arXiv:2602.04424v1 [math.SP] 4 Feb 2026

S-预解算子的切片超全纯性与边界条件

FRANCESCO MANTOVANI*

Abstract. 关于 S-谱的谱理论，其基础可追溯至量子力学的四元数框架。四元数算子的 S-谱概念作为切片超全纯函数演算中的自然谱应运而生，该演算称为 S-函数演算，也应用于四元数谱定理。这一谱理论还可推广至 Clifford 算子。它与经典复谱理论的一个关键区别，在于 S-谱的定义是关于算子 T的二阶定义，而 S-预解算子最终是两个不同算子的乘积。本研究探讨在特定边界条件下， S-预解算子的解析性，以及 S-谱问题。关于 S-谱的谱理论也为经典谱理论提供了更深入的见解。

AMS 分类：47A10，47A60
关键词： S-预解算子、切片超全纯函数、边界条件。

Contents

1. 引言 1 2. Clifford 代数与Clifford 模预备知识 3 3. 带边界条件的 S-谱 5 4. 带边界条件的 S-预解算子的连续性 7 5. 带边界条件的 S-预解算子的解析性 11 6. 结论性评论 16 声明与陈述 17 参考文献 17

1. Introduction

向量算子出现在多个科学领域中，可以解释为Banach模上的Clifford右线性算子，并可通过以下方式进行识别

$$T = (T_0, \dots, T_{|\mathcal{A}|}) \longleftrightarrow T = \sum_{A \in \mathcal{A}} e_A T_A$$

其中， e_A 遍历虚单位 e_1、 .. . 、 e_n 的所有可能的有序乘积，这些乘积生成Clifford 代数 $\mathbb{R}_n$。

在克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ 上的巴拿赫模 V 中，右线性算子 $T : \mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$ 的谱理论与经典复数理论不同，因为谱参数 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 与算子 T 不可交换，因此谱的概念不再

*通讯作者。

与算子 $T-s$ 的可逆性相关，而是涉及二阶算子的可逆性

$$Q_s[T] := T^2 - 2s_0T + |s|^2 I, \quad \mathrm{dom}(Q_s[T]) = \mathrm{dom}(T^2).$$

由此引出 S-预解集和 S-谱的定义：

$$\rho_S(T) = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} : Q_s[T]^{-1} \in \mathcal{B}(V)\} \quad \text{and} \quad \sigma_S(T) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \rho_S(T),$$

其中， $\mathcal{B}(V)$ 表示有界右线性算子的集合。在著作 [7] 的引言中，介绍了 S-谱的发现过程。

对于每个 $s \in \rho_S(T)$，逆算子 $Q_s[T]^{-1}$ 称为 T 在 s 处的伪预解算子。然而，与复数情形的第二个主要区别在于，算子值函数

$$\rho_S(T) \ni s \longmapsto Q_s[T]^{-1} \in \mathcal{B}(V),$$

并非切片超全纯函数（即这一非交换情形所需的全纯性概念），而预解算子的作用则由左、右 S-预解算子承担

$$S_L^{-1}(s,T) = Q_s[T]^{-1}\overline{s} - TQ_s[T]^{-1} \quad \text{and} \quad S_R^{-1}(s,T) = (\overline{s} - T)Q_s[T]^{-1}, \quad s \in \rho_S(T),$$

它们分别是定义在 $\rho_S(T)$ 上的右切片超全纯函数和左切片超全纯函数。接着，这些预解算子被用于定义 Clifford 算子的 S-泛函演算，以及其他基于切片超全纯性概念的泛函演算。关于 S-谱的谱理论的更多细节，可参见 [1, 2, 6, 7, 16], ，其中还介绍了切片超全纯函数理论的发展。

尽管我们的理论适用于巴拿赫模，但鉴于文献中已有明确结果，我们将边界条件的讨论限制在希尔伯特模 $H^1(\Omega)$ 上。Clifford 算子的一个主要例子是所谓的非恒定系数梯度算子

$$T = \sum_{i=1}^{n} e_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathrm{dom}(T) = H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

其中，系数 $a_1, \ldots, a_n$ 定义在某个最小光滑域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上，该域位于 $n \geq 3$ 维空间中。该算子表示各种物理定律，例如描述热传导的傅里叶定律，以及描述质量传递扩散的菲克定律，并在 [12] 中针对各种边界条件进行了研究。由于谱的概念与二阶算子 $Q_s[T]$ 的可逆性相关，且该算子依赖于谱参数 s，因此考虑如下谱问题是很自然的

$$\begin{cases} T^2u - 2s_0Tu + |s|^2u = f; \\ u \text{ satisfies } (B); \end{cases}$$

其中，(B) 表示某些边界条件，例如狄利克雷型或罗宾型边界条件；例如，考虑 $u \in \mathrm{dom}(T^2)$ 和 $f \in L^2(\Omega)$。然而，如果我们将边界条件施加在一阶微分算子的定义域层面，例如

$$\mathrm{dom}(T) = \{u \in H^1(\Omega) : u \text{ satisfies } (B)\},$$

那么我们将得到

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(T^2) &= \{u \in \mathrm{dom}(T) : Tu \in \mathrm{dom}(T)\} \\ &= \{u \in H^1(\Omega) : Tu \in H^1(\Omega) \text{ and both } Tu \text{ and } u \text{ satisfy } (B)\}, \end{aligned}$$

而条件 $s \in \rho_S(T)$ 将对应于下面这个不太自然的问题

$$\begin{cases} T^2u - 2s_0Tu + |s|^2u = f; \\ u \text{ satisfies } (B); \\ Tu \text{ satisfies } (B). \end{cases}$$

本文探讨将算子 T与伪预解算子 $Q_s[T]$分离后，对 S-谱这一概念所产生的影响；也就是说，我们研究 $Q_s[T]$ 的可逆性时，不再是在根据 T的定义自然得到的定义域 $\mathrm{dom}(T^2)$ 上考察，而仅在其一个子空间上考察。这样一来， T 的定义域中便只需包含与函数正则性有关的条件，而我们则在另加一些关于函数在定义域 Ω 边界处取值的条件后，研究 $Q_s[T]$ 的可逆性。更准确地说，给定一个定义域为 $\mathrm{dom}(T)$ 的闭算子 T ，我们引入子空间 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$，它由满足给定边界条件的函数构成，并将 $Q_{s,\ B}[T]$ 定义为 $Q_s[T]$ 在 $\mathrm{dom}(T^2)$ 与 B交集上的限制。带边界条件B 的 S-谱，是指使得 $Q_{s,\ B}[T]$ 不具有有界逆算子的副向量 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 所构成的集合。采用这一新定义，我们得到一种谱的概念，它保留了经典谱的一些性质，但相关预解算子的全纯性除外。事实上，我们将看到， S-预解算子的全纯性与 T 和 $Q_{s,\ B}[T]$的逆算子能否交换有关。若不施加边界条件（即 $B = \mathrm{dom}(T)$），总能做到这一点；但当 B 非平凡时，确定这些算子在哪些点处可交换便会更加复杂。我们将证明的主要结果是：若 $s \notin \mathbb{R}$，则满足 S-预解算子的柯西-黎曼方程的向量 $v \in V$恰好是满足以下条件的向量

$$TQ_{s,B}[T]^{-1}Q_{s,B}[T]^{-1}v = Q_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}v,$$

也就是说， T 和 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}$ 在 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}$上可交换。对于实点，情况略有不同；事实上，满足柯西-黎曼方程的向量 $v \in V$恰好是满足以下条件的向量:

$$T[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]Q_{s,B}[T]^{-1}v = s[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]Q_{s,B}[T]^{-1}v,$$

其中

$$[T, Q_{s,B}[T]^{-1}] := TQ_{s,B}[T]^{-1} - Q_{s,B}[T]^{-1}T,$$

也就是说，$[T, Q_{s,B}[T]]^{-1}Q_{s,\ B}[T]^{-1}v$是 T关于特征值s的特征向量（可能为零）。

变系数梯度算子并非唯一适用于这一谱概念的算子。事实上，在 [4] 中，作者研究了双曲空间和球面空间中带有狄利克雷和罗宾型边界条件的狄拉克算子。更一般地，这一理论可应用于具有不同边界条件的流形上的狄拉克算子。

本文的组织结构如下：第1节为引言。第2节介绍有关克利福德代数和克利福德模的必要预备知识。第3节考察带边界条件的 S-谱。第4节讨论带边界条件的 S-预解算子的连续性，第5节则阐述这些算子的解析性。

