arXiv:2602.04429v1 [math.PR] 4 Feb 2026

重尾无序下的无序系统与（次临界）多项式混沌

GASPARD GOMEZ

摘要。我们研究受随机环境扰动的离散统计力学系统，其中随机环境不存在有限二阶矩。具体而言，我们考虑尾部分布满足 $\mathbb{P}[\omega > x] \sim x^{-\gamma}$ as $x \to +\infty$ for some $\gamma \in (1, 2)$ 的随机环境。受 Caravenna、Sun 和 Zygouras 的开创性工作 [CSZ16a], 启发，我们采用一个通用框架，其关键示例包括无序钉扎模型和长程定向聚合物模型。我们给出一个亚临界性条件，并在该条件下证明离散无序系统具有非平凡的标度极限。我们还从不含二阶矩的广义 Harris 判据角度阐释这一亚临界性条件，该判据根据系统参数预测无序相关性。我们的分析基于对独立重尾随机变量的多重线性多项式的研究，这类对象称为多项式混沌；其连续类比则是相对于 γ-稳定莱维白噪声的多重积分。我们发展了适用于重尾情形的精确而灵活的矩估计。

目录

1. 引言与结果介绍 1 2. 主要结果：重尾无序下的多项式混沌 8 3. 特定统计力学模型的应用 15 4. 混沌的重要 L^p 估计 21 5. 多重 Lévy 积分与多项式混沌的标度极限 29 6. 无序吉布斯测度的收敛与无序相关性 33 7. 无序钉扎模型的证明 35 8. 长程定向聚合物的证明 39 附录 A. Lévy 噪声与泊松收敛 44 附录 B. 关于齐次配分函数 46 参考文献 49

1. 引言与结果介绍

本文研究定义在格点上的、受到外部随机场扰动的统计力学模型。我们的工作重点是在所谓的中间无序区间内，研究这类无序系统的标度极限。我们所采用的方法在很大程度上受到 Caravenna、Sun 和 Zygouras 在 [CSZ16a]中的工作的启发。他们的工作聚焦于扰动属于高斯白噪声吸引域的情形，其技术高度依赖于 L^2计算。

相反，我们将关注这样一种环境：它属于（γ-稳定）Lévy 白噪声的吸引域。在这种情况下，L^2 计算不可用，因此我们需要为 $p \in (1, 2)$发展灵活的 L^p估计。我们得出了无序系统亚临界性的一个一般判据，并证明这类系统具有非平凡的标度极限。这是对 [BL21；BL22；BCL23] 中所述结果的推广；那些工作聚焦于一种被称为随机环境中的定向聚合物的特定模型。按照 [CSZ16a，第 1.3], 节的思路，它也可以被视为重尾无序情形下无序相关性的一个判据；这一问题例如曾在 [LS17] 中针对

无序钉扎模型进行研究。随后，我们将一般结果应用于若干统计力学模型，例如无序钉扎模型或长程定向聚合物模型。

1.1. 设定与基本记号。我们的研究对象是无序系统，它由两部分组成：一个受到随机环境（亦称无序）扰动的（均匀）参考模型。现在我们介绍所采用的一般框架，并给出几个贯穿全文的例子。

1.1.1. 关于参考模型。首先介绍之后将受到扰动的均匀模型。可以将它看作某个缩放对象的分布，而该对象已得到充分理解。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ 为一个有界开集，其中 D 为环境空间的维数。对每个$\delta > 0$，考虑 Ω 的一个离散化 Ω_δ。设 d_{eff} 为该离散化的有效维数，即满足以下条件的唯一实数 d_{eff}：对 Ω 上的任意检验函数 f，

$$\delta^{d_{\mathrm{eff}}} \sum_{x \in \Omega_\delta} f(x) \xrightarrow{\delta \downarrow 0} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x\,. \tag{1.1}$$

注意，d_{eff} 可能不同于环境维数 D（参见下文第3节中的例子）。假设在$\{0,1\}^{\Omega_\delta}$上给定一个参考概率测度 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$，它描述了场 $(\sigma_x)_{x\in\Omega_\delta}$。分布 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$称为均匀模型。

例1（更新过程与钉扎模型）。令 $\tau = (\tau_k)_{k\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的更新过程，其间隔分布为 $\mathrm{P}(\tau_1 = n) \sim c_0 n^{-(1+\alpha)}$，其中 $n \to \infty$，对某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立。换言之，$\tau_0 = 0$，且 $(\tau_i - \tau_{i-1})_{i\geq 1}$ 是取值于 $\mathbb{N}$ 的独立同分布随机变量；稍微滥用一下记号，我们也将更新过程 τ 视为 $\mathbb{N}$ 的子集。于是，维数为 $D = 1$，并取 $\Omega = (0,1)$。令 $\Omega_\delta = (\delta\mathbb{Z}) \cap \Omega$，其中我们设定了 $\delta = \frac{1}{N}$，$N \in \mathbb{N}$ 表示系统的长度。这里，离散化的有效维数为 $d_{\mathrm{eff}} = 1 = D$。

对于 $x \in \Omega_\delta$，我们可以定义 $\sigma_x = \mathbb{1}_{\{xN\in\tau\}}$，并考虑 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$ 为随机场 $(\mathbb{1}_{\tau_\delta}(x))_{x\in\Omega_\delta}$ 的分布，其中 $\tau_\delta = (\delta\tau) \cap \Omega$。于是，$\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$ 的分布在 $\delta \downarrow 0$ 时有一个标度极限，该极限是 α-稳定再生集的分布（例如参见 [Gia07，附录 A.5.4] 以及下文第 3.1 节）。

尽管我们假设区域 Ω 有界（这一假设发挥着重要作用，参见定理 2.3 后的注释），但我们的结果可以推广到若干定义在无界区域上的模型，例如随机游走。

例2（长程随机游走）。设 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ 上的随机游走，其增量独立同分布，且属于某个 α 稳定分布（$0, 2]$）的（严格）吸引域；换言之，假设 $(n^{-1/\alpha} S_n)_{n\geq 0}$ 依分布收敛于某个 d 维 α 稳定分布。在这种情况下，我们取 $D = 1 + d$，并令 $\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}^d$。于是，当 $N \in \mathbb{N}$ 足够大时，令网格尺寸为 $\delta = \frac{1}{N}$，并考虑离散化 $\Omega_\delta = \big((\delta\mathbb{Z}) \times (\delta^{1/\alpha}\mathbb{Z}^d)\big) \cap \Omega$。这里，离散化的有效维数为 $d_{\mathrm{eff}} = 1 + \frac{d}{\alpha}$，与 $D = 1 + d$ 不同。

