arXiv:2602.04425v1 [math.CT] 4 Feb 2026

阿贝尔框架双范畴中的同调代数：正合序列与嵌入定理

Augustin Albert[a], *, Jérémy Dubut[a], 1, Eric Goubault[a]

[a] *LIX*，法国国家科学研究中心，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，帕莱索，法国

摘要

我们引入阿贝尔框架双范畴，这是一类局部阿贝尔的特殊框架双范畴，并证明它们适用于发展有向结构的同调与上同调理论。这尤其意味着，可以证明类似于相对同调正合序列和 Mayer–Vietoris长正合序列的正合序列成立。此外，对于闭幺半阿贝尔标架双范畴，Künneth 定理同样成立。最后，我们针对特定的阿贝尔框架双范畴证明了类似于 Gabriel 定理和 Freyd–Mitchell 定理的嵌入定理，从而可以将它们视为代数上的双模的双范畴。这自然关联到本研究的最初动机：推广在路径代数上的双模构成的阿贝尔框架双范畴中发展起来的有向同调。

关键词：
2000 年 *MSC* 分类号：18G90，同调代数，框架双范畴，有向拓扑，嵌入定理，无环模型定理

1. 引言

为本质上具有方向性的对象（如有向空间）设计合适的同调论和同伦论，是一个众所周知的难题 [1,2, 3, 4, 5]。这些模型中的时间不可逆性，使得所需的代数比经典情形复杂得多：为了忠实地抽象时间的这种不可逆性，所采用的代数结构不能是可逆的（例如经典代数拓扑中的阿贝尔群，或 [2]中的有序同调群），甚至不能是可消去的（例如 Patchkoria 的可消去幺半群理论 [4]），因为非同伦的有向路径在延伸后可能变得同伦，

*通讯作者电子邮箱：augustin.albert@polytechnique.edu（Augustin Albert）、jeremy.dubut@polytechnique.edu（Jérémy Dubut）、eric.goubault@polytechnique.edu（Eric Goubault）[1]部分经费由学术与研究主席项目“复杂系统架构”提供，资助方包括达索航空、Naval Group、达索系统、KNDS France、国防创新局和巴黎理工学院

见图 1。这意味着我们必须摆脱经典阿贝尔范畴-

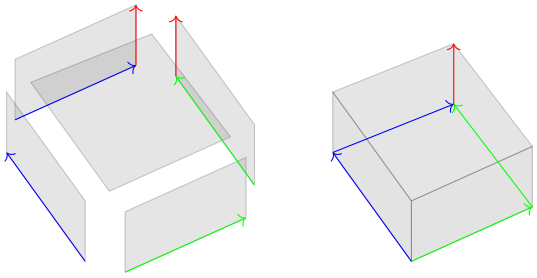


图1：Fahrenberg的火柴盒 [3]中的非消去行为。蓝色和绿色有向路径并非有向同伦，因为任何同伦都必须经过上方面，因而经过无向路径。然而，在用红色有向路径延伸后，它们便成为有向同伦。

范畴作为合适的代数框架。不过，仍然需要某种形式的局部阿贝尔性：有向空间本质上是（∞，1）-范畴（见 [6]），因为路径不可逆时，（高阶）同伦却是可逆的。因此，非可逆的低维数据之上，存在一个更经典且完全可逆的世界，在其中可以使用阿贝尔结构。有些人正是沿着这个方向，为有向空间发展非可消去的同调论，例如将同调定义为从迹范畴到有向空间迹空间的奇异同调的函子 [7]，或为预立方集合定义路径代数上的同调双模 [8]。这些理论的思路相似：它们考察两点之间迹空间的经典同调模，并描述这些模如何通过与额外的迹进行前复合和后复合而演变。换言之，它们使迹在阿贝尔范畴中的一个对象上从左侧和右侧作用。沿着这一思路，我们引入阿贝尔框架双范畴，作为发展有向结构同调论的一种新型合适框架。Shulman 在 [9]，中引入的框架双范畴，是一种将两个结构（即系数）作用于另一个结构（一个从左侧作用，一个从右侧作用），并描述这些作用如何随着系数经由扩张和限制而改变的方式范畴化的构造。框架双范畴由两个彼此相互作用的双纤维化组成 $B \to C$（可将 C 理解为系数范畴，而将 B 理解为系数可以作用于其上的结构范畴），每个作用对应一个双纤维化；其中系数的限制（分别为扩张）的效果由笛卡尔（分别为余笛卡尔）提升给出。于是，阿贝尔框架双范畴是指这样一类框架双范畴：系数对上方的纤维（即固定系数所作用的结构子范畴）是阿贝尔范畴，且双范畴结构充分保留了阿贝尔结构。此类范畴的典型例子是代数上的双模范畴，例如 [8] 中用于发展预立方集合同调的那些范畴。为了验证我们的设想，接下来我们在阿贝尔框架范畴中发展同调代数，并证明与正合序列有关的标准定理的变体，例如长

相对同调的正合序列、Mayer–Vietoris 定理和 Künneth 公式。最后，我们证明，在某些条件下，阿贝尔框架双范畴本质上就是代数上的双模范畴，这让人联想到 Gabriel 和 Freyd–Mitchell 的嵌入定理 [10, 11]。

论文内容与主要结果。在第2节中，我们介绍框架双范畴所需的全部背景知识。框架双范畴最初见于例如 [9]，尤其是双范畴、框架双范畴及其系数限制和（余）扩张的基本定义。我们还介绍了贯穿全文的若干示例：各种结构（代数、吸收幺半群）上的双模以及分配子。随后，我们在第3节定义本文研究的主要对象——阿贝尔框架双范畴：

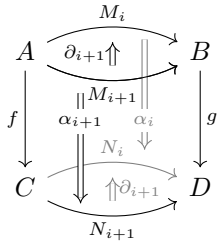
定义3.1。阿贝尔框架双范畴是一个框架双范畴 $\mathbb{D}$，它是局部阿贝尔的，即所有局部范畴 $\mathcal{D}(A,\ B)$ 都是阿贝尔范畴，并且水平复合给出加性函子：

$$\mathcal{D}(A,B)\times\mathcal{D}(B,C)\to\mathcal{D}(A,C),(M,N)\mapsto M\odot N$$

对所有对象 A、B、$C\in\mathbb{D}_0$。

在此类阿贝尔框架双范畴中，我们可以定义链复形和上链复形，进而定义同调和上同调，见第 4 节：

定义 *4.1*。 $\mathbb{A}$ 中的链复形是 $\mathbb{A}$的局部阿贝尔范畴中的链复形，即 $\mathcal{A}(A,B)$中的链复形，其中 A 和 B是某些对象。从 $\mathcal{A}(A,B)$中的链复形$(M_i)_{i\geq0}$ 到 $\mathcal{A}(C,D)$中的链复形$(N_i)_{i\geq0}$ 的态射 $(\alpha_i)_{i\geq0}$，由一对垂直箭头 $f:\ A\to C$ 和 $g:\ B\to D$ 以及 2-胞腔 $\alpha_i:\ M_i\overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}}N_i$（对所有 $i\geq0$）构成，使得下列图表对所有 $i\geq0$均交换：



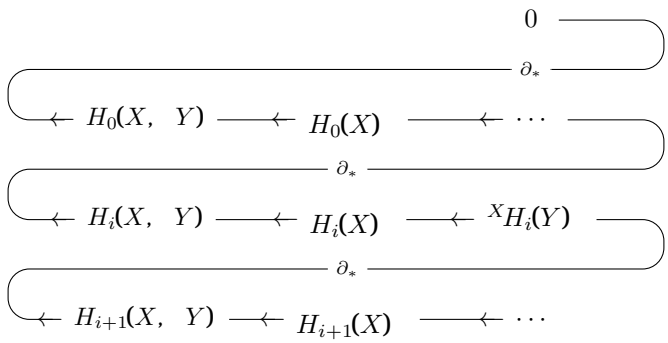
定义 4.6。 对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中的同调为：

$$H_*(X):L(X)\nrightarrow R(X)$$

局部阿贝尔范畴 $\mathcal{D}(L(X)\ R(X))$中的链复形 $M_*(X)$ 。这一构造具有函子性。

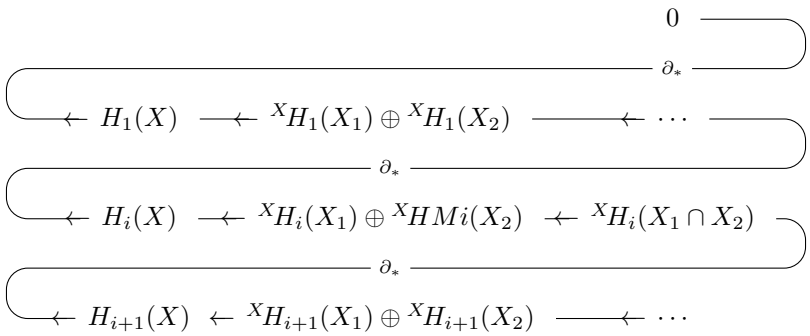
与阿贝尔范畴中的同调论类似，我们在第5节中导出有趣的正合序列。对于我们定义的特定相对对，见第5.2节，我们有一个相对同调正合序列，与奇异同调或单纯同调中的序列非常相似：

定理5.6 1. 对于所有相对对(X, Y)（即我们所定义的那些），我们证明存在一个长正合列，类似于单纯同调或奇异同调理论中经典的相对同调正合序列：



类似地，我们将证明一个关于“良覆盖”的 Mayer–Vietoris 序列，见第5.3节：

定理 5.10。 考虑对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中的一个好覆盖，如定义 *5.8* 所述。于是，我们有如下同调长正合列：



以及一个 Künneth 定理，特别是关于幺半阿贝尔加框双范畴的，见第6节：

定理 *6.1*。对于所有对象 X、Y 在 $\mathcal{C}$ 中，若张量积函子 $\otimes : \mathcal{D}(L(X)\ R(X)) \times \mathcal{D}(L(Y)\ R(Y)) \to \mathcal{D}(L(X) \otimes L(Y)\ R(X) \otimes R(Y))$ 满足代数 *Künneth* 定理 *[12,* 定理 *3.19],* （见附录 *B*）的条件，则我们有如下短正合列，其中 Tor_1 表示张量积函子的第一左导出函子：

$$0 \to l^*(H(X) \otimes H(Y))r^* \to H(X \otimes Y) \to l^* \operatorname{Tor}_1(H(X), H(Y))r^* \to 0.$$

最后，我们定义一类特定的阿贝尔框架双范畴，参见第7节：

定义 7.26。 一个 模型阿贝尔框架双范畴是局部余完备、闭的阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$，带有一个初始系数 I，使得所有限制函子都是忠实的，并且 U_I 是$\mathcal{A}(I, I)$的紧投射生成元。

由此我们得到一个表示定理，类似于阿贝尔范畴的 Gabriel 定理：

定理 7.47. 设 $\mathbb{A}$ 为模状阿贝尔框架双范畴。则存在框架松弛函子 $F\colon \mathbb{A} \to {}_{\mathrm{End}(U_I)}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathrm{End}(U_I)}$，使得 F_1 为全忠实且局部为范畴等价。

相关工作。 本研究以 [8] 中发展的预立方集合的具体有向同调理论为基础，并加以扩展。我们基于 Shulman [9] 的工作，运用阿贝尔框架双范畴这一新框架，对 [8] 中的组合论证进行抽象与推广。

阿贝尔框架双范畴并非同调范畴（一般而言，它们甚至不是有基点的）。相反，它们由阿贝尔范畴经结构化拼合而成。不过，人们同样可以考虑同调范畴而非阿贝尔范畴，参见注记 3.3。阿贝尔框架双范畴可视为指标范畴的 Grothendieck 构造$F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$，其组成范畴均为阿贝尔范畴。正如 Shulman 的工作 [9] 研究 Grothendieck 构造与幺半结构之间的相互作用，我们的工作则研究其与阿贝尔结构的相互作用。

在第7节中，我们构造了嵌入定理，将某些阿贝尔框架双范畴映射到由环上的双模构成的具体阿贝尔框架双范畴中。这些嵌入具有一些与 Paré 在其双范畴 Yoneda 理论中构造的 Yoneda 嵌入相同的性质 [13],；然而，我们的嵌入是严格函子性的，见备注7.52。

2. 框架双范畴

我们的工作以 Shulman 在 [9] 中提出的成熟框架双范畴概念为基础，并对其加以扩展。我们不假定读者预先熟悉双范畴和框架双范畴，并在本节中介绍本文将用到的定义、记号和例子。

2.1. 双范畴

双范畴最初由 Ehresmann 在 [14] 中引入。直观而言，双范畴是小范畴的 2- 范畴中的内范畴。另一种说法是，它们是 2- 范畴的一种变体，其中 1- 胞腔被解释为由一对 0-胞腔参数化的对象，就像环上的双模一样。2-胞腔则被视为参数化对象之间的参数化态射。此外，另一类 1-胞腔表示 0-胞腔之间的态射。关于这一观点的更多细节，请参阅 Shulman 在 [9] 中的介绍。

定义 2.1 ([14])。一个**双范畴** $\mathbb{D}$由两个小范畴$\mathbb{D}_0$ 和 $\mathbb{D}_1$组成，并带有结构函子 L、R 和 U：

$$\begin{aligned} U &: \mathbb{D}_0 \to \mathbb{D}_1 \\ L, R &: \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_0 \\ \odot &: \mathbb{D}_1 \times_{\mathbb{D}_0} \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_1 \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{D}_1 \times_{D_0} \mathbb{D}_1$ 是关于 $\mathbb{D}_1 \xrightarrow{R} \mathbb{D}_0 \xleftarrow{L} \mathbb{D}_1$的拉回，并满足通常的范畴公理，特别是对所有对象 $A \in \mathbb{D}_0$ 和M， $N \in \mathbb{D}_1$，满足以下等式：

$$\begin{aligned} LU(A) = A = RU(A) \qquad & (M \odot N) \odot P = M \odot (N \odot P) \\ L(M \odot N) = LM \qquad & UA \odot M = M \\ R(M \odot N) = RN \qquad & M \odot UB = M \end{aligned}$$

垂直范畴 $\mathbb{D}_0$ 的对象称为**对象**，或称为 0-**胞腔**； $\mathbb{D}_0$ 的箭头称为**垂直箭头**，记作 $f : A \to B$。水平范畴 $\mathbb{D}_1$ 的对象称为 1-**胞腔**，并在$L(M) = A$且 $R(M) = B$时记作 $M : A \nrightarrow B$。若 $\mathbb{D}_1$中的箭头 $\alpha : M \to N$满足 $L(\alpha) = f : A \to C$且 $R(\alpha) = g : B \to D$，则称其为 2-**胞腔**，记作 $\alpha : M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$；当 g和 f由上下文明确时，也简记为 $\alpha : M \to N$，并表示为：

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{M}{\nrightarrow} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{\alpha}{\Downarrow} & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \underset{N}{\nrightarrow} & D \end{array}.$$

若 A 和 B 是对象，我们用 $\mathcal{D}(A, B)$ 表示从 A 到 B的 1-胞腔与球形 2-胞腔所构成的范畴，即其中的垂直箭头为恒等箭头 id_A和 id_B。对于所有 1-胞腔 M和 N，我们将同态集 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_1}(M, N)$ 记作 $\mathbb{D}(M, N)$，并将形如 $M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$的 2-胞腔所构成的子集记作 $\mathbb{D}_{f,g}(M, N)$。此外，若对于某些 0-胞腔 A和 B， M和 N都是 $\mathcal{D}(A, B)$ 的对象，则将同态集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A,B)}(M, N)$ 记作 $\mathcal{D}(M, N)$。当某个性质对所有范畴 $\mathcal{D}(A, B)$ 都成立时，我们称该性质局部成立。单位函子U 在对象 A 上的像也记作 U_A。最后，函子 $\odot$ 称为水平复合，而垂直复合表示范畴 $\mathbb{D}_0$ 和 $\mathbb{D}_1$中的通常复合。

遵循 Shulman 的做法 [9], 我们在弱化的伪双范畴框架下进行研究。伪双范畴是仅满足弱结合律和弱单位律的内范畴，也就是说，其中存在满足双范畴相干公理的自然同构：

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{M,N,P} &: M \odot (N \odot P) \xrightarrow{\cong} (M \odot N) \odot P \\ \mathfrak{l}_M &: U_A \odot M \xrightarrow{\cong} M \\ \mathfrak{r}_M &: M \odot U_B \xrightarrow{\cong} M \end{aligned}$$

此外，垂直范畴与水平范畴允许是局部小的，而非小的。我们也将它们称为双范畴，并在必要时使用“严格”一词。根据 Grandis 和 Paré 的结果 [15, 定理 7。5], 每个伪双范畴都等价于一个严格双范畴。不过，双范畴的主要例子更容易表述为伪双范畴。在

旁注：如果希望进一步弱化水平复合，例如使用泛性质来定义水平复合，那么可以采用虚双范畴的概念 [16, 17]。在一个双范畴 $\mathbb{D}$中，形如 $\mathcal{D}(A,\ A)$的局部范畴对所有垂直对象 A 都是幺半的。因此，下面这一由 Kelly 提出的结果 [18], 成立。

引理 2.2. 对于双范畴 $\mathbb{D}$中的所有对象 A，两个同构$\mathfrak{l}_{U_A}$、$\mathfrak{r}_{U_A}$：$U_A \odot U_A \to U_A$ 重合。

例 2.3. 设 R 为任意交换环。考虑两个 R-代数 A 与 B。一个**左 A-模**（相应地，**右 B-模**） M 是一个左A-模（相应地，右 B-模）$(M,\ \mathbf{0},\ +,\ \cdot_A)$，其中 A（相应地，B）被视为一个环。类似地，我们将 A-B-**双模**定义为阿贝尔群 M，它们既是左 A-模又是右 B-模，且方式相容，即对所有 $a \in A,\ b \in B$ 与 $m \in M$,

$$a \cdot_A (m \cdot_B b) = (a \cdot_A m) \cdot_B b,$$

并且使得 M 在如下意义下具有 R-对称性：由 A 与 B 在 M 上诱导的 R 的两个作用重合。设 M 与 N 分别为 A-B 双模与 C-D-双模。一个 $(f,\ g)$ **-双线性映射** $\alpha:\ M \to N$ 是一个阿贝尔群同态 $\alpha:\ M \to N$，连同 R-模同态 $f:\ A \to C$ 与$g:\ B \to D$，对所有 $a \in A,\ b \in B$与 $m \in M$满足：

$$\alpha(a \cdot_A m \cdot_B b) = f(a) \cdot_C \alpha(m) \cdot_D g(b).$$

该 R-**代数上的双模双范畴**，记为 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$，具有：

- 作为对象：R-代数，
- 作为垂直箭头：R-代数的同态，
- 作为1-胞腔 $M:\ A \nrightarrow B$，A-B-双模 M。
- 作为2-胞腔 $\alpha:\ M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$，$(f,\ g)$ -双线性映射 $\alpha:\ M \to N$。

R-代数可视为自身上的双模，水平复合由 A-B-双模与 B-C-双模在 R-代数 B 上的张量积 $\otimes_B$ 所诱导。当 $R = \mathbb{Z}$时，我们恢复环上双模的双范畴。这是双范畴的典型例子。

例 2.4 ([9, 例 2.6],[19])。对于任意双完备闭对称幺半范畴 $\mathcal{V}$，其单位为 $\mathbf{1}$，乘积为 $\otimes$，例如 Set 或交换环 R 上的 ${}_R\mathrm{Mod}$，由 $\mathcal{V}$-分配子（或预函子）构成的双范畴记作 $\mathcal{V}$-$\mathbb{D}$ist，它具有：

- 对象为小范畴，
- 垂直箭头为函子，
- 1-胞腔为 F: $A \nrightarrow B$, A-B-分配子，即函子 $A \times B^{\text{对偶}} \to \mathcal{V}$,
- 作为 2-胞腔 $\alpha : F \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} G$，自然变换：

$$\alpha_{(x,y)} : F(x, y) \to G(f(x), g(y)).$$

对于所有小范畴 A，1-胞 $U_A : A \nrightarrow A$ 由单位 1 的余幂与 A: $U_A(x,y) = A(y,x) \cdot 1$ 的同态集定义，而两个 1-胞腔 F 和 G 的水平复合在对象上的定义为余端 $F \odot G(a,c) = \int^{b \in B} F(a,b) \otimes G(b,c)$。当 $\mathcal{V}$ 为 Set（分别为 $_R$ Mod）时，$U_A(x,y)$ 是同态集 $A(y,x)$（分别是由 $A(y,x)$ 生成的自由 R-模）。分配子与持久性有关：令 $\mathbb{R}$epr 表示 R-Mod-$\mathbb{D}$ist 的子双范畴，其 0-胞腔是偏序集，并将其视为小薄范畴。分配子 $M : P \nrightarrow \{*\}$ 称为 P 的表示。

例 2.5. 有向同伦（双）模的概念在[20]中引入。从代数角度看，它们是取值于吸收半群的吸收幺半群上的双模。吸收幺半群（分别为半群）是带有吸收元 0 的幺半群（分别为半群）。吸收幺半群上的左 T-模（G,T）是一个吸收半群 M，连同一个吸收幺半群 T的作用，即一个映射 $\cdot : T \times M \to M$，它满足幺半群的经典公理，并且 0 对 M 中元素的作用为 0。类似地，我们定义右 T-模和 T-S-双模，如例 2.3 中所述。幺半群上的双模态射是三元组 $(h,f,g) : (M,T,S) \to (M',T',S')$，其中$h : M \to M'$、$f : T \to T'$和 $h : S \to S'$是吸收幺半群态射，且 $f(t \bullet m) = f(t) \bullet h(m) \bullet g(s)$。与代数上的双模情形一样，在例 2.3 中，$h$称为从 M到 M'的（f,g）-双线性映射。吸收幺半群上的双模双范畴具有:

- 作为对象的吸收幺半群,
- 作为垂直箭头的吸收幺半群态射,
- 作为 1-胞腔 $M : A \nrightarrow B$，吸收半群 M，其上配备了 A 和 B 在 M上的相容作用，即上述意义下的吸收幺半群上的双模,
- 作为 2-胞腔 $\alpha : M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$，$(f,\ g)$-双线性态射。

吸收幺半群可以视为自身上的双模，而水平复合由双模的张量积给出。

在 [20], 中，已证明有向空间中的迹（即模去重新参数化的有向路径）在配备拼接运算、一个吸收元和一个单位元后构成吸收幺半群。迹空间（即模去重新参数化的有向路径所成的拓扑空间）中维数为 n 的奇异单形，配备紧开拓扑所诱导的相应商拓扑后，被证明构成迹吸收幺半群上的双模。在迹空间中构造奇异单形，实际上构成迹幺半群上的双模范畴中的 Kan 单纯对象。由此得到了有向同伦双模及其某些性质的自然定义。

2.2. 框架双范畴

框架双范畴（或纤维化双范畴）是一种允许沿垂直箭头限制和扩张 1-胞的双范畴，正如双模允许标量限制与扩张一样。它们由

Shulman 在 [9], 建立在2-范畴上的等价概念 pro箭装备之上 [21, 22]。

定义 2.6 ([9])。 框架双范畴 $\mathbb{D}$ 是一个双范畴，其中函子 (L, R) : $\mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_0 \times \mathbb{D}_0$ 是双纤维化。具体而言，给定一个框架双范畴 $\mathbb{D}$，对于所有垂直箭头 $f: A \to B$ 、 $g: C \to D$ 以及 1-胞 $M : B \nrightarrow D$，都存在笛卡尔 2-胞腔；这些 2-胞腔在唯一球状同构 2-胞腔的前复合意义下唯一，记作 $f^* M g^* \xrightarrow{cart} M$ 或 $f^* M g^* \xrightarrow{c} M$，并绘制如下:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{f^* M g^*}{\nrightarrow} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & cart & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \underset{M}{\nrightarrow} & D \end{array},$$

笛卡尔的含义是，任意 2-胞腔:

$$\begin{array}{ccc} A' & \overset{N}{\nrightarrow} & C' \\ {\scriptstyle fh}\downarrow & \Downarrow & \downarrow{\scriptstyle gk} \\ B & \underset{M}{\nrightarrow} & D \end{array}$$

都可唯一分解为:

$$\begin{array}{ccc} A' & \overset{N}{\nrightarrow} & C' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow & \downarrow{\scriptstyle k} \\ A & {\scriptstyle f^* M g^*} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & cart & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \underset{M}{\nrightarrow} & D \end{array}.$$

对偶地，存在余笛卡尔 2-胞腔；它们在与唯一球状同构 2-胞腔作后复合的意义下唯一，为简便起见记作 $M \xrightarrow{cocart} f_! M g_!$ 或 $M \xrightarrow{cc} f_! M g_!$ 。

我们在此记录一些关于余纤维化的事实（对偶陈述对纤维化成立）：

1. 对所有余笛卡尔 2-胞腔 α， α 都是满态射。2. 对所有 2-胞腔 α 和 β，如果 $\beta \circ \alpha$ 和 α 是余笛卡尔的，那么 β 也是如此。3. 对所有余笛卡尔 2-胞腔 $\alpha : X \to X_1$ 和 $\beta : X \to X_2$，如果 α 和 β 位于同一个垂直箭头 h之上，则存在唯一的同构 $X_1 \cong X_2$，其与 α 和 β交换。

假设选择公理成立，则任意纤维化都允许一个（正规）劈，即为所有相容的2-单元以及垂直箭头对选择（余）笛卡尔1-单元。劈使得能够为所有垂直箭头对定义系数变换函子。由于（余）笛卡尔2-单元具有唯一性，任何其他劈的选择都会给出自然同构的系数变换函子。在第3、4 和5节中，任意正规劈均足够，因为研究的是同构意义下的1-单元。然而，在第7节中，我们构造了一个特定的劈，以

满足某些严格性条件。事实上，尤其是在第7.3 节中，研究的是相等意义下的1-单元。

定义 2.7。对于所有垂直箭头 $f: A \to B$ 和 $g: C \to D$，**标量限制**函子 $f^*(\,)g^*: \mathcal{D}(B, D) \to \mathcal{D}(A, C)$ 在 1-胞 $M: B \nrightarrow D$ 上定义为 f^*Mg^*，在球形 2-胞 $\alpha: M \to N$ 上定义为 2-胞腔 $f^*Mg^* \xrightarrow{cart} M \xrightarrow{\alpha} N$ 通过笛卡尔 2- 胞 $f^*Ng^* \xrightarrow{cart} N$ 的分解。对偶地，对于所有垂直箭头对，我们定义**标量扩张** 函子，以及对所有垂直箭头定义右侧和左侧的系数变换函子。

根据 [9, 命题 3.9], ，沿着 (f, g) 的限制函子是沿着 (f, g) 的扩张函子的右伴随。更具体地说，伴随的单位 η 在 1-胞 M 上逐点定义为余笛卡尔 2-胞 $X \xrightarrow{cocart} f_!Mg_!$ 通过笛卡尔 2-胞 $f^*f_!Mg_!g^* \xrightarrow{cart} f_!Mg_!$ 的分解。当所有限制函子都存在右伴随时，这些伴随称为**余扩张**。该条件等价于 $\mathbb{D}$ 是一个闭框架双范畴。

定义 2.8 ([9])。框架双范畴 $\mathbb{D}$若其底层水平双范畴 $\mathcal{D}$ 作为双范畴是闭的，则称为**闭** 框架双范畴；也就是说，水平复合在两个变量上都有右伴随函子 $\mathbb{D}_1(M \odot N, P) \cong \mathbb{D}_1(M, N \triangleright P) \cong \mathbb{D}_1(N, P \triangleleft M)$。在这种情况下，对于所有垂直箭头 $f: A \to B$，限制函子 f^*都有右伴随，称为**余扩张**，记作 f_*，并且自然同构于 $(\,) \triangleleft {}_fB$。