2. Preliminaries on Clifford Algebras and Clifford modules

本节将确定本文的代数与泛函分析框架。本文所考虑的底层代数是实克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ ，其基于 n虚单位 e_1，.....， e_n，这些虚单位满足以下关系:

$$e_i^2 = -1 \qquad \text{and} \qquad e_ie_j = -e_je_i, \qquad i \neq j \in \{1, \dots, n\}.$$

更准确地说， $\mathbb{R}_n$ 定义为

$$\mathbb{R}_n := \Big\{ \sum\nolimits_{A\in\mathcal{A}} s_A e_A \;\Big|\; s_A \in \mathbb{R},\, A \in \mathcal{A} \Big\},$$

使用指标集

$$\mathcal{A} := \big\{ (i_1, \ldots, i_r) \;\big|\; r \in \{0, \ldots, n\},\, 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n \big\},$$

以及基向量 $e_A := e_{i_1} \ldots e_{i_r}$。注意，对于 $A = \emptyset$，虚单位的空乘积是实数 $e_\emptyset = 1$。此外，对于每个克利福德数 $s \in \mathbb{R}_n$，我们定义其共轭和绝对值

$$\overline{s} := \sum\nolimits_{A\in\mathcal{A}} (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} s_A e_A \qquad \text{and} \qquad |s|^2 := \sum\nolimits_{A\in\mathcal{A}} s_A^2. \tag{2.1}$$

克利福德数的一个重要子集是所谓的副向量

$$\mathbb{R}^{n+1} := \big\{ s_0 + s_1 e_1 + \cdots + s_n e_n \;\big|\; s_0, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R} \big\}.$$

对于任意副向量 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义其虚部

$$\operatorname{Im}(s) := s_1 e_1 + \cdots + s_n e_n,$$

式 (2.1) 中的共轭和模则简化为

$$\overline{s} = s_0 - s_1 e_1 - \cdots - s_n e_n \qquad \text{and} \qquad |s|^2 = s_0^2 + s_1^2 + \cdots + s_n^2.$$

模为 1 的纯虚副向量所构成的球面定义为

$$\mathbb{S} := \big\{ J \in \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; J_0 = 0,\, |J| = 1 \big\}. \tag{2.2}$$

任意元素 $J \in \mathbb{S}$ 满足 $J^2 = -1$，因此相应的超平面

$$\mathbb{C}_J := \big\{ x + Jy \;\big|\; x, y \in \mathbb{R} \big\}$$

是复数的一个同构副本。此外，对于每个抛物向量 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$，我们考虑相应的（$n-1$）球面

$$[s] := \big\{ s_0 + J|\operatorname{Im}(s)| \;\big|\; J \in \mathbb{S} \big\}.$$

若子集 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 满足对每个 $s \in U$都有 $[s] \subseteq U$，则称其为轴对称。

接下来，我们引入切片超全纯函数 $f : U \to \mathbb{R}_n$ 的概念，它们定义在轴对称开集 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上。

定义 2.1（切片超全纯函数）。设 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 为开集且轴对称，并考虑

$$\mathcal{U} := \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x + \mathbb{S}y \subseteq U \big\}.$$

若存在连续可微函数 $f_0,\ f_1 \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}_n$，使得对每个 $(x,\ y) \in \mathcal{U}$ 都有：则称函数 $f : U \to \mathbb{R}_n$ 为左（分别为右）切片超全纯函数。

i) 函数 f 对每个 $J \in \mathbb{S}$ 都存在如下表示

$$f(x + Jy) = f_0(x, y) + J f_1(x, y), \quad \Big(\text{resp. } f(x + Jy) = f_0(x, y) + f_1(x, y) J\Big). \tag{2.3}$$

ii) 函数 $f_0,\ f_1$ 满足相容条件

$$f_0(x, -y) = f_0(x, y) \qquad \text{and} \qquad f_1(x, -y) = -f_1(x, y). \tag{2.4}$$

iii) 函数 f_0, f_1 满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_0(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y). \tag{2.5}$$

U 上的左（分别为右）切片超全纯函数类记作 $\mathcal{SH}_L(U)$（分别为 $\mathcal{SH}_R(U)$）。在 f_0 和 f_1 取实值的特殊情形下，我们称 f 本征，本征函数空间记作 $\mathcal{N}(U)$。

接下来，我们将关注 $\mathbb{R}_n$ 上的巴拿赫模。对于实巴拿赫空间 $V_{\mathbb{R}}$ 及其相应的范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}^2 = \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}}$，我们定义相应的巴拿赫模

$$V := \Big\{ \sum\nolimits_{A\in\mathcal{A}} v_A \otimes e_A \ \Big|\ v_A \in V_{\mathbb{R}},\, A \in \mathcal{A} \Big\},$$

并为其赋予范数

$$\|v\|^2 := \sum\nolimits_{A\in\mathcal{A}} \|v_A\|_{\mathbb{R}}^2, \qquad v \in V.$$

对于任意向量 $v = \sum_{A\in\mathcal{A}} v_A \otimes e_A \in V$ 和任意克利福德数 $s = \sum_{B\in\mathcal{A}} s_B e_B \in \mathbb{R}_n$，我们定义左数乘和右数乘

$$sv := \sum\nolimits_{A,B\in\mathcal{A}} (s_B v_A) \otimes (e_B e_A), \qquad \text{(左乘)}$$

$$vs := \sum\nolimits_{A,B\in\mathcal{A}} (v_A s_B) \otimes (e_A e_B). \qquad \text{(右乘)}$$

根据 [12, 引理 2.1]，我们回顾这些乘积众所周知的性质

$$\|sv\| \le 2^{\frac{n}{2}} |s| \|v\| \qquad \text{and} \qquad \|vs\| \le 2^{\frac{n}{2}} |s| \|v\|, \qquad \text{if } s \in \mathbb{R}_n, \tag{2.6a}$$

$$\|sv\| = \|vs\| = |s| \|v\|, \qquad \text{if } s \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.6b}$$

For 任意巴拿赫模 V 我们将有界右线性算子的集合记为

$$\mathcal{B}(V) := \big\{ T : V \to V \text{ right-linear} \ \big|\ T \text{ is bounded} \big\},$$

以及 闭算子 空间

$$\mathcal{K}(V) := \big\{ T : V \to V \text{ right-linear} \ \big|\ \operatorname{dom}(T) \subseteq V \text{ is right linear, } T \text{ is closed} \big\}.$$

与复巴拿赫空间不同，在 $\mathbb{R}_n$ 上的巴拿赫模中，闭算子 $T \in \mathcal{K}(V)$ 的谱与该算子的有界可逆性相关

$$Q_s[T] := T^2 - 2s_0 T + |s|^2 I, \qquad \text{with } \operatorname{dom}(Q_s[T]) = \operatorname{dom}(T^2).$$

这启发了以下 S-谱的定义。

定义 2.2 (S-谱): 对于每个 $T \in \mathcal{K}(V)$，定义 S-预解集 和S-谱

$$\rho_S(T) := \big\{ s \in \mathbb{R}^{n+1} \ \big|\ Q_s[T]^{-1} \in \mathcal{B}(V) \big\} \qquad \text{and} \qquad \sigma_S(T) := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \rho_S(T). \tag{2.7}$$

Mo此外，对于每个 $s \in \rho_S(T)$，我们定义左和右 S-预解算子

$$S_L^{-1}(s,T) := Q_s[T]^{-1}\overline{s} - T Q_s[T]^{-1} \qquad \text{and} \qquad S_R^{-1}(s,T) := (\overline{s} - T) Q_s[T]^{-1}. \tag{2.8}$$

3. The S-spectrum with boundary conditions

设 V 是克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ 上的巴拿赫模。对于右线性算子 $T\colon \operatorname{dom}(T) \subseteq V \to V$ 和 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义

$$Q_s[T] := T^2 - 2s_0 T + |s|^2 I : \operatorname{dom}(T^2) \subseteq V \to V.$$