于是，对于 $x = (t,u) \in \Omega_\delta$，定义 $\sigma_x = \mathbb{1}_{\{S_{tN} = uN^{1/\alpha}\}}$，使得截至时间 N 的时空随机游走轨迹可通过其在 $\{0,1\}^{\Omega_\delta}$ 中的占据场来诠释。因此，我们将 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$定义为随机场 $(\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\delta}(x))_{x\in\Omega_\delta}$ 的分布，其中 $\mathcal{A}_\delta = \{(\frac{n}{N}, \frac{S_n}{N^{1/\alpha}})\}_{1\leqslant n\leqslant N}$。当 $\delta \downarrow 0$ 时，分布 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$ 存在一个标度极限，它是随机场 $(\mathbb{1}_{\mathbf{A}}(x))_{x\in\Omega}$ 的分布，其中 $\mathbf{A} = \{(t, X_t)\}_{t\geqslant 0}$，且 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个 α-稳定 Lévy 过程（当 $\alpha = 2$ 时为布朗运动）。

1.1.2. 引入无序。令 $\omega = (\omega_x)_{x\in\Omega_\delta}$ 为独立同分布的中心化随机变量，使得 $\omega_x > -1$几乎必然成立（作此选择的原因将在下文几行中明确）。其分布记为 P，关于 ω 的期望记为 E。根据上下文，ω 既可以表示一个与 ω_x 具有相同分布的任意随机变量，也可以表示完整的环境 $(\omega_x)_{x\in\Omega_\delta}$，并将其称为无序。我们强调，$\omega$ 的随机性不同于均匀模型 σ的随机性；事实上，我们假设 ω 与 σ 相互独立。

给定 $\beta \in [0,1]$ （无序强度）以及 ω的一个淬火实现，我们如下定义场 $\sigma = (\sigma_x)_{x\in\Omega_\delta}$ 的无序概率测度 $\mathrm{P}^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$： 将其视为 $\mathrm{P}^{\mathrm{ref}}_{\delta}$的吉布斯修正：

$$\mathrm{P}^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}(\mathrm{d}\sigma) := \frac{1}{Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}} \prod_{x\in\Omega_\delta} (1+\beta\omega_x\sigma_x)\ \mathrm{P}^{\mathrm{ref}}_{\delta}(\mathrm{d}\sigma). \tag{1.2}$$

使 $Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$ 成为概率测度的归一化常数称为划分函数，定义如下

$$Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta} := \mathrm{E}^{\mathrm{ref}}_{\delta}\Big[\prod_{x\in\Omega_\delta}(1+\beta\omega_x\sigma_x)\Big]. \tag{1.3}$$

我们将 $\mathrm{P}^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$ 称为无序系统。要求 $\beta \leqslant 1$ 的唯一原因是确保 $\mathrm{P}^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$ 相对于 $\mathrm{P}^{\mathrm{ref}}_{\delta}$的密度为正（回顾一下，我们假设 $\omega > -1$ 几乎处处成立）。

例3 （无序钉扎模型）。回到例1，该模型的无序版本称为缺陷线上的无序钉扎模型。我们将在下文第3.1节更深入地讨论这个例子；全面的参考文献见 [Gia07；Gia11] 。

例4 （长程定向聚合物）。至于例2，基于（长程）随机游走的无序系统称为（长程）定向聚合物模型。我们将在下文第3.2节更深入地讨论这个例子；有关定向聚合物模型的全面综述，请参阅 [Com17]。

注 1.1 （乘积权重与指数权重）。 熟悉无序系统的读者或许会对我们定义无序概率测度的方式略感意外。通常，吉布斯权重确实写成指数形式 $\exp(\beta\sum_{x\in\Omega_\delta}\tilde{\omega}_x\sigma_x)$。首先要强调的是，对于固定的 β，只需作变量变换 $\omega = \frac{1}{\beta}(\mathrm{e}^{\beta\tilde{\omega}}-1)$，两者便相同。我们之所以作此选择，有几个原因。最明显的原因无疑是，乘积形式便于直接进行多项式混沌展开[1]，，如下文第 *1.2* 节所述：尤其是，展开中的相关变量是 ω，而不是 $\tilde{\omega}$。考虑乘积形式的另一个原因是，对于重尾随机变量，指数形式会过分强调 $\tilde{\omega}$ 的较大取值，而且$\mathrm{e}^{\beta\tilde{\omega}}$ 的尾部会随 β 而变化；特别是，经过重标度后， ω 具有标度极限，而$\mathrm{e}^{\beta\tilde{\omega}}$ 则永远没有标度极限。因此， *[LS17]* 以及之后的 *[BL21]* 采用了乘积形式的随机扰动（关于这一选择的更多动机，尤其请参见 *[BL21]* 中的注 *1.2*）。事实上，在研究无序系统与随机偏微分方程之间的关系时，乘积形式最为自然，见下文第 *3.1.3–3.2.3* 节。

本文探讨的问题是：当取 $\beta = \beta_\delta \downarrow 0$ 并使其处于某个适当的标度窗口（称为中间无序区间）时，无序系统在极限 $\delta \downarrow 0$ 下的标度极限。

1.2. L 情形下的中间无序：简要概述。为便于理解，在介绍我们关于重尾随机变量和 Lévy 白噪声的主要结果之前，我们先简要介绍并讨论随机变量 ω 具有有限 L^2 阶矩的情形。本节重述了 [CSZ16a] 第 1.2 节中的启发式论述，并借此引入一些重要的记号和思想，尤其是次临界多项式混沌这一概念。不失一般性，本节假设 $\mathrm{E}[\omega^2] = 1$。

讨论的出发点是配分函数的多项式混沌展开。这有助于从启发式角度明确我们所说的亚临界区间、均匀系统应满足的假设，以及无序系统的标度极限应为何种形式。现在让我们聚焦于

[1]请注意，这种乘积形式最初由 [HH85] 采用；他们提出了定向聚合物模型。它也明确出现在开创性工作 [AKQ14]，中（见公式（4）），作为考察定向聚合物模型的中间无序标度极限时的中间步骤。

目前的配分函数 $Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$（1.3）中的配分函数。展开乘积 $\prod_{x\in\Omega_\delta}(1+\beta\omega_x\sigma_x)$ 并取期望可得

$$Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta} = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\beta^k \sum_{\{x_1,\dots,x_k\}\subset\Omega_\delta} \mathrm{E}^{\mathrm{ref}}_\delta\Big[\prod_{j=1}^k \sigma_{x_j}\Big]\prod_{j=1}^k \omega_{x_j}\,. \tag{1.4}$$