在本文档的其余部分，我们还将使用“外部”幺半结构的概念：

定义 2.9 ([9])。幺半 框架双范畴是框架双范畴的2-范畴 [9, §6]中的一个伪幺半群。更明确地说，它由一个框架双范畴 $\mathbb{D}$ 构成，其中水平范畴和垂直范畴 $\mathbb{D}_0$ 与 $\mathbb{D}_1$都是幺半范畴，两个幺半积均记作 $\otimes$，并满足通常的公理。特别地，若 I 表示 $\mathbb{D}_0$中的幺半单位，则 $\mathbb{D}_1$ 中的幺半单位为 $U(I)$；并且对所有1-胞 $M: A \nrightarrow B$ 和 $N: C \nrightarrow D$，$M \otimes N$ 都是一个 1- 胞 $A \otimes C \nrightarrow B \otimes D$。

例 2.10. • 模的标准系数变换函子使 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 成为一个框架双范畴。具体而言，对于任意 B-B'-双模M 以及 R-代数同态 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$，左限制 f^*M是底层集合为 M的 A-B'-双模，其右作用

$\cdot_{B'}$，左作用为 $(a, m) \mapsto f(a) \cdot_B m$。扩张 $g_!M$由$U_Cg^* \otimes_B M$给出，余扩张 g_*M则由 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R(g^*U_C, M)$给出。此外，${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 由张量-同态伴随构成闭结构，并通过双模的外张量积 $\otimes_R$成为幺半结构，它将一个 A-B-双模M和一个 C-D-双模 N对应到 $A \otimes_R C$-$B \otimes_R D$-双模 $M \otimes_R N$。

- 由 $\mathcal{V}$-$\mathbb{D}$构成的分配子双范畴也是一个闭框架双范畴。限制由前复合给出，而扩张和余扩张则分别由左 Kan 延拓和右 Kan 延拓给出。张量积

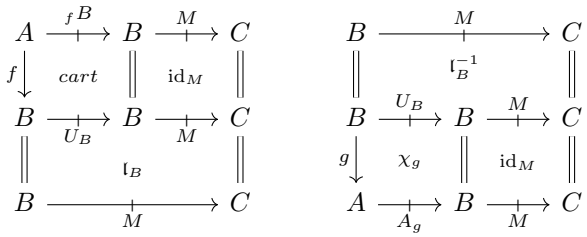
的 $\mathcal{V}$-范畴使 $\mathcal{V}$-$\mathbb{D}$构成幺半结构。更多详情请参见 [9, 例 2。6] 该例更详细地介绍了这个框架双范畴。

- 对于吸收幺半群中的双模，情况也类似，见例 2.5。文献 [20]表明，标量限制函子是标量扩张函子的右伴随，也是标量余扩张函子的左伴随。

根据 [9, 定理 4.1], ，双范畴 $\mathbb{D}$ 上的框架结构也可以等价地表述为：对所有垂直箭头 $f\colon A \to B$，给定称为**特殊对象**的 1-胞腔 ${}_fB\colon A \nrightarrow B$ 和 $B_f\colon B \nrightarrow A$ ，以及满足 [9, 定理 4.1]中的图表条件的某些 2-胞腔。如果一个双范畴具有框架结构，则特殊对象可定义如下：

定义 2.11。对于所有框架双范畴 $\mathbb{D}$，我们对每个垂直箭头 $f\colon A \to B$定义**特殊对象**${}_fB = f^*U_B$和 $B_f = U_Bf^*$。

反过来，如果一个双范畴包含特殊对象，那么可以证明，对于所有 1-胞 $M\colon B \nrightarrow D$、垂直箭头 $f\colon A \to B, g\colon B \to A$ 以及垂直对象 C，以下 2-胞腔分别是笛卡尔的和余笛卡尔的：



其中，余笛卡尔 2-胞 $U_B \overset{{}_fB}{\underset{g}{\Longrightarrow}} A_g$ 记作 χ_g ，其定义为将 Ug 分解并通过笛卡尔 2-胞 $U_Ag^* \to U_A$，并且可以证明它是笛卡尔的。对称地，存在一个余笛卡尔 2-胞 ${}_g\chi\colon U_B \overset{g}{\underset{\mathrm{id}_B}{\Longrightarrow}} {}_gA$，以及用于右侧水平复合的笛卡尔和余笛卡尔 2-胞。因此，存在唯一同构 $\lambda^*\colon {}_fB \odot M \to f^*M$ 和 $\lambda_!\colon B_g \odot M \to g_!M$，它们关于 M 自然，并且与相关的（余）笛卡尔胞交换；对称地，也存在自然同构 ρ^* 和 $\rho_!$。本文其余部分将使用记号 B_f 和 ${}_fB$，作为 f^*U_B 和 U_Bf^* 的别名，以强调上述笛卡尔 2-胞和自然同构。

3. 阿贝尔框架双范畴

阿贝尔范畴是向量空间与线性映射这一具体范畴的抽象范畴论推广。直观地说，用于定义同调向量空间的向量空间和线性映射的性质被抽象为一组公理：态射具有核和余核；存在零对象，且任意两个对象之间都有零态射；有限积与

余积相一致。阿贝尔范畴之间的函子称为**可加**函子，如果它们保持直和与零对象；称为**正合**函子（相应地，称为左正合函子或右正合函子），如果它们保持正合序列（相应地，保持左正合性或右正合性）。教材参考资料见 [23, 24] 。

本节中，我们定义阿贝尔框架双范畴：它们是局部阿贝尔的框架双范畴，并且水平复合是可加的；只要框架双范畴是闭的，这一条件就成立。我们的动机是捕捉这样一个事实：尽管环变化时的模范畴不是阿贝尔的，但对于固定环 A 和 B ， A-B-双模范畴是阿贝尔的。

定义 3.1。 阿**贝尔框架双范畴** 是一个框架双范畴 $\mathbb{D}$，它是局部阿贝尔的，即所有局部范畴 $\mathcal{D}(A,\ B)$ 都是阿贝尔的，并且水平复合给出加性函子：

$$\mathcal{D}(A,B)\times\mathcal{D}(B,C)\to\mathcal{D}(A,C),(M,N)\mapsto M\odot N$$

对所有对象 $A,\ B,\ C\in\mathbb{D}_0$。

备注 3.2。 另一种定义可能要求对象范畴 $\mathbb{D}_0$ 或整个水平范畴 $\mathbb{D}_1$ 是阿贝尔的，但这样的定义无法涵盖我们的例子。事实上，若 R 是一个环，则 R-代数范畴不是阿贝尔的，因为始对象与终对象 R 和 0 并不同构。类似地，在环变化的 R-代数上的双模范畴中，始对象与终对象 $0:\ R\nrightarrow R$ 和 $0:\ 0\nrightarrow 0$ 并不同构。

注记 3.3. 据我们所知，阿贝尔框架双范畴这一概念此前尚未出现在文献中：

- 半阿贝尔范畴 [25, 26] 是阿贝尔范畴的弱化版本，其中仍可进行同调代数。顺便一提，Goubault 也曾用它们来定义有向同调理论 [27]。类似地，即使水平范畴仅为局部阿贝尔，仍可为阿贝尔框架双范畴定义同调理论。然而，存在两个主要区别：阿贝尔框架双范畴是一种2-范畴概念，并且局部阿贝尔与半阿贝尔是正交的，也就是说，人们同样可以考虑局部半阿贝尔范畴，但为简便起见，我们聚焦于阿贝尔范畴。

- 文献中已提出阿贝尔 2-范畴的若干变体 [28, 29], ，但它们在 [28]的意义下均为阿贝尔Gpd-范畴。它们与阿贝尔框架双范畴有某些相似之处（例如局部零1-胞），但它们被理解为2-范畴而非双范畴，而且所有2-胞腔均可逆。与阿贝尔框架双范畴最接近的联系将是带装备的阿贝尔2-范畴这一概念，而这似乎尚未被探讨。

- 幺半阿贝尔范畴这一概念通常称为张量范畴，已有充分研究，参见例如 [30, 31]。然而，在阿贝尔框架

双范畴 $\mathbb{A}$中，水平范畴 $\mathbb{A}_1$ 和局部范畴$\mathbb{A}(A,\ B)$（对于 $A \neq B$）通常都不是幺半阿贝尔范畴；只有范畴$\mathbb{A}(A,\ A)$具有幺半结构。

在本节余下部分，我们推导出定义 3.1的直接推论，介绍更多定义，并给出阿贝尔框架双范畴的主要例子。在阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$中，由于系数变换函子是左伴随或右伴随，它们自动分别是右正合或左正合的。当 $\mathbb{A}$是闭的，即水平复合函子同时具有左右伴随函子时，水平复合的可加性同样是自动成立的。

推论 3.4。 限制函子是左正合的，延拓函子是右正合的。如果余延拓函子也存在，那么限制函子是正合的，余延拓函子是左正合的，而水平复合函子是右正合的。特别地，所有这些函子都是可加的。

证明。 阿贝尔范畴之间的右伴随函子（分别地，左伴随函子）是左正合的（分别地，右正合的）。 □

推论 3.5。 限制或（余）扩张零对象仍得到零对象。对于所有垂直箭头 $f:\ A \to C$ 和 $g:\ B \to D$ 以及 1- 单元 $M:\ A \nrightarrow B$ 和 $N:\ C \nrightarrow D$，存在唯一的 2- 单元 $0 \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$ 和 $M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} 0$；它们在通过唯一同构进行后复合（分别地，前复合）的意义下是唯一的。

证明。 这源于函子的可加性以及（余）笛卡尔 2-胞腔的性质。

□

框架双范畴上的附加结构可以延续到阿贝尔框架双范畴上。**闭阿贝尔标架双范畴**是同时具有阿贝尔结构和闭结构的框架双范畴。对于幺半框架双范畴，还需要一个额外的相容性条件。

定义 3.6。 **幺半阿贝尔框架双范畴**是一个同时具有幺半结构的阿贝尔框架双范畴，并且对于所有对象 A, B, C 和 D，由 $\mathbb{D}_1$ 中的幺半积诱导的函子 $\otimes\colon \mathcal{D}(A, B) \times \mathcal{D}(C, D) \to \mathcal{D}(A \otimes C, B \otimes D)$ 是可加的。

例 3.7。 • 范畴 A-B-双模，其中 A 和 B 是固定的 R-代数，是阿贝尔的。此外，由于张量积对有限直和满足分配律，水平复合是可加的。因此，框架双范畴 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 是阿贝尔的。出于同样的原因， ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 也是阿贝尔幺半的。

- $\mathcal{V}$-分配子的框架双范畴是闭的；如果 $\mathcal{V}$ 是阿贝尔的，那么两个固定小范畴上的 $\mathcal{V}$-分配子的局部范畴也是阿贝尔的。在这种情况下， $\mathcal{V}$-$\mathbb{D}$ist 因此是一个阿贝尔框架双范畴。特别是， $\mathbb{R}$epr 也是。
- 吸收幺半群上的双模所构成的框架双范畴（例2.5）不是阿贝尔的。

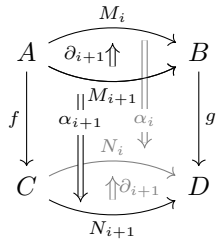
4. 阿贝尔框架双范畴中的同调与上同调

本节将同调代数的经典概念推广到阿贝尔框架双范畴的情形。由于阿贝尔框架双范畴只是局部阿贝尔的，我们尽可能在局部范畴中进行讨论，并在必要时使用扩张函子或限制函子。下文中，令 $\mathbb{A}$ 表示一个阿贝尔框架双范畴。

4.1. 阿贝尔框架双范畴中的链复形

我们将 $\mathbb{A}$中的链复形定义为 $\mathbb{A}$的局部阿贝尔范畴中的链复形，从而使其同调定义良好。然而，链复形的态射不一定是局部的，并且满足与2-胞腔类似的性质。在本文余下部分中，链复形均指正分次链复形。特别地，我们不考虑 [8] 中的移位链复形。

定义 4.1。 $\mathbb{A}$ 中的一个**链复形**是 $\mathbb{A}$的某个局部阿贝尔范畴中的链复形，即，对于某些对象 A 和 B，它是 $\mathcal{A}(A,\ B)$ 中的链复形。从链复形 $(M_i)_{i\geq 0}$（属于 $\mathcal{A}(A,\ B)$）到链复形 $(N_i)_{i\geq 0}$（属于 $\mathcal{A}(C,\ D)$）的**态射** $(\alpha_i)_{i\geq 0}$ 由一对垂直箭头 $f\colon A\to C$ 和 $g\colon B\to D$，以及对于所有 $i\geq 0$ 的 2-胞腔 $\alpha_i\colon M_i \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N_i$ 组成，并满足以下图表对所有 $i\geq 0$ 均交换：



我们用 $\mathsf{Ch}(\mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{A}$ 中链复形及链复形态射构成的范畴。链复形在系数变换函子作用下保持稳定，并且存在链复形的（余）笛卡尔态射：

定义 4.2。 沿垂直箭头 $f\colon A\to B$ 和 $g\colon C\to D$ 对 $\mathbb{A}$ 中链复形 $M_*\colon B\nrightarrow D$ 作**限制**，即对M_*逐点限制。由于限制是可加的，这会得到另一个链复形，记作$f^*Mg^*\colon A\nrightarrow C$。类似地，我们定义沿垂直箭头的**（余）扩张**，以及沿 1-胞腔的**水平复合**。

命题 4.3. 对于 $\mathcal{A}(A,B)$ 中的任意链复形 M 和 N，以及 $\mathcal{A}(C,D)$中的任意链复形，若垂直箭头 $f\colon A\to C$ 和 $g\colon B\to D$ 给定，则存在一个链复形态射 $\gamma\colon f^*Ng^* \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$，且在唯一同构的前复合意义下唯一。此态射是笛卡尔的，意即对于任意链复形态射 $\alpha\colon M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$，都存在唯一态射$|\alpha|\colon M\to f^*Ng^*$，使得 $\alpha=\gamma\circ|\alpha|$，其中该态射属于 $\mathrm{Ch}(\mathcal{D}(A,B))$。

证明。根据 $f^*\partial_i g^*$ 对 $i \geq 0$ 的定义，笛卡尔 2-胞腔 $(\gamma_i \colon f^* N_i g^* \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N_i)_{i\geq 0}$ 自动构成链复形态射。给定另一个链复形态射 $\alpha : M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$，沿每个笛卡尔 2-胞腔 γ_i 对 α 逐点进行分解，从而对所有 $i \geq 0$ 得到 2-胞腔 $|\alpha|_i : M_i \to f^* N_i g^*$。这些 2-胞腔同样构成链复形态射 $|\alpha|$，并满足所需性质。反过来，任何其他分解都必须与此分解一致，因为逐点应用每个 $|\alpha|_i$ 的唯一性即可得出这一结论。同样，要证明 γ 在唯一同构的前复合意义下唯一，只需逐点应用每个 2-胞腔 γ_i 的唯一性。

□

水平范畴 $\mathbb{A}_1$ 不一定是阿贝尔范畴，$\mathsf{Ch}(\mathbb{A})$ 也不一定是。然而，对于所有对象 A 和 B，局部范畴 $\mathcal{A}(A,B)$ 中的链复形范畴 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}(A,B))$ 都是阿贝尔范畴。因此，要计算链复形态射的余核等，就需要通过（余）笛卡尔态射进行分解。

引理 4.4。设 M 和 N 分别是 $\mathcal{A}(A,B)$ 和 $\mathcal{A}(C,D)$ 中的链复形，并设 $\alpha : M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$ 是一个链复形态射。记 α 经余笛卡尔态射 $M \xrightarrow{cocart} f_! M g_!$ 的分解为 $|\alpha| : f_! M g_! \to N$。那么 $|\alpha|$ 的余核存在。

证明。范畴 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}(C,D))$ 是阿贝尔范畴。 □

幸运的是，改变系数的限制并不算太大。例如，给定图表 $F \colon I \to \mathbb{D}_1$ 的一个锥 $(N \colon A \nrightarrow B, (\phi_x)_{x\in I})$，可以应用标量限制函子，在局部范畴 $\mathcal{A}(A,B)$ 中得到“限制图表”的一个锥。以下引理阐述了这一点。

引理 *4.5.* 设 $(N \colon A \nrightarrow B, (\phi_x)_{x\in I})$ 是图表 $F \colon I \to \mathbb{D}_1$ 的一个锥。存在一个限制图表 $|F| \colon I \to \mathcal{A}(A,B)$，其定义在对象 x *in* I *by* $|F|(x) = L(\phi_x)^* F(x) R(\phi_x)^*$ 上。此外，N 与 $x \in I$ 的 ϕ_x 的分解一起构成该图表的一个锥。

证明。在箭头 $f : x \to y$ 上，将 $|F|(x) \xrightarrow{cart} F(x) \xrightarrow{F(f)} F(y)$ 通过 $|F|(y) \xrightarrow{cart} F(y)$ 的分解定义 $|F|$，如下面的图表所示。由分解的唯一性，$|F|$ 具有函子性。对于所有 $x \in I$，我们将 ϕ_x 通过 $|F|(x) \xrightarrow{cart} F(x)$ 的分解记为 $|\phi|_x$。于是，$(N, (|\phi|_x)_{x\in I})$ 是 $|F|$ 的一个锥；对于 I 中的所有箭头 $x \to y$，如下方交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc} & & |F|(x) & \xrightarrow{cart} & F(x) \\ & \overset{|\phi|_x}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle |F|(f)} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ N & & & & \\ & \underset{|\phi|_y}{\searrow} & |F|(y) & \xrightarrow{cart} & F(y) \end{array}$$

左侧三角形交换，因为右侧方格和外部图表都交换；根据通过笛卡尔态射 $|F|(y) \xrightarrow{cart} F(y)$ 的分解的唯一性，.....

□

4.2. 同调

设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴，$\mathbb{A}$为阿贝尔框架双范畴，且 $M\colon \mathcal{C}\to \mathsf{Ch}(\mathbb{A})$为一个函子。对象 X 在 M 下的像记为 $M(X)\colon L(X)\nrightarrow R(X)$。也就是说，$M(X)$是一个由“$L(X)$-$R(X)$-双模”构成的链复形。

定义 4.6. 对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中的**同调** 是链复形 $M_*(X)$ 在局部阿贝尔范畴$\mathcal{A}(L(X)\ R(X))$ 中的同调 $H_*(X)\colon L(X)\nrightarrow R(X)$。这一构造具有函子性。

例 4.7. 除相差一个移位外，[8, 定义 5.4]在阿贝尔框架双范畴的框架下，对应于一个函子$C\colon \mathrm{Cub}_I\to \mathrm{Ch}({}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R)$ 它从范畴 Cub_I 映射到带有适当非循环长度覆盖的预立方集范畴，其中的映射在顶点上是单射。

与阿贝尔范畴中的情形一样，我们可以考虑对象X 在 $\mathcal{C}$ 中相对于箭头 $f\colon Y\to X$ 的同调。我们将标量扩张函子 $L(f)_!(\ )R(f)_!$记作 ${}^f(\ )$；在没有歧义时，也将 ${}^X(\ )$ 记作 。

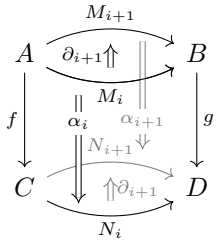
定义 4.8. 设 $f\colon Y\to X$ 是 $\mathcal{C}$中的一个态射。由引理 4.4，余核 $(M_i(X)/{}^XM_i(Y))_{i\geq 0}$ 是良定义的。我们将此链复形记为$M(X,Y)$，其同调记为 $HM(X,Y)$，并称之为 $f\colon Y\to X$的相对同调。

注意，余核 $M(X,Y)$ 是在与 $M(X)$ 相同的局部范畴 $\mathcal{A}(L(X)\ R(X))$ 中计算的，而 $M_*(Y)$ 则定义在局部范畴$\mathcal{A}(L(Y)\ R(Y))$ 中。由于没有假设 $\mathbb{A}_1$ 是阿贝尔的，因此 $\mathbb{A}_1$ 中正合序列的概念并未得到良好定义。因此，无法直接得到一个长正合列，借此根据 X 和 Y 的同调计算相对同调。不过，在第 5.2 节中，我们将展示一个涉及标量扩张的长正合列，它可以沿着某些性质良好的态射 $f\colon Y\to X$ 计算相对同调，这些态射称为相对对。

4.3. 上同调

与定义 4.1类似，我们可以定义余链 a 和上同调理论：

定义 4.9. $\mathbb{A}$ 中的**余链复形**是 $\mathbb{A}$的局部阿贝尔范畴中的余链复形，即对某些对象 A和 B而言，$\mathcal{A}(A,B)$中的余链复形。从 $\mathcal{A}(A,B)$中的余链复形$(M_i)_{i\geq 0}$ 到 $\mathcal{A}(C,D)$中的余链复形$(N_i)_{i\geq 0}$ 的**态射**$(\alpha_i)_{i\geq 0}$ 是一对垂直箭头 $f\colon A\to C$ 和 $g\colon B\to D$，以及对于所有 $i\geq 0$的2-胞腔 $\alpha_i\colon M_i\overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}}N_i$，使得对所有 $i\geq 0$下列图表交换：



我们用coCh(𝔸)表示 𝔸中上链复形与上链复形的态射所构成的范畴。上链复形在系数变换函子下也保持稳定，并且存在上链复形的（余）笛卡尔态射。

与同调情形类似，设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴， $\mathbb{A}$为阿贝尔框架双范畴，且 $M:\mathcal{C}\to$ coCh(𝔸) 为一个函子。对象X在 M 下的像记作 $M(X):L(X)\nrightarrow R(X)$，也就是说， $M(X)$ 是一个由“$L(X)$-$R(X)$-双模”构成的余链复形。于是我们可以定义：

定义 4.10。对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中的**上同调**是余链复形 $M^*(X)$ 在局部阿贝尔范畴 $\mathcal{A}(L(X)\ R(X))$ 中的上同调$H^*(X):L(X)\nrightarrow R(X)$。此构造具有函子性。

与定义 4.8中一样，也可以定义相对上同调。

在许多有趣的情形中，我们可以从链复形构造余链复形，并以此得到上同调理论。与同调情形一样，我们再次考虑一个范畴 $\mathcal{C}$、一个阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$ 以及一个函子$M:\mathcal{C}\to$ Ch(𝔸)，记作 M 。

为了将链复形对偶化为上链复形，我们将使用 $\mathbb{A}$ 中的对偶对。回想一下，在双范畴 $\mathbb{D}$ 中，对偶对是由一对 1-胞腔 (M,N)、 $M:A\nrightarrow B$、 $N:B\nrightarrow A$，以及满足三角恒等式的“求值”和“余求值”2-胞腔 $N\odot M\to U_B$ 和 $U_A\to M\odot N$ 组成的。在这种情况下， N 称为 M 的右对偶。

现在假设 $\mathbb{A}$ 是一个对称闭幺半阿贝尔框架双范畴，也就是说，对于所有 1-胞腔 M、 N 和 P，我们都有 $\mathbb{A}(M\odot N,P)\simeq\mathbb{A}(M,N\rhd P)\simeq\mathbb{A}(N,P\lhd M)$。我们再次由 [9] 知道，当 1-胞腔 $M:A\nrightarrow B$ 的右对偶存在时，它总是与 $M\rhd U_B$ 同构。现在假设对所有 $X\in\mathcal{C}$ 以及 $i\geq 0$， $M_i(X)$ 都是右可对偶的，并令 $M^i(X)$ 为 $M_i(X)$ 的对偶。同样，考虑 $M_*(X)$ 的边界算子的对偶球状 2-胞腔 $\partial^{i+1}:M^i(X)\to M^{i+1}(X)$。显然，这构成了一个上链复形 $M^*(X):R($。

例 4.11。我们考虑代数的阿贝尔框架双范畴 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 双模，参见例 2.3，以及 [8], 的同调构造，参见例 4.7。 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 是对称闭幺半的，因此我们可以将上述构造应用于任意右可对偶链复形。在 [8], 中，每个预立方集合 X 都关联有一个链复形 $M(X)$，其系数为 $R(X)$-$R(X)$-双模，其中 $R(X)$是 X的底层箭图的路径代数。回顾一下， $M_0(X)$是 $U_{R(X)}$，即，将 $R(X)$视为一个 $R(X)$-$R(X)$-双模，并且 $M_i(X)$对 $i\geq 1$是自由的。不难看出，它们都是右可对偶的，并且其对偶结构可描述如下：

设 X 是一个预立方集。考虑 $R(X)^{\mathrm{op}}$ 的反代数 $R(X)$，也就是说，它与 $R[X]$ 具有相同的底层 R-模，但其内部乘法 $\times^*$ 是 $R(X)$的内部乘法 $\times$ 的反向乘法：对于 p和 q（属于 $R(X)^{\mathrm{op}}$），$p\times^* q=q\times p$。对于所有 $i\geq 1$，令 $M^i(X)$ 为 R-模 $\mathrm{Hom}_R\mathrm{Mod}(M_n(X)\ R)$。我们定义余边界映射 $\partial^{i+1}:M^i(X)\to M^{i+1}(X)$。对于所有 $f\in M^i(X)$，令 $\partial^{i+1}(f)$ 为 $f\circ\partial_{i+1}$，它是 $M^{i+1}(X)$中的一个元素，由 $\partial_{i+1}:M_{i+1}(X)\to M_i(X)$ 给出。现在定义一个 $R(X)^{\mathrm{op}}$-$R(X)^{\mathrm{op}}$- 双模结构

在 $M^*(X)$ 上。对于所有 p, q（属于 $R(X)^{\mathrm{op}}$）、 $f \in M^i(X)$ 和 $x \in M_i(X)$, $i \geq 0$, 令 $p \cdot f \cdot q(x)$ 为 $f(p \cdot x \cdot q)$。我们有：

$$\begin{aligned} p' \cdot (p \cdot f \cdot q) \cdot q'(x) &= p \cdot f(p' \cdot x \cdot q') \cdot q \\ &= f(p \cdot (p' \cdot x \cdot q') \cdot q) \\ &= f((p \times p') \cdot x \cdot (q' \times q)) \\ &= f((p' \times^* p) \cdot x \cdot (q \times^* q')) \\ &= (p' \times^* p) \cdot f \cdot (q \times^* q')(x) \end{aligned}$$

并且我们定义的上余边界映射确实是 $R(X)^{\mathrm{op}}$-双模的态射：

$$\begin{aligned} \partial^{i+1}(p \cdot f \cdot q)(x) &= (p \cdot f \cdot q)(\partial_{i+1}(x)) \\ &= f(p \cdot \partial_{i+1}(x) \cdot q) \\ &= f(\partial_{i+1}(p \cdot x \cdot q)) \\ &= p \cdot (f \circ \partial_{i+1}) \cdot q(x) \\ &= p \cdot \partial^{i+1}(f) \cdot q(x). \end{aligned}$$

众所周知， B^{op}-A^{op}-双模也可以等价地视为 A-B-双模，因此，这一构造使 $M^*(X)$ 成为一个 $R(X)$-$R(X)$-双模，正如预期。

5. 通过相对对得到正合序列

本节将论证，在阿贝尔框架双范畴的情形下，仍可得到涉及标量扩张的通常正合序列的推广形式。相对同调的长正合列和 Mayer–Vietoris 长正合列需要相对对这一概念。下文中，令 $\mathbb{A}$ 表示一个阿贝尔框架双范畴， $\mathcal{C}$ 表示一个范畴，并令 $M\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 为一个函子。