我们考虑一个右子模 $B \subseteq$ 定义域(T)，并定义

$$Q_{s,B}[T] := Q_s[T]_{|\operatorname{dom}_B(T^2)} : \operatorname{dom}_B(T^2) \subseteq V \to V$$

with

$$\operatorname{dom}_B(T^2) := \operatorname{dom}(T^2) \cap B.$$

以下关于与 S-预解算子相关的定义域的分类，对于理解 S-谱理论至关重要：

(i) $\mathrm{dom}(T)$ 是与算子 T 相关的定义域，(ii) $\mathrm{dom}_B(T^2)$ 是与 S- 谱相关的定义域。

定义 3.1. 我们定义带边界条件 B 的 T 的 S-预解集为

$$\rho_{S,B}(T) = \left\{ s \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ Q_{s,B}[T]^{-1} \in \mathcal{B}(V) \ \right\}$$

以及带边界条件 B 的 T 的 S-谱 $\sigma_{S,B}(T)$ 为

$$\sigma_{S,B}(T) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \rho_{S,B}(T).$$

定义 3.2. 设 T 是一个闭右线性算子，且 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 是 V的一个右子模。对于 $s \in \rho_{S,B}(T)$，我们将 左 S-预解算子 定义为

$$S_{L,B}^{-1}(s,T) := Q_{s,B}[T]^{-1}\overline{s} - TQ_{s,B}[T]^{-1},$$

以及 右 S-预解算子定义为

$$S_{R,B}^{-1}(s,T) = (\overline{s} - T)Q_{s,B}[T]^{-1}.$$

注 3.3. 我们指出以下事实：

(i) 若从算子 T: $\mathrm{dom}(T) \subset V \to V$满足 $\mathrm{dom}(T^2) \subseteq B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 的情形出发，那么显然 $\mathrm{dom}_B(T^2) = \mathrm{dom}(T^2)$ 且 $Q_s[T] = Q_{s,\ B}[T]$，因此 S-预解式和 S-谱的定义与经典定义一致。

(ii) 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个有界区域，并考虑变系数梯度算子 $T = \sum_{i=1}^n e_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$，其 $\mathrm{dom}(T) = H^1(\Omega)$ 如 [12] 中所述。若设 $B = H_0^1(\Omega)$，则 $\mathrm{dom}_B(T^2) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，而求得 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 等价于判定对于每个 $f \in L^2(\Omega)$，边值问题

$$\begin{cases} T^2 u - 2s_0 Tu + |s|^2 u = f & \text{on } \Omega, \\ \mathrm{tr}(u) = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

在 $\mathrm{dom}(T^2)$ 中有唯一解，且

$$f \longmapsto u := (T^2 - 2s_0 T + |s|^2 I)^{-1} f$$

是一个有界算子。

与 S-谱的经典理论的一个重要区别在于，一般来说，T和$Q_{s,\ B}[T]^{-1}$在 $\mathrm{dom}(T)$ 上并不交换，其中 $s \in \rho_{S,\ B}(T)$。事实上，由于

$$TQ_s[T] = Q_s[T]T \quad \text{on } \mathrm{dom}(T^3), \tag{3.1}$$

那么，利用经典的 S-预解式概念，对于 $s \in \rho_S(T)$，我们有

$$TQ_s[T]^{-1} = Q_s[T]^{-1}T \quad \text{on } \mathrm{dom}(T).$$

然而，若$s \in \rho_{S,\ B}(T)$且 $\mathrm{dom}(T^2) \not\subset B$，则 T与$Q_{s,\ B}[T]^{-1}$ 在 $\mathrm{dom}(T)$ 上并不一定交换。我们将在第5节中看到，这会如何改变对 S-预解算子解析性的研究。在下一个命题中，我们将分析这一交换性质成立的条件。

命题 3.4. 设 T: $\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$是一个右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 是一个右子模，且 $s \in \rho_{S,B}(T)$。则

$$TQ_{s,B}[T]^{-1}w = Q_{s,B}[T]^{-1}Tw \ \textit{ if and only if } \ w = Q_{s,B}[T]v \textit{ for } v \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B).$$

证明. 对于每个 $v \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B)$，我们知道 $v \in \mathrm{dom}_B(T^2)$，并且 $Tv \in \mathrm{dom}_B(T^2)$。因此，利用等式 (3.1)，可得

$$TQ_{s,B}[T]v = TQ_s[T]v = Q_s[T]Tv = Q_{s,B}[T]Tv.$$

现在令 $s \in \rho_{S,\ B}(T)$，若 $w = Q_{s,\ B}[T]v$ 且 $v \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B)$，则显然有 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}w = v \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B)$，由上面的论证可得

$$Q_{s,B}[T]TQ_{s,B}[T]^{-1}w = TQ_{s,B}[T]Q_{s,B}[T]^{-1}w = Tw,$$

因此

$$TQ_{s,B}[T]^{-1}w = Q_{s,B}[T]^{-1}Tw.$$

反之，若 $TQ_{s,\ B}[T]^{-1}w = Q_{s,\ B}[T]^{-1}Tw$ 成立，则

$$T\big(Q_{s,B}[T]^{-1}w\big) = Q_{s,B}[T]^{-1}\big(Tw\big) \in \mathrm{dom}_B(T^2) = \mathrm{dom}(T^2) \cap B,$$

因此 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}w \in T^{-1}(B) \cap \mathrm{dom}(T^3)$。此外，根据定义 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}w \in B$。于是 $w = Q_{s,\ B}[T](Q_{s,\ B}[T]^{-1}w)$，其中 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}w \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B)$。证明完毕。□

注 3.5。令 $(T_{|B},\ B)$ 为由 $T_{|B}x = Tx$ 对所有 $x \in B$ 定义的算子，即将算子 T 限制在满足边界条件 B 的子空间上，则有

$$\mathrm{dom}(T_{|B}^2) = \{u \in \mathrm{dom}(T_{|B}) \,:\, Tu \in \mathrm{dom}(T_{|B})\} = \{u \in B \,:\, Tu \in B\} = B \cap T^{-1}(B),$$

因此，前一个命题可以改写为：$TQ_{s,B}[T]^{-1}w = Q_{s,B}[T]^{-1}Tw$ 当且仅当$w \in Q_{s,B}[T](\mathrm{dom}(T^3) \cap \mathrm{dom}(T_{|B}^2))$。

由于$Q_{s,B}[T]^{-1}$ 与 T 的可交换性将在全文中发挥关键作用，因此介绍这些算子的交换子概念可能会很有用

$$[T, Q_{s,B}[T]^{-1}] := TQ_{s,B}[T]^{-1} - Q_{s,B}[T]^{-1}T : \mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V.$$

现在，我们可以将命题 3.4 的内容重新表述为

$$\ker[T, Q_{s,B}[T]^{-1}] = \{Q_{s,B}[T]v \,:\, v \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B)\}.$$

4. Continuity of the S-resolvent operators with boundary conditions

在 [6, 第 3 节1], 中，作者证明了伪预解算子 $Q_s[T]^{-1}$ 以及 S-预解算子的连续可微性，作为 S-预解算子切片超全纯性的预备结果。然而，这些证明依赖于定义域 $\mathrm{dom}(T)$ 上伪预解算子 $Q_s[T]^{-1}$ 与算子 T 的可交换性。本节将修订这些结果的证明，以便在伪预解算子和 S-预解算子与边界条件相关联时，获得类似的性质。

命题 4.1。设 $T{:}\,\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$是一个闭右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 是一个右子模，且 $q \in \rho_{S,B}(T)$。对于 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$，令

$$\mathcal{J}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{q,B}[T]^{-1}(\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^n, \tag{4.1}$$

其中

$$\Lambda(q,s) := Q_{q,B}[T] - Q_{s,B}[T] = 2(s_0 - q_0)T + (|q|^2 - |s|^2)I.$$

那么该级数收敛至 $Q_{s,B}[T]^-$ 并且在任意闭轴对称邻域上关于 $\mathcal{B}(V)$ 一致收敛

$$C_\varepsilon(q) = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, d_S(s,q) \le \varepsilon\}$$

与 q 的

$$d_S(s,q) = \max\{2|s_0 - q_0|, \Big||s|^2 - |q|^2\Big|\}$$

and

$$\varepsilon < \frac{1}{\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\| + \|Q_{q,B}[T]^{-1}\|}.$$

特别地， $C_\varepsilon(q) \subseteq \rho_{S,B}(T)$ 以及 $\rho_{S,B}(T)$ 是开集。

证明。令 $q \in \rho_{S,B}(T)$。可以像 [6,Theorem 3.1.2] 中那样证明，集合 $C_\varepsilon(q)$ 是 q 的闭轴对称邻域。现在令

$$\varepsilon < 1/(\left\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\right\| + \left\|Q_{q,B}[T]^{-1}\right\|)$$