在这个展开式中，注意到均匀系统的 k 点相关函数会出现。由于均匀系统具有标度极限，自然地（且上述示例中的系统确实满足这一点），我们假设相关函数本身也具有标度极限。更确切地说，定义 $x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta$ and $\lambda\in(0,+\infty)$,

$$\psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k) := (\delta^{-\lambda})^k\ \mathrm{E}^{\mathrm{ref}}_\delta\Big[\prod_{j=1}^k \sigma_{x_j}\Big], \tag{1.5}$$

按照约定，在对角线上令 $\psi^{(k)}{}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k) = 0$，*i.e.* 即当 x_i 不互异时。接着，我们假设标度指数 λ 满足：对每个 $k\geqslant 1$,

$$\psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k) \xrightarrow{\delta\downarrow 0} \boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\dots,x_k)\,, \tag{1.6}$$

对于某个非平凡函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_\Omega$，将其解释为参考模型标度极限的 k 点相关函数；我们还令 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_\Omega = 0$ 在对角线上。暂且，我们有意不明确说明收敛 (1.6) 的确切含义。

例5 (钉扎模型)。对于例1中的钉扎模型，我们有 $\psi^{(k)}{}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k) = \prod_{i=1}^k \mathrm{P}((x_i - x_{i-1})N\in\tau)$，对任意 $0<x_1<\cdots<x_k<1$ 均成立，约定 $x_0=0$。因此，借助 [Don97],，式 (1.6) 在 $\lambda = 1-\alpha$ 下成立，且 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_\Omega(x_1,\dots,x_k) = \prod_{i=1}^k (x_i - x_{i-1})^{\alpha-1}$。

例6 (长程定向聚合物)。对于例2中的长程定向聚合物，我们有 $\psi^{(k)}{}_{\Omega_\delta}((t_1,u_1)\dots,(t_k,u_k)) = \prod_{i=1}^k \mathrm{P}(S_{(t_i-t_{i-1})N} = (u_i-u_{i-1})N^{1/\gamma})$，对任意 $0<t_1<\cdots<t_k<1$ 均成立，约定 $t_0=0$, $x_0=0$。然后，根据局部极限定理，式 (1.6) 在 $\lambda = \frac{d}{\alpha}$ 下成立，且 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_\Omega(x_1,\dots,x_k) = \prod_{i=1}^k \rho_{t_i-t_{i-1}}(u_i-u_{i-1})$，其中 $\rho_t(u)$ 是极限 α-稳定 Lévy 过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的转移密度。

根据定义 (1.5)，并利用 k 点相关函数的对称性，我们可以将配分函数改写为

$$Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta} = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}(\beta\delta^\lambda)^k \sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta} \psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k \omega_{x_j}. \tag{1.7}$$

现在可以计算 $Z^{\omega,\beta}{}_{\Omega_\delta}$ 的 L^2 阶矩。注意，在 1.7 中，项 $\prod_{i=1}^k \omega_{x_i}$ 和 $\prod_{j=1}^l \omega_{y_j}$ 在 L^2 中正交，除非集合 $\{x_1,\dots,x_k\}$ 和 $\{y_1,\dots,y_l\}$ 相同。因此，

$$\mathbb{E}\big[(Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta})^2\big] = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}(\beta\delta^\lambda)^{2k} \sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta} \psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k)^2\,.$$

那么，至少从启发式角度看，对于每个 $k\geqslant 0$,

$$\sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta} \psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k)^2 \approx \delta^{-kd_{\mathrm{eff}}}\int_{\Omega^k} \boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\dots,x_k)^2\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_k\,,$$

回顾一下，d_{eff} 是离散化 Ω_δ 的有效维数，见 (1.1)。由此得到

$$\mathbb{E}\big[(Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta})^2\big] \approx 1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\left(\beta\,\delta^{\lambda - d_{\mathrm{eff}}/2}\right)^{2k}\int_{\Omega^k} \boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\dots,x_k)^2\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_k. \tag{1.8}$$

现在，需要区分两种情形：

(i) 若 $d_{\mathrm{eff}}/2-\lambda<0$。对于足够小的 β，可以证明 $Z^{\omega,\,\beta\,\Omega_\delta}$ 具有一致有界的L^2矩。在这种情况下，任何弱无序极限（$\beta=\beta_\delta\downarrow 0$）都是平凡的，且无序是无关的（在 [CSZ16a，§1.3]的意义下）。我们也将此情形称为超临界，因为混沌展开（1.8）中的各项随 k增长；它也对应于积分$\int_{\Omega^k}\overset{\circ}{\boldsymbol{\psi}}{}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\ldots,x_k)^2\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$发散的情形。

(ii) 若 $d_{\mathrm{eff}}/2-\lambda>0$。特别地，对于固定的 $\beta>0$，$Z^{\omega,\beta\,\Omega_\delta}$ 的 L^2 阶矩发散。人们或许可以对 $\beta=\beta_\delta\downarrow 0$ 进行适当的标度，从而得到非平凡的标度极限，并使无序具有相关性（其含义见 [CSZ16a, §1.3]）。我们也将此情形称为次临界，因为混沌展开（1.8）中的各项随 k趋于零；这也对应于积分$\int_{\Omega^k}\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\ldots,x_k)^2\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$收敛的情形。

这种情形划分与无序相关性的哈里斯判据有关；我们将在下文第1.5节再讨论这一点。我们不提及满足 $\lambda=\frac{d_{\mathrm{eff}}}{2}$ 的边缘情形，因为这不是本文的重点。相反，关于这一情形的详尽讨论，请参阅 [CSZ17]；关于边缘相关情形近期进展的综述，请参阅 [Zyg24; CSZ25]。

假设我们处于次临界（无序相关）情形，即 $\lambda<d_{\mathrm{eff}}/2$。由 (1.8)，我们可以确定正确的中间无序区间。事实上，若将 $\beta=\beta_\delta\downarrow 0$ 按 $\delta\downarrow 0$缩放，使得

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\beta_\delta\,\delta^{d_{\mathrm{eff}}/2-\lambda}=\hat{\beta}\in[0,\infty)\,, \tag{1.9}$$

那么我们得到 $\mathrm{E}[(Z^{\omega,\,\beta\Omega_\delta})^2]\approx 1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{\hat{\beta}^{2k}}{k!}\int_{\Omega^k}\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\ldots,x_k)^2\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$。因此，对 k 点相关函数作出如下假设是非常自然的：

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{\hat{\beta}^{2k}}{k!}\int_{\Omega^k}\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\Omega}(x_1,\ldots,x_k)^2\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k<+\infty. \tag{1.10}$$

这是 [CSZ16a 定理 2.3]，的主要假设（其表述略微不那么一般），定理的结论是 $Z^{\omega,\,\beta\,\Omega_\delta}$ 在 $\delta\to 0$ 时依分布收敛。我们将把极限的精确定义推迟到第 2 节，届时会将其与我们得到的结果进行比较。

