论证 of

由第 6 节和 $\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2$，我们推得

$$\frac{1}{2}d_t\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2+\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2dt-\frac{1}{2}\Big(\nabla_3\cdot(a\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon),AI_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\Big)_{L_\epsilon^2}dt\le-\bigg(\Big(U_\epsilon dt\cdot\nabla_3\Big)U_\epsilon,AU_\epsilon\bigg)_{L_\epsilon^2}$$
$$-\bigg(\Big((u^*dt+U_\epsilon dt)\cdot\nabla_3\Big)U_\epsilon,AU_\epsilon\bigg)_{L_\epsilon^2}-(g\Theta_\epsilon,AW_\epsilon)_{L^2}dt-\frac{\alpha_\sigma^2\epsilon^2}{2}\Big(\nabla_3\cdot((a-a^K)\nabla w)dt,AW_\epsilon\Big)_{L^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_k\Big\|\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon+\begin{pmatrix}0\\ \alpha_\sigma(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\end{pmatrix}\Big]\Big\|_{V_\epsilon}^2dt$$
$$-\alpha_\sigma\epsilon^2\Big((I-K*)(\sigma dW_t\cdot\nabla)w\Big)_{L^2}-\bigg(\Big(\sigma dW_t\cdot\nabla_3\Big)I_{\alpha_\sigma}u,AU_\epsilon\bigg)_{L_\epsilon^2}$$
$$=:(J_1+J_2+J_3+J_4+J_5)dt+\sum_k(J_6^k+J_7^k)d\beta^k.\quad(7.15)$$

首先，我们对（7.15）左端的最后一项作如下说明,

$$\frac{1}{2}\Big(\nabla_3\cdot(a\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon),AI_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\Big)_{L_\epsilon^2}\le-\frac{1}{2}\Big(a\nabla_3\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon,\nabla_3\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\Big)_{L_\epsilon^2}$$
$$+C_\xi(1+\alpha_\sigma^2)^2\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2+\xi\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2.\quad(7.16)$$

接下来，我们推导 J_1+J_2 的表达式,

$$J_1+J_2=-\bigg(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)U_\epsilon+\Big(u^*\cdot\nabla_3\Big)U_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)u,AU_\epsilon\bigg)_{L_\epsilon^2}$$
$$=-\bigg(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)V_\epsilon+\Big(u^*\cdot\nabla_3\Big)V_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)v,AV_\epsilon\bigg)_{L^2}$$
$$-\epsilon^2\bigg(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)W_\epsilon+\Big(u^*\cdot\nabla_3\Big)W_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)w,AW_\epsilon\bigg)_{L^2}.\quad(7.17)$$

注意，再次使用 [34], 的 Ladyzhenskaya 型关系

$$\bigg(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)V_\epsilon+\Big(u^*\cdot\nabla_3\Big)V_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)v,AV_\epsilon\bigg)_{L^2}\le\Big[\|\nabla_3V_\epsilon\|_{L^2}\|\Delta_3V_\epsilon\|_{L^2}$$
$$+\|\nabla_3V_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3V_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\Big(\|\nabla_3v^*\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3v^*\|_{L^2}^{1/2}+\|\nabla_3v\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3v\|_{L^2}^{1/2}\Big)\Big]\|V_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)},\quad(7.18)$$

and

$$\bigg(\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)W_\epsilon+\Big(u^*\cdot\nabla_3\Big)W_\epsilon+\Big(U_\epsilon\cdot\nabla_3\Big)w,AW_\epsilon\bigg)_{L^2}\le\Big[\|\nabla_3V_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3V_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla_3W_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3W_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}$$
$$+\|\nabla_3v^*\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3v^*\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla_3W_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3W_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}+\|\nabla_3V_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3V_\epsilon\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla_3w\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta_3w\|_{L^2}^{1/2}\Big]\|W_\epsilon\|_{H^2}.\quad(7.19)$$

因此,

$$J_1+J_2\le C_\xi\|V_\epsilon\|_V^2\|V_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2+C_\xi(1+\|v\|_V^2)(1+\|v\|_{\mathcal{D}(A)}^2)\|V_\epsilon\|_V^2$$
$$+C_\xi\epsilon^2(1+\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2)(1+\|v\|_{H^3}^2+\|V_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2)+\xi\|\nabla U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2.\quad(7.20)$$