5.1. 相对对

本节的目标是推广 [8, 定义 5.17] 中引入的概念。原始定义是组合性的，并导出一种分解性质 [8, 引理 5.18] ，从而确保某些正合序列的存在。通过抽象 [8, 定理 8.18], 中的证明，我们得到以下两个充分条件。

定义 5.1. 一个**相对对** (X, Y) 是箭头 $f\colon Y \to X$ 在 $\mathcal{C}$ 满足以下条件：

1. 标量扩张函子 ${}^X(\,)$ 是正合的；2. 链复形态射 $M(f)\colon M(Y) \to M(X)$ 经由余笛卡尔态射 $M(Y) \xrightarrow{cocart} {}^X M(Y)$ 的分解 ${}^X M(Y) \to M(X)$ 是单态的。

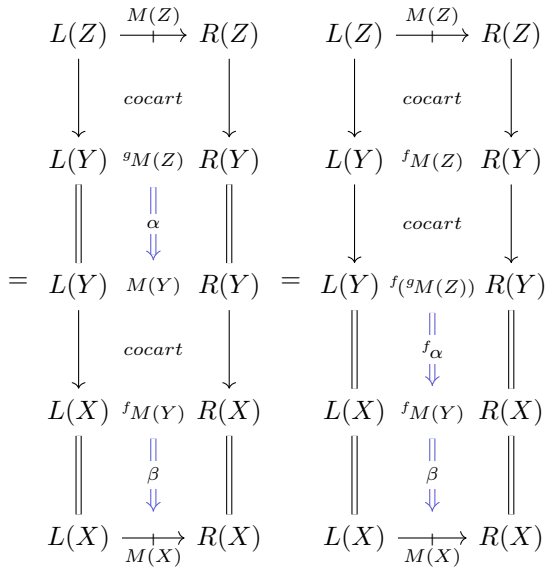
注记 5.2. 为满足条件 2，只需 f 是单态，且 M 和 2-胞腔的分解 $M(Y)\ {}_R(f)$ 经由 $M(Y) \xrightarrow{cocart} {}^X M(Y)$ 保持单态。最后这一性质以及条件 1 可以针对任意一对垂直箭头 $f\colon A \to C$ 和 $g\colon B \to D$，以及任意 1-胞 $M\colon A \nrightarrow B$ 来表述。由此得到一种独立于范畴 $\mathcal{C}$ 的相对对概念。

如同 [8]，相对对的复合一样，尽管这里的论证完全不同。

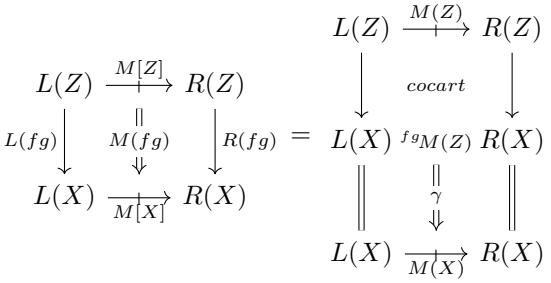
命题 5.3. 设 $g\colon Z \to Y$ 和 $f\colon Y \to X$ 是相对对。那么 $f \circ g\colon Z \to X$ 是一个相对对，并且存在自然同构 ${}^{fg}(\ ) \cong {}^{f}({}^{g}(\ ))\colon \mathcal{A}(L(Z)\ R(Z)) \to \mathcal{A}(L(X)\ R(X))$。

证明。 根据系数变换函子的伪函子性 [9, §4]，我们有 ${}^{fg}(\ ) \cong {}^{f}({}^{g}(\ ))$。正合函子在复合下保持正合性，因此 ${}^{fg}(\ )$ 是正合的。还需证明 $M(fg)$ 的分解是单态的。根据 M 的函子性、对偶对 (X, Y) 和 (Y, Z) 的相对性、 ${}^{f}\alpha$ 的定义，以及扩张 ${}^{f}(\ )$ 由于正合性保持单态，我们得到以下 2-胞腔的等式。单态用蓝色绘制。

$$
\begin{array}{ccc}
L(Z) & \xrightarrow{M(Z)} & R(Z) \\
{\scriptstyle L[fg]}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle M(fg)} & \downarrow{\scriptstyle R[fg]} \\
L(X) & \xrightarrow[M(X)]{} & R(X)
\end{array}
=
\begin{array}{ccc}
L(Z) & \xrightarrow{M(Z)} & R(Z) \\
{\scriptstyle L[g]}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle M(g)} & \downarrow{\scriptstyle R[g]} \\
L(Y) & \Downarrow{\scriptstyle M(Y)} & R(Y) \\
{\scriptstyle L[f]}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle M(f)} & \downarrow{\scriptstyle R[f]} \\
L(X) & \xrightarrow[M(X)]{} & R(X)
\end{array}
$$



此外， $M(fg)$ 通过余笛卡尔态射 $M(Z) \xrightarrow{cc} {}^{X}M(Z)$ 分解：



根据纤维化的一般结果，两个笛卡尔态射的复合仍是笛卡尔的，并且笛卡尔态射在唯一同构的复合下唯一。因此，根据沿笛卡尔2-胞腔分解的唯一性， γ 是 β、 ${}^{X}\alpha$与一个同构的复合，而它们都是单态2-胞腔。因此， γ 是单态。

□

例5.4。 如 [8], 例4.7的同调理论所示，对于所有预立方集的包含函子 $Y \hookrightarrow X$ ，若 X 中的有向路径只能进入 Y一次，并离开 Y一次，则$(X,\ Y)$ 是一个相对对。正如 [32]所示，d-空间的相对对也具有类似的性质。

这种情形出现在动力系统的 Conley理论示例中：给定流 φ 中的孤立不变集 S ：$\mathbb{R} \times X \to X$，考虑 S 的一个指标对（$N,\ L$）。流 φ 在 X 上诱导出一种 d-空间结构，因此也在子空间 N_1 和 N_2 上诱导出这种结构，其有向路径为以下对象在重新参数化映射下的闭包：

映射的重新参数化：

$$\begin{aligned} p_{a,b,x} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \varphi(a + (b-a)t, x) \end{aligned}$$

对所有点 $x \in X$ 和闭区间 $[a,b]$ 属于 $\mathbb{R}$。根据指标对的定义，我们有 $L \subseteq N$。此外，对于 N中的每条有向路径， L在 N 中是正向不变的，因此 N 中的一条有向路径至多进入 L 一次，且不能离开。由此可知，可以考虑指标对的有向相对同调，其定义见 [32], ，这与同调康利指标的定义类似。其性质将在别处研究。

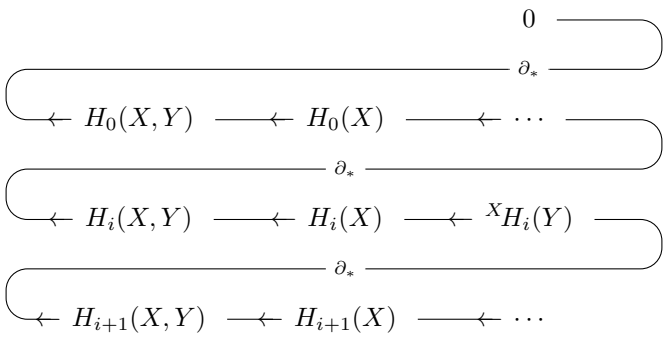
更一般地，确定定义 5.1 的第一个条件何时成立，即标量扩张何时是正合的，是一个值得研究的问题。

例 5.5。 考虑由偏序集上的表示构成的框架双范畴 $\mathbb{R}\mathrm{epr}$，即 ${}_R\mathrm{Mod}$-分配子，其形式为 $M : P \nrightarrow \{*\}$，见例 2.4。对于偏序集间任意一个伽罗瓦连接 $\alpha : C \to A \dashv \gamma : A \to C$，我们已知沿 α 的扩张是右正合的。下面证明它也是左正合的，因而是正合的。只需证明沿 α 的扩张自然同构于沿 γ的限制；更确切地说，存在特殊对象 ${}_\alpha A \cong C_\gamma$ 和 $A_\alpha \cong {}_\gamma C$之间的同构。这可直接由 U 关于同态集的定义以及伴随 $\alpha \dashv \gamma$得出。

5.2. 相对同调的长正合列

几乎根据定义，沿相对对存在相对同调的长正合列。

定理 5.6。 对于所有相对对 (X, Y)，都有一个长正合列：



证明。 由于 (X, Y) 是一个相对对，分解 ${}^X M(Y) \to M(X)$ 是单态的。此外，$M(X, Y)$ 被定义为一个余核。因此， $\mathcal{A}(L(X) \; R(X))$ 中的下列短序列是正合的：

$$0 \to {}^X M(Y) \to M(X) \to M(X, Y) \to 0$$

它诱导出一个长正合列，在利用扩张函子 $^{X}(\,)$ 的正合性得到同构 $H(^{X}M(Y))$ $\cong{}^{X}H(Y)$ 之后，该长正合列给出所需的序列。

□

定理 5.6 是 [8,定理 8。18]的直接推广。

例 5.7 （ [8]中的例 8.19）。 考虑 $X = \overrightarrow{D}^n = \overrightarrow{K}^n$ n 个预立方集 $\overrightarrow{K}$ 的张量积，该预立方集具有两个顶点 0 和 1，以及唯一的 1-胞 a，其满足 $d^0(a) = 0$ 和 $d^1(a)$。 $\overrightarrow{K}$ “表示”一条有向线段，而 $\overrightarrow{D}^n$ 是有向 n-圆盘的预立方版本。我们用 $Y = \overrightarrow{S}^{n-1}$ 表示 $\overrightarrow{D}^n$的边界，它是有向（$n-1$）-球面的一个版本，或称“中空的n-超立方体”。

当 $n = 2$时，让我们说明 $(\overrightarrow{D}^n, \overrightarrow{S}^{n-1})$ 的相对同调序列。 $\overrightarrow{D}^2$ 和 $\overrightarrow{S}^1$ 中任意一对点之间的同调都是平凡的，除了起点和终点 00 与 11 之间的同调。在这种情况下，$= H_0(\overrightarrow{D}^2)$ R $H_1\ \overrightarrow{D}^2\ = R$ $H_0\ \overrightarrow{S}^1\ = R^2$ $H_1\ \overrightarrow{S}^1\ = R$ 、( )、( )、( )，并且容易验证 $H_0(\overrightarrow{D}^2, \overrightarrow{S}^1) = 0$、 $H_1(\overrightarrow{D}^2, \overrightarrow{S}^1) = R$，于是定理 5.6 的相对正合序列归结为:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R \longrightarrow R^2 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

5.3. Mayer–Vietoris 序列

为了表述 Mayer–Vietoris 定理，我们需要以下经过调整的好覆盖定义。

定义 5.8。 对象 X 在 $\mathcal{C}$ 上的**好覆盖**是如下所示的相对对的交换方块，并满足下面命题 5.9 中的典范态射在同调 $^{X}H(X_1, X_1 \cap X_2)$ $\cong H(X, X_2)$中诱导一个同构，即具有切除性质。

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & X \end{array}$$

命题 5.9. 考虑定义 *5.8*中所述相对对的一个交换方块。分解 $^{X}M(X_1) \to M(X)$ 的 $M(X_1 \to X)$ 可下降到商对象上，即存在唯一的态射 $^{X}M(X_1, X_1 \cap X_2)$ $\to M(X, X_2)$使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & {}^{X}M(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & {}^{X}M(X_1) & \longrightarrow & {}^{X}M(X_1, X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exists!} & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^{X}M(X_2) & \longrightarrow & M(X) & \longrightarrow & M(X, X_2) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1}$$

证明。 由于相对对可复合，且扩张函子 $^{X}(\,):\mathcal{A}(L(X_1)\ R(X_1)) \to \mathcal{A}(L(X)\ R(X))$ 是正合的，因此每一行复合后都为零。此外，最左侧的方块由 M 的函子性以及引理 4.5的对偶结论而交换。于是由余核 $^{X}M(X_1, X_1 \cap X_2)$的泛性质可得结论；由于 $^{X}(\,)$ 是正合的，故保余核，因此该对象确为余核。

□

定理 5.10。 考虑对象 X 在 $\mathcal{C}$中的一个好覆盖，如定义 5.8所述。于是，我们得到以下同调长正合列：

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \partial_* \\
\leftarrow H_1(X) \longleftarrow {}^{X}H_1(X_1) \oplus {}^{X}H_1(X_2) \longleftarrow \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \partial_* \\
\leftarrow H_i(X) \longleftarrow {}^{X}H_i(X_1) \oplus {}^{X}HMi(X_2) \leftarrow {}^{X}H_i(X_1 \cap X_2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \partial_* \\
\leftarrow H_{i+1}(X) \leftarrow {}^{X}H_{i+1}(X_1) \oplus {}^{X}H_{i+1}(X_2) \longleftarrow \cdots
\end{array}
$$

证明。 回忆命题 5.3指出，$(X, X_1 \cap X_2)$ 是一个相对对，因此标量扩张函子 $^{X}(\ )$ 与同调交换。因此，将定理 5.6 应用于图表 1的两条正合行，可得以下两个同调长正合列：

$$\cdots \to {}^{X}H_{i+1}(X_1, X_1 \cap X_2) \to {}^{X}H_i(X_1 \cap X_2) \to {}^{X}H_i(X_1) \to {}^{X}H_i(X_1, X_1 \cap X_2) \to \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(X, X_2) \longrightarrow {}^{X}H_i(X_2) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(X, X_2) \longrightarrow \cdots$$

此外，由该构造的函子性，例如参见 [33, 命题 1.3。6]，，我们得到以下具有正合行的交换图。根据好覆盖的定义，其中一些垂直映射是同构：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to {}^{X}H_{i+1}(X_1, X_1 \cap X_2) & \to & {}^{X}H_i(X_1 \cap X_2) & \to & {}^{X}H_i(X_1) & \to & {}^{X}H_i(X_1, X_1 \cap X_2) & \to & \cdots \\
\qquad\qquad\cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \cong\downarrow & & \\
\cdots \longrightarrow H_{i+1}(X, X_2) & \longrightarrow & {}^{X}H_i(X_2) & \longrightarrow & H_i(X) & \longrightarrow & H_i(X, X_2) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

该结果于是由代数 Mayer–Vietoris 定理 [34, 引理 4.1。8], 参见附录B。

□

定理 5.10 也是对 [8, 定理 825]的直接推广。

6. Künneth 定理与 Eilenberg–Zilber 定理

本节将介绍一个涉及标量限制的、关于阿贝尔框架双范畴的 Künneth 定理 $\mathbb{A}$ 以及函子 $M:\ \mathcal{C}\to \mathrm{Ch}(\mathbb{A})$。与第 5 节中的正合列定理不同，该定理既不依赖相对对，也不立即推广从 [8]得到的 Künneth 定理。然而，在例4.7的具体情形下，我们证明了该 Künneth 定理适用于一组不同但仍然受限的预立方集合，而非 [8,定理 814]。

6.1. 一个 *Künneth* 定理

我们对 $\mathbb{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 要求以下假设：

- 为了表述我们的 Künneth 定理，我们需要 $\mathbb{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 是幺半的，且二者的乘积都记作 $\otimes$。这会在 $\mathbb{A}$ 中为链复形诱导出一个乘积：对于 $\mathbb{A}(A,\ B)$ 中的任意链复形 C_*，以及 $\mathbb{A}(C,\ D)$ 中的任意链复形 D_*，$C\otimes D$ 是 $\mathbb{A}(A\otimes C,\ B\otimes D)$ 中满足以下条件的链复形：

  – 对于所有 $i\geq 0$，均有 $(C\otimes D)_i=\bigoplus_{i=j+k} C_j\otimes D_k$；– $\partial_i:(C\otimes D)_i\to(C\otimes D)_{i-1}$ 在直和项 $C_j\otimes D_k$ 上定义为 $\partial_j\otimes \mathrm{id}_{D_k}+(-1)^j\,\mathrm{id}_{C_j}\otimes\partial_k$，对所有 $i>0$ 均成立。

  现在，对于所有 X，Y属于 $\mathcal{C}$ 的对象，我们可以考虑两个链复形 $M_*(X\otimes Y)$ 和 $M_*(X)\otimes M_*(Y)$。

- 为了联系上述两个链复形，我们需要垂直方向上的自然变换 $l_{X,\ Y}:\ L(X\otimes Y)\to L(X)\otimes L(Y)$ 和 $r_{X,\ Y}:\ R(X\otimes Y)\to R(X)\otimes R(Y)$，以及一个类似 Eilenberg–Zilber 的结果，即水平方向上的自然同构 $H_*(X\otimes Y)\cong l^*(H_*(M(X)\otimes M(Y))r^*$。

- 最后，我们要求 $\mathbb{A}$ 局部地具有足够多的投射对象、足够多的内射对象和余积，以便应用代数 Künneth 定理B.2，并且要求 $\mathbb{A}$ 是闭的，以便使用上述 Eilenberg–Zilber 结果。

定理 *6.1.* 对所有对象 $X,Y\in\mathcal{C}$，若张量积函子 $\otimes:\mathcal{A}(L(X)\ R(X))\times\mathcal{A}(L(Y)\ R(Y))\to\mathcal{A}(L(X)\otimes L(Y)\ R(X)\otimes R(Y))$ 满足代数 *Künneth* 定理 *[12,* 定理 *3.19] B.2* 的条件，则有如下短正合列，其中 Tor_1 表示张量积函子的第一左导出函子：

$$0\to l^*(HM(X)\otimes H(Y))r^*\to H(X\otimes Y)\to l^*\,\mathrm{Tor}_1(HM(X),HM(Y))r^*\to 0.$$

证明。代数 Künneth 定理给出如下正合列：

$$0\to H(X)\otimes H(Y)\to H_*(M(X)\otimes M(Y))\to \mathrm{Tor}_1(H(X),H(Y))\to 0.$$

在这个序列上应用适当的标量限制函子，可以保持正合性。最后，使用给定的 Eilenberg–Zilber 公式替换中间项。

□

Eilenberg–Zilber 型公式通常更强，原因在于它要求存在链同伦等价，而不仅仅是同调上的同构。在第6.2节中，我们证明，对于 [8], 的具体有向同调理论，强 Eilenberg–Zilber 公式并不成立，而弱版本则成立。不过，如上所述，这个较弱的版本已足以满足我们的目的。

6.2. 预立方集合的 *Eilenberg–Zilber* 公式

本节中，我们考察 [8] 的具体同调理论。在阿贝尔框架双范畴的框架下，这对应于一个函子 $C : \mathsf{Cub} \to \mathsf{Ch}(_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R)$，它从某个预立方集合范畴 Cub 出发（其张量积是预立方集合的通常张量积，见 [8, 定义 8.11], ），映入由 R-代数上的双模构成的幺半阿贝尔框架双范畴，其中 R 是一个固定的交换环。特别地，我们不采用 [8] 的移位约定。

更具体地说， C 将预立方集 X 映为一个由 $R(X)$-双模构成的链复形 $C(X)$，其中 R-代数 $R(X)$ 表示 X 的路径代数。回忆一下， $R(X)$ 是含单位元的，其单位元记作 1。 $C(X)$ 的同调记作$H(X)$。为了使 C 具有函子性，Cub 中的态射必须在顶点上是单射，见 [27]。我们取 Cub 为无圈的有限预立方集合范畴，其态射为在顶点上是单射的预立方集合映射。我们将 Cub 的对象限制为无圈预立方集，以得到引理 6.7，见注 6.8。

本节的目标是证明，在 R-代数上的双模这一设定中，经典 Eilenberg–Zilber 公式并不成立，但同调中的一个较弱版本成立。这蕴含一个 Künneth 定理，见 6.1，它适用于来自 [8]的 Künneth 定理不适用的情形，例如 [8, 例 8.17]的第二种情形。我们从如下自然代数同态 h开始，它在 [8, 注 8.15]中引入：

定义 6.2. 对所有预立方集合 X， Y， R-代数映射 $h_{X,\,Y}$： $R(X\otimes Y) \to R(X) \otimes R(Y)$ 在$R(X \otimes Y)$的生成元 $(u,\ v) \in (X_0 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_0)$ 上由 $(u,\ v)$ 定义。

下文中，我们用 h^*M 表示一个 $R(X) \otimes R(Y)$-双模 M沿 $h_{X,Y}$左右两侧的限制。因此，对于所有预立方集合 $X, Y \in \mathsf{Cub}$，我们都可以考虑 $R(X \otimes Y)$-双模$h^*C(X) \otimes C(Y)$的链复形。

命题 6.3. 不存在模上的自然链同伦等价 $C(X\otimes Y) \cong h^*(C(X) \otimes C(Y))$ *over* R-代数

证明。 考虑预立方集合 $X = Y =$ • ⟩ • 及其张量积$X \otimes Y$，即完整方形。沿着 h进行限制后，所有涉及的双模都视为 $R(X \otimes Y)$-双模。$C(X \otimes Y)$ 与 $C(X) \otimes C(Y)$ 之间的链同伦等价由以下数据构成：链映射 $f\colon C(X) \otimes C(Y) \to C(X \otimes Y)$ 和 $g\colon C(X \otimes Y) \to C(X) \otimes C(Y)$，以及链同伦

$gf \cong \mathrm{id}_{C(X)\otimes C(Y)}$ 和 $fg \cong \mathrm{id}_{C(X\otimes Y)}$。后者由双模映射 $\psi_0 \colon C_0(X \otimes Y) \to C_1(X \otimes Y)$ 构成，满足 $f_0 \circ g_0 - \mathrm{id}_{C_0(X\otimes Y)} = \partial_1 \circ \psi_0$，如以下图表所示：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & C_0(X)\otimes C_0(Y) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle g_0}\uparrow \;\downarrow{\scriptstyle f_0} & & & & \\ 0 & \longleftarrow & C_0(X\otimes Y) & \underset{\partial_1}{\overset{\psi_0}{\rightleftarrows}} & C_1(X\otimes Y) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

ψ_0 将0-链映到1-链，即映到 $C_1(X \otimes Y)$中在数乘意义下唯一的1-链。 ψ_0 必须保持 $R(X \otimes Y)$在 $C_0(X \otimes Y)$与 $C_1(X\otimes Y)$上的作用。特别地，对所有0-链 $c \in C_0(X\otimes Y)$，我们有 $c\cdot\psi_0(1) = \psi_0(c) = \psi_0(1) \cdot c$，因此 $\psi_0(c)$为0。于是我们必须有 $fg = \mathrm{id}_{C_0(X\otimes Y)}$，从而 $C_0(X \otimes Y) \cong C_0(X) \otimes C_0(Y)$。然而， $C_0(X \otimes Y)$由填充正方形 $X \otimes Y$ 中的十一条0-链自由生成，而$(C(X) \otimes C(Y))_0 = C_0(X)\otimes C_0(Y)$由 $X = Y$中三条0-链的九个纯张量自由生成。这与先前的 R-模同构相矛盾。

□

自然链同伦等价的一个便捷来源是无环模型定理（参见 A）。在接下来的章节中，我们将证明，尽管根据命题 R，无环模型定理无法直接推广到 6.3-代数上的模，但当把模视为 R-模时，该定理仍适用于我们的情形。此外，我们还将证明，在同调层面上，所诱导的自然同构与代数的作用相容。

现在让我们说明如何在我们的情形中应用无环模型定理，并以立方体楔和 [35]作为模型。请回忆，我们讨论的是范畴 Cub，因此我们考虑的所有预立方集都是无环的。

定义 6.4 ([35])。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，**标准 n维立方** 是预立方集 $\square^n$，其中对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\square^n_k$ 是单位 n维立方体在 $\mathbb{R}^n$中的 k维面集合，而 d^ϵ_i 是沿第 i 个坐标投影到超平面 $x_i = \epsilon$上的投影。我们将其端点记为 s 和 e。

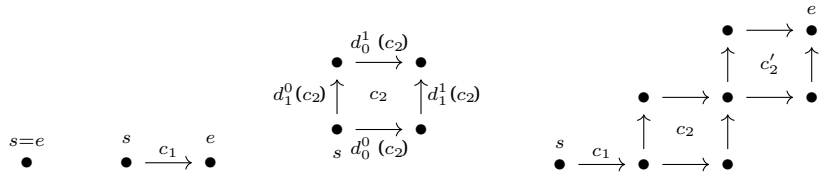
现在我们定义序列 $s = (n_1, \ldots\ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l_*$ 的实现，它是意义下的 s 立方体楔和，并与 i-预立方链相伴。

定义 6.5。对于所有 $i \geq 0$，以及满足 $n_k \geq 1$（当 $1 \leq k \leq l$）且 **维数** $\sum_{1\leq k\leq l} n_k - l = i$ 的序列 $s = (n_1, \ldots\ldots, n_l)$，$s$ 的**实现** 记为 $|s|$，是如下预立方集：

$$\bigsqcup_{1\leq k\leq l} \square^{n_k} / \{d^1(\square^{n_k}) \sim d^0(\square^{n_{k+1}}),\ 1 \leq k < l\}.$$

我们用 s 表示顶点 $d^0(x)$，其中 $x \in \square^{n_1}_{n_1} \hookrightarrow |s|_{n_1}$。对称地， e 表示顶点 $d^1(x)$，其中 $x \in \square^{n_l}_{n_l} \hookrightarrow |s|_{n_l}$。一个 **$i$-预立方链** 是维数为 i的序列的实现。空序列的实现是点$X_0 = \{*\}$。对于预立方集 X中的每条立方链 c，**实现** c 就是其类型的实现。

例 6.6。 考虑标准的 0 维、1 维和 2 维立方体，以及序列 (1,2, 2) 的实现：



(a) C0 (b) C1 (c) C2 (d) |(1,2,2)|

按照 [36]的定义，预立方链可以视为立方复形。尤其是，它们无环。直观地说，预立方链的有向几何实现是一列立方体，其中相邻的立方体 c 和 c'沿着它们的端面 $d^1(c)$ 和 $d^0(c')$粘合在一起。

下文中，我们用 $\mathcal{M}_i$ 表示 i-预立方链的集合，用 $\mathcal{M}$ 表示所有预立方链的集合。我们证明，预立方集 X 中的立方链可由到 X 的预立方链态射刻画；预立方集的张量积也有类似结论。若 C 是一个预立方链，我们用 $C'(C)$ 表示 C 中端点为 s 和 e 的立方链所构成的链复形。

引理 6.7。 对于每个 i-预立方链 C，$C'_i(\mathrm{C})$ 中存在唯一的立方链，且其实现为 C。此外，对于所有预立方集 $X \in$Cub 以及 i- 个类型为 $(n_1, \ldots, n_l)$、属于 X 的立方链 $c = (c_1, \ldots, c_l)$，在 Cub 中存在唯一的预立方集态射 $|c| \to X$，它将 $x \in \mathrm{C}^{n_k}_{n_k} \hookrightarrow |c|_{n_k}$ 映射为 $c_k \in X_{n_k}$，对所有 $1 \le k \le l$ 均如此。

证明. 设 C 是维数为i的序列 $s = (n_1, \ldots, n_l)$ 的实现。 $C'(\mathrm{C})$ 中的立方链是 $C'(\mathrm{C}^{n_k})$ 中立方链 (c_k) 的拼接$1 \le k \le l$。此类立方链的维数为 $\sum_{1\le k\le l} \dim c_k$，而立方链 c_k 的最大维数为 $n_k - 1$，且由唯一的立方链达到：(x)，其中 x 是 $\mathrm{C}^{n_k}_{n_k}$ 的唯一元素。因此，立方链 $c_k, 1 \le k \le l$ 只有一种选取方式，可在 $C'(\mathrm{C})$ 中得到维数为i的立方链，其类型为 s。