1.3. 重尾无序的情形：亚临界性与无序相关性。 从现在起，我们关注尾部分布呈幂律衰减的环境 ω。更准确地说，假设 $\mathrm{E}[\omega]=0$，且存在 $\gamma\in(1,2)$ 和常数 C_0，使得

$$\mathbb{P}[\omega>t]\sim C_0t^{-\gamma}\,,\qquad \text{as } t\to+\infty\,. \tag{1.11}$$

由所谓的层蛋糕表示可知，这意味着 ω 具有有限期望和无限方差。我们也可以考虑稍微更一般的一类环境，允许 ω 的尾部包含缓变函数。一般设定将在第 2.2 节中介绍（见 (2.11)）。在本引言中，出于教学目的，我们仅考虑纯幂尾 (1.11)。

现在，让我们像在 L^2 情形中那样，确定亚临界区间和中间无序窗口。我们沿用 (1.5) 中引入的重标度相关函数的记号。我们无法再计算划分函数的 L^2 阶矩，转而使用环境的标度极限。定义离散噪声如下

$$\zeta_\delta:=\delta^{d_{\mathrm{eff}}/\gamma}\sum_{x\in\Omega_\delta}\omega_x\delta_x. \tag{1.12}$$

在假设 (1.11) 下，当 $\delta\downarrow 0$, ζ_δ 收敛于（某个特定的索об列夫空间中的）γ-稳定莱维白噪声 ζ 时，ζ 是一种随机分布，相当于非 L^2 情形下的高斯白噪声。我们将在下文给出更精确的描述，见第 2.1 节；详情另见附录 A.2。

使用上述记号，我们可以将配分函数改写如下（回顾 (1.7)）：

$$
\begin{aligned}
Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta} &= 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!} \left(\beta \delta^{\lambda - d_{\mathrm{eff}}/\gamma}\right)^k \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} \psi_{\Omega_\delta}^{(k)}(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^k \left(\delta^{d_{\mathrm{eff}}/\gamma} \omega_{x_j}\right) \\
&= 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!} \left(\beta \delta^{\lambda - d_{\mathrm{eff}}/\gamma}\right)^k \int_{\Omega^k} \overline{\psi}_{\Omega_\delta}^{(k)}(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^k \zeta_\delta(\mathrm{d}x_j),
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

其中，$\overline{\psi}^{(k)}{}_{\Omega_\delta}$ 表示将 $\psi^{(k)}{}_{\Omega_\delta}$ 延拓至 Ω^k所得的分段常值延拓。由此可清楚看出，亚临界性或超临界性（也可理解为无序相关性或无关性）取决于 $\lambda > d_{\mathrm{eff}}/\gamma$ 还是 $\lambda < d_{\mathrm{eff}}/\gamma$。此外，类比 L^2 情形下的 (1.9)，中间无序区间现在对应于

$$
\lim_{\delta \downarrow 0} \beta_\delta \, \delta^{d_{\mathrm{eff}}/\gamma - \lambda} = \hat{\beta} \in [0, \infty) \,. \tag{1.14}
$$

总的来说，重标度配分函数的极限显然应为表达式 (1.13)，其中 $\psi^{(k)}{}_{\Omega_\delta}$和 ζ_δ 分别由其极限 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 替代。然而，先不论可求和性问题，求和式中出现的迭代积分本身的含义并不明确：事实上，$\boldsymbol{\zeta}$ 属于某个负 Sobolev 空间，而相关函数可能过于奇异。

1.4. 主要结果概述。 现在我们简要介绍主要结果，以概述本文的研究范围。对于某些定义，我们有意不作详述，因为这需要引入更多记号；关于结果的完整陈述，请参见下文第 2 节。

首先，我们证明，在连续统k点相关函数满足适当的（次临界）可积性条件下，候选标度极限是良定义的。

定理 1.2（连续配分函数的适定性）。设 $\boldsymbol{\zeta}$ 为具有 $\gamma \in$（1、2）的 γ-稳定莱维白噪声。假设存在某个 $q \in$（γ、2]，使得对每个 $C \geqslant 0$,

$$
\sum_{k \geq 1} C^k \|\boldsymbol{\psi}^{(k)}\|_q < +\infty \,, \tag{1.15}
$$

其中，$\|\cdot\|_q$ 表示对称的 L^q-范数（见下文的定义（2.4））。那么，对于每个 L^q），连续统配分函数

$$
\mathcal{Z}_\Omega^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}} = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\hat{\beta}^k}{k!} \int_{\Omega^k} \boldsymbol{\psi}^{(k)}(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^k \boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}x_j) \tag{1.16}
$$

是 $\mathbb{L}^p$ 中的一个良定义（且非退化的）$\boldsymbol{\zeta}$-可测随机变量。

我们的第二个结果是，在适当的次临界条件下，中间无序状态（1.14）中的配分函数极限就是定理 1.2 中构造的随机变量。

定理 1.3（中间无序极限）。假设噪声 ω 是中心化的，且其尾部分布由（1.11）给出，其中 $\gamma \in$（1、2）。另假设存在某个 $q \in$（γ、2]，使得相关函数（$\psi_\delta^{(k)}$）$_{k \geq 1}$ 满足以下条件：

(i) 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在某个连续的 k 点相关函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$，使得 $\qquad at$

$$
\lim_{\delta \downarrow 0} \left\| \overline{\psi}_\delta^{(k)} - \boldsymbol{\psi}^{(k)} \right\|_q = 0 \,;
$$

(ii) 验证以下一致可积条件：对每个 $C > 0$,

$$
\limsup_{\delta \downarrow 0} \sum_{k \geqslant 0} C^k \|\overline{\psi}_\delta^{(k)}\|_q < +\infty \quad \textit{and} \quad \lim_{M \to +\infty} \limsup_{\delta \downarrow 0} \sum_{k > M} C^k \|\overline{\psi}_\delta^{(k)}\|_q = 0.
$$

那么，在次临界条件 $\lambda < \frac{d_{\mathrm{eff}}}{\gamma}$ 下，处于(1.14)的中间无序区间，即如果$\lim_{\delta\downarrow 0}\beta_\delta\delta^{d_{\mathrm{eff}}/\gamma-\lambda}=\hat{}\beta\in[0,\infty)$，则有如下依分布收敛：

$$Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}\xrightarrow{(d)}\mathcal{Z}_{\Omega}^{\zeta,\hat{\beta}},$$

其中$Z^{\zeta,\beta}\Omega$定义于(1.16)，且 $\zeta=\lim_{\delta\downarrow 0}\zeta_\delta$ 为 γ-稳定莱维白噪声。