此外，对于 J_3,

$$J_3 = -(g\Theta_\epsilon,\ AW_\epsilon) \tag{7.21}$$

$_{L^2} \le \|\Theta_\epsilon\|_V \|W_\epsilon\|_V \le \|\Theta_\epsilon\|_V \|V_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)} \le C\|\Theta_\epsilon\|_V^2 + \xi\|V_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2$.此外，对于 J_4,

$$\begin{aligned} J_4 = -\frac{\alpha_\sigma^2\epsilon^2}{2}\Big(\nabla_3\cdot((a-a^K)\nabla w), AW_\epsilon\Big)_{L_\epsilon^2} &= \frac{\alpha_\sigma^2\epsilon^2}{2}\|(a-a^K)\nabla w\|_{H^1}\|W_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)} \\ &\le C_\xi\frac{\alpha_\sigma^4\epsilon^2}{2}\|(a-a^K)\nabla w\|_{H^1}^2 + \xi\epsilon^2\|W_\epsilon\|_{\mathcal{D}(A)}^2. \end{aligned} \tag{7.22}$$

此外，对于 J_5,

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{1}{2}\sum_k \Big\|\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon + \begin{pmatrix}0\\ \alpha_\sigma(I-K*)[(\phi_k\cdot\nabla_3)w]\end{pmatrix}\Big]\Big\|_{V_\epsilon}^2 \qquad (7.23)\\ &\le C_\xi\alpha_\sigma^4\epsilon^2\|v\|_{H^3}^2(1+\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2) + \xi\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 + \sum_k\frac{1}{2}(\phi_k\cdot\nabla_3\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon, \phi_k\cdot\nabla_3\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon)_{L_\epsilon^2}\\ &\quad + C_\xi\alpha_\sigma^2\epsilon^2\sum_k\|(I-K*)[(\phi_k\cdot\nabla_3)w]\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

因此，对 (7.15) 先取积分，再取上确界，最后取期望，并结合前面的估计可得,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2 + \mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 dt \le C\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 dt + \xi\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 dt\\ &+C\epsilon^2(1+\alpha_\sigma^4)\mathbb{E}\int_\eta^\zeta(1+\|v\|_{H^3}^2)(1+\|(a-a^K)\nabla w\|_{H^1}^2+\sum_k\|(I-K*)[(\phi_k\cdot\nabla_3)w]\|_{H^1}^2)(1+\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2+\|\Theta_\epsilon\|_V^2)dt\\ &\quad + C\sum_k\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\left|\int_\eta^\zeta(J_6^k+J_7^k)d\beta_k\right|. \end{aligned} \tag{7.24}$$

此外，根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\left|\int_\eta^\zeta\left(\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon + \begin{pmatrix}0\\ \alpha_\sigma(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\end{pmatrix}\Big], AI_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\right)_{L_\epsilon^2}d\beta_k\right| \qquad (7.25)\\ &\le \mathbb{E}\left|\int_\eta^\zeta\left(\mathbf{P}_\epsilon\Big[\phi_k\cdot\nabla_3 I_{\alpha_\sigma}U_\epsilon + \begin{pmatrix}0\\ \alpha_\sigma(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\end{pmatrix}\Big], AI_{\alpha_\sigma}U_\epsilon\right)_{L_\epsilon^2}^2\right|^{1/2}dt\\ &\le \sqrt{1+\alpha_\sigma^2}\mathbb{E}\left|\int_\eta^\zeta\|\phi_k\|_{H^4}^2(1+\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2+\|(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\|_{L^2}^2)\|AU_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2\right|^{1/2}dt\\ &\le C_\xi\epsilon^2(1+\alpha_\sigma^4)\mathbb{E}\|\phi_k\|_{H^4}^2\sup_{[\eta,\zeta]}(1+\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2+\|(I-K*)(\phi_k\cdot\nabla_3)w\|_{L^2}^2) + \xi\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|AU_\epsilon\|_{L_\epsilon^2}^2 dt. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2 + \mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 dt \le C\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 dt + \xi\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\|U_\epsilon\|_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}^2 dt\\ &+C\epsilon^2(1+\alpha_\sigma^4)\mathbb{E}\int_\eta^\zeta\sum_k(1+\|v\|_{H^3}^2)(1+\|(a-a^K)\nabla w\|_{H^1}^2+\|(I-K*)[(\phi_k\cdot\nabla_3)w]\|_{H^1}^2)(1+\|U_\epsilon\|_{V_\epsilon}^2+\|\Theta_\epsilon\|_V^2)dt. \end{aligned} \tag{7.26}$$