以及 $s \in C_\varepsilon(q)$，我们有

$$Q_{s,B}[T] = Q_{q,B}[T] - \Lambda(q,s),$$

因此

$$Q_{s,B}[T] = (I - \Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})Q_{q,B}[T].$$

现在注意，对于任意 $s \in C_\varepsilon(q)$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\right\| &\leq 2|s_0 - q_0|\left\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\right\| + \left||q|^2 - |s|^2\right|\left\|Q_{q,B}[T]^{-1}\right\| \\ &\leq d_S(s,q)(\left\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\right\| + \left\|Q_{q,B}[T]^{-1}\right\|) \\ &\leq \varepsilon(\left\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\right\| + \left\|Q_{q,B}[T]^{-1}\right\|) < 1,\end{aligned}$$

这意味着 $(I - \Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})$ 有界可逆，因此 $Q_{s,B}[T]$ 是双射且具有有界逆算子

$$Q_{s,B}[T]^{-1} = Q_{q,B}[T]^{-1}(I - \Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^{-1} \in \mathcal{B}(V).$$

这意味着 $s \in \rho_{S,B}(T)$，因此 $\rho_{S,B}(T)$ 是开集。此外，我们得到

$$Q_{s,B}[T]^{-1} = Q_{q,B}[T]^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}Q_{q,B}[T]^{-1}(\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^n.$$

□

命题 4.2. 设 $T\colon \mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$ 是一个闭右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 为一个右子模，并假设 $\rho_{S,B}(T) \neq \emptyset$。则算子值函数

$$s : \rho_{S,B}(T) \longmapsto Q_{s,B}[T]^{-1} \in \mathcal{B}(V)$$

and

$$s : \rho_{S,B}(T) \longmapsto TQ_{s,B}[T]^{-1} \in \mathcal{B}(V)$$

是连续可微的。

证明. 设 $q \in \rho_{S,B}(T)$，根据命题 4.1，可在 q 的邻域内写成

$$\begin{aligned}Q_{s,B}[T]^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}Q_{q,B}[T]^{-1}(\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^n \\ &= Q_{q,B}[T]^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}Q_{q,B}[T]^{-1}(\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^n\end{aligned}$$

此外，命题 4.1 的证明表明

$$\left\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\right\| \leq d_S(s,q)(\left\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\right\| + \left\|Q_{q,B}[T]^{-1}\right\|) \longrightarrow 0 \text{ as } s \to q,$$

因此，由于该级数一致收敛，我们推得

$$Q_{s,B}[T]^{-1} \to Q_{q,B}[T]^{-1} \text{ in } \mathcal{B}(V).$$

现在令 $s \in C_\varepsilon(q)$，其中

$$\varepsilon = \frac{1}{2\big(\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\| + \|Q_{q,B}[T]^{-1}\|\big)}.$$

由于 T 是闭的，我们可以将 T 作用于Q_s的级数展开$_{,B}[T]$ 并得到

$$TQ_{s,B}[T]^{-1} = TQ_{q,B}[T]^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1})^n,$$

此外，与之前一样，我们有

$$\begin{aligned}\big\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\big\| &\le d(s,q)\big(\big\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\| + \big\|Q_{q,B}[T]^{-1}\big\|\big)\\ &\le \varepsilon\big(\big\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\| + \big\|Q_{q,B}[T]^{-1}\big\|\big) < \frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\big\|TQ_{s,B}[T]^{-1}\big\| &\le \big\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\|\sum_{n=0}^{\infty}\big\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\big\|^n\\ &\le \big\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\big\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\|.\end{aligned}$$

现在注意到

$$\begin{aligned}TQ_{s,B}[T]^{-1} - TQ_{q,B}[T]^{-1} &= TQ_{s,B}[T]^{-1}(I - Q_{s,B}[T]Q_{q,B}[T]^{-1})\\ &= TQ_{s,B}[T]^{-1}(Q_{q,B}[T] - Q_{s,B}[T])Q_{q,B}[T]^{-1}\\ &= TQ_{s,B}[T]^{-1}\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1},\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\big\|TQ_{s,B}[T]^{-1} - TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\| &\le \big\|TQ_{s,B}[T]^{-1}\big\|\big\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\big\|\\ &\le 2\big\|TQ_{q,B}[T]^{-1}\big\|\big\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\big\| \longrightarrow 0 \text{ as } s \to q,\end{aligned}$$

因为我们之前已经证明了 $\big\|\Lambda(q,s)Q_{q,B}[T]^{-1}\big\| \to 0$ 当 $s \to q$时。

这证明了这两个函数是连续的，接下来还需证明它们是连续可微的。对于 $s = x + Jy \in \rho_{S,B}(T)$，根据导数定义直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}Q_{s,B}[T]^{-1} &= \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}\Big(Q_{x+Jy+h,B}[T]^{-1} - Q_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big)\\ &= \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}Q_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(2hT - 2hx - h^2\Big)Q_{x+Jy+h,B}[T]^{-1}\end{aligned}$$

因此我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}Q_{s,B}[T]^{-1} = 2Q_{s,B}[T]^{-1}(T-x)Q_{s,B}[T]^{-1} = 2Q_{s,B}[T]^{-1}(TQ_{s,B}[T])^{-1} - 2xQ_{s,B}[T]^{-2}, \quad (4.2)$$

它是 s中连续函数乘积之和，因此在 s中连续。类似地，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}Q_{s,B}[T]^{-1} &= \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}\Big(Q_{x+Jy+Jh,B}[T]^{-1} - Q_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big)\\ &= \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}Q_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(Q_{x+Jy,B}[T] - Q_{x+Jy+Jh,B}[T]\Big)Q_{x+Jy+Jh,B}[T]^{-1}\\ &= \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}Q_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(-2yh - h^2\Big)Q_{x+Jy+Jh,B}[T]^{-1},\end{aligned}$$

因为

$$Q_{x+Jy,B}[T]-Q_{x+Jy+Jh,B}[T]=T^2-2xT+x^2+y^2-(T^2-2xT+x^2+(y+h)^2)$$
$$=y^2-(y+h)^2=-2yh-h^2,$$

因此我们得到

$$\frac{\partial}{\partial y}Q_{s,B}[T]^{-1}=-2yQ_{s,B}[T]^{-2}, \tag{4.3}$$

与之前一样，它关于 s连续。
现在，为了证明$Q_{s,\ B}[T]^{-1}$ 连续可微，我们将变量 $s\in\mathbb{R}^{n+1}$ 用其 $n+1$ 个实坐标表示为 $s=s_0+\sum_{i=1}^n s_ie_i$，并将函数$s\mapsto Q_{s,\ B}[T]^{-1}$视为以下函数的复合:

$$s\longmapsto\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_0\\\sqrt{s_1^2+\cdots+s_n^2}\end{pmatrix}\longmapsto Q_{x+Jy,B}[T]^{-1},$$

其中 $J\in\mathbb{S}$ 固定。于是，关于 s_0 的偏导数对应于关于 x的偏导数；正如我们之前证明的，该偏导数存在且连续。此外，关于 s_i的偏导数（当 $y\neq 0$ 时取 $1\le i\le n$ ）可计算为

$$\frac{\partial}{\partial s_i}Q_{s,B}[T]^{-1}=-2yQ_{s,B}[T]^{-2}\frac{\partial v}{\partial s_i}=-2s_iQ_{s,B}[T]^{-1},$$

否则，若 $y=0$ （因此 $s\in\mathbb{R}$），我们可以直接取 $J=e_i$ ，此时关于 s_i 的偏导数与关于 y 的偏导数相同。两种情况下，关于 s_i 的导数都存在且连续，这就证明了该函数连续可微。现在我们对$TQ_{s,\ B}[T]^{-1}$作同样的处理，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}TQ_{s,B}[T]^{-1}&=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}\Big(TQ_{x+Jy+h,B}[T]^{-1}-TQ_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big)\\&=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}TQ_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(2hT-2hx-h^2\Big)Q_{x+Jy+h,B}[T]^{-1}\\&=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}TQ_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(2T-2x-h\Big)Q_{x+Jy+h,B}[T]^{-1},\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial x}TQ_{s,B}[T]^{-1}=2TQ_{s,B}[T]^{-1}(TQ_{s,B}[T]^{-1})-2xTQ_{s,B}[T]^{-2}, \tag{4.4}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}TQ_{s,B}[T]^{-1}&=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}\Big(TQ_{x+Jy+Jh,B}[T]^{-1}-TQ_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big)\\&=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}TQ_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(Q_{x+Jy,B}[T]-Q_{x+Jy+Jh,B}[T]\Big)Q_{x+Jy+Jh,B}[T]^{-1}\\&=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{1}{h}TQ_{x+Jy,B}[T]^{-1}\Big(-2yh-h^2\Big)Q_{x+Jy+Jh,B}[T]^{-1},\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial y}TQ_{s,B}[T]^{-1}=-2yTQ_{s,B}[T]^{-2}. \tag{4.5}$$