特别地，这些结果可应用于无序钉扎模型与定向聚合物模型。我们将在第3节详细展开这两个例子，但先简要概述所得结果。特别地，在亚临界区间 $\lambda<\frac{d_{\mathrm{eff}}}{\gamma}$ 中，除无序配分函数的收敛外，我们还证明无序吉布斯测度收敛到其连续对应物。它们类似于 [BL21; BL22] 关于定向聚合物模型的结果。

1.4.1. 关于钉扎模型。对于例1与例3中的无序钉扎模型，我们证明如下。精确（且略为更一般）的陈述见定理3.1–3.3。

定理1.4。设 $\alpha>1-\frac{1}{\gamma}$ 例*1*中且 $\beta_\delta\downarrow 0$ 满足 $\lim_{\delta\downarrow 0}\beta_\delta\delta^{\alpha-1+\frac{1}{\gamma}}=\hat{}\beta\in(0,\infty)$。则无序配分函数依分布收敛如下

$$Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{(d)}\mathcal{Z}_{\Omega}^{\zeta,\hat{\beta}},$$

其中$^{\beta}Z^{\zeta,}$上的 a ζ -可测非退化随机变量，可表示为多项式混沌 (1.16)，其中 $\zeta=\lim_{\delta\downarrow 0}\zeta_\delta$ a γ-稳定 *Lévy* 白噪声定义在 $\Omega=(0,1)$上。

此外，在 $(0,1)$ 的闭子集空间 C_∞ 上（赋予 *Matheron* 拓扑），存在一个（无序的）连续测度 $\mathbf{Q}_0^{\zeta,\beta}$，使得其依分布收敛如下[2]：

$$\mathrm{P}_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta}\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{(d)}\mathbf{Q}_0^{\zeta,\hat{\beta}}.$$

无序测度 $\mathbf{Q}_0^{\zeta,\beta}$，被称为具有 γ-稳定 *Lévy* 噪声的连续定向钉扎模型。特别地，定理1.4证实了 [BL22, §2.5.3-(B)]中提出的猜想，该猜想也在 [BL21, §2.2] 中被提及（注意，在 [BL21 中，α 和 γ 的角色互换；BL22]）。我们的证明建立在 [FL], 的最新结果之上，其中也研究了随机测度 $\mathbf{Q}_0^{\zeta,\beta}$。

1.4.2. 对于（长程）定向聚合物模型。对于例2和例4中的长程定向聚合物模型，我们证明如下结果。精确表述请参见定理 3.5-3.6。

定理 1.5。假设 $\frac{\alpha}{d}>\gamma-1$ 属于例*2*，并且 $\beta_\delta\downarrow 0$ 满足$\lim_{\delta\downarrow 0}\beta_\delta\delta^{\frac{1}{\alpha\gamma}(\alpha-d(\gamma-1))}=\hat{}\beta\in(0,\infty)$。则对于无序配分函数，有如下依分布收敛

$$Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{(d)}\mathcal{Z}_{\Omega}^{\zeta,\hat{\beta}},$$

其中$^{\beta}Z^{\zeta,}a$ $\hat{\zeta}$ -可测的非退化随机变量，可表示为多项式混沌(1.16)，其中 $\zeta=\lim_{\delta\downarrow 0}\zeta_\delta$ a γ-稳定 *Lévy* 白噪声定义在$\Omega=(0,1)\times\mathbb{R}^d$上。

此外，存在一个（无序）连续测度$\mathbf{Q}^{\zeta,\beta}$定义在 $D([0,1],\mathbb{R}^d)$ 上的函数空间上，其中函数取值于 $\mathbb{R}^d$（赋予 *Skorokhod* 拓扑），使得有如下依分布收敛[3]：

$$\mathrm{P}_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta}\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{(d)}\mathbf{Q}^{\zeta,\hat{\beta}}.$$

无序测度 $\mathbf{Q}^{\zeta,\beta}$ 称为带有 γ-稳定 *Lévy*噪声的连续统长程聚合物模型。特别地，定理 1.5 证明了 [BL22, §2.5.3-(A)] 中的猜想，该猜想也在 [BL21, §2.2] 中提及（同样地，[BL21; BL22]中 α 和 γ 的作用是颠倒的）。

[2]赋予弱拓扑的$\mathcal{M}_1(\mathcal{C}_\infty)$上的概率分布。[3]赋予弱拓扑的$\mathcal{M}_1(\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}^d))$上的$\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$概率分布。

1.5. 无序相关性与无二阶矩情形下的哈里斯判据。如上所述，我们得到的各种情形之间的分界与 [Har74]提出的哈里斯判据相关。若无序强度 β 足够小，无序系统与均匀系统具有相同特征，则称无序无关；若对于任意无序强度 $\beta > 0$，无序系统都与均匀系统大不相同，则称无序相关。哈里斯判据 [Har74] 指出，对于具有有限二阶矩的随机环境，可以通过均匀系统的关联长度指数 ν 来预测无序相关性或无关性；需要强调的是， k-点关联指数 λ 应与 ν 满足关系 $\nu = \frac{1}{d_{\mathrm{eff}} - \lambda}$（关于此问题的讨论，见 [CSZ16a, 第1节.3] ）。

更确切地说，哈里斯的预测指出，在 L^2 情形下，若 $d_{\mathrm{eff}}\nu > 2$（即 若 $\lambda < \frac{d_{\mathrm{eff}}}{2}$），则无序应当无关；若 $d_{\mathrm{eff}}\nu < 2$（即 若 $\lambda < \frac{d_{\mathrm{eff}}}{2}$），则无序相关；剩余情形 $\nu d_{\mathrm{eff}} = 2$ 称为边缘情形，无序相关性应取决于模型更精细的性质。这与上文所述 L^2 情形下超临界性／亚临界性的二分恰好对应：特别是，当无序系统存在非平凡的、即有无序的标度极限时，无序相关。

哈里斯判据是针对具有有限方差的独立同分布无序提出的，在重尾情形 (1.11) 下则不再成立。在这种情况下，我们回顾一下，亚临界性对应于 $\lambda < \frac{d_{\mathrm{eff}}}{\gamma}$，超临界性对应于 $\lambda > \frac{d_{\mathrm{eff}}}{\gamma}$（见 (1.13) 及其后的讨论）。因此，我们得到以下判据:

$$\text{disorder is } \begin{cases} \textit{relevant} & \text{if } d_{\mathrm{eff}}\nu < \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \qquad (\lambda < \frac{d_{\mathrm{eff}}}{\gamma}), \\ \textit{irrelevant} & \text{if } d_{\mathrm{eff}}\nu > \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \qquad (\lambda > \frac{d_{\mathrm{eff}}}{\gamma}). \end{cases} \tag{1.17}$$