于是我们推得，对于某个常数 $C_1 > 0$,

$$\mathbb{E}\sup_{[\eta,\zeta]}(\|U_\epsilon\|^2_{V_\epsilon} + \|\Theta_\epsilon\|^2_V) + \mathbb{E}\int_\eta^\zeta (\|U_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}_\epsilon(A)} + \|\Theta_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}(A)})dt \le C_1\mathbb{E}\int_\eta^\zeta \|U_\epsilon\|^2_{V_\epsilon}\|U_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}_\epsilon(A)}dt$$
$$+C_1\epsilon^2(1+\alpha_\sigma^4)\mathbb{E}\int_\eta^\zeta (1+\|v\|^2_{H^3})(1+\|(a-a^K)\nabla w\|^2_{H^1}+\sum_k \|(I-K*)[(\phi_k\cdot\nabla_3)w]\|^2_{H^1})(1+\|U_\epsilon\|^2_{V_\epsilon}+\|\Theta_\epsilon\|^2_V)dt. \tag{7.27}$$

记为

$$\check{\tau}_\epsilon = \inf\Big\{t\in\mathbb{R}_+\Big|\sup_{[0,t]}(\|U_\epsilon\|^2_{V_\epsilon} + \|\Theta_\epsilon\|^2_V) + \int_0^t (\|U_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}_\epsilon(A)} + \|\Theta_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}(A)})dt > \frac{1}{4C_1}\Big\} \le \tau_\epsilon. \tag{7.28}$$

因此，由随机 Grönwall 引理和引理 7.1 可知，若 $\epsilon < \frac{1}{\sqrt{2C_1}}$,

$$\mathbb{E}\sup_{[0,\check{\tau}_\epsilon\wedge\tau_\delta\wedge T]}(\|U_\epsilon\|^2_{V_\epsilon} + \|\Theta_\epsilon\|^2_V) + \mathbb{E}\int_0^{\check{\tau}_\epsilon\wedge\tau_\delta\wedge T} (\|U_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}_\epsilon(A)} + \|\Theta_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}(A)})dt$$
$$\le C_1\epsilon^2(1+\alpha_\sigma^4)\mathbb{E}\int_0^{\check{\tau}_\epsilon\wedge\tau_\delta\wedge T}(1+\|v\|^2_{H^3})(1+\|(a-a^K)\nabla w\|^2_{H^1}+\sum_k \|(I-K*)[(\phi_k\cdot\nabla_3)w]\|^2_{H^1})dt. \tag{7.29}$$

关于 τ_ϵ 的渐近行为，最后一个方程表明，只要 $\alpha_\sigma = o(\epsilon^{-1/2})$，以下收敛依概率成立，

$$\sup_{[0,\check{\tau}_\epsilon\wedge\tau_\delta\wedge T]}(\|U_\epsilon\|^2_{V_\epsilon} + \|\Theta_\epsilon\|^2_V) + \int_0^{\check{\tau}_\epsilon\wedge\tau_\delta\wedge T}\Big(\|U_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}_\epsilon(A)} + \|\Theta_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}(A)}\Big)dt \to 0. \tag{7.30}$$

于是，$\check{}\tau_\epsilon\wedge\tau_\delta \to \tau_\delta$ 依概率成立。由于 $\check{}\tau_\epsilon \le \tau_\epsilon$，我们推知 $\tau_\epsilon\wedge\tau_\delta\to\tau_\delta$ 也依概率成立。此外，注意到对于所有停时 $\eta<\zeta$， $\mathcal{E}^1_\epsilon(\eta,\ \zeta)$ 定义为

$$\mathcal{E}^1_\epsilon(\eta,\zeta) := \begin{cases} \sup_{[\eta,\zeta]}\frac{1}{2}\Big(\|U_\epsilon\|^2_{V^2_\epsilon} + \|\Theta_\epsilon\|^2_V\Big) + \int_\eta^\zeta \Big(\|U_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}_\epsilon(A)^2} + \|\Theta_\epsilon\|^2_{\mathcal{D}(A)}\Big)dt \text{ if } \zeta\ge\tau_\epsilon, \\ \infty \text{ otherwise.}\end{cases} \tag{7.31}$$