此外，对于 X 中所有类型为（n_1，……，n_l）的预立方集合 X 和 i、立方链 $c =$（c_1，……，c_l），我们证明，对所有$1 \le k \le l$，将 $x \in \mathrm{C}^{n_k}_{n_k} \hookrightarrow |c|_{n_k}$ 映射到 $c_k \in X_{n_k}$，便能完全确定预立方集合的态射 φ： $|c| \to X$。事实上，对于所有 $1 \le k \le l$ 和 $1 \le i \le n_k$，预立方集合态射的定义确定了所有 $x \in \mathrm{C}^{n_k}_i \hookrightarrow |c|$的 φ（x）的值。对于 $i = 0$，我们还必须检查，对于所有 $1 \le k < l$， d^1（c_k） $= d^0$（c_{k+1}），这由立方链的定义保证。此外，由于 X 不含圈，因此 c 中的顶点（d^0（c_1）……，d^0（c_l） d^1（c_l））彼此不同。因此，我们构造的立方链映射在顶点上是单射。

□

注 6.8。 无环模型定理适用于函子。为了保证函子性，我们将 Cub 中预立方集合的态射限制为在顶点上单射的态射。因此，为使上述引理成立，我们必须将 Cub 的对象限制为无环预立方集合。

引理 6.9。 对于所有 $i \geq 0$ 和预立方集合 $X \in \mathrm{Cub}$，将态射 $f\colon \mathrm{C} \to X$ 从 Cub 中的 $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_i$映射到 $C_i(f)(c)$ 中的 $C_i(X)$的函数是双射，其中 c 是 $C'_i(\mathrm{C})$ 中唯一的立方链。

证明。 令 ψ 为将 i-立方链 c 中的 X 映射为态射$f\colon |c| \to X$ 根据引理 6.7。由引理6.7， ψ 和 φ互为逆映射。

□

引理 *6.10*。对于所有 $i \geq 0$ 和预立方集合 X、$Y \in$ *Cub*，将三元组 *(*c、$f\colon$ *C* $\to X$、$g\colon$ *C′* $\to Y$*)* 映射到 C_i*(*$f \otimes g$*)(*c*) in* C_i*(*$X \otimes Y$*)* 的函数，其中 $c \in C_i$*(C* $\otimes$ *C′)* 是 j-立方链在 C'_j*(C)* 中的维数i 交错，*C* $\in \mathcal{M}_j$ 以及 k-立方链 C'_k*(C′)*，*C′* $\in \mathcal{M}_k$，是双射。

证明。回忆一下，两个立方链 c 和 c' 的交错的维数大于或等于 dim(c) +dim(c')。因此，陈述中的三元组必须满足 $i \geq j + k$。对于所有预立方集 X 和 Y，一个 i-立方链$c \in C_i(X \otimes Y)$ 是一个 j-立方链 c_X in X 与一个 k-立方链c_Y in Y的唯一交错，其中 $i = j + k$。由引理 6.7， c_X 和 c_Y 在 Cub 中诱导出唯一的态射$f : \mathrm{C} \to X$ 和 $g : \mathrm{C}' \to Y$，其中 $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_j$ 和 $\mathrm{C}' \in \mathcal{M}_k$属于 Cub。考虑唯一的立方链 $c_{\mathrm{C}} \in C'_j(\mathrm{C})$ 和 $c_{\mathrm{C}'} \in C'_k(\mathrm{C}')$。根据定义， c_{C} 和 c_X具有相同的类型， $c_{\mathrm{C}'}$ 和 c_Y也同样如此。因此，我们可以按 c中的方式对 c_{C}和 $c_{\mathrm{C}'}$ 进行交错，从而得到一个与 c类型相同的立方链 $c' \in C_i(\mathrm{C} \otimes \mathrm{C}')$，其中 $C_i(f \otimes g)(c') = c$。

□

考虑 $\mathcal{C}$中的模型 $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$，以及函子 F和 G:

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Cub}^2 &\to \mathrm{Ch}(_R\mathrm{Mod}) & G : \mathrm{Cub}^2 &\to \mathrm{Ch}(_R\mathrm{Mod}) \\ (X, Y) &\mapsto C_*(X \otimes Y) & (X, Y) &\mapsto C_*(X) \otimes C_*(Y). \end{aligned}$$

为证明 R-模的链复形之间存在自然链同伦等价 $C_*(X \otimes Y) \simeq C_*(X) \otimes C_*(Y)$，只需证明 F和G 在 $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$上都是自由且无环的，并给出自然同构$H_0(F) \cong H_0(G)$。

命题 6.11. 函子 F、$G : \mathrm{Cub}^2 \to \mathrm{Ch}(_R\mathrm{Mod})$ 在 $\mathcal{M}$上是自由且无环的。

证明。我们来证明 F 是自由的。考虑 $\mathcal{M}^2$ ($A = \mathcal{M}^2$) 中的所有元素。固定 $i \geq 0$。对于所有预立方链 $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_j$、$\mathrm{C}' \in \mathcal{M}_k$，令 $B^i_{\mathrm{C},\mathrm{C}'}$ 为 j 维立方链与 $C'_j(\mathrm{C})$ 中的立方链以及 k 维立方链与 $C'_k(\mathrm{C}')$ 中的立方链进行 $c \in C_i(\ \otimes \mathrm{C}')$ 交错后所得的集合。对于所有预立方集 $X, Y \in$ Cub， $C_i(X \otimes Y)$ 由 $X \otimes Y$ 中的 i 维立方链自由生成，因此由引理 6.10 即得结论。关于 G 的自由性，我们沿用 $A = \mathcal{M}^2$。固定 $i \geq 0$。对于所有预立方链

$\mathsf{C} \in \mathcal{M}_j$、$\mathsf{C}' \in \mathcal{M}_k$，令 $B^i_{\mathsf{C},\mathsf{C}'}$ 为 $(C'_*(\mathsf{C}) \otimes C'_*(\mathsf{C}'))_i$ 中纯张量的集合。对于所有预立方集 $X, Y \in \mathsf{Cub}$，$(C_*(X) \otimes C_*(Y))_i$ 由一个 X 中的 j 维立方链和一个 Y 中的 k 维立方链构成的纯张量自由生成，且满足 $i = j + k$。应用两次引理 6.9 即得所需结果。

由于预立方链可以视为立方复形，根据 [8, 引理 7.1], ，其同调与其迹空间的同调同构。这些迹空间是可缩的，因此同调集中在 0 次。此外，Künneth 公式 [8, 定理 8.14] 成立，因此对于所有预立方链 C，C'，我们有 $H_*(\mathsf{C} \otimes \mathsf{C}')$与 $H_*(\mathsf{C}) \otimes H_*(\mathsf{C}')$ 同构，因此同样集中在 0 次。由此 F 是无环的。类似地，经典 Künneth 定理给出 $H_i(C_*(\mathsf{C}) \otimes C_*(\mathsf{C}')) \cong 0$，对于所有 $i \geq 1$ 和 C，$\mathsf{C}' \in \mathcal{M}$均成立，因此 G 是无环的。

□

因此，只需构造一个 R-模的自然同构 $H_0(X \otimes Y) \to H_0(C_*X \otimes C_*Y)$，即可得到一个 Eilenberg–Zilber 公式。

命题 6.12。对于所有预立方集 $X, Y \in \mathrm{Cub}$，存在一个同构$H_0(X \otimes Y) \cong H_0(C_*X \otimes C_*Y)$，它关于 X 和 Y是自然的。

证明。考虑映射 $f\colon C_0(X \otimes Y) \to C_0(C_*X \otimes C_*Y)$，它在立方链 $((u_1, v_1) \ldots, (u_l, v_l))$ 上定义为 $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \otimes (v_{j_1}, \ldots, v_{j_m})$，其中 $i_1 < \cdots < i_n$（分别为 $j_1 < \cdots < j_m$）是满足 $u_k \in X_1$（分别为 $j_k \in Y_1$）的指标有序集 $1 \leq k \leq l$，并通过线性扩张得到。类似地，考虑映射 $g : C_0(C_*X \otimes C_*Y) \to C_0(X \otimes Y)$，它在纯张量 $(u_1, \cdots, u_k) \otimes (v_1, \cdots, v_l)$ 上定义为：

$$((u_1, d^0 v_1), \ldots, (u_k, d^0 v_1), (d^1 u_k, v_1), \ldots (d^1 u_k, v_l)).$$

直观地说，f 将一个 0-立方链分解为其 X 和 Y 分量，而 g将一对 0-立方链映射为它们的平凡交错（所有 X 立方体都在所有 Y¯立方体之前）。我们证明 f 和 g 在同调中诱导映射 f 和 $\bar{g}$。只需验证它们将边界映射为边界。$C_0(X \otimes Y)$中的边界由以下形式的元素生成：

$$b = \partial((u_1, v_1), \ldots, (v, s), \ldots, (u_k, v_k)) \tag{2}$$

对于某个方格 $s \in Y_2$ 和顶点 $v \in X_0$，属于 X的对称形式，或具有以下形式：

$$b = \partial((u_1, v_1), \ldots, (e, e'), \ldots, (u_k, v_k)) \tag{3}$$

对于某些边 $e \in X_1$和 $e' \in Y_1$。在情形 (3) 中，$f(b) = 0$。在情形 (2) 中，$f(b)$ 是 $f_1((u_1, v_1) \ldots, (v, s) \ldots, (u_k, v_k))$ 的边界，其中 $f_1 : C_1(X \otimes Y) \to C_1(C_*X \otimes C_*Y)$ 的定义与 f 类似，或对称地定义。对于 g，$C_0(C_*X \otimes C_*Y)$ 中的边界由形如 $c \otimes \partial c'$ 的元素生成，其中 c 是 X 中的一个 0-立方链，c' 是 Y 中的一个 1-立方链，或对称地定义。这些元素经由 g 映射为形如 (2)（或其对称形式）的元素。要证明 f 和 $\bar{g}$ 互为逆映射，只需证明在 $H_0(X \otimes Y)$ 中，0-立方链 $(u_1, \cdots, u_k)$ 和 $(v_1, \cdots, v_l)$ 的任意两个交错都属于同一个同调类。在 $C_0(X \otimes Y)$ 中，交错可通过有限次交换彼此关联：

定义 6.13。 对于所有预立方集 $X, Y \in \mathsf{Cub}$，以及形如以下形式的 $C_0(X \otimes Y)$ 中的 0-立方链：

$$((u_1, v_1), \dots, (e, v'), (v, e'), \dots, (u_k, v_k)) \tag{4}$$

对于某些顶点 $v \in X_0$、 $v'_i n Y_0$ 以及边 $e \in X_1$、 $e' \in Y_1$，或者对称地， $C_0($ $X \otimes Y)$中如下的0-立方链，或其对称形式，称为c的**交换**：

$$((u_1, v_1), \dots, (v, e'), (e, v'), \dots, (u_k, v_k)).$$

为完成证明，注意到交换保持同调类：对于任意0-立方链 c形如（4）， c 与其交换之差是一个¯边界，形如（3）。最后， f 与 $\bar{g}$ 的自然性是直接的。

□

我们现在可以对模应用无环模型定理，这些模位于交换环上，从而得到自然链同伦等价$\alpha_{X,\ Y}$： $C_*(X \otimes Y) \rightleftarrows C_*(X) \otimes C_*(Y)$: $\beta_{X,\ Y}$，它们是 R-模的链复形。特别地，我们得到一个 R-模的自然同构 $\bar{\alpha}$： $H_*(X \otimes Y) \cong H_*(C(X) \otimes C(Y))$，在同调层面上，具有 $\bar{\beta}$ 其逆映射。这引出了以下问题：即使尽管这样的自然链映射 α 和 β 不一定保留 R-代数作用（命题 6.3），它在同调层面上是否成立？我们将在这个具体情形中探究这一问题。按照无环模型定理的证明，我们可以显式构造这样的自然链映射 α， β 以及链同伦 $\alpha\beta \simeq$id 和 $\beta\alpha \simeq$ id。

¯**命题 6.14.** 考虑命题 *6.12* 的自然变换 f。无环模型定理给出唯一的自然链映射 $\alpha_{X,Y}$： $C_*(X \otimes Y) \to C_*(X) \otimes C_*(Y)$，其定义在 R-模的链复形上。

证明。考虑 α。对于 $i = 0$， α_0 由其在 B^0_{C} 中的 0-立方链 c 上的取值唯一确定，其中 $\mathsf{C}, \mathsf{C}' \in \mathcal{M}_0$。对于每个这样的 c， $\alpha_0(c)$ 必须是 $G_0(\mathsf{C}, \mathsf{C}')$ 中同调类 $f(c)$ 的一个代表元。因此，这样的元素只有一个：$f(c)$。于是， $\alpha_0 = f$。对于 $i > 0$，我们用归纳法证明：对于 B^i_α 中的所有 i-立方链 c，若 c 含有形如 (u, v) 的立方，且 $\dim(u)$、$\dim(v) \geq 1$，则 $\alpha_i(c) = 0$；否则， $\alpha_i((u_1, v_1) \dots, (u_k, v_k))$ 为：

$$(u_1, \cdots, u_k \mid 1 \leq i \leq k, u_i \in X_{\geq 1}) \otimes (v_1, \cdots, v_k \mid 1 \leq i \leq k, v_i \in Y_{\geq 1}).$$

对于 $i = 1$，给定一个第一类 1-立方链 $c \in B^1_\alpha$ $f(\partial c) = 0$，因此 $\alpha(c)$ 是 $G_1($ $M_\alpha)$ 中边界为 0 的唯一元素。第二类的推理类似。对于 $i > 1$，假设结论对 $i - 1$ 成立。令 c 为 B^i_α 中一个第一类 i-立方链，其形式为 $((u_1,\ v_1) \dots,\ (u,\ v) \dots,$ $(u_k,\ v_k))$，其中 $\dim(u)$，$\dim(v) \geq 1$。根据 [8, 定义 2.11]，中 ∂c 的定义，我们注意到 ∂c 是第一类 $(i-1)$-立方链的线性组合（它们经 α_{i-1} 映射后为 0），并且除一个符号外，等于：

$$\begin{aligned}&((u_1, v_1), \dots, (u, d^0(v), (d^1(u), v), \dots, (u_k, v_k))\\ &- ((u_1, v_1), \dots, (d^0(u), v), (u, d^1(v)), \dots, (u_k, v_k)),\end{aligned}$$

它经 α_{i-1} 映射后也为 0。第二类元素的推理类似。

□

根据对 α 的这一显式表述，我们注意到，对于所有预立方集合X，$Y \in \mathsf{Cub}$，$\alpha_{X,Y}$不仅在同调上，而且在其他方面也保持 $R(X \otimes Y)$ 的作用。不过，根据无环模型定理，β 并不能被唯一确定。尽管如此，¯ ¯在同调上是唯一的。我们将通过对一个特定的 β 应用以下结果，证明在同调上，$\beta_{X,Y}$ 也保持 $R(X \otimes Y)$ 的作用。

命题 6.15。设 $f\colon C \rightleftarrows C'\colon g$ 是 R-模链复形之间的链映射，并且在同调上，f 和 $\bar{g}$ 互为逆映射。假设 C 和 C' 是左 A-模链复形，其中 A 是一个 R-代数。那么同调模继承左 A-模结构。若对所有 $i \geq 0$、$x \in \ker(\partial_i : C'_i \to C'_{i-1})$ 以及 $a \in A$，都有 $f_i \circ g_i(a \cdot x) = f_i(a \cdot g_i(x))$，那么 $\bar{g}$ 保持 A 的作用。

¯证明。对于所有 $i \geq 0$, $x \in H_i(C)$ 和 $a \in A$，由于 f 和 $\bar{g}$ 互为逆映射，只需证明 $\bar{g}_i \circ f_i(a \cdot x) = \bar{g}_i(a \cdot f_i(x))$. 这可由假设立即得出。

□

现在我们说明如何通过无环模型定理得到一个自然链映射 $\beta_{X,Y}\colon C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \otimes Y)$，其取值于 R-模，并满足命题 6.15的条件。

命题 *6.16*。考虑命题 *6.12* 的自然变换 $\bar{g}$ 以及自然链映射 $\beta_{X,Y}\colon C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \otimes Y)$，后者在纯张量 $(u_1, \cdots, u_k) \otimes (v_1, \cdots, v_l) \in (C_*(X) \otimes C_*(Y))_i$ 上的定义如下：

$$((u_1, d^0 v_1), \ldots, (u_k, d^0 v_1), (d^1 u_k, v_1), \ldots (d^1 u_k, v_l)) \in C_i(X \otimes Y)$$

对所有 $i \geq 0$。那么 β 可通过将无环模型定理的证明应用于 $\bar{g}$来构造。此外，β 满足命题*6.15*的条件。

证明。我们通过归纳法证明第一个结论。对于 $i = 0$，对于所有 0-立方链 $c \in C'_0(\mathsf{C})$ 和 $c' \in C'_0(\mathsf{C}')$，其中 C，$\mathsf{C}' \in \mathcal{M}_0$, $\beta_0(c \otimes c')$ 确实是 $F_0(\mathsf{C}, \mathsf{C}')$ 中同调类 $\bar{g}(c \otimes c')$ 的一个代表元。对于 $i > 0$，假设在无环模型证明的前 i 步中已经构造了 $\beta_0, \ldots, \beta_{i-1}$。那么，对于所有维数为 i 的立方链 $c \in C'_j(\mathsf{C})$ 和 $c' \in C'_k(\mathsf{C}')$ 的交错，其中 $\mathsf{C} \in \mathcal{M}_j$, $\mathsf{C}' \in \mathcal{M}_k$，确实有：

$$\partial \beta_i(c \otimes c') = \beta_{i-1}(\partial_j(c) \otimes c' + (-1)^j c \otimes \partial_k(c')) = \beta_{i-1}(\partial(c \otimes c')).$$

对于第二个陈述，考虑 j-立方链 c in X、一个满足 $i = j + k$ 的 k-立方链 c' in$Y$，以及一个生成元 $a = (u, v) \in R(X \otimes Y)$，其中 dim u+dim $v = 1$。唯一不能直接得到 $\beta_i(a \cdot (c \otimes c')) = a \cdot \beta_i(c \otimes c')$ 的情形是 $a = (x, v)$ 满足 $x \in X_0$ and $v \in Y_1$。在这种情况下，我们有：

$$\alpha_i(\beta_i(a \cdot (c \otimes c'))) = c \otimes (v \cdot c') = \alpha_i(a \cdot \beta_i(c \otimes c')).$$

证明到此结束。 □

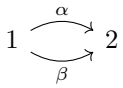
¯我们刚刚证明了，对于所有预立方集 X，$Y \in \mathrm{Cub}$、β 都保持 $R($ $X \otimes Y)$ 的左作用。类似地，利用命题 ¯6.15 的对称版本，我们可以证明 β 也保持 $R(X \otimes Y)$ 的右作用。综合上述事实，并利用标量限制与同调交换这一点，我们在同调层面得到了弱 Eilenberg–Zilber 公式：

定理 6.17。对于任意预立方集 $X, Y \in \mathrm{Cub}$ 和 $i \geq 0$，存在同构 $H_i(X \otimes Y)$ $\cong h^* H_i(C(X) \otimes C(Y))$，它是 $R(X \otimes Y)$- 双模的，并且关于 X 和 Y 自然。

从此处起，假设 R 是一个域，并说明应用 Künneth 定理 6.1 的条件成立。首先，R-代数上的模的阿贝尔框架双范畴 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 确实是闭的，且局部有足够的内射对象、足够的投射对象和余积。接着，对于任意预立方集 $X, Y \in$ Cub，令 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别为 $R(X)$、$R(Y)$ 和 $R(X)$-双模的局部范畴；由于 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 在 [9, 定义 9.9],的意义下是外闭的，外张量积函子 $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是右正合的。最后，只需证明命题 B.3 的充分条件。然而，由于 R是一个域，且代数上的双模的外张量积就是将这些双模视为 R-模后在 R 上的张量积，并赋予逐分量作用，因此其第一个导出函子是平凡的。

因此，对于所有预立方集合 X，$Y \in \mathrm{Cub}$，即不含圈的预立方集合，根据6.1 我们有 $H_*(X \otimes Y) \cong h^*(H_*(X) \otimes H_*(Y))$。特别地，这适用于 [8,例 8。17]。

例 6.18。考虑预立方集 $\vec{S}^1$:



$\vec{S}^1$ 不是立方复形，但它是无环的。因此，我们可以应用 Künneth 公式得到：

$$H_1(\vec{S}^1 \otimes \vec{S}^1) \cong H_0(\vec{S}^1) \otimes H_1(\vec{S}^1) \oplus H_1(\vec{S}^1) \otimes H_0(\vec{S}^1) = 0.$$

定理 6.17 提出了如下问题：对于所有函子 F、G ： $\mathcal{C} \to \mathrm{Ch}({}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R)$，使得 F 和 G 分别视为函子 $\mathcal{C} \to {}_R\mathrm{Mod}$ 时，在某些模型 $\mathcal{M}$上是自由且无环的。现在，将双模视为R-模，根据无环模型定理，对于所有自然变换 τ_0 ： $H_0(F) \to H_0(G)$，存在一个诱导它的自然变换 τ ： $F \to G$ 。如果再加上 τ_0 : $H_0(F) \to H_0(G)$尊重代数的作用，那么在什么附加条件下，由 τ 在同调中诱导的自然变换 τ 也会尊重这些作用?

7. 嵌入定理

Gabriel 和 Freyd–Mitchell 定理指出，在某些条件下，一个阿贝尔范畴等价于某个固定环上的模的具体范畴

并非每个阿贝尔范畴都是其对象具有底层集合的具体范畴，但尽管如此，在这些定理所规定的条件下，仍然可以进行逐元素推理。

本节探讨这些嵌入定理与阿贝尔框架双范畴中的系数变换函子之间的相互作用，最终得到一个关于阿贝尔框架双范畴的嵌入定理。与原有的嵌入定理一样，我们的定理允许逐元素推理，但其主要是关于阿贝尔框架双范畴结构的结果。证明这些嵌入定理的关键概念是紧投射生成元。

定义 7.1 ([24, 定义 8.4.1、5.2.1、6.3。3])。 阿贝尔范畴 P 中的一个对象 $\mathcal{A}$称为**投射(**分别称为**生成元、紧)**，当且仅当函子 $\phi_P\colon \mathrm{Hom}(P,\,)\colon\ \mathcal{A}\to \mathrm{Set}$ 是正合的（分别是保守的、保持滤过余极限的）。

Gabriel 定理和 Freyd–Mitchell 定理都使用形如 $\phi_P = \mathrm{Hom}(P,\,)\colon\ \mathcal{A}\to \mathrm{Set}$ 的函子，其中 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴，P是 $\mathcal{A}$中的一个对象。由于 $\mathcal{A}$是阿贝尔范畴，同态集 $\mathrm{Hom}(P,P)$ 继承了环结构，而 ϕ_P被提升为一个函子 $\mathcal{A}\to{}_{\mathrm{End}(P)}\mathrm{Mod}$，取值于左 $\mathrm{End}(P)$-模，其中 $\mathrm{End}(P)$ 表示 $\mathrm{Hom}(P,P)^{\mathrm{op}}$。具体而言，对于$\mathcal{A}$中的一个对象 X，$\mathrm{End}(P)$ 在集合 $\mathrm{Hom}(P,X)$ 上的左作用由前复合给出。然而，该函子不一定是正合的、全忠实的或等价。

定理 7.2 (Gabriel [10])。 设 $\mathcal{A}$ 是一个余完备阿贝尔范畴。若 $\mathcal{A}$ 有一个紧投射生成元 P，则 ϕ_P 是范畴等价。

定理 7.3 (Freyd–Mitchell [11])。 设 $\mathcal{A}$ 是一个小阿贝尔范畴。则$\mathcal{A}$ 等价于左 R-模范畴 ${}_R$模的一个全阿贝尔子范畴；也就是说，存在一个环 R 和一个正合全忠实函子 $\mathcal{A}\to{}_R$模。

证明概要 *[24]*。 若 $\mathcal{A}$ 是一个小阿贝尔范畴，则存在一个正合全忠实嵌入 $\mathcal{A}\to\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$，将 $\mathcal{A}$ 嵌入原对象范畴 $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$。范畴 $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ 是一个余完备阿贝尔范畴，并且有一个投射生成元 P，使得 $\mathcal{A}$中的每个对象 X，视为 $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ 中的对象时，都是 P的一个商对象；也就是说，在 $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ 中存在一个满态射 $P\twoheadrightarrow X$。由 [24, 引理 9.6.9], 可知，这意味着 ϕ_P 在 $\mathcal{A}$上是全忠实的。

范畴 $\mathcal{C}$ 的原余完备化 $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 是伪函子性的，并且保持伴随函子。为证明这一点，只需对范畴 $\mathcal{C}$ 的 Ind-完备化 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 建立这些性质。回忆：对于给定范畴 $\mathcal{C}$，$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 的对象由 C 中滤子图表 $\alpha\colon\ I\to\mathcal{C}$ 的“形式余极限”给出，记为 $\mathrm{colim}^f(\alpha)$。嵌入 $\mathcal{C}\to\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 将对象 X 映为形式余极限 $\mathrm{colim}^f(*\mapsto X)$。

引理 7.4 ([24, 命题 6.1.9-6.1.11])。 对于所有函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$，都存在唯一的函子 $\mathrm{Ind}(F)\colon\mathrm{Ind}(\mathcal{C})\to\mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$，使得下图

交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathrm{Ind}(F)]{} & \mathrm{Ind}(\mathcal{C}') \end{array}$$

更确切地说，$\mathrm{Ind}(F)$ 将形式余极限 $\mathrm{colim}^f\,\alpha$ 映射到$\mathrm{colim}^f(F\circ\alpha)$。此外，对于所有函子 $G:\ \mathcal{C}'\to\mathcal{C}''$，存在自然同构 $\mathrm{Ind}(G\circ F)\ \cong \mathrm{Ind}(G)\ \circ \mathrm{Ind}(F)$；若 F 是忠实函子或全忠实函子，则$\mathrm{Ind}(F)$也具有相同性质。

特别地，若 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，则 $\mathbf{Ind}(\mathcal{C}')$ 也是 $\mathbf{Ind}(\mathcal{C})$ 的全子范畴。

引理 7.5。 *Ind*-完备化保持伴随函子。

证明。 对于范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$之间的所有伴随函子 $L\dashv R$，分别将函子 $\mathbf{Ind}(L)$ 和 $\mathbf{Ind}(R)$ 记为 IL 和 IR，并将形式余极限 $\mathbf{colim}^f\,\alpha$ 记为 ${}^f\alpha$。对于所有滤过图表 $\alpha:\ I\to\mathcal{C}$ 和 $\beta:\ J\to\mathcal{D}$，有：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(\mathcal{D})(IL({}^f\alpha),{}^f\beta) &\cong \lim_{i\in I}\operatorname*{colim}_{j\in J}\mathcal{D}(L\alpha(i),\beta(j)) \\ &\cong \lim_{i\in I}\operatorname*{colim}_{j\in J}\mathcal{C}(\alpha(i),R\beta(j)) \\ &\cong \mathrm{Ind}(\mathcal{D})({}^f\alpha,IR({}^f\beta)) \end{aligned}$$

□

我们将满足定理7.3证明概要中所用性质的对象称为 7.3 一个**强生成元**。这一术语并不标准，但其依据是以下说明：根据定义，强生成元是意义上的分离子，见 [37], ；它在局部小范畴中等价于定义 7.1中的生成元概念。在具有余积的范畴中，强生成元与生成元相同，正如 Qiaochu 在 [38]中指出的。

定义 7.6. 阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 P 称为对象集 S 的**强生成元**，如果对每个对象 $X\in S$， X 都是 P的商对象；也就是说，存在一个满态射 $P\twoheadrightarrow X$。