这一判据已在 [LS17]中针对例3的无序钉扎模型情形得到确立（关于边缘情形，另见 [Lac17]），或在 [Viv21]中针对例4的定向聚合物模型（采用简单随机游走，因而特别地 $\alpha = 2$）得到确立。就无序标度极限的构造而言，仅定向聚合物的情形（同样采用简单随机游走）已在 [BL21], 中于次临界条件 $\lambda < 1 + \frac{d}{2}$ 下得到处理。

我们的主要结果在非常广泛的背景下为判据(1.17)奠定了严格基础。关于不同例子的更详尽讨论，请参见下文第3节。

2. 主要结果：具有重尾无序的多项式混沌

在本节中，我们正式陈述主要结果，并引入所需的全部记号。请注意，一旦如(1.13)-(1.16)所述，我们所处理的问题更为一般，涉及在某种亚临界性条件下具有渐近莱维噪声的多项式混沌的标度极限问题。因此，我们首先在第 2.1 节中定义亚临界性条件下带有 γ-稳定莱维白噪声的连续多项式混沌。随后，我们在第 2.2 节中陈述具有重尾随机变量的离散多项式混沌向其连续对应物的收敛。然后，在第 2.3 节中，我们回到最初的动机，并在无序统计力学系统的标度极限背景下陈述我们的结果：我们给出配分函数与无序吉布斯测度收敛的条件，并进一步讨论其他性质。

2.1. 带有 Lévy 白噪声的连续多项式混沌。

2.1.1. *Lévy* 噪声与连续多项式混沌的截断近似。 首先，让我们给出 Ω 上 Lévy 白噪声 ζ 的精确定义。设 Λ 是 $\Omega \times \mathbb{R}$ 上的泊松点过程，其强度测度为$\mu(\mathrm{d}x\mathrm{d}z) = \mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z)$，其中 $\lambda(\mathrm{d}z)$ 是所谓的莱维测度。尽管这种构造更为一般，我们将重点讨论 γ-稳定情形，它对应于取 $\lambda(\mathrm{d}z) = (c_+\mathbb{1}_{z>0} + c_-\mathbb{1}_{z<0})\gamma|z|^{-1-\gamma}\mathrm{d}z$，其中常数 c_+, c_- 调节噪声的不对称性，并满足 $c_+, c_- \geqslant 0$ 和 $c_+ + c_- = 1$。

对于 $a > 0$，定义截断噪声

$$\zeta^{(a)} := \sum_{(x,z)\in\Lambda} z\mathbb{1}_{|z|>a}\delta_x - \kappa(a)\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

其中 $\kappa(a) = \int_{\mathbb{R}} z\mathbb{1}_{|z|>a}\lambda(dz)$。当 $a \downarrow 0$ 时， $\zeta^{(a)}$ 几乎必然在任意负局部 Sobolev 空间 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中收敛，其中 $s > \frac{D}{2}$ 收敛到记为 ζ 的随机分布，称为 γ-稳定莱维白噪声。相关陈述请参见附录中的定理 A.1。

考虑一族一般的函数 $(\psi^{(k)})_{k\geqslant 0}$，满足 $\psi^{(k)}$ 定义在 Ω^k 上，具有对称性且在对角线上为零。按照惯例， $\psi^{(0)}$ 是常数。我们的目标是恰当地定义以下 莱维混沌展开 （类比于高斯情形下的*Wiener* 混沌展开 ），即关于 γ-稳定 Lévy 白噪声 ζ的连续混沌展开:

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} \int_{\Omega^k} \psi^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \zeta(\mathrm{d}x_j)\,, \tag{2.2}$$

注 2.1。 请注意，我们不要求噪声或函数 ψ 具有任何正性或单调性；这些性质是 *Berger* 和 *Lacoin* *[BL21;BL22]* 先前研究的关键特征。

定义 (2.2) 的方法是截断（类似于 [BL22]中的做法）。对于$a > 0$，我们引入截断混沌

$$\mathbf{\Phi}^{(a)} := \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} \int_{x_1,\ldots,x_k\in\Omega} \psi^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \zeta^{(a)}(\mathrm{d}x_j). \tag{2.3}$$

令 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_a)_{a>0}$ 表示滤过，其中 $\mathcal{F}_a = \sigma\{\Lambda \cap (\Omega \times \mathbb{R} \setminus (-a, a))\}$。我们将在下文看到，$(\mathbf{\Phi}^{(a)})_{a>0}$ 是关于滤过 $\mathcal{F}$ 的时间反向鞅。因此，若该鞅一致可积，则它几乎必然收敛，且在 $\mathbb{L}^1$ 中收敛。我们的第一个主要结果是推导其成立的条件。

2.1.2. *Lé*维混沌展开的适定性。 在陈述结果之前，我们先引入对称范数。对于 $q > 1, k \in \mathbb{N}$ 以及$\mathbf{f}: \Omega^k \to \mathbb{R}$ 上的对称函数，定义对称 L^q 范数:

$$\|\mathbf{f}\|_q = \left(\frac{1}{k!} \int_{\Omega^k} |\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k)|^q \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}x_j \right)^{1/q}. \tag{2.4}$$

Ω^k 上对称函数构成的、具有有限对称 L^q 范数的空间记为 $L^q_s(\Omega^k)$.

注 2.2。 在L^q 范数的定义中包含阶乘 $k!$ 似乎令人惊讶，但这是 *Malliavin* 演算中相当常见的问题。事实上，考虑白噪声 ζ 为高斯噪声且$\Omega = (0,1)$的情形。那么，如果$\mathbf{f}$是定义在$(0, 1)^k$上的 L^2 对称函数，则随机变量

$$\mathbf{X}(\mathbf{f}) := \frac{1}{k!} \int_{(0,1)^k} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \zeta(\mathrm{d}x_j) = \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) \prod_{j=1}^{k} \zeta(\mathrm{d}t_j) \tag{2.5}$$

是良定义的，并且

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}(\mathbf{f})^2] = \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)^2 \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}x_j = \frac{1}{k!} \int_{(0,1)^k} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k)^2 \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}x_j.$$

因此， $\|\mathbf{X}(\mathbf{f})\|_2 = \|\mathbf{f}\|_2$在对称范数意义下成立，这表明条件$\mathbf{f} \in L^2_s$实际上是$\mathbf{X}(\mathbf{f})$ 良定义所必需的。