采用这一记号，方程 (7.30) 以及 $\check{}\tau_\epsilon\wedge\tau_\delta\to\tau_\delta$ 这一事实推出，

$$\mathcal{E}^1_\epsilon(0,\tau_\delta\wedge T)\to 0, \text{ in probability.} \tag{7.32}$$

因此，令 $\delta\to\infty$ 取极限，我们推得 $\mathcal{E}^1_\epsilon(0,\ T)\to 0$ 依概率成立。

□

致谢： 作者感谢 ERC 欧盟项目 856408-STUOD 的支持，并受益于法国政府“未来投资”计划 ANR-11-LABX-0020-01 的支持。

利益冲突： 我们声明不存在竞争性利益。

数据可用性： 支持本研究的数据已公开提供。

参考文献

[1] Antonio Agresti 和 Mark Veraar。《临界空间中湍流的随机纳维–斯托克斯方程》。2023年。arXiv: 2107.03953 [math.AP]。网址：https://arxiv. org/abs/2107.03953.[2] Antonio Agresti 等。“带输运噪声和湍流压力的随机原始方程”。载于：*Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis andComputations*（2022年10月）。doi：10.1007 /s40072 - 022 - 00277 - 3。网址：https : //doi.org/10.1007/s40072-022-00277-3.[3] Antonio Agresti 等。《具有非等温湍流压力的随机原始方程》。2023年。arXiv: 2210.05973 [math.AP].[4] Pascal Azérad 和 Francisco Guillén。“地球物理流体动力学原始方程中静力近似的数学论证”。载于：*SIAM*数学分析杂志 33.4（2001年），第847–859页。doi：10.1137/ S0036141000375962。电子版：https://doi.org/10.1137/S0036141000375962。网址：https://doi.org/10.1137/S0036141000375962.[5] Werner Bauer 等。“探析小尺度非均匀性对地球物理流动结构化的作用：一种随机方法”。载于：物理海洋学杂志 50.4（2020年），第983–1003页。[6] Judith Berner 等。“随机参数化：天气和气候模型的新视角”。载于：美国气象学会通报 98.3（2017年），第565–588页。[7] Rüdiger Brecht 等。“位置不确定性下采用保结构离散化的旋转浅水流”。载于：地球系统建模进展杂志 13.12（2021年），e2021MS002492。[8] Zdzislaw Brzeźniak 和 Jakub Slavík。“具有乘法噪声和输运噪声的三维随机原始方程的适定性”。载于：微分方程杂志 296（2021年），第617–676页。issn：0022-0396。doi：https://doi.org/10.1016/ j.jde.2021.05.049。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0022039621003521.[9] Roberto Buizza、M Miller 和 Tim N Palmer。“ECMWF集合预报系统中模型不确定性的随机表示”。载于：英国皇家气象学会季刊 125.560（1999年），第2887–2908页。[10] Chongsheng Cao 和 Edriss S Titi。“大尺度海洋和大气动力学三维黏性原始方程的整体适定性”。载于：数学年刊 （2007年），第245–267页。[11] Pranav Chandramouli、Etienne Mémin 和 Dominique Heitz。“采用动力学误差模型对湍流进行四维大尺度变分数据同化”。载于：计算物理学杂志 412（2020年），第109446页。[12] Pranav Chandramouli 等。“位置不确定性下采用流动模型对过渡尾流进行粗网格大涡模拟”。载于：*Computers & Fluids* 168（2018年），第170–189页。[13] Bertrand Chapron 等。“位置不确定性下的大尺度流动：一致的随机框架”。载于：英国皇家气象学会季刊144.710（2018年），第251–260页。[14] Igor Chueshov 和 Sergei Kuksin。“薄域中的随机脉冲强迫三维纳维–斯托克斯方程”。载于：理性力学与分析档案 188.1（2008年），第117–153页。