$TQ_{s,\ B}[T]^{-1}$ 的导数在 s 上是连续函数，并且运用与之前相同的论证，可以证明$TQ_{s,\ B}[T]^{-1}$ 是连续可微的。□

下一个结果是命题 4.2 的直接推论，因为 S-预解算子是连续可微函数乘积的和。

推论4.3。 设 $T{:}\,\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$是一个闭右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$是一个右子模，并假设 $\rho_{S,B}(T) \neq \emptyset$。那么左 S-预解算子

$$s : \rho_{S,B}(T) \longmapsto S^{-1}_{L,B}(s,T) \in \mathcal{B}(V)$$

以及右 S-预解算子

$$s : \rho_{S,B}(T) \longmapsto S^{-1}_{R,B}(s,T) \in \mathcal{B}(V)$$

是 s 中的连续可微函数。

5. Analyticity of the S-resolvent operators with boundary conditions

本节研究当 S-谱与边界条件相关联时， S-预解算子的解析性。虽然只需稍作修改，便可将 S-预解算子的连续可微性推广到这种情形，但 S-预解算子的切片超全纯性在很大程度上取决于能否在 $\mathrm{dom}(T)$ 的值域上交换 T 和 $Q_s[T]^{-1}$ ，因此必须更仔细地加以研究。

首先，我们证明 $S^{-1}_{L\,B,}(s,T)$ 和 $S^{-1}_{R\ ,B}(s,T)$ 分别是 $\rho_{S,B}(T)$ 上的右切片函数和左切片函数。

命题 5.1. 设 $T{:}\,\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$ 是一个闭右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$是一个右子模，并假设 $\rho_{S,B}(T) \neq \emptyset$。那么对每个 $s = x + Jy \in \rho_{S,B}(T)$，若 $J \in \mathbb{S}$，则有

$$S^{-1}_{L,B}(s,T) = f_0(x,y) + f_1(x,y)J \quad and \quad S^{-1}_{R,B}(s,T) = f_0(x,y) + Jf_1(x,y),$$

with

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= -TQ_{s,B}[T]^{-1} + Q_{s,B}[T]^{-1}x, \\ f_1(x,y) &= -Q_{s,B}[T]^{-1}y. \end{aligned}$$

即$S^{-1}_{L\,B,}(s,T)$，相应地$S^{-1}_{R\ ,B}(s,T)$，是$\rho_{S,B}(T)$上的连续可微右（相应地，左）切片函数。此外

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) =& -2TQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1} + 2xTQ_{s,B}[T]^{-2} \\ &+ 2xQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1} - 2x^2Q_{s,B}[T]^{-2} + Q_{s,B}[T]^{-1}, \qquad (5.1) \\ \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) =& \ 2yTQ_{s,B}[T]^{-2} - 2xyQ_{s,B}[T]^{-2}, \qquad (5.2) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) =& -2yQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1} + 2xyQ_{s,B}[T]^{-2}, \qquad (5.3) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) =& 2y^2Q_{s,B}[T]^{-2} - Q_{s,B}[T]^{-1}. \qquad (5.4) \end{aligned}$$

证明。 根据推论4.3，我们已经知道$S^{-1}_{L\,B,}(s,T)$和$S^{-1}_{R\ ,B}(s,T)$是连续可微函数。现在令 $s = x + Jy \in \rho_{S,B}(T)$，我们有

$$\begin{aligned} S^{-1}_{L,B}(s,T) &= Q_{s,B}[T]^{-1}\overline{s} - TQ_{s,B}[T]^{-1} \\ &= Q_{s,B}[T]^{-1}(x - Jy) - TQ_{s,B}[T]^{-1} \\ &= -TQ_{s,B}[T]^{-1} + Q_{s,B}[T]^{-1}x - yQ_{s,B}[T]^{-1}J \\ &= f_0(x,y) + f_1(x,y)J, \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} S_{R,B}^{-1}(s,T) &= (\overline{s}-T)Q_{s,B}[T]^{-1} \\ &= (x-Jy-T)Q_{s,B}[T]^{-1} \\ &= -TQ_{s,B}[T]^{-1}+Q_{s,B}[T]^{-1}x+J(-yQ_{s,B}[T]^{-1}) \\ &= f_0(x,y)+Jf_1(x,y), \end{aligned}$$

这证　明 $S_{L\,B,}^{-1}(s,\ T)$ 分别是右切片函数，而 $S_{R}^{-1}{}_{,\ B}(s,\ T)$ 是左切片函数，因为

$$f_0(x,y) = -TQ_{s,B}[T]^{-1}+Q_{s,B}[T]^{-1}x = f_0(x,-y),$$

and

$$f_1(x,-y) = Q_{s,B}[T]^{-1}y = -f_1(x,y).$$

利用 (4.2)、(4.3)、(4.4) 和 (4.5)，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\big(TQ_{s,B}[T]^{-1}\big)+\frac{\partial}{\partial x}\big(Q_{s,B}[T]^{-1}\big)x+Q_{s,B}[T]^{-1} \\ &= -2TQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}+2xTQ_{s,B}[T]^{-2}+2xQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1} \\ &- 2x^2Q_{s,B}[T]^{-2}+Q_{s,B}[T]^{-1}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial y}\big(TQ_{s,B}[T]^{-1}\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(Q_{s,B}[T]^{-1}\big)x \\ &= 2yTQ_{s,B}[T]^{-2}-2xyQ_{s,B}[T]^{-2}. \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\big(Q_{s,B}[T]^{-1}\big)y \\ &= -2yQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}+2xyQ_{s,B}[T]^{-2}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial y}\big(Q_{s,B}[T]^{-1}\big)y-Q_{s,B}[T]^{-1} \\ &= 2y^2Q_{s,B}[T]^{-2}-Q_{s,B}[T]^{-1}. \end{aligned}$$

□

现在我们讨论带边界条件的 S-预解算子的主要问题，即其解析性。这一性质至关重要，因为 S-泛函演算将 Riesz-Dunford 泛函演算推广到了非交换背景，并且基于切片超全纯函数的柯西公式，因此要求预解算子具有全纯性。此外，出于同样的原因，针对 Clifford 算子的 H^∞-泛函演算也要求具备这一性质。

由于根据命题 5.1，S-预解算子是连续可微的切片函数，现在我们必须考察柯西-黎曼方程是否

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 0 \tag{5.6}$$

在 V 上成立，或者至少在某个子空间上成立。由式 (5.1) 和 (5.4)，方程 (5.5) 变为$-TQ_{s,\ B}[T]^{-1}TQ_{s,\ B}[T]^{-1}+xTQ_{s,\ B}[T]^{-2}+xQ_{s,\ B}[T]^{-1}TQ_{s,\ B}[T]^{-1}+Q_{s,\ B}[T]^{-1}-|s|^2Q_{s,\ B}[T]^{-2}=0,$ (5.7)

此外，利用 (5.2) 和 (5.3)，等式 (5.6) 变为

$$y(TQ_{s,B}[T]^{-2}-Q_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1})=0. \tag{5.8}$$

下面的命题给出了一个充分条件，用于确定 V 中满足 S-预解算子的柯西-黎曼方程的点。

命题 5.2. 设 $T:\mathrm{dom}(T)\subseteq V\to V$ 是一个闭右线性算子。设 $B\subseteq\mathrm{dom}(T)$ 是一个右子模。设 $s\in\rho_{S,B}(T)$ 且 $v\in V$，并假设以下陈述之一成立：

(1) $s\notin\mathbb{R}$ 且 $Q_{s,B}[T]^{-1}v\in$核$[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]$; *(2)* $s\in\mathbb{R}$ 且 $[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]Q_{s,B}[T]^{-1}v\in$核$(T-sI)$,