当 ζ 为 γ-稳定 Lévy 噪声时，要为式 (2.5) 中的多重积分 $\mathbf{X}(\mathbf{f})$ 找到其有定义的充要条件，这个问题比高斯情形更为微妙。例如，已知单积分 $\int_\Omega \mathbf{f}(x)\zeta(\mathrm{d}x)$ 有定义，当且仅当$\int_\Omega |\mathbf{f}(x)|^\gamma \mathrm{d}x < +\infty$，但这一结论无法推广到多重积分（例如参见 [RW86]）。我们将证明， k-重积分 $\mathbf{X}(\mathbf{f})$ 有定义的一个充分条件是 $\mathbf{f} \in L^q_s(\Omega^k)$，其中某个 $q > \gamma$ 存在；但已知这并非最优条件（例如参见 [Sur85]）。

定理 2.3 (γ-稳定 Lévy 混沌的适定性)。 设 ζ 为一个 γ-稳定 *Lévy* 白噪声，且$\gamma \in (1, 2)$。假设存在 $q \in (\gamma, 2]$，使得函数族 $(\boldsymbol{\psi}^{(k)})_{k \geqslant 0}$ 满足以下条件：对每个 $C > 0$,

$$\sum_{k \geqslant 0} C^k \left\| \boldsymbol{\psi}^{(k)} \right\|_q < \infty \,. \tag{2.6}$$

那么，对于每个 $a \in (0, 1]$， $\Phi^{(a)}$ 都有良好定义，且$(\boldsymbol{\Phi}^{(a)})_{a \in (0,1]}$ 是关于滤过 $F = (F_a)_{a>0}$的时间反向鞅。

此外，对于每个 $p \in (0, \gamma)$，$(\boldsymbol{\Phi}^{(a)})_{a \in (0,1]}$ 在$\mathbb{L}^p$ 中有界，因此存在极限 $\boldsymbol{\Phi} := \lim_{a \downarrow 0} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}$，几乎处处且在$\mathbb{L}^p$中收敛。此外，对于每个 $p \in (0, \gamma)$，存在常数 $C_0 = C_0(p, q, \gamma, \Omega)$，使得

$$\left\| \boldsymbol{\Phi} \right\|_p \leqslant \sum_{k \geqslant 0} (C_0)^k \left\| \boldsymbol{\psi}^{(k)} \right\|_q . \tag{2.7}$$

需要强调的是， γ 与区间 $[1, 2]$的边界之间留有一定余量至关重要：事实上，两个极限情形 $\gamma = 1$ 和 $\gamma = 2$ 都需要对数修正。此外，关于 $\boldsymbol{\Phi}$ 的矩界很大程度上依赖于区域 Ω 有界这一事实。理解其原因的一个直观方式是：若 Ω 无界， L^q 范数并不控制 L^p 范数。

注 2.4. 在某些应用中，了解定理 *2.3*-(2.7) 中出现的常数 $C_0 = C_0(p, q, \gamma, \Omega)$如何依赖于 p、q、γ 和 Ω可能会有所帮助。由证明可得，对于$p \in (1, \gamma)$,

$$C_0(p, q, \gamma, \Omega) = \frac{C_1}{(p-1)} \max\{(\gamma - p)^{-1/p}, (q - \gamma)^{-1/q}\} \left(|\Omega| \vee 1\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} , \tag{2.8}$$

其中常数 C_1 是一个普适常数。

2.2. **离散多项式混沌的标度极限**。 现在让我们回到最初的问题，即配分函数 (1.13) 的离散多项式混沌展开的标度极限。接下来，我们将考虑一个稍微更一般的设定。

2.2.1. Ω 的离散化 以及 Ω 和 $L^q_s(\Omega)$. 首先，让我们精确定义 Ω_δ 是 Ω 的离散化这一说法的含义。对每个 $\delta \in (0,1)$，Ω_δ 是 Ω 的有限子集。假设对每个 Ω_δ，都关联着 Ω 的一个镶嵌 $\mathcal{C}_\delta$，即一个映射 $\mathcal{C}_\delta : \Omega_\delta \to$博雷尔子集 (Ω)（其中 博雷尔子集 (Ω) 表示 Ω 的博雷尔子集），并满足以下条件:

(i) 这些“单元”$(\mathcal{C}_\delta(x))_{x \in \Omega_\delta}$ 构成 Ω 的一个划分；(ii) 对于每个 $x \in \Omega_\delta$, $x \in \mathcal{C}_\delta(x)$；(iii) 单元 $\mathcal{C}_\delta(x)$ 的体积不依赖于点 $x \in \Omega_\delta$，记为 v_δ。

我们假设 $v_\delta \to 0$当 $\delta \downarrow 0$时成立，这意味着离散集合 Ω_δ 渐近逼近 Ω。注意，在第1节中，我们曾假设 v_δ 具有特定形式 $\delta^{d_{\text{eff}}}$。实际上，这并非必要；特别是，放宽这一假设将使我们能够考虑定向聚合物模型中的更一般随机游走（见下文第3.2节）。

于是，对于每个 $\delta \in (0,1)$，任意在对角线上为零的对称函数 $f : \Omega_\delta^k \to \mathbb{R}$，都可以通过赋予以下值，将其扩展为分段常数函数 $f : \Omega^k \to \mathbb{R}$

$$\overline{f}(y_1, \ldots, y_k) = f(x_1, \ldots, x_k), \tag{2.9}$$

对每个 $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathcal{C}_\delta(x_1) \times \cdots \times \mathcal{C}_\delta(x_k)$ 都成立。注意， f是对称的，在对角线上为零，且其对称 L^q 范数为

$$\left\| \overline{f} \right\|_q = \left(\frac{(v_\delta)^k}{k!} \sum_{x_1, \ldots, x_k \in \Omega_\delta} |f(x_1, \ldots, x_k)|^q \right)^{1/q} . \tag{2.10}$$

对于每个 $\delta \in (0, 1)$，令 $(\omega_x)_{x \in \Omega_\delta}$ 为处于某个 γ-稳定分布吸引域内的独立同分布中心化 随机变量，其中 $\gamma \in (1, 2)$。特别地（参见 [Fel66，第 XVII.5] 页），存在一个缓变

函数 φ^4 ，使得对每个 $t>0$,

$$\mathbb{P}[|\omega|>t]=\frac{\varphi(t)}{t^{\gamma}}, \tag{2.11}$$

且下列极限存在 $c_+=\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}[\omega\geqslant t]\,\mathbb{P}[|\omega|\geqslant t]$ 且 $c_-=1-c_+$。请注意，这比式（1.11）中引入的纯幂律尾部略为一般，同时也去掉了 $\omega>-1$a.s. 这一条件（本节不要求任何正性假设）。

我们将 $V_\delta\to+\infty$ 定义为渐近等价，具体如下:

$$\mathbb{P}[|\omega|>V_\delta]\sim v_\delta \quad \text{as } \delta\downarrow 0\,. \tag{2.12}$$