[15] Alex DD Craik 和 Sidney Leibovich。《朗缪尔环流的一个合理模型》。载于：流体力学杂志 73.3（1976年），第401–426页。[16] Dan Crisan、Franco Flandoli 和 Darryl Holm。《三维随机欧拉流体方程的解性质》。载于：非线性科学杂志 29.3（2019年），第813–870页。[17] Arnaud Debussche、Nathan Glatt-Holtz 和 Roger Temam。《抽象流体模型的局部鞅解与逐路径解》。载于：物理学*D*：非线性现象 240.14-15（2011年7月），第1123–1144页。doi: 10.1016/j.physd.2011.03.009。网址：https://doi.org/10.1016%2Fj.physd.2011.03.009。[18] Arnaud Debussche、Bérenger Hug 和 Etienne Mémin。《纳维–斯托克斯方程的一致随机大尺度表述》。载于：数学流体力学杂志 25.1（2023年1月），第19页。doi: 10.1007/s00021-023-00764-0。网址：https://doi.org/10.1007/s00021-023-00764-0。[19] Arnaud Debussche、Étienne Mémin 和 Antoine Moneyron。弱化静水假设下海洋原始方程的随机解释。2025年。arXiv: 2502.14946 [math.AP]。网址：https://arxiv.org/abs/2502.14946。[20] Arnaud Debussche 等。《乘性白噪声驱动的海洋与大气三维随机原始方程的整体存在性与正则性》。载于：非线性 25.7（2012年6月），第2093–2118页。doi: 10.1088/0951-7715/25/7/2093。网址：https://doi.org/10.1088%2F0951-7715%2F25%2F7%2F2093。[21] Franco Flandoli、Lucio Galeati 和 Dejun Luo。《输运噪声导致的延迟爆破》。载于：偏微分方程通讯 46.9（2021年），第1757–1788页。doi: 10. 1080 / 03605302. 2021 .1893748。电子版：https: / /doi . org/ 10. 1080 / 03605302 . 2021 . 1893748。网址：https : / / doi . org / 10 . 1080 / 03605302 . 2021 . 1893748。[22] Franco Flandoli、Lucio Galeati 和 Dejun Luo。《白噪声湍流作用下边界处的涡旋热交换》。载于：英国皇家学会哲学汇刊*A*辑：数学、物理与工程科学 380.2219（2022年1月31日），第20210096页。doi: 10.1098/rsta.2021.0096。网址：https://doi.org/10.1098/ rsta.2021.0096。[23] Franco Flandoli 和 Dariusz Gatarek。《随机纳维–斯托克斯方程的鞅解与平稳解》。载于：概率论及其相关领域 102.3（1995年9月），第367–391页。issn: 1432-2064。doi: 10.1007/BF01192467。网址：https://doi. org/10.1007/BF01192467。[24] Franco Flandoli、Massimiliano Gubinelli 和 Enrico Priola。《随机扰动下输运方程的适定性》。载于：数学新进展 180.1（2010年4月1日），第1–53页。doi: 10.1007/s00222-009-0224-4。网址：https://doi. org/10.1007/s00222-009-0224-4。[25] Franco Flandoli 和 Dejun Luo。《高模输运噪声改善三维纳维–斯托克斯方程涡量爆破的控制》。载于：概率论及其相关领域 180.1（2021年6月1日），第309–363页。doi: 10 . 1007 / s00440 - 021 - 01037 - 5。网址：https://doi.org/10.1007/s00440-021-01037-5。[26] Franco Flandoli 和 Francesco Russo。《正则性高于1/2的高斯噪声随机输运中的耗散减弱效应》。载于：*arXiv* 2305.19293（2023年）。arXiv: 2305.19293 [math.PR]。[27] Christian LE Franzke 和 Terence J O'Kane。非线性与随机气候动力学。剑桥大学出版社，2017年。[28] Christian LE Franzke 等。《随机气候理论与建模》。载于：*Wiley*跨学科评论：气候变化 6.1（2015年），第63–78页。