则条件 (5.7)和 (5.8) 在 v 中成立。

证明。 假设 $s\notin\mathbb{R}$ 且 $Q_{s,B}[T]^{-1}v\in$核$[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]$，即

$$0=(TQ_{s,B}[T]^{-1}-Q_{s,B}[T]^{-1}T)Q_{s,B}[T]^{-1}v=TQ_{s,B}[T]^{-2}v-Q_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}v,$$

于是显然，(5.8) 在 v 中成立。此外

$$\begin{aligned}
&(-TQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}+xTQ_{s,B}[T]^{-2}+xQ_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}+Q_{s,B}[T]^{-1}-|s|^2Q_{s,B}[T]^{-2})v\\
&=(-TQ_{s,B}[T]^{-1}T+xTQ_{s,B}[T]^{-1}+xQ_{s,B}[T]^{-1}T-|s|^2Q_{s,B}[T]^{-1})Q_{s,B}[T]^{-1}v+Q_{s,B}[T]^{-1}v\\
&=-(T^2Q_{s,B}[T]^{-1}-2xTQ_{s,B}[T]^{-1}+|s|^2Q_{s,B}[T]^{-1})Q_{s,B}[T]^{-1}v+Q_{s,B}[T]^{-1}v\\
&=-Q_s[T]Q_{s,B}[T]^{-1}Q_{s,B}[T]^{-1}v+Q_{s,B}[T]^{-1}v\\
&=-Q_{s,B}[T]Q_{s,B}[T]^{-1}Q_{s,B}[T]^{-1}v+Q_{s,B}[T]^{-1}v\\
&=-Q_{s,B}[T]^{-1}v+Q_{s,B}[T]^{-1}v=0,
\end{aligned}$$

这证明了 (5.7) 在 v中成立。

现在假设 $s=x\in\mathbb{R}$，则 $y=0$，因此方程 (5.8) 显然成立。此外，根据假设，我们有

$$\begin{aligned}
0&=T[T,Q_{x,B}[T]^{-1}]Q_{x,B}[T]^{-1}v-x[T,Q_{x,B}[T]^{-1}]Q_{x,B}[T]^{-1}v\\
&=T^2Q_{x,B}[T]^{-2}v-TQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v-xTQ_{x,B}[T]^{-2}v+xQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v,
\end{aligned}$$

由此可得

$$-TQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v+xQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v=-T^2Q_{x,B}[T]^{-2}v+xTQ_{x,B}[T]^{-2}v. \tag{5.9}$$

因此，将 (5.9) 代入 (5.7)，可得

$$\begin{aligned}
&-TQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v+xTQ_{x,B}[T]^{-2}v+xQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v\\
&+Q_{x,B}[T]^{-1}v-x^2Q_{x,B}[T]^{-2}v\\
&=-T^2Q_{x,B}[T]^{-2}v+2xTQ_{x,B}[T]^{-2}v-x^2Q_{x,B}[T]^{-2}v+Q_{x,B}[T]^{-1}v\\
&=-Q_x[T]Q_{x,B}[T]^{-2}v+Q_{x,B}[T]^{-1}v=-Q_{x,B}[T]Q_{x,B}[T]^{-2}v+Q_{x,B}[T]^{-1}v\\
&=-Q_{x,B}[T]^{-1}v+Q_{x,B}[T]^{-1}v=0.
\end{aligned}$$

也就是说，第一个柯西-黎曼方程在 v 中成立。 □

In 在下一个命题中，我们将证明这些条件实际上也是必要条件。

命题 5.3。 设 T: 定义域（T）$\subseteq V\to V$是一个闭右线性算子。设 $B\subseteq$定义域（T）是一个右子模。设 $s\in\rho_{S,\ B}$（T），并假设条件 （5.7）和（5.8）在 $v\in V$ 中成立。

(1) 如果 $s \notin \mathbb{R}$，则 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}v \in$ 核$[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]$。 *(2)*
如果 $s \in \mathbb{R}$，则 $[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]Q_{s,\ B}[T]^{-1}v \in$ 核 $(T - sI)$ 。

证明。 令 $s = x + Jy \in \rho_{S,B}(T)$、 $J \in \mathbb{S}$，且令 $u = Q_{s,B}[T]^{-1}v$。首先假设 $s \notin \mathbb{R}$，即 $y \neq 0$，则方程（5.8）变为

$$0 = TQ_{s,B}[T]^{-1}Q_{s,B}[T]^{-1}v - Q_{s,B}[T]^{-1}TQ_{s,B}[T]^{-1}v = TQ_{s,B}[T]^{-1}u - Q_{s,B}[T]^{-1}T^{u},$$

即 $u \in$核$[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]$。现在假设 $s \in \mathbb{R}$，即 $s = x$且 $y = 0$，方程（5.8）显然成立，因此我们必须处理方程（5.7）。我们有

$$\begin{aligned} 0 =& -TQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v + xTQ_{x,B}[T]^{-2}v + xQ_{x,B}[T]^{-1}TQ_{x,B}[T]^{-1}v \\ &+ Q_{x,B}[T]^{-1}v - x^2Q_{x,B}[T]^{-2}v \\ =& -TQ_{x,B}[T]^{-1}Tu + xTQ_{x,B}[T]^{-1}u + xQ_{x,B}[T]^{-1}Tu + u - x^2Q_{x,B}[T]^{-1}u \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} u &= TQ_{x,B}[T]^{-1}Tu - x(TQ_{x,B}[T]^{-1}u + Q_{x,B}[T]^{-1}Tu) + x^2Q_{x,B}[T]^{-1}u \\ &= T(Q_{x,B}[T]^{-1}Tu - TQ_{x,B}[T]^{-1}u + TQ_{x,B}[T]^{-1}u) \\ &- x(TQ_{x,B}[T]^{-1}u + Q_{x,B}[T]^{-1}Tu + TQ_{x,B}[T]^{-1}u - TQ_{x,B}[T]^{-1}u) + x^2Q_{x,B}[T]^{-1}u \\ &= T^2Q_{x,B}[T]^{-1}u - T([T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u) - 2xTQ_{x,B}[T]^{-1}u + x[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u + x^2Q_{x,B}[T]^{-1}u \\ &= (T^2 - 2xT + x^2)Q_{x,B}[T]^{-1}u - (T - x)[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u \\ &= Q_x[T]Q_{x,B}[T]^{-1}u - (T - x)[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u \\ &= Q_{x,B}[T]Q_{x,B}[T]^{-1}u - (T - x)[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u \\ &= u - (T - x)[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u, \end{aligned}$$

即

$$(T - x)[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u = 0,$$

这意味着 $[T, Q_{x,B}[T]^{-1}]u \in$核$(T - x)$。 □

注 5.4。 注意，$w = [T, Q_{s,B}[T]^{-1}]Q_{s,\ B}[T]^{-1}v \neq 0$ 意味着

$$Q_{s,B}[T]^{-1}v \notin \{Q_{s,B}[T]u : u \in \mathrm{dom}(T^3) \cap B \cap T^{-1}(B)\}$$

这只有在 $TQ_{s,\ B}[T]^{-2}v \notin B$时才可能。在这种情况下，

$$w = (TQ_{s,B}[T]^{-1} - Q_{s,B}[T]^{-1}T)Q_{s,B}[T]^{-1}v$$

不能属于 B，因此 $w \in \ker(T - s)$并不与以下事实矛盾：当 $s \in \rho_{S,\ B}(T) \cap \mathbb{R}$时，$Q_{s,\ B}[T] = (T - s)^2$ 在 $\mathrm{dom}_B(T^2)$ 上是可逆的。

综上所述，我们可以给出以下总结性定理。

定理 5.5。 设 $T{:}\,\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$是一个闭右线性算子，且 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 是一个右子模。设 $s \in \rho_{S,\ B}(T)$ 以及 $v \in V$。则：

(1) if $s \notin \mathbb{R}$，柯西-黎曼方程(5.7) 和(5.8) 在 v 中成立，当且仅当

$$Q_{s,B}[T]^{-1}v \in \ker[T, Q_{s,B}[T]^{-1}];$$

(2) 如果 $s \in \mathbb{R}$，柯西-黎曼方程(5.7) 和(5.8) 在 v 中成立，当且仅当

$$[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]Q_{s,B}[T]^{-1}v \in \ker(T - sI).$$

推论 5.6. 设 $T:\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$ 是一个闭右线性算子。若$\mathrm{dom}(T^2) \subseteq B \subseteq \mathrm{dom}(T)$，则对所有 $v \in V$，条件(5.7)和(5.8)均成立。特别地，$S_L^{-1}{}_{,B}(s,T)$（分别为 $S_R^{-1}{}_{,B}(s,T)$）是切片右（分别为左）超全纯函数。