现在我们证明，作为强生成元以及满足定义7.1中所述性质，会在某些伴随三元组的最左伴随函子下得到保持。

定理 7.7. 对于任意阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 以及伴随三元组 $f_!\dashv f^*\dashv f_*$，其函子 $f_!$、$f_*:\ \mathcal{B}\to\mathcal{A}$和 $f^*:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，$f_!$保持投射对象。此外，如果 f^* 是忠实函子，那么 $f_!$ 保持生成元，并将集合 S 的强生成元映射为原像 $(f^*)^{-1}(S)$的强生成元。如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是余完备的，那么 $f_!$ 保持紧对象。

证明。函子 f^* 介于阿贝尔范畴之间，并且具有左右伴随函子，因此自动是正合的。作为正合函子的左伴随， $f_!$ 保留投射对象。

如果 f^* 是忠实的，由于它是正合的，因此是保守的。下面证明在这种情况下，$f_!$ 保留（强）生成元。若 G是 $\mathcal{A}$中的生成元，那么对于 $\mathcal{B}$ 中的任意箭头$a: X \to Y$，若 $\mathcal{B}(f_!G,\ a): \mathcal{B}(f_!G,\ X) \to \mathcal{B}(f_!G,\ Y)$ 是一个同构，则应用伴随 $f_! \dashv f^*$ 的同态集自然同构可知，$\mathcal{B}(G,\ f^*a)$ 是一个同构。由于 ϕ_G和 f^*是保守的，a也是一个同构。

于是，对集合 S 的任意强生成元 P，以及对 $\mathcal{B}$ 中满足 $f^*Y \in S$ 的所有对象 Y，存在满态射 $\iota: P \twoheadrightarrow f^*Y$。我们来证明存在满态射 $f_!P \twoheadrightarrow Y$。由伴随函子的性质，由于 f^* 是忠实的，余单位 $\epsilon: f_!f^* \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ 逐点为满态射。此外，$f_!$ 作为左伴随保持满态射。因此，态射 $\epsilon_Y \circ f_!(\iota): f_!P \to Y$ 是满态射。

最后，若 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 都是余完备的，则对 $\mathcal{A}$ 中的所有紧对象 C 以及滤子图表 $F: I \to \mathcal{B}$，我们有如下自然同构：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(f_!C, \operatorname{colim}_I F) &\cong \mathcal{A}(C, f^*(\operatorname{colim}_I F)) \\ &\cong \mathcal{A}(C, \operatorname{colim}_I f^*F) \\ &\cong \operatorname{colim}_I \mathcal{A}(C, f^*F) \\ &\cong \operatorname{colim}_I \mathcal{B}(f_!C, F)\end{aligned}$$

其中 f^* 作为右伴随保持余极限。因此 $f_!$ 保持紧对象。

□

例 7.8. 考虑分别由 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$-向量空间构成的余完备阿贝尔范畴。包含函子 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 诱导标量限制与扩张；特别地，扩张称为复化。与任意环同态一样，标量限制是忠实的。 $\mathbb{R}$ 视为一维 $\mathbb{R}$-向量空间时，是一个紧投射生成元。类似地，$\mathbb{C}$ 是一个紧投射生成元，而且 $\mathbb{R}$ 的复化 $\mathbb{R}^{\mathrm{C}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 确实同构于 $\mathbb{C}$。

定理 7.7 表明，Gabriel 定理和 Freyd–Mitchell 定理可以在某些阿贝尔框架双范畴的局部水平范畴中局部且协调地应用。这是第 7.2 节的内容。证明依赖于框架双范畴的某些概念，以及一种特定的劈的选择（这种选择总是可以作出），它使我们的方法得以简化。这些预备结果见第7.1 节。最后，在第 7.3 节中，我们证明这些结果可以组装成一个框架嵌入。

7.1. （余）纤维化 L, R 的劈

本节进一步证明，形如 (L, R) 的（余）纤维化具有方便的劈。我们讨论纤维化的情形；余纤维化的情形是对偶的。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为范畴，且 $L, R: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是两个函子，使得 $(L, R): \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 是一个纤维化。

命题 7.9。 R 和 L 都是纤维化。此外，可以选取 Lf 到 Y 的笛卡尔提升 f，使得 f 也是 (Lf,id_Y) 到Y的一个笛卡尔提升； R 的情形对称地成立。

证明。我们来证明 L 是一个纤维化。对于 $\mathcal{D}$ 中的任意对象 Y 以及箭头f_0：$A \to LY$in $\mathcal{C}$，考虑 $(f_0,\mathrm{id}_{RY}) : (A, RY) \to (LY, RY)$ 到 Y 的一个笛卡尔提升 f：$X \to Y$。特别地，$Lf = f_0$和 $Rf = \mathrm{id}_{RY}$。我们来证明这个箭头相对于 L 是笛卡尔的。对于满足 $Lg = Lf \circ w_0$的任意箭头 g：$Z \to Y$ 和 w_0：$LZ \to A = LX$，我们有 $Rg = \mathrm{id}_{RY} \circ Rg$。由于 f 在 (Lf,id_{RY}) 上是笛卡尔的，因此存在唯一的箭头 w：$Z \to X$ 满足：

$$\begin{aligned} Lw &= w_0 \\ Rw &= Rg \\ g &= f \circ w. \end{aligned}$$

如果 w'：$Z \to X$ 是满足 $Lw' = w_0$ 和 $g = f \circ w'$ 的另一个箭头，那么特别有：

$$\begin{aligned} Rg &= R(f \circ w') \\ &= R(f) \circ R(w') \\ &= \mathrm{id}_{RY} \circ Rw' \\ &= Rw'. \end{aligned}$$

因此，由 w 的唯一性可得 $w = w'$。证明 R 是纤维化的过程具有对称性。 □

此后，我们只考虑相对于 L and R且满足命题 7.9 所述性质的笛卡尔提升。对于$\mathcal{D}$中的所有相容对象 Y 以及 $\mathcal{C}$中的箭头 f、g，考虑将 Lf提升到Y的笛卡尔提升 $f^LY \to Y$，以及将 Rg提升到 Y的笛卡尔提升 $Yg^R \to Y$。根据笛卡尔箭头的一般性质，$(f^LY)g^R \to f^LY \to Y$和 $f^L(Yg^R) \to Yg^R \to Y$都是将 (f,g)提升到 Y的笛卡尔提升，并且存在唯一的同构 $f^L(Yg^R) \cong (f^LY)g^R$与上述态射相容。然而，$f^L(Yg^R)$ 和 $(f^LY)g^R$可能不相等。不过，我们可以构造一个(L,R)的劈，使得等式成立。

命题 *7.10.* 假设选择公理成立，则对于所有相容对象 Y*in* $\mathcal{D}$*and* 箭头 f, g*in* $\mathcal{C}$，都可以选择对象 f^*Yg^*, f^*Y, *and* Yg^**in* $\mathcal{D}$，以及笛卡尔提升 $f^*Yg^* \xrightarrow{c} Y$ *of* (f, g)，$f^*Yg^* \xrightarrow{c} f^*Y$*of* (id_{Lf^*Y}, g)，$f^*Yg^* \xrightarrow{c} Yg^*$*of* (f, id_{RYg^*})，$f^*Y \xrightarrow{c} Y$ *of* (f, id_{RY}), *and* $Yg^* \xrightarrow{c} Y$*of* (id_{LY}, g)，使得该选择是正规的，即 $\mathrm{id}^*_{LY} Yg^* \to Yg^*$*is* id_{Yg^*}, $\mathrm{id}^*_{LY} Y \to Y$*is* id_Y，且具有对称性；并且使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} f^*Yg^* & \xrightarrow{c} & Yg^* \\ \downarrow{\scriptstyle c} & \searrow^{c} & \downarrow{\scriptstyle c} \\ f^*Y & \xrightarrow{c} & Y \end{array} \tag{5}$$

证明。 根据假设， L和 R 都具有正规裂解。对于所有相容的 Y和 f， g，考虑笛卡尔箭头 $f^LY \xrightarrow{l} Y$和 $Yg^R \xrightarrow{r} Y$，并令$f^*Y = f^LY$, $Yg^* = Yg^R$和 $f^*Yg^* = (f^LY)g^R$。此外，令 $f^*Y \xrightarrow{c} Y$为 $f^LY \xrightarrow{l} Y$，令 $f^*Yg^* \xrightarrow{c} f^*Y$为 $(f^LY)g^R \xrightarrow{r} f^LY$；由于笛卡尔箭头在复合下稳定，令 $f^*Yg^* \xrightarrow{c} Y$为前两个箭头的复合。然后，令 $Yg^* \xrightarrow{c} Y$为 $Yg^R \xrightarrow{r} Y$。最后，利用 $Yg^* \xrightarrow{c} Y$是纤维化这一事实，令 $f^*Yg^* \xrightarrow{c} Yg^*$ 为唯一的箭头 α，使得$L(\alpha) = f$, $R(\alpha) = \mathrm{id}$, 并且使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} f^*Yg^* & \xrightarrow{\alpha} & Yg^* \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ f^*Y & \xrightarrow{c} & Y \end{array}$$

由于后复合 α 一个笛卡尔箭头会得到另一个笛卡尔箭头， α也是笛卡尔的。因此，图表5 交换。此外，由于我们选择了满足命题7.9中的性质$\mathrm{id}^*_{LY} Y \xrightarrow{c} Y$是 id_Y，反之亦然，并且 $f^*Y{\mathrm{id}_{RY}}^* \xrightarrow{c} f^*Y$是$\mathrm{id}_{f^*Y}$。要证明$\mathrm{id}^*_{LY} Yg^* \xrightarrow{c} Yg^*$ 是 id_{Yg^*}，只需将其唯一性应用于下列交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{id}^*_{LY} Yg^* = Yg^* & \xrightarrow{\mathrm{id}_{Yg^*}} & Yg^* \\ \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \mathrm{id}^*_{LY} = Y & \xrightarrow[\mathrm{id}_Y]{} & Y \end{array}$$

□

使用命题7.10时需要特别谨慎。尤其是，对于相容的 Y、 f和 g，我们不一定有 $f^*(Yg^*) = f^*Yg^*$。现在让我们回到框架双范畴。对于所有框架双范畴 $\mathbb{D}$，我们假设双纤维化(L, R) 配备了由命题7.10给出的劈。这样的劈显著简化了后续证明，尤其是命题7.34的证明。

7.2. Gabriel 定理：逐点形式

本节将探讨问题的核心：我们将证明，定理 7.7可应用于框架双范畴中由系数变换函子连接的一对局部范畴。这意味着，在某些条件下，如果 Gabriel 定理适用于阿贝尔框架双范畴中的一个局部范畴，那么它也会通过标量扩张推广到其他局部范畴。

命题 7.11。 设 $\mathbb{A}$ 是一个闭阿贝尔框架双范畴，且设 $f\colon A \to C$ 和 $g\colon B \to D$ 是垂直箭头，使得局部范畴 $\mathcal{A}(A, B)$ 以及$\mathcal{A}(C, D)$ 是余完备的，并且限制函子 $f^*(\,)g^*$ 是忠实的。若 $\mathcal{A}(A, B)$ 包含一个紧投射生成元 P，则根据定理 7.2，它等价于左模范畴 $\mathrm{End}(P)\mathrm{Mod}$。那么：

- $\mathcal{A}(C,D)$ 通过函子 $\mathcal{A}(f_! \ Pg_! \ , \ )$ 等价于左模范畴 $\mathrm{End}(f_! \ Pg_! \ )\mathrm{Mod}$，
- 存在一个环同态 $\bar{r}:\mathrm{End}(P) \to \mathrm{End}(f_! \ Pg_! \ )$，
- 沿 r 的限制函子与沿 (f,g) 在 $\mathbb{A}$中的限制函子相容，也就是说，存在一个自然同构 $r^*Y \cong f^*Yg^*$ 其中1-单元 Y 在 $\mathbb{A}$ 中通过嵌入视为左模。

此外，这个构造具有伪函子性，具体来说，若 f 和g 是恒等态射，则 r 自然同构于恒等函子；若 f 和 g 是复合，则 r 自然同构于相应环同态的复合。

证明。 根据定理 7.7，紧投射生成元 P 在 $\mathcal{A}(A,B)$ 经标量扩张后映为 $\mathcal{A}(C,D)$ 中的紧投射生成元。因此，Gabriel 定理 7.2 适用于 $\mathcal{A}(C,D)$。以下映射 $\bar{r}$ 由标量扩张函子 $f_!(\ )g_!$诱导:

$$\begin{aligned} r : \mathrm{End}(P) &\to \mathrm{End}(f_!Pg_!) \\ \alpha &\mapsto f_!\alpha g_!. \end{aligned}$$

由 $f_!(\ )g_!$, r 的函子性和可加性可知, $\bar{r}$它是一个环同态。现在，对于所有对象 $Y \in \mathcal{A}(C, \ D)$，我们将 r^*Y 记为左侧对左端同态环 $\mathrm{End}(f_!Pg_!)$-模 $\mathrm{Hom}(f_!Pg_!, \ Y)$ 的限制。下面证明存在左端同态环 $\mathrm{End}(P)$-模的一个自然同构

$$r^* \mathrm{Hom}(f_!Pg_!, Y) \cong \mathrm{Hom}(P, f^*Yg^*).$$

由伴随关系，阿贝尔群 $\mathrm{Hom}(f_!Pg_!, \ Y)$ 与 $\mathrm{Hom}(P, \ f^*Yg^*)$ 自然同构。接下来只需证明这个自然同构保持 $\mathrm{End}(P)$ 的作用。对于所有元素 $\alpha \in \mathrm{Hom}(f_!Pg_!, Y)$ 和 $\beta \in \mathrm{Hom}(P, \ P)^{\mathrm{op}}$，由伴随的单位 η 的自然性可得:

$$\begin{aligned} f^*(\beta \cdot \alpha)g^* \circ \eta_P &= f^*(\alpha \circ f_!\beta g_!)g^* \circ \eta_P \\ &= f^*\alpha g^* \circ f^*f_!\beta g_!g^* \circ \eta_P \\ &= f^*\alpha g^* \circ \eta_P \circ \beta \\ &= \beta \cdot (f^*\alpha g^* \circ \eta_P). \end{aligned}$$

最后，伪函子性由改变系数的伪函子性以及忠实函子在复合下的稳定性得出。 □

例7.12。 考虑环上的双模所构成的阿贝尔框架双范畴 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$，并考虑 $\mathbb{R}$-向量空间和 $\mathbb{C}$-向量空间的局部范畴（因为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 是交换的，所以双模与向量空间是同一回事），以及紧投射生成元 $\mathbb{R}$。 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$ 满足命题 7.11的假设，因此 Gabriel 定理确实可以一致地应用于 $\mathbb{R}$-向量空间和 $\mathbb{C}$-向量空间。

注 7.13。命题 7.11 表明，对于任意此类阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$，由于环同态 $r\colon \mathrm{End}(P) \to \mathrm{End}(f_!Pg_!)$，如果环 $\mathrm{End}(P)$ 是交换的，并且兼容条件 $r(p)\circ\alpha = \alpha\circ r(p)$ 对所有元素 $p \in \mathrm{End}(P)$ 和 $\alpha \in \mathrm{End}(f_!Pg_!)$ 都成立，那么环 $\mathrm{End}(f_!Pg_!)$ 具有 $\mathrm{End}(P)$-代数的结构（见命题 7.30）；对于所有 1-胞腔 $M\colon C \nrightarrow D$，M 在嵌入下的像 $\mathcal{A}(f_!Pg_!, M)$ 会自动获得 $\mathrm{End}(P)$-代数上的左模结构。

判定环端同态环(P) 是否交换通常是一个困难的问题 [39]。然而，在第7.3节的条件下，可以应用 Eckmann–Hilton 论证，参见命题7.28，这也有助于阐明第二个条件。

注 7.14。由于自然同构保忠实函子，且沿环同态的标量限制在模的具体范畴中总是忠实的，因此命题7.11中要求限制函子忠实这一条件是必要的。

命题7.11表明，在闭阿贝尔框架双范畴中，与模的具体范畴局部等价这一性质可以通过标量扩张传播，尽管这种传播仅具有伪函子性。命题7.22 说明如何利用一个由垂直对象对构成的图上的锥来应用命题7.11，而不失去函子性；沿锥各分量的标量限制函子均为忠实函子。例如，在一个阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$ 中，若存在初始系数 I，使得所有限制函子（等价地，沿垂直映射的所有限制 $I \to A$，其中 $A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}_0)$）都是忠实的，就会出现这种情形。

定义 7.15. 双范畴中的**初始系数** I 是垂直范畴 $\mathbb{D}$ 中的始对象。我们将从 I 到垂直对象 X的唯一垂直箭头记作 $\iota_X\colon I \to X$。

例 7.16. 将环 R 视为一个 R-代数时，它是 R-代数垂直范畴中的始对象；空集是垂直范畴 Set 中的始对象；吸收幺半群 $\{0,1\}$ 是吸收幺半群垂直范畴中的始对象。

注 7.17. 框架双范畴$\mathbb{D}$ 中初始系数 I 的存在，使得我们可以定义其他概念：例如，对所有垂直对象 A，左（分别为右）参数化对象 $\mathcal{D}(A, I)$（分别为 $\mathcal{D}(I, A)$）的局部范畴。在模的标架双范畴中，这对应于通常的左（分别为右）模概念。

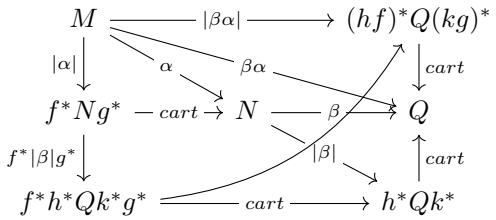
命题7.18. 在具有初始系数I的阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$中，若沿所有垂直映射 $I \to A$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}_0)$ 的限制函子均为忠实函子，则所有限制函子都是忠实函子。

证明。对于所有垂直箭头 $f\colon A \to B$，系数变换函子的伪函子性给出自然同构 $\iota_A^* \circ f^* \cong (f\circ\iota_A)^* = \iota_B^*$。由于 ι_B^* 是忠实的，因此 f^* 也是忠实的。□

在具有初始系数的阿贝尔框架双范畴中 I，如果 Gabriel 的定理适用于局部范畴 $\mathbb{A}(I,\ I)$，那么它函子性地适用于所有局部范畴。为说明这一点，我们将命题 7.11应用于标量扩张函子 $\iota_A!(\ )\iota_B!\colon\ \mathbb{A}(I,\ I)\ \to \mathbb{A}(A,\ B)$，其中所有垂直对象 A 和 B，并使用以下引理显式构造其余所需的环同态。

引理 7.19（分解是伪函子性的）。设 $\mathbb{D}$ 为一个框架双范畴。对所有 2-单元 $\alpha:\ M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$，令 $|\alpha|$ 表示 α 通过笛卡尔胞 $f^*Ng^* \xrightarrow{cart} N$的分解。则对所有 2-单元 $\alpha\colon M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} N$与 $\beta\colon N \overset{k}{\underset{h}{\Rightarrow}} Q$，考虑由笛卡尔 2-单元的唯一性给出的唯一同构 $\phi\colon f^*h^*Qk^*g^* \to (hf)^*Q(kg)^*$。于是，我们有 $|\beta\circ\alpha| = \phi\circ f^*|\beta|g^*\circ|\alpha|$。

证明。由通过笛卡尔胞 $(hf)^*Q(kg)^* \xrightarrow{c} Q$ 的分解的唯一性，下列图表的交换性即已足够：



□

下文将使用引理7.19关于余笛卡尔2-单元的对偶。

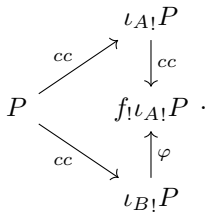
命题 7.20。设 $\mathbb{A}$ 是一个局部余完备、闭、阿贝尔的框架双范畴，带有初始系数 I，且所有限制函子都是忠实的。对于 $\mathcal{A}(I,I)$ 中的任意紧投射生成元 P，存在一个函子：

$$G : \mathbb{A}_1 \to {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$$
$$M : C \nrightarrow D \mapsto \mathcal{A}(\iota_{C!}P\iota_{D!}, M)$$

其中，${}_{\mathbb{Z}}$模 表示环上的左模及其左线性映射所构成的范畴。

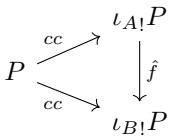
证明。为清晰起见，我们针对满足 $R(M) = I$ 和 $R(\alpha) = \mathrm{id}_I$ 的 1-胞腔 M 和 2-胞腔 α 证明该命题。不过，证明仅依赖于 L 是一个双纤维化（由命题 7.9 得出），并且对双纤维化 (L,R) 也可以进行相同的构造，从而得到上述命题。接下来需要在 2-胞腔上定义G，并证明其函子性。对于所有垂直箭头 $f:\ A \to B$,

1 M $A \nrightarrow I$ N $B \nrightarrow I$ 2 α -单元：, : 和 -单元： $M \overset{f}{\underset{\mathrm{id}_I}{\Rightarrow}} N$，存在唯一的球面同构 2-胞腔 φ，使得下图交换：

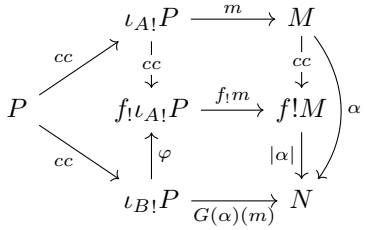


(6)

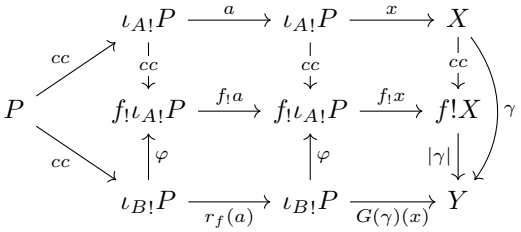
我们将 $\varphi^{-1} \circ cc$ 记为 $\hat{} f$。 $\hat{}\ f$ 是使下图 2-胞腔 $\hat{}$交换的唯一一个。此外，根据事实 2， f 也是余笛卡尔的。



于是，对于所有元素 $m \in G(M)$，令 $G(\alpha)(m)$ 表示 $|\alpha| \circ f_! m \circ \varphi$，其中$|\alpha|$：$f_! M \to N$ 是 α 经由 $M \xrightarrow{cc} f_! M$的分解。根据构造，$\hat{}$以下图表交换。此外，由于 f 是余笛卡尔的， $G(\alpha)(m)$ 是 $\alpha \circ m$ 经由 f的唯一分解。



由于阿贝尔范畴中的标量扩张和复合都是可加的，$G(\alpha)$ 是群同态。我们证明它实际上是左 r_f-线性的，其中 $r_f\hat{}$ 表示群同态 $G(f)$: End($\iota_{A!}P$) $\to$End($\iota_{B!}P$)。我们需要证明 r_f 是环同态，也就是说，它保持复合；并且 $G(\alpha)$ 保持 End($\iota_{A!}P$) 经由 r_f的作用。对于所有 1-胞腔 X： $A \nrightarrow I$、 Y： $B \nrightarrow I$，2-胞腔 γ： $X \overset{I}{\underset{f}{\Rightarrow}} Y$，以及元素 $x \in G(X)$ 和$a \in$ End($\iota_{A!}P$)，考虑下列交换图：



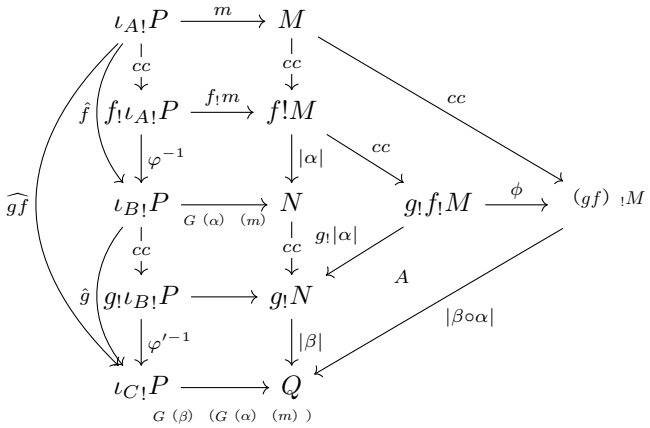
(7)

这两点可直接由改变系数的函子性和图表 7得出：

- 对于第一点， $X = \iota_{A!}P$, $Y = \iota_{B!}P$, $\gamma = \varphi^{-1} \circ cc$ 对所有元素$a, x \in$ End($\iota_{A!}P$);
- 对于第二点， $X = M$, $Y = N$, $\gamma = \alpha$ 以及 $x = m$ 对所有元素$a \in$ End($\iota_{A!}P$).