[29] Nathan Glatt-Holtz 和 Mohammed Ziane。《随机纳维–斯托克斯系统的强路径解》。载于：*Advances in Differential Equations* 14.5/6（2009年），第567–600页。doi: 10.57262/ade/1355867260。网址：https://doi.org/10.57262/ ade/1355867260。[30] Daniel Goodair、Dan Crisan 和 Oana Lang。《随机偏微分方程极大解的存在性与唯一性及其在黏性流体方程中的应用》。载于：*Stochastics andPartial Differential Equations: Analysis and Computations*（2023年），第1–64页。[31] Souleymane K Harouna 和 Etienne Mémin。《雷诺

s

输运定理：重新审视大尺度建模”。载于：*Computers & Fluids* 156（2017年），第 456–469 页。[32] Oana Lang、Dan Crisan 和 Etienne Mémin。“位置不确定性下随机旋转浅水模型的解析性质”。载于：*Journal of Math-ematical Fluid Mechanics* 25.2（2023年2月20日），第 29 页。doi：10.1007/s00021-023- 00769-9。url：https://doi.org/10.1007/s00021-023-00769-9。[33] CE Leith。“亚网格尺度模型中的随机反向散射：平面剪切混合层”。载于：*Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 2.3（1990年），第 297–299 页。[34] Jinkai Li 和 Edriss S. Titi。“原始方程作为纳维–斯托克斯方程的小长宽比极限：静力近似的严格论证”。载于：*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 124（2019年），第 30–58 页。issn：0021-7824。doi：https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.04.006。url：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021782418300503。[35] Andrew J Majda、Ilya Timofeyev 和 Eric Vanden Eijnden。“随机气候预测模型”。载于：*Proceedings of the National Academy of Sciences* 96.26（1999年），第 14687–14691 页。[36] Paul J Mason 和 David J Thomson。“边界层大涡模拟中的随机反向散射”。载于：流体力学杂志 242（1992年），第 51–78 页。[37] James C McWilliams、Peter P Sullivan 和 Chin-Hoh Moeng。“海洋中的朗缪尔湍流”。载于：流体力学杂志 334（1997年），第 1–30 页。[38] Etienne Mémin。“位置不确定性下的流体流动动力学”。载于：*Geophysical& Astrophysical Fluid Dynamics* 108.2（2014年），第 119–146 页。[39] Remigijus Mikulevicius 和 Boris L Rozovskii。“随机纳维–斯托克斯方程的全局 L_2 解”。载于：*The Annals of Probability* 33.1（2005年1月1日），第 137–176 页。doi：10 . 1214 / 009117904000000630。url：https : / / doi . org / 10 . 1214 / 009117904000000630。[40] Joseph Pedlosky。地球物理流体动力学。Springer Science & Business Media，2013年。[41] Valentin Resseguier、Etienne Mémin 和 Bertrand Chapron。“位置不确定性下的地球物理流动，第一部分：随机输运与一般模型”。载于：*Geo-physical & Astrophysical Fluid Dynamics* 111.3（2017年），第 149–176 页。[42] Valentin Resseguier、Etienne Mémin 和 Bertrand Chapron。“位置不确定性下的地球物理流动，第二部分：准地转与高效集合扩散”。载于：*Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 111.3（2017年），第 177–208 页。[43] Valentin Resseguier、Etienne Mémin 和 Bertrand Chapron。“位置不确定性下的地球物理流动，第三部分：强湍流条件下的表面准地转与锋面动力学”。载于：*Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 111.3（2017年），第 209–227 页。[44] Valentin Resseguier 等。“正交分解模型与小尺度流动分析中的随机建模和扩散模态”。载于：流体力学杂志 826（2017年），第 888–917 页。

[45] Valentin Resseguier 等。“非定常流体动力学降阶模型中的截断相关不确定性量化”。载于：*SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quan-tification* 9.3（2021年），第 1152–1183 页。[46] François G Schmitt。“关于布辛涅斯克湍流黏性假说：历史评述及对其有效性的直接评估”。载于：力学报告 335.9-10（2007年），第 617–627 页。[47] Glenn Shutts。“用于集合预报系统的动能反散射算法”。载于：英国皇家气象学会季刊：大气科学、应用气象学与物理海洋学期刊 131.612（2005年），第 3079–3102 页。[48] Gilles Tissot、André VG Cavalieri 和 Etienne Mémin。“湍流槽道流中的随机线性模态”。载于：流体力学杂志 912（2021年），A51。[49] Francesco L Tucciarone、Etienne Mémin 和 Long Li。“位置不确定性下的原始方程：解析描述与模型开发”。载于：上层海洋动力学中的随机输运。Bertrand Chapron 等编。沙姆：施普林格国际出版，2023年，第 287–300 页。isbn：978-3-031-18988-3。[50] Geoffrey K Vallis。大气与海洋流体动力学。剑桥大学出版社，2017年。