证明。事实上，在这种情况下，$\ker[T, Q_{s,B}[T]^{-1}] = \mathrm{dom}(T)$，因此对于所有 $v \in V$，我们有 $Q_{s,B}[T]^{-1}v \in \mathrm{dom}(T^2) \subset \mathrm{dom}(T)$。然后使用命题 5.2。□

在下一个定理中，我们将左、右 S-预解方程推广到带边界条件的 S-谱情形。虽然左 S-预解方程与经典情形相同，但右 S-预解方程有所不同，我们还必须考虑 T 和 $Q_{s,B}[T]^{-1}$的交换子。

定理 5.7 (左、右 S-预解方程**)**。设 $T : \mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$ 是一个闭右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 是一个右子模。设 $s \in \rho_{S,B}(T)$，则左S-预解算子满足左 S-预解方程

$$S_{L,B}^{-1}(s,T)s - TS_{L,B}^{-1}(s,T) = I, \tag{5.10}$$

且右 S-预解算子满足右 S-预解方程

$$sS_{R,B}^{-1}(s,T)v - S_{R,B}^{-1}(s,T)Tv = v + (\overline{s} - T)[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]v, \quad \textit{for all } v \in \mathrm{dom}(T). \tag{5.11}$$

证明。我们证明（5.10）。有

$$\begin{aligned}
S_{L,B}^{-1}(s,T)s - TS_{L,B}^{-1}(s,T) &= (Q_{s,B}[T]^{-1}\overline{s} - TQ_{s,B}[T]^{-1})s - T(Q_{s,B}[T]^{-1}\overline{s} - TQ_{s,B}[T]^{-1}) \\
&= Q_{s,B}[T]^{-1}\overline{s}s - TQ_{s,B}[T]^{-1}s - TQ_{s,B}[T]^{-1}\overline{s} + T^2Q_{s,B}[T]^{-1} \\
&= Q_{s,B}[T]^{-1}|s|^2 - 2s_0TQ_{s,B}[T]^{-1}s + T^2Q_{s,B}[T]^{-1} \\
&= (T^2 - 2s_0T + |s|^2)Q_{s,B}[T]^{-1} = I.
\end{aligned}$$

类似地，对于 $v \in \mathrm{dom}(T)$，我们有

$$\begin{aligned}
sS_{R,B}^{-1}(s,T)v - S_{R,B}^{-1}(s,T)Tv &= s(\overline{s} - T)Q_{s,B}[T]^{-1}v - (\overline{s} - T)Q_{s,B}[T]^{-1}Tv \\
&= |s|^2Q_{s,B}[T]^{-1}v - sTQ_{s,B}[T]^{-1}v - \overline{s}Q_{s,B}[T]^{-1}Tv + TQ_{s,B}[T]^{-1}Tv \\
&= |s|^2Q_{s,B}[T]^{-1}v - sTQ_{s,B}[T]^{-1}v - \overline{s}TQ_{s,B}[T]^{-1}v + \overline{s}TQ_{s,B}[T]^{-1}v \\
&- \overline{s}Q_{s,B}[T]^{-1}Tv + TQ_{s,B}[T]^{-1}Tv + T^2Q_{s,B}[T]^{-1}v - T^2Q_{s,B}[T]^{-1}v \\
&= (T^2 - 2s_0T + |s|^2)Q_{s,B}[T]^{-1}v + \overline{s}[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]v - T[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]v \\
&= Q_{s,B}[T]Q_{s,B}[T]^{-1}v + (\overline{s} - T)[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]v = v + (\overline{s} - T)[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]v.
\end{aligned}$$

□

现在我们准备说明 S-预解方程如何随边界条件变化。由于公式的证明中同时使用了左、右 S-预解方程，并且方程（5.11）不同于经典情形，新的 S-预解方程也将有所不同， T 与 $Q_{s,B}[T]^{-1}$ 的交换子将出现在该公式中。

定理 5.8 (S-预解方程)。设 $T:\mathrm{dom}(T) \subseteq V \to V$是一个闭右线性算子。设 $B \subseteq \mathrm{dom}(T)$ 是一个右子模。若 $s, q \in \rho_{S,B}(T)$ 且 $s \notin [q]$，则

$$\begin{aligned}
S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T) = \big\{&\big(S_{R,B}^{-1}(s,T) - S_{L,B}^{-1}(q,T)\big)q - \overline{s}\big(S_{R,B}^{-1}(s,T) - S_{L,B}^{-1}(q,T)\big) \\
&+ \overline{s}(\overline{s} - T)[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T) - (\overline{s} - T)[T, Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)q\big\}(q^2 - 2s_0q + |s|^2)^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

证明。与经典情形一样， S-预解方程可由左、右 S-预解方程推导得出。我们将证明，对于每个 $v \in V$，均有

$$S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)(q^2-2s_0q+|s|^2)v = \big\{\big(S_{R,B}^{-1}(s,T)-S_{L,B}^{-1}(q,T)\big)q-\overline{s}\big(S_{R,B}^{-1}(s,T)-S_{L,B}^{-1}(q,T)\big)$$
$$+\overline{s}(\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)x-(\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)q\big\}v. \tag{5.13}$$

然后，我们通过将 v 替换为 $(q^2-2s_0q+|s|^2)^{-1}v$ 得到 (5.12)。对于 $w \in V$，左 S-预解方程 (5.10) 蕴含

$$S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)qw = S_{R,B}^{-1}(s,T)TS_{L,B}^{-1}(q,T)w + S_{R,B}^{-1}(s,T)w.$$

由于 $Q_{s,\ B}[T]^{-1}$ 将 V 映到 $\mathrm{dom}_B(T^2)$，因此左 S-预解算子

$$S_{L,B}^{-1}(s,T) = Q_{s,B}[T]^{-1}\overline{s} - TQ_{s,B}[T]^{-1}$$

将 V 映到 $\mathrm{dom}(T)$，从而 $S_{L}^{-1}{}_{,\ B}(q,\ T)w \in \mathrm{dom}(T)$。右 S-预解方程 (5.11) 给出

$$\begin{aligned} &S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)qw \\ =&sS_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)w - S_{L,B}^{-1}(q,T)w - (\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)w + S_{R,B}^{-1}(s,T)w. \end{aligned} \tag{5.14}$$

若将此恒等式应用于 $w = qv$，我们得到

$$\begin{aligned} &S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)(q^2-2s_0q+|s|^2)v \\ &= S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)q^2v - 2s_0S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)qv + |s|^2S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)v \\ &= sS_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)qv - S_{L,B}^{-1}(q,T)qv - (\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)qv + S_{R,B}^{-1}(s,T)qv \\ &- 2s_0S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)qv + |s|^2S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)v. \end{aligned}$$

再次将恒等式 (5.14) 应用于 $w = v$，得到

$$\begin{aligned} &S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)(q^2-2s_0q+|s|^2)v \\ =&s^2S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)v - sS_{L,B}^{-1}(q,T)v - s(\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)v + sS_{R,B}^{-1}(s,T)v \\ &- S_{L,B}^{-1}(q,T)qv - (\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)qv + S_{R,B}^{-1}(s,T)qv \\ &- 2s_0sS_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)v + 2s_0S_{L,B}^{-1}(q,T)v + 2s_0(\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)v \\ &- 2s_0S_{R,B}^{-1}(s,T)v + |s|^2S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)v \\ =&(s^2-2s_0s+|s|^2)S_{R,B}^{-1}(s,T)S_{L,B}^{-1}(q,T)v - (2s_0-s)[S_{R,B}^{-1}(s,T)-S_{L,B}^{-1}(q,T)] \\ &+ [S_{R,B}^{-1}(s,T)-S_{L,B}^{-1}(q,T)]qv \\ &+ (2s_0-s)(\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)v - (\overline{s}-T)[T,Q_{s,B}[T]^{-1}]S_{L,B}^{-1}(q,T)qv. \end{aligned}$$

恒等式 $2s_0 = s+s$ 蕴含 $s^2-2s_0s+|s|^2 = 0$ 和 $2s_0-s = s$，因此我们得到所需的方程 (5.13)。

□

6. Concluding remarks

与复分析不同，Clifford 分析的非交换背景允许对超全纯性作出多种定义。因此，相关的柯西公式构成了不同谱理论的基础，而每种谱理论都以特定的柯西核为特征。值得注意的是，基于 S-谱的谱理论与切片超全纯性有着内在联系