最后，我们来证明 G 具有函子性。对于任意垂直箭头 f： $A \to B$, g α ：$B \to C$、1-胞腔 $M : A \nrightarrow I$, N： $B \nrightarrow I$, Q： $C \nrightarrow I$以及 2-胞腔： $M \overset{f}{\underset{\mathrm{id}_I}{\Rightarrow}} N$

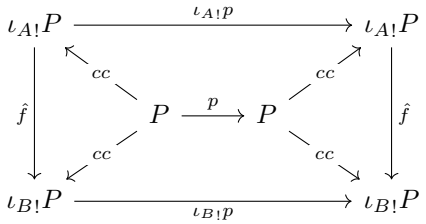
以及 $\beta\colon N \xrightarrow[\mathrm{id}_I]{g} Q$，令 φ 和 φ' 为满足图表（6）及其针对 φ' 的相应图表交换的唯一同构 $\iota_{B!} \to f_!\iota_{A!}P$ 和 $\iota_{C!} \to g_!\iota_{B!}P$。由$\widehat{\quad}$ $\hat{}$唯一性可得，$g \circ f = \hat{}g \circ f$。我们必须证明，对于任意 $m \in G(M)$，$G(\beta\alpha)(m) = G(\beta)(G(\alpha)(m))$。只需证明下图交换：



其中单元 A 根据引理7.19的对偶交换。至此，（部分）$\widehat{\quad}$证明完成。在完整证明中，我们会为所有垂直箭头对 f, g 定义 2-胞腔 f, g 和环同态$r_{f,g}$，但除此之外，记号与此类似。

□

注 7.21. 按照注 7.13，若环 End($\iota_{A!}P$) 和 End($\iota_{B!}P$) 实际上是 End(P)-代数，则命题 7.20 中定义的环同态 r : End($\iota_{A!}P$) →End($\iota_{B!}P$) 是一个 End(P)-代数同态：只需验证 r 保持 End(P) 的作用；这可由图表 7 的交换性得出，其中 $X = \iota_{A!}P$、$Y = \iota_{B!}P$、$\gamma = \varphi^{-1} \circ cc$ 和 $a = \iota_{A!}(p)$ 对所有元素 $p \in$ End(P)、$x \in$ End($\iota_{A!}P$) 均成立；此外，图表（8）的交换性表明，对所有 $p \in$End(P)，均有 $r(\iota_{A!}(p)) = \iota_{B!}(p)$：



(8)

命题 7.22。设 $\mathbb{A}$ 是一个局部余完备、闭的阿贝尔框架双范畴，带有初始系数 I，且所有限制函子均忠实。对于所有紧投射生成元 P 在 $\mathcal{A}(I, I)$ 中，令 $R(,)\colon \mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0 \to$环 为函子 $\widehat{\quad}$

$$(A, B) \mapsto \mathrm{End}(\iota_{A!}P\iota_{B!}) = G(\iota_{A!}P\iota_{B!})^{\mathrm{op}}$$
$$(f : A \to C, g : B \to D) \mapsto G(\widehat{f, g}) : \mathrm{End}(\iota_{A!}P\iota_{B!}) \to \mathrm{End}(\iota_{C!}P\iota_{D!}).$$

对于任意一对垂直箭头 $(f,\ g)$，沿$R(f,\ g)$ 的系数变换函子与沿 $(f,\ g)$ 的系数变换函子相容，其意义如命题 *7.11*所述。

证明。 证明沿用命题 7.11 的模式。与命题 7.20 一样，我们只给出左限制的情形。沿用命题 7.20 的记号，对于所有垂直箭头 $f:\ A \to B$，我们必须证明以下群同构（关于 1-胞腔 $N:\ B \nrightarrow I$ 自然）保留 $\mathrm{End}(\iota_{A!}P)$ 的作用：

$$R(f,\mathrm{id}_I)^*\mathcal{A}(\iota_{B!}P,N) \xrightarrow{-\circ\varphi^{-1}} \cong \mathcal{A}(f_!\iota_{A!}P,N) \cong \mathcal{A}(\iota_{A!}P,f^*N)$$

对于所有 1-胞 $N\colon\ B \nrightarrow I$，以及元素 $n \in \mathcal{A}(\iota_{B!}P,\ N)$ 和 $a \in \mathrm{End}(\iota_{A!}P)$，有：

$$\begin{aligned} f^*((a\cdot n)\circ\varphi^{-1})\circ\eta_{\iota_{A!}P} &= f^*(n\circ R(f,\mathrm{id}_I)(a)\circ\varphi^{-1})\circ\eta_{\iota_{A!}P} \\ &= f^*(n\circ\varphi^{-1}\circ f_!a)\circ\eta_{\iota_{A!}P} \\ &= f^*n\circ f^*\varphi^{-1}\circ f^*f_!a\circ\eta_{\iota_{A!}P} \\ &= f^*n\circ f^*\varphi^{-1}\circ\eta_{\iota_{A!}P}\circ a \\ &= a\cdot(f^*(n\circ\varphi^{-1})\circ\eta_{\iota_{A!}P}) \end{aligned}$$ □

注 7.23。 要求所有限制函子都忠实这一条件非常苛刻。沿环同态进行标量限制总是忠实的，但对于框架双范畴的其他例子，这种情况很少成立。对于分配子和跨度（参见 [9, 例 2。4]），只有沿满态射进行限制才是忠实的。尽管如此，这一条件仍是必要的；参见注 7.14。

例 7.24。考虑由环上的模构成的阿贝尔框架双范畴 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$。 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$ 是闭的、局部余完备的，并且具有初始系数：环 $\mathbb{Z}$。 $U_{\mathbb{Z}}$ 被视为一个 $\mathbb{Z}$-模，即一个阿贝尔群。 $U_{\mathbb{Z}}$ 是 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$ 中阿贝尔群局部范畴里的紧投射生成元。此外，标量限制函子是忠实的。根据定义，对于所有环 A 和 B，我们有 A-B-双模同构 $\iota_{A!}\mathbb{Z}\iota_{B!} \cong U_A \otimes_{\mathbb{Z}} U_B$，因此有环同构 $\mathrm{End}(\iota_{A!}\mathbb{Z}\iota_{B!}) \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\mathrm{op}}$；并且对于所有 A-B-双模，都有左 $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\mathrm{op}}$ 模同构 $\mathrm{Hom}(\iota_{A!}\mathbb{Z}\iota_{B!}, M) \cong M$。因此，命题 7.20 适用，并给出一个函子 $G : {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}_1} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$，它将一个 A-B-双模 M 映到视为左 $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\mathrm{op}}$ 模的 M，态射也类似处理。直观而言， G 将双模压成左模。

结合命题 7.11、7.20和 7.22，我们看到，对于任何满足命题 $\mathbb{A}$的假设的阿贝尔框架双范畴 7.22，所有局部阿贝尔范畴都等价于左模的具体范畴；这种等价与系数变换函子相容，并且具有函子性。我们可能会问，这些数据能否组装成一个框架函子 [9, 定义 6。1],——这是框架双范畴之间恰当的态射概念——其目标是由变化的环上的双模构成的具体阿贝尔框架双范畴 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$。下一节将阐述这一内容。

7.3. 框架嵌入

本节中，对于所有满足命题 A条件的阿贝尔框架双范畴 7.22 且 U_I 为紧投射生成元的情形，我们构造一个松弛框架函子，使其映入 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$。事实上，这将得到一个松弛框架函子，映入由 End(P)-代数上的双模构成的具体阿贝尔框架双范畴 ${}_{\mathrm{End}(P)}\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{End}(P)}$。框架函子有几种变体，但松弛框架函子往往最受关注：

定义 7.25 ([9, 定义 6.14])。 F 是框架双范畴 $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 之间的一个**松弛框架函子**，它由一个**垂直函子** $F_0 : \mathbb{A}_0 \to \mathbb{B}_0$ 和一个**水平函子** $F_1 : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{B}_1$ 组成，满足 $L \circ F_1 = F_0 \circ L$ 和 $R \circ F_1 = F_0 \circ R$，并附带自然变换 $F_\odot : F_1(M) \odot F_1(N) \to F_1(M \odot N)$ 以及 $F_U : U_{F_0(A)} \to F_1(U_A)$，且满足 2-函子的通常公理。若自然变换 $F_\odot$ 和 F_U 的方向相反（分别地，它们是同构），则称 F 为**余松**（分别地，**强**）框架函子。

对于任意满足命题 7.22 条件的阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$，若其在 $\mathcal{A}(I, I)$ 中有一个紧投射生成元 P，考虑命题 7.20 和 7.22 中定义的函子 G 和 R。对于所有 1-胞 $M : A \nrightarrow B$，$G(M)$ 是一个左 $R(A, B)$-模，而我们期望 $F_1(M)$ 是一个 $F_0(A)$-$F_0(B)$-双模。因此，我们需要一种“解开”环 $R(A, B)$ 的方法，也就是说，需要证明对于某个函子 F_0，$F_1(M)$ 是一个左-$F_0(A)$ $\otimes_{\mathbb{Z}} F_0(B)$-模。由于环值函子 $R(\ I)$ 是 F_0 的一个简单候选，因此可以采用两步法：

1. 首先，展示一个自然的环同态：

$$\psi_{A,B} : R(A, P) \otimes_{\mathbb{Z}} R(B, P)^{\mathrm{op}} \to R(A, B);$$

2. 其次，证明沿 ψ 的标量限制可以应用于 G，并保持其函子性。

然而，在如此一般的层面上，第一步就颇具挑战，更不用说自然变换 $F_\odot$ 和 F_U 了。因此，我们将注意力限于一类性质良好的阿贝尔框架双范畴，并称之为**模型**。

定义 7.26. 一个**模型**阿贝尔框架双范畴是一个局部余完备、闭的阿贝尔框架双范畴 $\mathbb{A}$，带有一个初始系数 I，使得所有限制函子都是忠实的，并且 U_I 是 $\mathcal{A}(I, I)$ 的一个紧投射生成元。

例 7.27. 类模阿贝尔框架双范畴的典型例子是模的框架双范畴，如 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$（$I$ 是 R 被视为一个 R-代数）、${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$（$I = \mathbb{Z}$）。这也包括平凡框架双范畴，其中垂直范畴是点范畴，水平范畴是模范畴。

从此以后，令 $\mathbb{A}$表示一个类模阿贝尔框架双范畴，其初始系数为 I。定义 7.26的一个推论是，某些自同态环会自动成为端同态环(U_I)-代数。特别地，环端同态环(U_I) 现在是交换的。

命题 7.28. 在$\mathrm{End}(U_I)$中，两个运算 $\mathfrak{l}_{U_I} \circ (\ \odot\ ) \circ \mathfrak{l}_{U_I}^{-1}$ 和 $\circ$相同且满足交换律。特别地，$\mathrm{End}(U_I)$ 是交换环。

证明。 证明与 [30, §I.1.3.3] 中所用的论证类似。具体而言，考虑以下二元运算：$\mathrm{End}(U_I)$ 中的乘法以及 $\times : (\alpha, \beta) \mapsto \mathfrak{l}_{U_I} \circ (\alpha \odot \beta) \circ \mathfrak{l}_{U_I}^{-1}$。由 $\mathfrak{l}$ 的自然性可知，恒等 2-胞 $1 \in \mathrm{End}(U_I)$ 也是 $\times$的单位。对于所有元素 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{End}(U_I)$，我们有：

$$\begin{aligned}(\alpha \times \beta) \circ (\gamma \times \delta) &= \mathfrak{l}_{U_I} \circ (\alpha \odot \beta) \circ (\gamma \odot \delta) \circ \mathfrak{l}_{U_I}^{-1} \\ &= \mathfrak{l}_{U_I} \circ ((\alpha \circ \gamma) \odot (\beta \circ \delta)) \circ \mathfrak{l}_{U_I}^{-1} \\ &= (\alpha \circ \gamma) \times (\beta \circ \delta).\end{aligned}$$

因此，Eckmann-Hilton论证适用。 □

引理 7.29. 存在自然同构 $\iota_{A!}U_I \odot U_I \iota_{C!} \cong \iota_{A!}(U_I \odot U_I)\iota_{C!}$，它与2-胞 $U_I \odot U_I \xrightarrow{cc \odot cc} \iota_{A!}U_I \odot U_I \iota_{C!}$ 和 $U_I \odot U_I \xrightarrow{cc} \iota_{A!}(U_I \odot U_I)\iota_{C!}$ 相容。特别地，*2*-胞 $U_I \odot U_I \xrightarrow{cc \odot cc} \iota_{A!}U_I \odot U_I \iota_{C!}$ 是余笛卡尔的。

证明。 考虑下面这一列自然同构：

$$\begin{aligned}\iota_{A!}U_I \odot U_I \iota_{C!} &\cong (A_{\iota_A} \odot U_I) \odot (U_I \odot {}_{\iota_C}C) \\ &\cong A_{\iota_A} \odot {}_{\iota_C}C \\ &\cong A_{\iota_A} \odot ((U_I \odot U_I) \odot {}_{\iota_C}C) \\ &\cong \iota_{A!}(U_I \odot U_I)\iota_{C!}.\end{aligned}$$

于是，构造一个交换图是显而易见的，该图涉及上述 2-单元和余笛卡尔箭头 $\lambda_!$ 以及 $\rho_!$，它们定义于第 2.2 节。 □

命题 7.30。 对于所有对象 A，环同态

$$r : \mathrm{End}(U_I) \to \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I)$$

由命题 *7.11* 诱导出一个 $\mathrm{End}(U_I)$-代数结构于 $\mathrm{End}(\iota_{A!}U_I)$ 上。

证明。 回忆一下， r 由 $p \mapsto \iota_{A!}p$定义。由 r 诱导的作用定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(U_I) \times \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I) &\to \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I) \\ (p, \alpha) &\mapsto \alpha \circ \iota_{A!}p.\end{aligned}$$

由命题 7.28，端同态环(U_I) 是交换的。接下来需要验证， r 的像包含于端同态环$(\iota_{A!}U_I)$的中心中；也就是说，对于所有元素 $p \in$

端同态环(U_I) 和 $\alpha \in$端同态环($\iota_{A!}U_I$)，我们需要证明 $\alpha \circ \iota_{A!}p = \iota_{A!}p \circ \alpha$。通过自然同构 $\wr$共轭，只需证明 $(\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I}) \circ (\iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I}) = (\iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I}) \circ (\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I})$。我们先证明等式 $\iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I} = \iota_{A!}\,\mathrm{id}_{U_I} \odot p$。根据引理 7.29，只需证明 $\iota_{A!}(p \odot \mathrm{id}_{U_I}) = \iota_{A!}(\mathrm{id}_{U_I} \odot p)$，而这由命题 7.28 得出。最后，考虑以下等式链：

$$\begin{aligned}(\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I}) \circ (\iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I}) &= (\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I}) \circ (\iota_{A!}\,\mathrm{id}_{U_I} \odot p)\\ &= (\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I}) \circ (\mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I} \odot p)\\ &= (\mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I} \odot p) \circ (\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I})\\ &= (\iota_{A!}\,\mathrm{id}_{U_I} \odot p) \circ (\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I})\\ &= (\iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I}) \circ (\alpha \odot \mathrm{id}_{U_I}).\end{aligned}$$ □

注 7.31。同样的推理无法推广到证明：对于任意对象 A和 B，环 $\mathrm{End}(\iota_A!U_I\iota_B!)$ 是一个 $\mathrm{End}(U_I)$-代数。不过，命题7.30 已足以满足我们的目的。

此时，命题7.30 以及注7.13 和 7.21均适用，因此我们可以改进构造：命题7.20中的函子 $G : \mathbb{A}_1 \to {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ 被提升为一个取值于 $\mathrm{End}(U_I)$-代数上的模的函子，而命题 7.22 中的函子R： $\mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0 \to \mathbf{Ring}$ 被提升为一个取值于 $\mathrm{End}(U_I)$-代数的函子。因此，从现在起，我们构造一个到阿贝尔框架双范畴 ${}_{\mathrm{End}(U_I)}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathrm{End}(U_I)}$ 中的松弛框架函子，而不再构造到 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$ 中的函子。特别地，我们定义以下垂直函子 F_0。

定义 7.32。令 $F_0 : \mathbb{A}_0 \to {}_{\mathrm{End}(U_I)}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathrm{End}(U_I)0}$ 为函子 $R(\ I)$，它将对象 A 映到 $\mathbb{A}$ 中的 $\mathrm{End}(U_I)$-代数 $\mathrm{End}(\iota_{A!}U_I)$。

例 7.33. 考虑模状阿贝尔框架双范畴 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$。环端同态环($U_I$)同构于 R，且函子 F_0： ${}_R\mathbf{Alg} \to {}_{\text{端同态环}(U_I)}\mathbf{Alg}$ 将一个 R-代数 A送到端同态环(U_I)-代数端同态环($A \otimes_R U_R$) $\cong A$，对态射亦然。

7.3.1. 水平函子 F_1

现在我们通过应用第 1 步和第 2 步来定义水平函子 $F_1 : \mathbb{A}_1 \to$ 端同态环(U_I)$\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathrm{End}(U_I)}1$。我们首先证明，对所有对象 A，$F_0(A)^{\mathrm{op}}$ 可以表示为 $R(I, A)$。注意，这并不等同于对所有对象 A 证明$U_I\iota_{A!} \cong \iota_{A!}U_I$。特别地，模状范畴在 [9, 定义 10.1] 的意义下并非自动对合。

命题 7.34. 对所有垂直箭头 $f : A \to B$，存在一个环同构 交换f 端同态环($f_!U_A$) $\to$ 端同态环($U_Af_!$)^{op}。当 $A = I$ 时，它们组装成 端同态环(U_I)-代数的自然同构 交换$_M$: $R(M, I)^{\mathrm{op}} \Rightarrow R(I, M)$。

证明。回顾第2.2节末尾的记号。对于任意垂直箭头f： $A \to B$，同构 $\lambda^*, \lambda_!, \rho^*$ 和 $\rho_!$ 诱导出两个加法群同构 σ： $f^*f_!U_A \to f^*U_Bf^*$和 σ'： $U_Af_!f^* \to f^*U_Bf^*$。前者定义为 $\varphi \circ f^*\mathfrak{r}_A \circ f^*\lambda^{-1}{}_!$，其中 φ是唯一的同构 $f^*B_f \to$

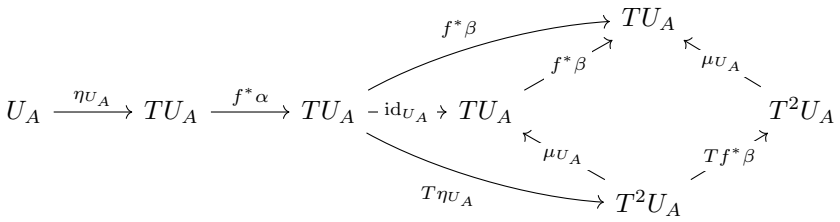
$f^*U_Bf^*$与笛卡尔胞腔 $f^*B_f \to B_f = U_bf^* \leftarrow f^*U_Bf^*$(见图表12)相交换。后者对称地定义。接着，考虑由伴随交换f ： $\mathcal{A}(f_!U_A, f_!U_A) \to \mathcal{A}(U_Af_!, U_Af_!)$ 以及同构 $f_! \dashv f^*$ 和 σ 和 σ': 诱导的群同构

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f_!U_A, f_!U_A) &\cong \mathcal{A}(U_A, f^*f_!U_A) &(9)\\ &\cong \mathcal{A}(U_A, f^*U_Bf^*) &(10)\\ &\cong \mathcal{A}(U_A, U_Af_!f^*) \cong \mathcal{A}(U_Af_!, U_Af_!). &(11)\end{aligned}$$

阿贝尔群 $\mathcal{A}(f_!U_A,\ f_!U_A)$ 和 $\mathcal{A}(U_Af_!,\ U_Af_!)$ 带有环结构，其乘法由复合给出，单位为恒等态射。我们证明 swap$f$ 实际上是一个环同构 End($f_!U_A$) →End($U_Af_!$)^{op}；也就是说，它保恒等态射并反转复合。

首先注意，同构链中的每个群都是一个环。在$\mathcal{A}(U_A,\ f^*f_!U_A)$（分别地，$\mathcal{A}(U_A,$ $U_Af_!f^*)$）中，乘法是单子 $(T = f^*f_!(\ )\ \eta,\ \mu)$（分别地，$(M,\ \eta',\ \mu')$）的 Kleisli 范畴中的复合，该单子来自伴随 $f_!(\ ) \dashv f^*(\ )$（分别地，$(\ )f_! \dashv (\ )f^*$），单位则是伴随的单位。回忆一下， η是伴随的单位，而 μ_M 是 $f^*\epsilon_{f^*M}$，其中ϵ是伴随的余单位。最后，群 $\mathcal{A}(U_A,\ f^*U_Bf^*)$ 从前两个 Kleisli 复合继承了两种环结构。

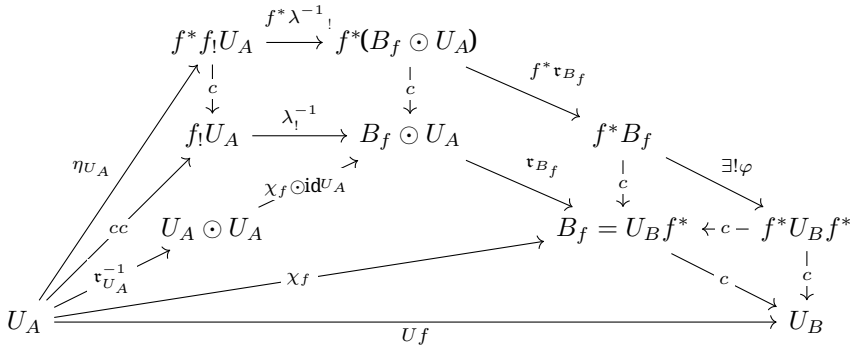
接下来，我们证明乘法在步骤 9和 11下保持不变。这归结为对所有 $\alpha,$ $\beta \in \mathcal{A}(f_!U_A,\ f_!U_A)$ (方程（11）的情形类似）：



其中最右侧的方格因 $f^*(\ )$ 的函子性作用于余单位 $\epsilon :\ f_!f^*(\ ) \to \mathrm{Id}$的自然性而交换。此外，步骤 9 和 11 都将恒等态射映射为相应伴随的单位。

那么，对于所有元素 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(U_A, f^*U_Bf^*)$，由 T 诱导的复合 $\beta \circ_T \alpha$ 为 $\sigma \circ (\mu_{U_A} \circ T(\sigma^{-1} \circ \beta) \circ \sigma^{-1} \circ \alpha)$，且诱导的单位 1_T 为 $\sigma \circ \eta_{U_A}$。类似地，M 产生复合 $\beta \circ_M \alpha$ 和单位 1_M。下面证明$1_T = 1_M$，方法是证明 1_T 和 1_M 都是 Uf 经由笛卡尔胞 $f^*U_Bf^* \to U_B$ 的分解。对于 1_T，只需以下图表

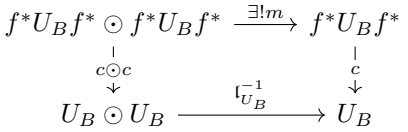
交换：



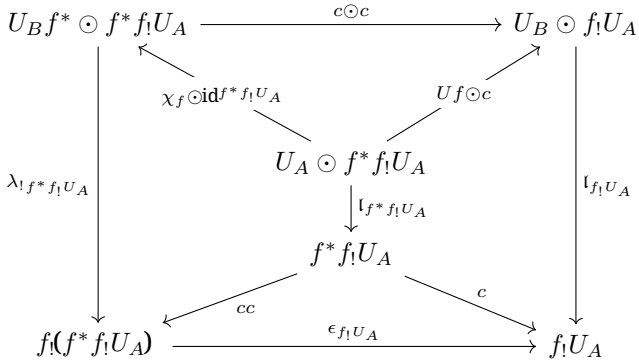
(12)

对称地，可以证明 1_M 也是 Uf 的分解。

利用类似的思路，我们证明 $\beta \circ_T \alpha = m \circ (\alpha \odot \beta) \circ \mathfrak{r}_{U_A}^{-1}$ 以及 $\beta \circ_M \alpha = m \circ (\beta \odot \alpha) \circ \mathfrak{l}_A^{-1}$，其中 m是下图所示的分解。引理 2.2 即可完成论证。



对于 $\beta \circ_T \alpha$ （（关于 $\beta \circ_M \alpha$ 的证明类似），考虑图 3中的交换图，其中单元 A 如以下图表所示交换：



我们刚刚证明了 swap$_f$ 是一个环同构。现在，如果 $A = I$, f 必须具有以下形式 $\iota_B\colon\ I \to B$。我们用 σ_B表示 σ，用 σ'_B表示 σ'，用 swap$_B$表示 swap$_{\iota_B}$，并用 κ_B表示${\sigma'_B}^{-1} \circ \sigma_B$。我们先证明 swap$_B$ 是一个 End(U_I)-代数同构，也就是说，上述同构链保留了 End(U_I) 的作用。对于所有元素 $r \in$End(U_I) 和 $\beta \in \mathcal{A}(\iota_{B!}, \iota_{B!})$，以下

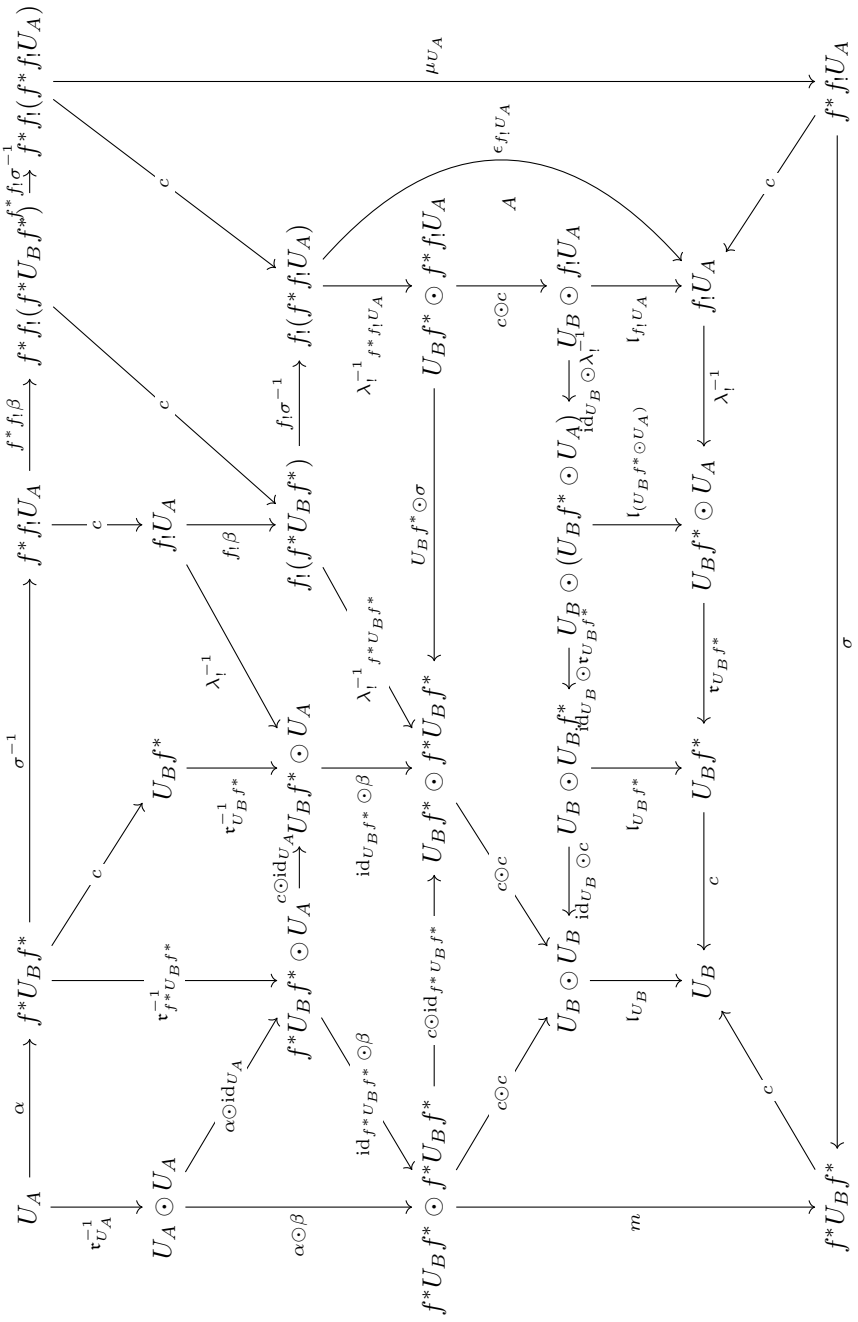


图 3: $\beta \circ_T \alpha = m \circ (\alpha \odot \beta) \circ \mathfrak{r}_{U_A}^{-1}$ 的证明。

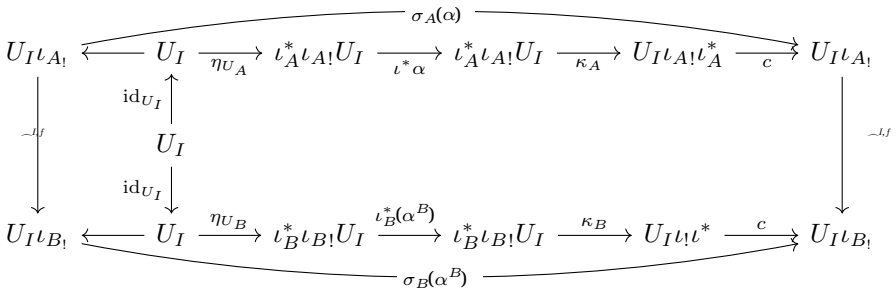
方程（及其对称形式）成立：

$$\begin{aligned}\iota_B^*(r\cdot\beta)\circ\eta &= \iota_B^*\beta\circ\iota_B^*\iota_{B!}r\circ\eta\\ &= \iota_B^*r\circ\eta\circ r\\ &= r\cdot(\iota_B^*r\circ\eta).\end{aligned}$$

最后，我们来证明，对于所有对象 B，同构 swap_B 组成一个自然同构。回顾命题 7.20 中的记号。为简洁起见，在不存在歧义时，对于所有垂直箭头 $f\colon A\to C$ 和 $g\colon B\to D$，我们将 $(\ )^{C,D}$ 记作从 $\mathrm{End}(U_I)$ 到 $r_{f,g}$ 的代数同态。对于所有垂直箭头 $f\colon A\to C$，我们也将 $(\ )^{C,I}$ 记作 $(\ )^C$。现在我们需要证明，对于所有垂直箭头 $f\colon A\to B$ 及元素 $\alpha\in R(A,I)$，$\sigma_A(\alpha)^{I,B}=\sigma_B(\alpha^B)$，其中对于所有垂直对象 C, σ_C，$R(C,I)\to R(I,C)^{\mathrm{op}}$ 表示我们刚构造的同构。根据 $\sigma_A(\alpha)^{I,B}$ 的唯一性，只需证明下图交换：

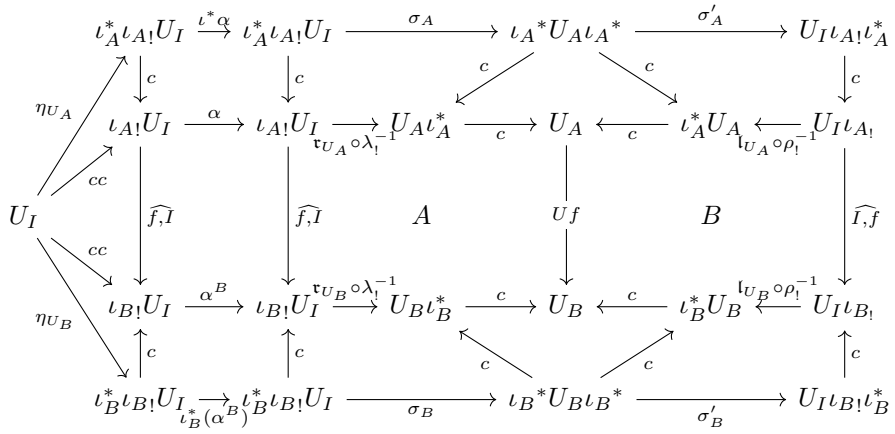
$$\begin{array}{ccc} U_I\iota_{A!} & \xrightarrow{\sigma_A(\alpha)} & U_I\iota_{A!}\\ {\scriptstyle\widehat{I,f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widehat{I,f}}\\ U_I\iota_{B!} & \xrightarrow{\sigma_B(\alpha^B)} & U_I\iota_{B!}\end{array}$$

展开 $\sigma_A(\alpha)$ 和 $\sigma_B(\alpha^B)$，并利用余笛卡尔胞腔是满态射这一事实 1，只需证明下图的交换性：

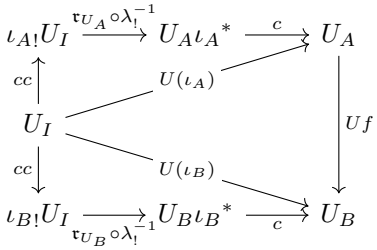


其中，最左边的图表根据 I, f的定义交换，而顶部和底部的图表则分别根据 σ_A 和 σ_B的定义交换。中间图表的交换性

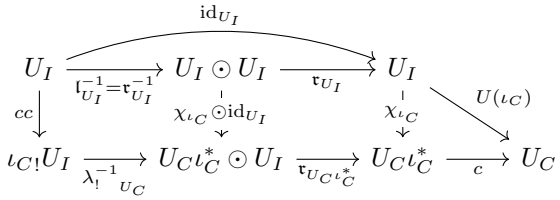
该图表可由以下图表推出：



其中，图表 A 和 B 交换：对于 A，根据 f, I的定义，只需验证下图交换（证明 B 交换的过程具有对称性）：



其中，上下两个三角形均交换，这是因为对所有对象 C，以下图表具有交换性：



□

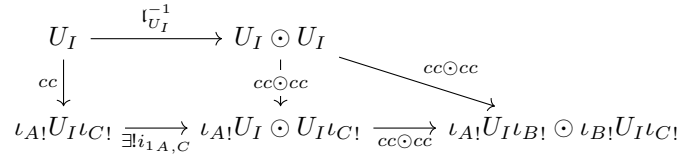
例 7.35。在 $_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$ 中，对于所有环同态 $f\colon A \to B$，我们立即有 $\mathrm{End}({}_fU_A) \cong \mathrm{End}(U_Bf^*) \cong B$，以及 $\mathrm{End}(U_Af_!) \cong \mathrm{End}(f^*U_B) \cong B^{\mathrm{op}}$。

在使用命题 7.34 定义自然变换之前

$$F_0(A) \otimes_{\mathrm{End}(U_I)} F_0(B)^{\mathrm{op}} \to R(A,B),$$

我们引入以下有用的2-胞腔，它们也出现在第7.3.2节。与命题7.34中一样，下列结果可以更一般地陈述，但不包含自然性以及端同态环(U_I)-代数性质。

定义 7.36。 对所有对象 A、 B、 C，考虑余笛卡尔 2-胞 $U_I \xrightarrow{cc} \iota_{A!}U_I\iota_{B!}$与 $U_I \xrightarrow{\iota^{-1}} U_I \odot U_I \xrightarrow{cc\odot cc} \iota_{A!}U_I \odot U_I\iota_{B!}$。 由余笛卡尔胞腔的唯一性，存在唯一的球状同构 2-胞$i_{1\,A,\ B}$，使得下列图表交换：



然后定义余笛卡尔 2-胞 $i_{2\,A,\ B,\ C}$：$\iota_{A!}U_I\iota_{C!} \to \iota_{A!}U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I\iota_{C!}$ 为 $(cc \odot cc) \circ i_{1\,A,\ C}$。

命题 7.37。 存在一个环的自然变换：

$$\psi : R(_, I) \otimes_{\mathrm{End}(P)} R(_, I)^{\mathrm{op}} \Rightarrow R(_, _).$$

证明。 根据定义 3.1，水平复合 $\odot$在局部范畴之间诱导加性函子，因此对任意对象 A和 B，映射：

$$\odot : \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I) \times \mathrm{End}(U_I\iota_{B!}) \to \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I\iota_{B!})$$

是双线性的，并且保持复合。我们证明它也保持 $\mathbf{End}(P)$ 的作用。对于所有元素 $p \in \mathbf{End}(P)$、 $\alpha \in \mathbf{End}(\iota_{A!}U_I)$ 和 $\beta \in \mathbf{End}(U_I\iota_{B!})$，有

$$(p \cdot \alpha) \odot \beta = (\alpha \odot \beta) \circ (\iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I\iota_{B!}}).$$

然而，根据标量扩张的函子性、引理7.29 和命题7.28，我们有：

$$\begin{aligned} \iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I\iota_{B!}} &= \iota_{A!}p \odot \mathrm{id}_{U_I}\, \iota_{B!} \\ &= \iota_{A!}\, \mathrm{id}_{U_I} \odot p\iota_{B!} \\ &= \mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I} \odot p\iota_{B!}. \end{aligned}$$

因此，水平复合给出了一个 $\mathbf{End}(U_I)$-代数同态：

$$\mathrm{End}(\iota_{A!}U_I) \otimes_{\mathrm{End}(P)} \mathrm{End}(U_I\iota_{B!}) \xrightarrow{\odot} \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I\iota_{B!}).$$

现在将 $\psi_{A,B}$ 定义为以下复合：

$$\begin{array}{l} \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I) \otimes_{\mathrm{End}(P)} \mathrm{End}(\iota_{B!}U_I)^{\mathrm{op}} \\ \downarrow \cong \\ \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I) \otimes_{\mathrm{End}(P)} \mathrm{End}(U_I\iota_{B!}) \\ \downarrow \odot \\ \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I \odot U_I\iota_{B!}) \\ \downarrow \cong \\ \mathrm{End}(\iota_{A!}U_I\iota_{B!}) \end{array}$$

其中，最后一个同构为 $i_{1A,B} \circ (\,) \circ {i_1}_A^{-1}{}_{,\underline{B}}$。变换 $\psi_{A,B}$ 是两个自然变换的垂直复合：$R(\quad I) \otimes_{\mathrm{End}(P)} R(\quad I)^{\mathrm{op}} \Rightarrow R(\quad I) \otimes_{\mathrm{End}(P)} R(I,)$ 和 $R(\text{-}\ I) \otimes_{\bar{\mathrm{E}}\mathrm{nd}(P)} R(I,)^{-} \Rightarrow R(\,,)$。第一个由命题 7.34 可知是自然的。对于第二个，采用命题 7.34 的证明中的记号，我们需要证明，对于所有相容的垂直对象 A, B 以及球形 2-胞腔 α 和 β，都有 $(\alpha \odot \beta)^{A,B} = \alpha^{A,I} \odot \beta^{I,B}$。这是由恒等式 $f, g = f, \mathrm{id}_I \odot \mathrm{id}_I, g$ 得出的；这些恒等式对所有相容的垂直箭头 f 和 g，$\widehat{\quad}$ 都成立，这源于 f, g 的唯一性，以及 $\odot$ 的函子性。

□

例 7.38. 在 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$ 中，ψ 是一个自然同构，相当于恒等变换 $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \Rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B$。

命题 7.39. 对所有范畴 $\mathcal{C}$，自然同构 $\eta : R' \Rightarrow R$（函子 R'、$R : \mathcal{C} \to$ 环的）、$\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \to B$、左 RA-模 M 与 RB-模 N，以及左 Rf-线性模同态 $\alpha : M \to N$，沿 η 的标量限制使 M 成为左 $R'A$-模，使 N 成为左 $R'B$-模，并使 α 为左 $R'f$-线性。此外，该构造是函子性的。

证明. 沿 η_A 的标量限制使 M 成为左 $R'A$-模，其中 $R'A$ 的作用对所有元素 $a \in R'A$ 与 $m \in M$ 由 $a \cdot m = \eta_A(a) \cdot_M m$ 定义。类似地，N 经由沿 η_B 的限制成为左 $R'B$-模。于是，对 $R'A$ 中的所有元素 a 以及 M 中的 m：

$$\begin{aligned} \alpha(a \cdot m) &= \alpha(\eta_A(A) \cdot_M m) \\ &= Rf(\eta_A(a)) \cdot_N \alpha(m) \\ &= \eta_B(R'f(a)) \cdot_N \alpha(m) \\ &= R'f(a) \cdot \alpha(m). \end{aligned}$$

函子性很容易验证。 □

我们现在可以定义水平函子 F_1，其取值于端同态环 (U_I)-代数上的双模。

定义 7.40。设 F_1 为函子 G 沿 ψ 的标量限制，即 F_1 将 1-胞腔 $M : A \nrightarrow B$ 送到环 $G(M)$ 上的左 $F_0(A) \otimes_{\mathrm{End}(Z)} F_0(B)^{\mathrm{op}}$-模。由命题 7.30，环 $F_0(A)$ 与 $F_0(B)$ 是端同态环 (U_I)-代数，并且 $F_1(M)$ 继承了端同态环 (U_I)-代数上的左 $F_0(A) \otimes_{\mathrm{End}(Z)} F_0(B)^{\mathrm{op}}$ 模结构，或等价地，继承了端同态环 (U_I)-代数上的 $F_0(A)$-$F_0(B)$-双模结构。

根据 F_0 和 F_1 的定义，我们有 $L \circ F_1 = F_0 \circ L$ 和 $R \circ F_1 = F_0 \circ R$。为了证明 F_0 和 F_1 组成为框架函子 $\mathbb{A} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathbb{Z}}$，还需构造自然变换 $F_\odot : F_1(M) \odot F_1(N) \to F_1(M \odot N)$ 以及 $F_U : U_{F_0(A)} \to F_1(U_A)$，并满足 2-函子的通常公理。

7.3.2. 相容条件

我们定义自然变换 $F_{\odot}$ 和 F_{U}。由于用于定义函子 F_0 和 F_1 的投射紧生成元是 U_I，我们可以使用自然同构 ι_{U_I}: $U_I \odot U_I \to U_I$ 以及 2-胞腔 $U(\iota_A)$: $U_I \to U_A$，对所有对象 A均成立。

定义 7.41. 对所有 1-胞腔 M: $A \nrightarrow B$与 N: $B \nrightarrow C$，令 $F_{\odot M,N}$: $F_1(M) \otimes_{\mathbb{Z}} F_1(N) \to F_1(M \odot N)$ 为在纯张量 $(m,n) \in F_1(M)\otimes_{\mathbb{Z}} F_1(N)$ 上由 $(m\odot n)\circ i_{2\,A,B,C}$ 定义的阿贝尔群同态，并利用 $\odot$ 的可加性以及阿贝尔范畴中的复合作线性延拓。

命题 7.42. 阿贝尔群同态$F_{\odot M,N}$ 组装成一个自然变换。

证明. 只需对所有 1 M' $A' \nrightarrow B'$ N' $B' \nrightarrow C'$ 2 α $M \overset{g}{\underset{f}{\Rightarrow}} M'$ β $N \overset{h}{\underset{g}{\Rightarrow}} N'$，以及纯张量 $(,)$ $(,)$ $(,)$ m n $\in F_1$ M $\otimes_{\mathbb{Z}} F_1$ N 证明$G(\alpha \odot \beta)(F_{\odot M,N}(m,n)) = (G(\alpha)(m) \odot G(\beta)(n)) \circ i_{2\,A',B',C'}$。这由如下图表的交换性得出：

$$\begin{array}{ccccc}
\iota_{A!}U_I\iota_{C!} & \xrightarrow{i_{2\,A,B,C}} & \iota_{A!}U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I\iota_{C!} & \xrightarrow{m\odot n} & M \odot N \\
\downarrow{\scriptstyle \widehat{f,h}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{f,g}\odot\widehat{g,h}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\odot\beta} \\
\iota'_{A!}U_I\iota'_{C!} & \xrightarrow[i_{2\,A',B',C'}]{} & \iota'_{A!}U_I\iota'_{B!} \odot \iota'_{B!}U_I\iota'_{C!} & \xrightarrow[G(\alpha)(m)\odot G(\beta)(n)]{} & M' \odot N'
\end{array}$$

最右边的单元根据 $G(\alpha)(m)$ 和 $G(\beta)(n)$的定义交换。要证明左边的方格交换，先复合满态射余笛卡尔2-单元$U_I \xrightarrow{cc} \iota_{A!}U_I\iota_{C!}$。根据 定义 7.36 中的 i_2，以及 $\widehat{f\ h}$的定义，只需证明以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \iota_{A!}U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I\iota_{C!} \\
U_I & \xrightarrow{\iota_{U_I}^{-1}} & U_I \odot U_I & \overset{cc}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \widehat{f,g}\odot\widehat{g,h}} \\
 & & & \underset{cc}{\searrow} & \\
 & & & & \iota'_{A!}U_I\iota'_{B!} \odot \iota'_{B!}U_I\iota'_{C!}
\end{array}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$根据 f,g和 g,h的定义，该三角形交换。 □

命题 7.43。 对于所有的 1-单元 M: $A \nrightarrow B$和 N: $B \nrightarrow C$, $F_{\odot M,\ N}$实际上是一个 $F_0(A)$-$F_0(C)$-双模同态 $F_1(M)\otimes_{F_0(B)} F_1(N) \to F_1(M \odot N)$。

证明。我们需要证明，$F_{\odot M,\ N}$与 $F_0(A)$ 和 $F_0(C)$ 的作用相容，并且与 $F_0(B)$ 的作用相容。对于后者，我们来证明，对于所有元素 $m \in F_1(M)$ $n \in F_1(N)$ 和 $\beta \in F_0(B)$，都有 $F_{\odot M,\ N}((m,\ \beta \cdot n)) = F_{\odot M,\ N}((m \cdot$

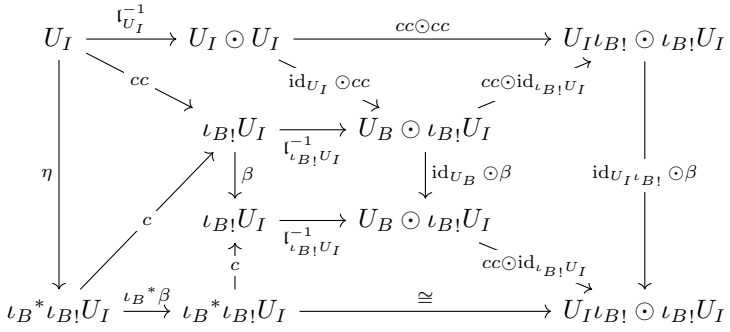
β, n)). 展开定义后，我们需要证明下图交换：

$$\iota_{A!}U_I\iota_{C!} \xrightarrow{i_{2_{A,B,C}}} \iota_{A!}U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I\iota_{C!} \underset{\psi_{A,B}(\mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I},\beta^{\mathrm{op}})\odot\mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}\odot\psi_{B,C}(\beta,\mathrm{id}_{\iota_{C!}U_I})}{\rightrightarrows}} \iota_{A!}U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I\iota_{C!} \xrightarrow{m\odot n} M \odot N$$

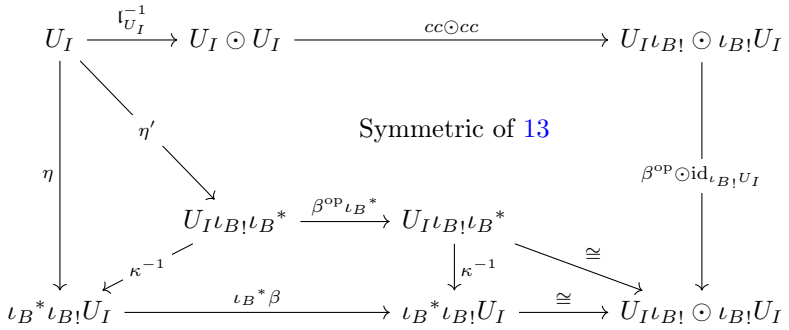
这归结为以下图表的交换性：

$$U_I \xrightarrow{\iota_I^{-1}} U_I \odot U_I \xrightarrow{cc\odot cc} U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I \underset{\beta^{\mathrm{op}}\odot\mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}\odot\beta}{\rightrightarrows}} U_I\iota_{B!} \odot \iota_{B!}U_I \ .$$

要证明其交换性，只需证明以下两个图表交换：

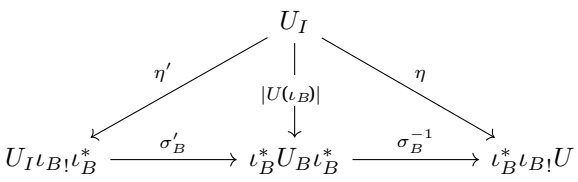


(13)

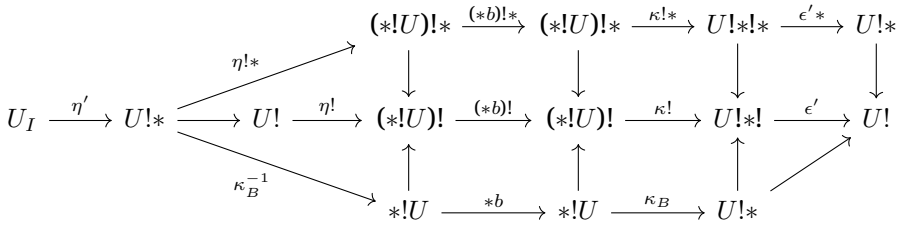


(14)

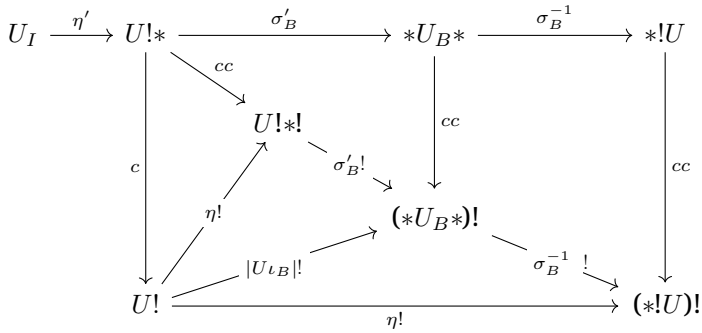
要证明前者的交换性，以及后一图表右上角单元的对称情形，都是显然的。同样，右下角单元的交换性也显然。下面证明其余两个单元交换。对于最左边的单元，考虑以下交换图：



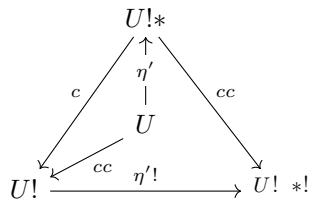
对于底部中间的单元，将笛卡尔胞腔是单态这一事实应用于以下交换图。为便于阅读，我们将沿 ι_B向右限制 $(\,)\iota_B{}^*$ 记作 $(\,)*$ 。类似地，将沿 ι_B的扩张记作 $(\,)!$，并对左侧的系数变换采用对称的记号：



其中，左下角的单元在与 η'复合后交换，如下图所示：

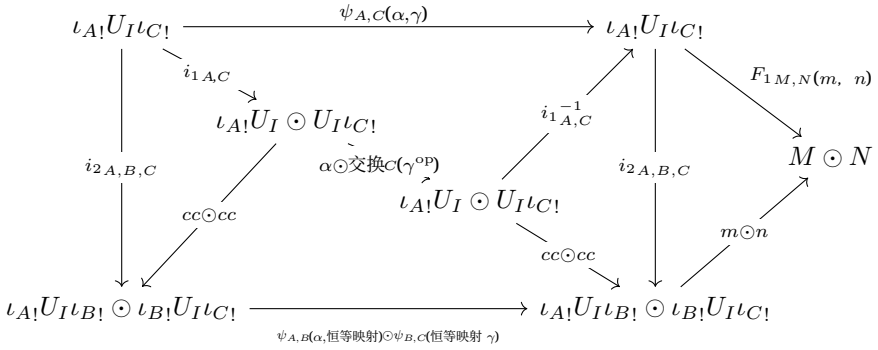


其中最左侧由 η' 预合成的单元交换，如下图表所示：

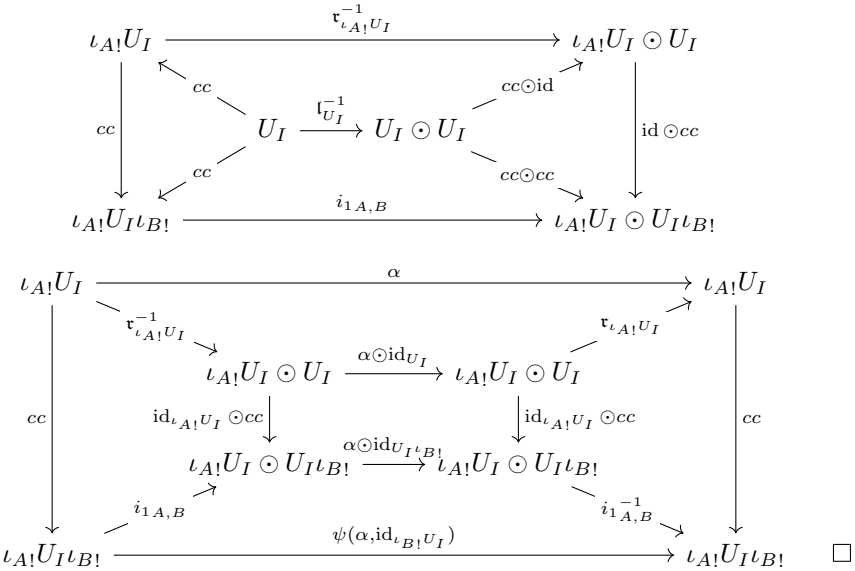


现在我们证明 $F_{\odot M,N}$ 保持 $F_0(A)$ 和 $F_0(C)$ 的作用，即证明对于所有元素 $m \in F_1(M)$ $n \in F_1(N)$、 $\alpha \in F_0(A)$ 和 $\gamma \in F_0(C)$，都有 $F_{\odot M,N}((\alpha \cdot m, n \cdot \gamma))$ $= \alpha \cdot F_{\odot M,N}((m,n)) \cdot \gamma$。展开定义后，

我们需要证明下图可交换：



其中底部中间的图表根据以下图表（及其对称变体）的交换性而交换：



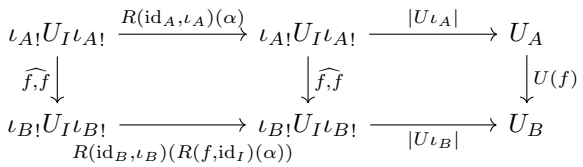
定义 7.44。对于所有 1-胞腔 A，令 F_{UA}：$F_0(A) \to F_1(U_A)$ 为定义在元素 α：$\iota_{A!}U_I \to \iota_{A!}U_I \in F_0(A) = R(A,\ I)$ 上的映射，其定义为 $|U\iota_A|\circ R(\mathrm{id}_A,\ \iota_A)(\alpha)$，其中 $|U\iota_A|$ 是 $U(\iota_A)$ 经由余笛卡尔 2-胞 $U_I \xrightarrow{cc} \iota_{A!}U_I\iota_{A!}$ 的分解。由于阿贝尔范畴中的复合是可加的，且 $R(\mathrm{id}_A,\ \iota_A)$ 是环同态，因此 F_{UA} 是群同态。

命题 7.45。阿贝尔群同态 F_{UA} 组成一个自然同态。

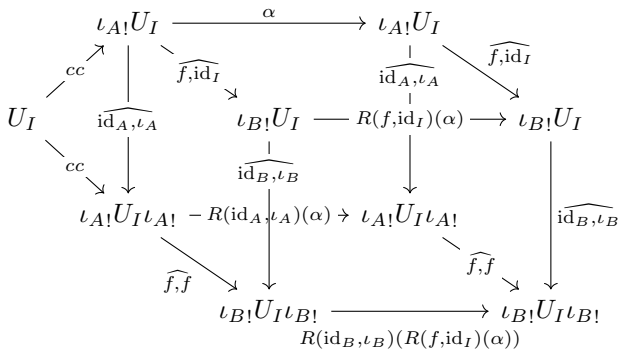
证明。自然性意味着，对于所有对象 A和 B、垂直箭头 f：$A \to B$以及元素 $\alpha \in F_0(A)$，我们有以下恒等式：

$$F_1(U_f)(|U_{\iota_A}| \circ R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha) = |U_{\iota_A}| \circ R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(F_0(f)(\alpha)).$$

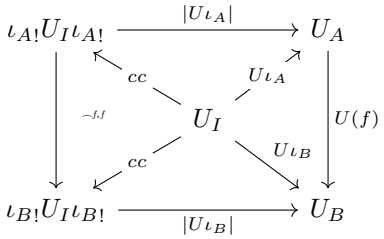
根据 $F_1(U_f)(|U_{\iota_A}| \circ R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha)$ 定义中的唯一性，由以下图表的交换性可知：



其中最左侧的方格交换，因为余笛卡尔 2-胞是满态射；此外，根据下图，三角形以及方格除底面外的所有面都交换：



其中最右侧的方格交换，因为余笛卡尔 2-胞是满态射；此外，根据下图，图表交换：

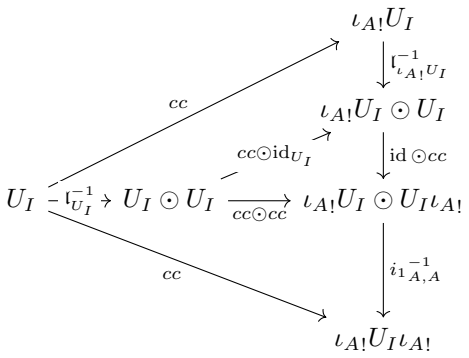


□

命题 7.46. 对于所有对象 A, F_{UA}，它实际上是一个(A)-$F_0(A)$-双模，是端同态环(U_I)-代数的同态。

证明。我们需要证明，F_{UA} 尊重 $F_0(A)$在左侧和右侧的两种作用。对于左作用，我们证明对所有元素 $\alpha, a \in F_0(A)$，有$F_{UA}(a \cdot \alpha) = a \cdot F_{UA}(\alpha)$，即 $F_{UA}(\alpha \circ a) = F_{UA}(\alpha) \circ \psi_{A,A}(a, \mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I})$。由于$R(\mathrm{id}_A, \iota_A)$是环同态，它保持复合，因此只需证明对于所有 $\alpha \in F_0(A)$，$R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha)$ 等于 $\psi_{A,A}(\alpha, \mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I})$。我们首先通过$\widehat{\quad}$利用其唯一性，为 2-胞腔 id_A, ι_A给出一个替代表达式。