其灵感则源自量子力学的四元数形式 [5]。将复谱理论扩展至向量算子，在多个领域都有广泛应用，例如：

四元数量子力学。 Birkhoff 和冯·诺依曼 [5] 指出，薛定谔方程可以在四元数框架下表述，从而推动了对四元数算子的谱理论研究 [3]。

向量分析。 带变系数的梯度算子可用于描述热传导和质量扩散等物理定律，其表达式为 $T = \sum_{i=1}^{n} e_i a_i(x)\partial_{x_i}$ ，并满足特定的边界条件 [12]。生成这些算子的分数次幂的一种强大方法是 H^∞-函数演算；关于复数情形，参见著作 [22, 23, 24] 。 H^∞-函数演算针对双扇形克利福德算子的研究见 [13, 28] ，这使得分数阶傅里叶定律得以定义。

微分几何。 黎曼流形上的狄拉克算子（M， g）通过协变导数推广了梯度，其表达式为 $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} e_i \nabla_{E_i}^{\tau}$，参见 [25]。具体实现包括双曲空间和球面空间中的狄拉克算子 [4]。

超复分析。 标准狄拉克算子 D 及其共轭 $\overline{D}$ 是这一领域的核心 [17, 25]。切片超全纯函数被刻画为某个全局算子G [11]的核。此外， S-谱上的狄拉克精细结构由诸如$T_{\alpha、m} = D^{\alpha}(DD)^{m}$这样的算子定义，由此导出特定的函数空间和泛函演算 [8, 9, 10, 18, 19]，包括 H^∞-版本 [14, 20]。

这些精细结构通过 Fueter-Sce 延拓定理，借助拉普拉斯算子 [21, 30, 31, 15]的幂，将切片超全纯函数与轴向单值函数联系起来。

与 S-谱方法不同，由 Jefferies、McIntosh 和 Picton-Warlow [27], 开创的单值谱理论以单值函数及其柯西公式为基础。单值函数是狄拉克算子的核中的函数。这一理论及其相关的单值谱和单值泛函演算广泛采用 H^∞-版本，详见 [26, 29]。

Declarations and statements

Da数据可用性。本文研究没有相关数据。

利益冲突。作者声明，他在本文发表方面不存在任何利益冲突。

研究经费。本研究未获得经费资助。

References

[1] D. Alpay、F. Colombo、I. Sabadini： *Slice hyperholomorphic Schur analysis*。《算子理论：进展与应用》第256卷。巴塞尔，Birkh¨auser/Springer（2016年）。[2] D. Alpay、F. Colombo、I. Sabadini： *Quaternionic de Branges spaces and characteristic operator function*。Springer 数学简明读物，Springer，Cham（2020年）。[3] S. Adler： *Quaternionic Quantum Mechanics and Quaternionic Quantum Fields* 88 *International* 。 *Series of Monographs on Physics* 1995 卷数 of 。牛津大学出版社，纽约（ ）。[4] I. Beschastnyi、F. Colombo、S. A. Lucas、J. Sabadini： *The S-resolvent estimates for the Dirac operator on hyperbolic and spherical spaces* 2504 12725 。arXiv：。。

[5] G. Birkhoff、J. von Neumann： *The logic of quantum mechanics*。《数学年刊》（第2辑）**37**（4）（1936）823–843。[6] F. Colombo、J. Gantner： *Quaternionic closed operators, fractional powers and fractional diffusion processes*。《算子理论：进展与应用》**274**。Birkh¨auser/Springer，Cham（2019年）。[7] F. Colombo、J. Gantner、D.P. Kimsey： *Spectral theory on the S-spectrum for quaternionic operators*。《算子理论：进展与应用》第270卷，Birkh¨auser/Springer，Cham（2018年）ix+356。[8] F. Colombo、A. De Martino、S. Pinton： *Functions and operators of the polyharmonic and polyanalytic Clifford fine structures on the S-spectrum.* 2501 14716 arXiv：。

[9] F. Colombo、A. De Martino、S. Pinton、I. Sabadini：*Axially harmonic functions and the harmonic functional calculus on the S-spectrum* **33** 1 2023 54 ，《几何分析杂志》（）（）页。[10] F. Colombo、A. De Martino、S. Pinton、I. Sabadini：*The fine structure of the spectral theory on the S-spectrum in dimension five* **33** 9 2023 73 。《几何分析杂志》（）（）页。[11] F. Colombo、O.J. Gonzalez-Cervantes、I. Sabadini：*A nonconstant coefficients differential operator associated to slice monogenic functions* **365** 2013 1, 303 318 。《美国数学会汇刊》，（），第–期。[12] F. Colombo、F. Mantovani、P. Schlosser：*Spectral properties of the gradient operator with nonconstant coefficients.*《分析数学与物理》14，第5期，论文编号108，共31页（2024年）。[13] F. Colombo、F. Mantovani、P. Schlosser：*Quadratic estimates for the H^∞-functional calculus of bisectorial Clifford operators.* 10 1007 12220 025 02282 《几何分析杂志》，https://doi.org/ 。 /s - - -z [14] F. Colombo、S. Pinton、P. Schlosser：用于狄拉克型四元数精细结构的 H^∞-泛函演算。《米兰数学杂志》92(1)（2024年）73–122。[15] F. Colombo、I. Sabadini、D.C. Struppa：*Michele Sce's works in hypercomplex analysis—a translation with commentaries* ¨ 2020 。

Birkhauser/Springer，Cham（）。[16] F. Colombo、I. Sabadini、D.C. Struppa：*Noncommutative functional calculus*。《数学进展》第289卷。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，切片超全纯函数的理论与应用（2011年）。[17] R. Delanghe、F. Sommen、V. Sou˘cek：*Clifford algebra and spinor-valued functions.*《数学及其应用》第53卷，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特（1992年）。[18] A. De Martino、S. Pinton：S-谱上的二阶多解析函数演算。《美国数学会会刊》151(6)（2023年）2471–2488。[19] A. De Martino、S. Pinton：S-谱上多解析函数演算的性质。《数学新闻》296(11)（2023年）5190–5226。[20] A. De Martino、S. Pinton、P. Schlosser：基于 S-谱的调和 H^∞-泛函演算。《谱理论杂志》14(1)（2024年）121–162。[21] R. Fueter：*Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*。《赫尔维数学评论》7(1)（1934年）307–330。[22] M. Haase：*The functional calculus for sectorial operators*。《算子理论：进展与应用》169，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔（2006年）。[23] T. Hyt ¨onen、J. van Neerven、M. Veraar、L. Weis：*Analysis in Banach spaces. Vol. I. Martingales and Littlewood-Paley theory* 3 。数学及其边界领域成果，新系列。现代数学综述丛书A辑第63卷。Springer，Cham（2016年）。[24] T. Hyt ¨onen、J. van Neerven、M. Veraar、L. Weis：*Analysis in Banach spaces. Vol. II. Probabilistic methods and operator theory* 3 。数学及其边界领域成果，新系列。现代数学综述丛书A辑第67卷。Springer，Cham（2017年）。[25] J.E. Gilbert、M.A.M. Murray：*Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*。《剑桥高等数学研究》第26卷。剑桥大学出版社，剑桥（1991年）viii+334 页。[26] B. Jefferies：*Spectral properties of noncommuting operators*。《数学讲义》第1843卷，Springer-Verlag，柏林（2004年）。[27] B. Jefferies、A. McIntosh、J. Picton-Warlow：*The monogenic functional calculus*。《数学研究》136(2)（1999年）99-119。[28] F. Mantovani、P. Schlosser：*The H^∞-functional calculus for bisectorial Clifford operators*。《谱理论杂志》15，第2期，751-818（2025年）。[29] T. Qian、P. Li：*Singular integrals and Fourier theory on Lipschitz boundaries*。北京科学出版社，北京；Springer，新加坡（2019年）。[30] T. Qian：*Generalization of Fueter's result to $\mathbb{R}^{n+1}$*。《林琴国家科学院院刊》。林琴科学院物理、数学与自然科学类学报8(2)（1997年）111–117。[31] M. Sce：*Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici*。《林琴国家科学院院刊》物理、数学与自然科学类学报23(8)（1957年）220–225。

(FM) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi, 9, 20133 Milano, Italy
Email address: francesco.mantovani@polimi.it