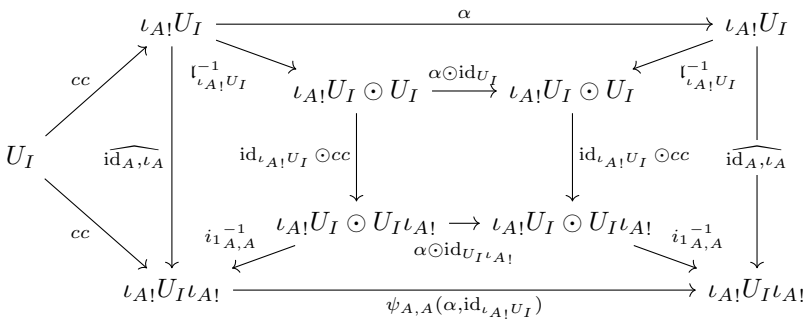
考虑以下交换图：



然后，我们利用这个替代表达式证明：

$$R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha) = \psi_{A,A}(\alpha, \mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I})$$

利用 $R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha)$ 的唯一性以及以下图表的交换性：



对于右作用，推理类似。采用上述论证的对称形式，可以证明，对于所有元素 $\alpha \in F_0(A)$，都有 $R(\iota_A, \mathrm{id}_A)(\alpha^{\mathrm{op}}) = \psi_{A,A}(\mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I}, \alpha^{\mathrm{op}})$。接下来，只需证明对于所有 $\alpha \in F_0(A)$：

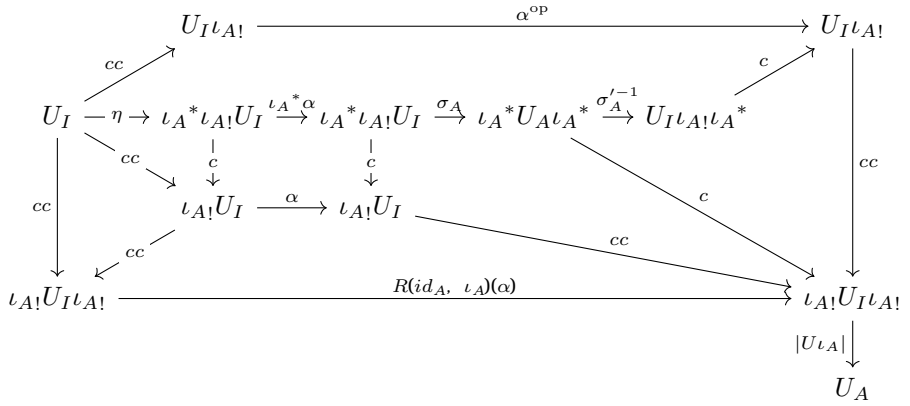
$$|U\iota_A| \circ R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha) = |U\iota_A| \circ R(\iota_A, \mathrm{id}_A)(\alpha^{\mathrm{op}}) \tag{15}$$

为了得到以下对所有元素 $\alpha, a \in F_0(A)$ 都成立的等式：

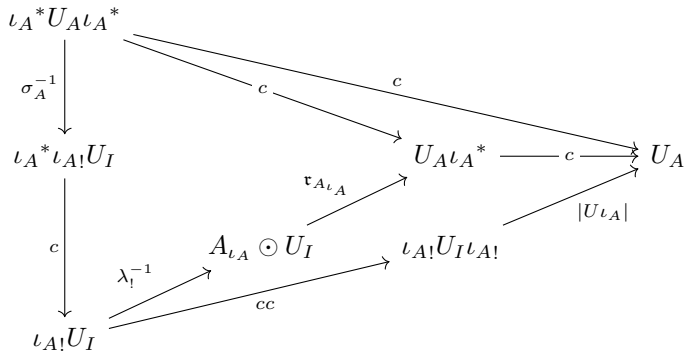
$$\begin{aligned} F_{UA}(a \circ \alpha) &= |U\iota_A| \circ R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(a \circ \alpha) \\ &= |U\iota_A| \circ R(\iota_A, \mathrm{id}_A)(\alpha^{\mathrm{op}} \circ a^{\mathrm{op}}) \\ &= |U\iota_A| \circ R(\iota_A, \mathrm{id}_A)(\alpha^{\mathrm{op}}) \circ R(\iota_A, \mathrm{id}_A)(a^{\mathrm{op}}) \\ &= |U\iota_A| \circ R(\mathrm{id}_A, \iota_A)(\alpha) \circ R(\iota_A, \mathrm{id}_A)(a^{\mathrm{op}}) \\ &= F_{UA}(\alpha) \circ \psi_{A,A}(\mathrm{id}_{\iota_{A!}U_I}, a^{\mathrm{op}}) \end{aligned}$$

现在我们来证明方程 15 对所有 $\alpha \in F_0(A)$成立。首先，注意到根据 $\widehat{\ }$ 2-胞腔 id_A的唯一性 ι_A ，以及我们对典范

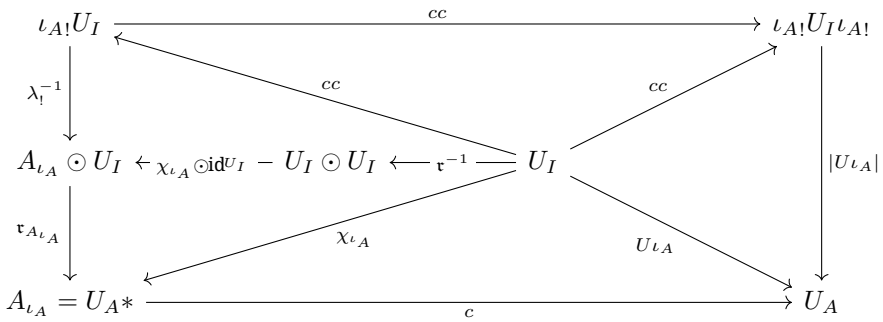
余笛卡尔 2-胞腔的定义，$\widehat{\quad}\mathrm{id}_A$，$\iota_A$ 也等于 $\iota_{A!}U_I \xrightarrow{cc} \iota_{A!}U_I\iota_{A!}$。于是，由下图的交换性可得结论：



其中，顶端的单元根据 α^{op} 的定义交换，底端的单元根据 $R(\mathrm{id}_A,\ \iota_A)(\alpha)$ 的定义交换，而右侧最中间的两个单元则根据以下图表（及其对称图表）的交换性交换：

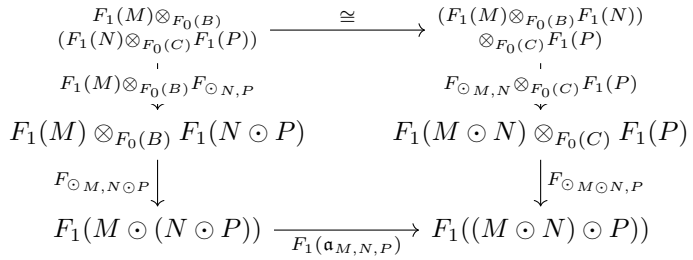


其中最左侧的三角形根据 σ_A 的定义（见图表12）交换，而右下方的单元则由下图的交换性以及余笛卡尔 2-胞腔是满态射这一事实可得：

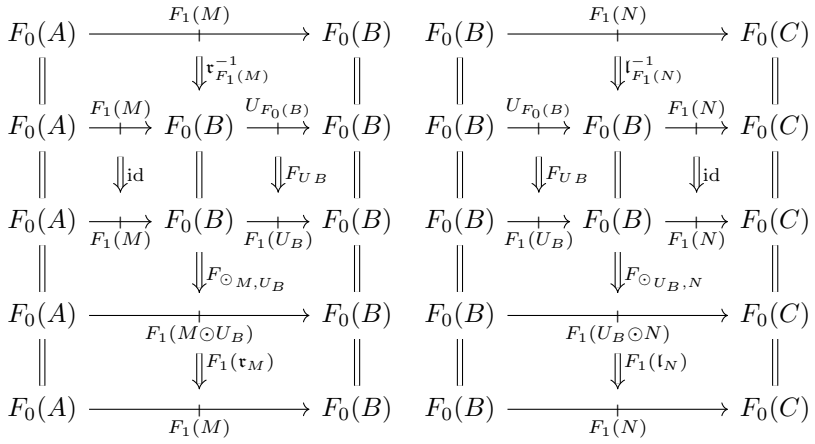


□

最后，只需证明自然变换 $F_{\odot}$ 和 F_U满足 2-函子的通常公理，也就是说，对于所有 1-胞 $M\colon A \nrightarrow B$，$N\colon B \nrightarrow C$ 和 $P\colon C \nrightarrow D$，下图交换：

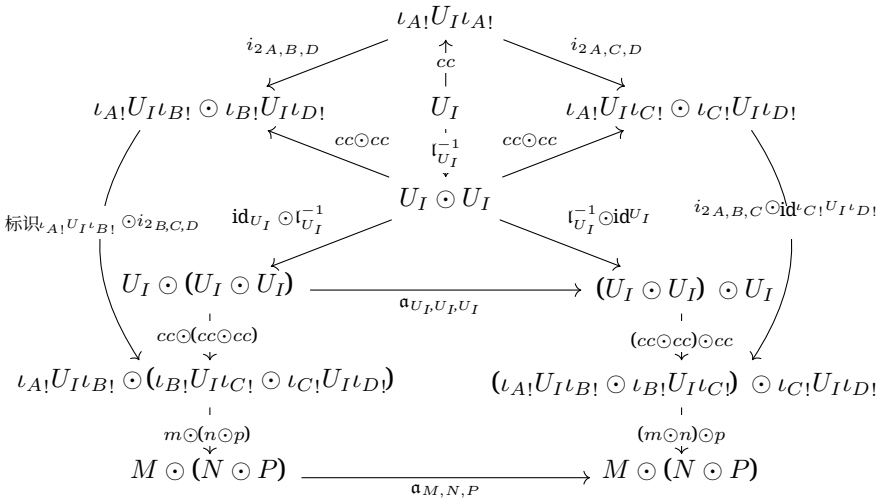


并且以下 2-胞腔都等于 $\mathsf{id}_{F_1(M)}$：

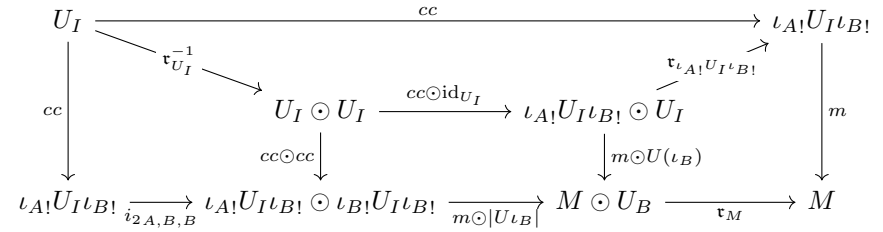


第一个图表的交换性相当于

对于所有元素 $m \in F_1(M)$、 $n \in F_1(N)$ 和 $p \in F_1(P)$，有如下图表：



类似地，对于最左侧的等式（右侧那个的证明是对称性），对所有元素 $m \in F_1(M)$ 考虑如下交换图：



我们刚刚证明了以下定理。

定理 7.47. 设 $\mathbb{A}$ 是一个模状阿贝尔框架双范畴。那么，存在一个框架松弛函子 $F\colon \mathbb{A} \to {}_{\text{端同态环 }(U_I)}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathrm{End}(U_I)}$，使得 F_1 在局部上是一个范畴等价。

根据 [9, 命题 6。8]， F 在同构意义下保持笛卡尔 2-单元。特别地， $\mathbb{A}$和 ${}_{\mathrm{End}(U_I)}\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathrm{End}(U_I)}$ 中的限制函子彼此兼容，正如命题 7.11所述。这意味着在水平方向上， F 是全忠实的：

推论 7.48。 框架松弛函子 F 是水平满且忠实的。

证明。对于任意一对垂直箭头 f, g 和 1-胞腔 M, N（属于 $\mathbb{A}$），我们来证明 F 诱导了从 2-胞腔集合 $\mathbb{A}_{f,g}(M,N)$（属于 $\mathbb{A}$）到集合 $\mathsf{End}(U_I)\mathbb{M}\mathsf{od}_{\mathrm{End}(U_I)}F_0(f)\ F_0(g)(F_1M, F_1N)$ 的双射，该双射记作 T。令 c 和 c' 分别表示笛卡尔2-胞 $M \xrightarrow{c} f^*Ng^*$ 和 $F_1(M) \xrightarrow{c'} F_0(f)^*F_1(N)F_0(g)^*$，

分别。由于 F 保持笛卡尔胞腔， $F_1(c) \cong c'$ 和 $F_1(c)$ 是笛卡尔的。于是，对于所有属于 $\mathbb{A}_{f,\ g}(M,\ N)$ 的 2-胞腔 α，我们有：

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= F_1(|\alpha| \circ c) \\ &= F_1(|\alpha|) \circ F_1(c). \end{aligned}$$

由经笛卡尔映射分解的唯一性，且由于 F_1 是局部完全忠实的（作为范畴的等价），函数 $\alpha \mapsto F_1(|\alpha|) \circ F_1(c)$是一个双射。

□

若要使 F 也保余笛卡尔 2-胞腔， F 就必须是强的，也就是说，必须证明自然变换 F_U 和 $F_\odot$ 同构。

例 7.49. 在 ${}_R\mathbb{M}\mathrm{od}_R$中， $F_\odot$ 和 F_U 分别就是恒等自然变换 $M \odot_B N \Rightarrow M \odot_B N$和 $U_A \Rightarrow U_A$。特别地，它们都是自然同构。

备注 7.50. 第 7.47 节定理的证明7.2 和 7.3 的推导依赖 Gabriel 定理和定理 7.7，该定理说明某些伴随三元组保紧投射生成元。不过，也可以考虑改用 Freyd–Mitchell 定理。回顾定理 7.3的证明概要。由引理7.4可知，Pro 构造具有伪函子性，且保忠实函子；当中间函子忠实时，定理7.7 中的伴随三元组保强生成元。因此，与命题 7.11中一样，可以逐点应用 Freyd–Mitchell 定理:

命题7.51。 设 $\mathbb{A}$ 是一个闭阿贝尔框架双范畴，并设 $f\colon\ A \to C$ 和 $g\colon\ B \to D$ 是垂直箭头，使得局部范畴 $\mathcal{A}(A,B)$ 和$\mathcal{A}(C,D)$ 是小范畴，且沿(f,g) 的限制是忠实的。那么存在一个环同态 $r\colon\ R \to R'$，以及正合完全忠实函子 $\mathcal{A}(A,B) \to {}_R$模 和 $\mathcal{A}(C,D) \to {}_{R'}$模。此构造是伪函子的。

仍有待确定，限制函子的相容条件能否像命题7.11中那样得到；更一般地，Freyd–Mitchell 定理能否用于构造如定理7.47所述的框架函子。

备注 7.52. 这项工作与 [13] 的嵌入定理有些相似。在那篇论文中，Paré 为一种较弱版本的双范畴发展了 Yoneda 理论，其中包括 Yoneda 嵌入：即 [17], 意义下的虚拟双范畴，在这种范畴中，复合可能仅在同构意义下定义。与此相反，我们花了大量篇幅确保嵌入具有严格函子性，因为嵌入的目标是模的具体范畴。尽管如此，Yoneda 嵌入是强的，并且在水平方向上，除了全忠实之外还是稠密的。

CRediT 作者贡献声明

Augustin Albert： 概念化，撰写初稿。**Jérémy Dubut：** 概念化，撰写、审阅与编辑，指导。**Eric Goubault：** 概念化，撰写、审阅与编辑，指导。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

致谢

作者感谢 Eliot Médioni 和 Steve Oudot 在本研究准备期间与他们进行了多次交流。

参考文献

[1] E. Goubault，《并行几何》，博士论文，巴黎综合理工学院（1995年）。[2] M. Grandis，不等价逻辑空间、有向同调与非交换几何。，同调、同伦与应用 6 (1) (2004年) 413–437。网址 http://eudml.org/doc/51971[3] U. Fahrenberg，有向同调，《理论计算机科学电子札记》100 (2004年) 111–125。[4] A. Patchkoria，论同调半模长正合列的正合性，同伦及相关结构杂志 1 (1) (2006年) 229–243。[5] J. Dubut，真实并发几何模型的有向同伦与同调论，博士论文，巴黎-萨克雷大学（2017年）。[6] J. Dubut、E. Goubault、G.-L. Jean，有向同伦假设，载于：第25届欧洲计算机科学逻辑协会计算机科学逻辑年会论文集（CSL'16），莱布尼茨国际信息学会议录第62卷，2016年，第1–16页。[7] J. Dubut、E. Goubault、J. Goubault-Larrecq，自然同调，载于：自动机、语言与编程：第42届国际研讨会，国际自动机、语言与编程研讨会2015年，日本京都，2015年7月6–10日，论文集第二部分42，施普林格，2015年，第171–183页。[8] E. Goubault，有向同调与持久模，《应用与计算拓扑杂志》9 (1) (2025年) 3。

[9] M. A. Shulman，框架双范畴与幺半纤维化，范畴理论与应用 20 (18) (2008年) 650–738。[10] P. Gabriel，不可分解表示 I，数学手稿 6 (1) (1972年) 71–103。[11] B. Mitchell，满嵌入定理，《美国数学杂志》 86 (3) (1964 年) 619–637。[12] M. G. Fluch，阿贝尔范畴中的Künneth公式，硕士学位论文，赫尔辛基大学（2004年）。[13] R. Paré，双范畴的Yoneda 理论，范畴理论与应用 25 (17) (2011年) 436–489。[14] C. Ehresmann，结构化范畴，《巴黎高等师范学院科学年鉴》80 (4) (1963年) 349–426。网址 http://eudml.org/doc/81794[15] M. Grandis、R. Paré，双范畴中的极限，《范畴拓扑与微分几何札记》40 (3) (1999年) 162–220。[16] A. Burroni， t-范畴（三元组中的范畴），《拓扑与微分几何札记》12 (3) (1971年) 215–321。[17] G. Cruttwell、M. Shulman，广义多范畴的统一框架，范畴理论与应用 [仅电子版] 24 （2009年7月）。doi:10.70930/tac/mxocppsl。[18] G. M. Kelly，论Mac Lane关于自然结合性、交换律等相干性的条件，《代数杂志》1 (4) (1964年) 397–402。[19] K. Ponto、M. Shulman，幺半范畴与双范畴中迹的线性性，范畴理论与应用 31 (23) (2016年) 594–689。[20] E. Goubault，定向同伦模（2025年）。arXiv:2504.13838。网址 https://arxiv.org/abs/2504.13838[21] R. J. Wood，抽象pro箭头 I，《拓扑与微分几何札记》23 (3) (1982年) 279–290。[22] R. J. Wood，Pro箭头 II，《范畴拓扑与微分几何札记》26 (2) (1985年) 135–168。[23] C. A. Weibel，《同调代数导论》，剑桥高等数学研究丛书；第38号，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[24] M. Kashiwara、P. Schapira，《范畴与层》，施普林格，2006年。[25]F. Borceux、D. Bourn，Mal’cev、原模、同调与半阿贝尔范畴，第566卷，施普林格科学与商业媒体，2004年。

[26]T. V. der Linden, 《半阿贝尔范畴中的同调与同伦》（2006年）。arXiv:math/0607100。网址 https://arxiv.org/abs/math/0607100[27] E. Goubault, 《有向同调的半阿贝尔方法》, 《应用与计算拓扑学杂志》8（2）（2024年）, 271–299。[28] M. Dupont, 《维数 2 中的阿贝尔范畴》（2008年）。arXiv:0809.1760。网址 https://arxiv.org/abs/0809.1760[29] H. Nakaoka, 《阿贝尔 2-范畴定义的比较》, 《筑波数学杂志》34（2）（2011年）, 173–182。[30] N. S. Rivano, 《坦纳范畴》, 第 265 卷, 施普林格出版社, 1972年。[31] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych、V. Ostrik, 《张量范畴》, 第 205 卷, 美国数学会, 2015年。[32] E. Goubault、E. Médioni, 《非幺环与代数上的同调代数及其在 $(\infty,1)$-范畴中的应用》, 编写中, 预印本可按需索取（2026年）。[33]M. Kashiwara、P. Schapira, 《流形上的层：附简史——Christian Houzel 撰写的《层论的开端》》, 第 292 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2013年。[34] P. Selick, 《同伦论导论》, 第 9 卷, 美国数学会, 1997年。[35] K. Ziemiański, 《预立方集上的有向路径空间 II》, 《应用与计算拓扑学杂志》4（1）（2020年）, 45–78。[36]J. Dubut、E. Goubault、J. Goubault-Larrecq, 《有向同调理论与艾伦伯格–斯廷罗德公理》, 《应用范畴结构》25（5）（2017年）, 775–807。[37] F. Borceux, 《范畴代数手册：基础范畴论》, 第 1 卷, 剑桥大学出版社, 1994年。[38] Q. Yuan, 《生成元》 [在线]（2015年）。[39] G. Călugăreanu、P. Schultz, 《具有阿贝尔自同态环的模》, 《澳大利亚数学会通报》82（1）（2010年）, 99–112。[40] S. Eilenberg、S. MacLane, 《无圈模型》, 《美国数学杂志》75（1）（1953年）, 189–199。[41] A. Dold, 《代数拓扑讲义》, 第 200 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2012年。

A. 无环模型定理

我们回顾著名的无环模型定理的证明 [40] 对于取值于 R-模的链复形中的函子。我们沿用 [41]的表述。

定义 A.1. 一个**带模型的范畴** $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$是一个范畴 $\mathcal{C}$ ，它带有一组特定的对象 $\mathcal{M}$。

定义 A.2 ([41])**.** 函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}(_R\mathrm{Mod})$ 关于模型 $\mathcal{M}$ 是**自由** 的，若存在一个集合 A 以及元素 $M_\alpha \in \mathcal{M}$、 $\alpha \in A$ ，使得对所有 $i \geq 0$ ，在 A 中存在子集 $B^i_\alpha \subseteq F_i(M_\alpha)$、$\alpha$ ，并具有如下性质：对$\mathcal{C}$中的每个对象 X ，下列集合是 $F_i(X)$ 的一个基:

$$\bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{f: M_\alpha \to X} F_i(f)(B^i_\alpha).$$

定义 A.3 ([41])**.** 函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}(_R\mathrm{Mod})$ 关于模型 $\mathcal{M}$是**无环** 的，如果对每个对象 $M \in \mathcal{M}$ 以及每个 $i \geq 1$， $H_i(F(M)) \cong 0$；即同调群除了可能在 0 次之外都是平凡的。

无环模型定理在 [41] 中对阿贝尔群得到证明，且其证明可推广到交换环上的模。

定理 A.4 ([41])**.** 设 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}(_R\mathrm{Mod})$ 是两个函子。假设 F在模型 $\mathcal{M}$ 上自由，且 G 在 $\mathcal{M}$上无环。那么，对于每个自然变换 $\tau_0\colon H_0(F) \to H_0(G)$，都存在一个自然变换 $\tau\colon F \to G$，它在同调上诱导该变换。此外，给定两个诱导相同映射 $H_0(F) \to H_0(G)$的自然变换$F \to G$ ，它们之间存在自然链同伦。

证明思路。 该构造通过归纳进行。对于第一部分，给定$\tau_0\colon H_0(F) \to H_0(G)$，我们定义 $\tau_0\colon F_0 \to G_0$。由于 F是自由的，只需在基元素 $m \in B^0_\alpha$上定义 τ_0 。对于每个这样的 m，选择 $\tau_0(m)$为 $G_0(M_\alpha)$中的任意一个元素，使其同调类等于$\tau_0(m)$，其中 m 是 m的同调类。将 τ_0 线性且自然地延拓。归纳地假设，已对 $k < n$ $(n > 0)$定义了 $\tau_k\colon F_k \to G_k$ ，并且对所有相关的 k， $\partial\tau_k = \tau_{k-1}\partial$ 都成立。要在基元素 $m \in B^n_\alpha$上定义 τ_n ，注意到

$$\partial\tau_{n-1}(\partial m) = \tau_{n-2}(\partial^2 m) = 0.$$

由于 G 是无环的，存在一个元素 $e \in G_n(M_\alpha)$，使得 $\partial e = \tau_{n-1}(\partial m)$。令 $\tau_n(m) = e$。这确保 $\partial\tau_n(m) = \tau_{n-1}(\partial m)$。通过线性且自然地延拓，可得到满足链映射条件的 $\tau_n : F_n \to G_n$ 。第二部分可通过类似的自然同伦归纳构造得到。 □

作为直接推论，若 $\tau, \tau'\colon F \to G$是由无环模型定理构造的两个自然变换，则它们在同调中诱导相同的映射 τ 。此外，若 F 与 G 在某些模型 $\mathcal{M}$ 上均为自由且无环，则自然同构 $H_0(F) \cong H_0(G)$ 诱导自然链同伦等价 $F \simeq G$。

B. 代数定理

我们回顾本文所用的主要代数定理。

定理 B.1 (代数 Mayer–Vietoris 定理 [34,引理 4.1。8])。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{j} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
\cdots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{i'} & B'_n & \xrightarrow{j'} & C'_n & \xrightarrow{\partial} & A'_{n-1} & \xrightarrow{i'} & B'_{n-1} & \xrightarrow{j'} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

设上面的图表是一个行正合的交换图，并假设对于所有 n， $\gamma : C_n \to C'_n$ 都是同构。那么存在一个诱导的长正合列

$$\cdots \to A_n \to B_n \oplus A'_n \to B'_n \xrightarrow{\Delta} A_{n-1} \to B_{n-1} \oplus A'_{n-1} \to B'_{n-1} \to \cdots .$$

定理 B.2 (右正合函子的代数 Künneth 定理 [12, 定理 3。19])。 设 $\mathcal{A}_1$、 $\mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴，且 $t :\ \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ 是一个加性右正合函子，它对第一个变量协变，对第二个变量反变。假设 $\mathcal{A}_1$ 有足够多的投射对象， $\mathcal{A}_2$ 有足够多的内射对象，且 A 有余积。设 X_1 是 A_1 中的一个链复形， X_2 是 A_2 中的一个链复形。令 t_1 表示 t 的第一左导出函子。考虑以下条件，记为 ***C1***：同态

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &: t(B(X_1), H(X_2)) \to Ht(B(X_1), X_2) \\
\alpha_2 &: t(Z(X_1), H(X_2)) \to Ht(Z(X_1), X_2)
\end{aligned}$$

是同构，并且我们有 $t_1(B(X_1)\ X_2)\ = 0 = t_1(Z(X_1)\ H(X_2))$。那么，若条件 ***C1*** 成立，则存在一个次数为 -1 的同态 β ，使得下列序列正合。

$$0 \to t(H(X_1), H(X_2)) \xrightarrow{\alpha} Ht(X_1, X_2) \xrightarrow{\beta} t_1(H(X_1), H(X_2)) \to 0$$

命题 B.3 ([12, 命题 4.1])。 设 t 为右正合，并假设$\mathcal{A}_1$ 有投射对象且 $\mathcal{A}_2$ 有内射对象。设 X_1 为 $\mathcal{A}_1$ 中的一个链复形， X_2 为 $\mathcal{A}_2$ 中的一个链复形，使得

$$\begin{aligned}
t_1(B(X_1), B(X_2)) &= 0 = t_1(B(X_1), H(X_2)) \\
t_1(Z(X_1), B(X_2)) &= 0 = t_1(Z(X_1), H(X_2))
\end{aligned}$$

那么条件 ***C1*** 成立。