实际上可以证明，存在一个缓变函数 $\hat{\varphi}$ ，使得 $V_\delta=v_\delta^{-1/\gamma}\hat{\varphi}(v_\delta)$，参见 [BGT87, §1.5.7]。（请注意，在第1节中我们有 $V_\delta\sim C_0^{-1/\gamma}\delta^{-d_{\mathrm{eff}}/\gamma}$。）离散噪声的定义（1.12）$\zeta_\delta$需要作相应调整，变为

$$\zeta_\delta:=\frac{1}{V_\delta}\sum_{x\in\Omega_\delta}\omega_x\delta_x\,. \tag{2.13}$$

对于任意 $\delta\in(0,1)$，设 $(\psi_\delta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 是定义在 Ω_δ^k 上的函数，它们是对称的，并且在对角线上为零。接着，我们考虑与 $(\psi_\delta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 相关、无序为 ω 的以下离散多项式混沌:

$$\Phi_\delta=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}\sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta}\psi_\delta^{(k)}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^{k}\frac{\omega_{x_j}}{V_\delta}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\overline{\psi}_\delta^{(k)}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^{k}\zeta_\delta(\mathrm{d}x_j)\,, \tag{2.14}$$

这里回顾一下，$\overline{\psi}_\delta$ 是 ψ_δ 的分段常值延拓。

我们的第二个主要定理表明，在函数 $(\psi_\delta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 满足相关条件时，离散多项式混沌 Φ_δ 在 $\delta\to0$ 趋于其连续对应物。

定理 2.5。假设(2.11) 对 $\gamma\in(1,2)$ 成立，并令 V_δ 由(2.12)定义。假设存在 $q\in(\gamma,2]$，使得:

(i) For every $k\in\mathbb{N}$, there exists some $\boldsymbol{\psi}^{(k)}\in L^q_s(\Omega^k)$ such that $\lim_{\delta\downarrow0}\|\overline{\psi}_\delta^{(k)}-\boldsymbol{\psi}^{(k)}\|_q=0$;

(ii) 满足以下可求和条件：对每个 $C\geqslant0$,

$$\limsup_{\delta\downarrow0}\sum_{k\geqslant0}C^k\|\overline{\psi}_\delta^{(k)}\|_q<+\infty \quad \textit{and} \quad \lim_{M\to+\infty}\limsup_{\delta\downarrow0}\sum_{k>M}C^k\|\overline{\psi}_\delta^{(k)}\|_q=0.$$

那么，我们有以下在 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\times\mathbb{R}$ 中的联合依分布收敛，$s>\frac{D}{2}$

$$(\zeta_\delta,\Phi_\delta)\xrightarrow{(d)}(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\Phi}) \quad \textit{as } \delta\downarrow0\,.$$

此外，对于任意 $1<p<\gamma$和 $\delta\in(0,1)$，对于定理 *2.3*-(2.7)中出现的同一个常数 $C_0=C_0(p,q,\gamma,\Omega)$，我们有 $\|\Phi_\delta\|_p\leqslant\sum(C_0)^k\|\psi_\delta^{(k)}\|_q$ 且 $\|\Phi_\delta\|_p\to\|\overline{\boldsymbol{\Phi}}\|_p$，当 $\delta\downarrow0.{}_{k\in\mathbb{N}}$

2.3. 回到无序统计力学模型。注意，引言中的设定，即统计力学无序系统的配分函数，符合上述第 2.2 节的设定：唯一的特殊之处在于 $c_-=0$ 和 $c_+=1$ （回忆 $\omega>-1$），并且函数$\psi_\delta^{(k)}$ 非负。

我们还对第1节中的设定做了少许推广，因为现在可以考虑满足（2.11）的无序，而不再局限于纯幂律（1.11）。此外，我们可以对相关函数采用更一般的重标度：令 J_δ 为归一化因子，并对每个 $k\geqslant1$ 和 x_1、.....、$x_k\in\Omega_\delta$，定义

$$\psi_{\Omega_\delta}^{(k)}(x_1,\dots,x_k):=(J_\delta)^k\,\mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\prod_{j=1}^{k}\sigma_{x_j}\Big]\,. \tag{2.15}$$

[4]若函数 φ 满足 $\lim_{t\to\infty}{}^{\varphi(at)}\,\varphi(t)=1$ 对任意 $a>0$均成立，则称其为缓变函数，参见 [BGT87]。

由（1.7），现在可以将配分函数改写为多项式混沌：

$$Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta} = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \Big(\frac{\beta V_\delta}{J_\delta}\Big)^k \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} \psi_{\Omega_\delta}^{(k)}(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^{k} \frac{\omega_{x_j}}{V_\delta}\,. \tag{2.16}$$

因此，多项式混沌的亚临界性 条件可表述为 $\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{V_\delta}{J_\delta} = +\infty$；在此情形下，判据 (1.17) 表明，当 $\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{V_\delta}{J_\delta} = +\infty$ 时，无序应当是相关的 。现在我们给出亚临界性条件下的若干结果。 —

2.3.1. 配分函数的中间无序。 定理 2.3 和 2.5 的直接推论是，在重标度相关函数 (2.15) 满足适当条件时，配分函数 $Z^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$ 在中间无序标度极限 $\beta_\delta V_\delta / J_\delta \to \hat{\beta} \in (0,\infty)$ 下，随着 $\delta \to 0$ 依分布收敛。

定理 2.6 (配分函数的标度极限)。 假设(2.11) 对 $\gamma \in (1,2)$ 成立，并令 V_δ 由(2.12)定义。假设存在 $q \in (\gamma, 2]$，使得 (2.15) 中的相关函数 $\psi^{(k)}_{\Omega_\delta}$满足定理 *2.5* 的假设。那么，在中间无序区间$\lim_{\delta\downarrow 0} \beta_\delta \frac{V_\delta}{J_\delta} = \hat{\beta} \in [0,\infty)$下，我们有如下联合依分布收敛： —

$$(\zeta_\delta, Z^{\omega,\beta_\delta}_{\Omega_\delta}) \xrightarrow{\delta\to 0} (\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}_{\Omega})\,.$$

此处，$\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}_{\Omega}$是连续统配分函数，定义见(1.16)，由定理 *2.3* 可知其定义良好。

2.3.2. 无序吉布斯测度的中间无序。 另一个非常自然的结果是依分布收敛无序概率 $\mathrm{P}^{\omega,\beta}_{\Omega_\delta}$，其定义见 (1.2)。要使这一结果成立，要求均匀模型本身以比仅通过相关函数更强的意义收敛，是合理的。

设 E 为一个波兰空间，使得对每个 $\delta > 0$，有限场$\{\sigma_x\}_{x\in\Omega_\delta}$ 都可以视为 E 中的元素。（钉扎模型和长程聚合物就是这样的例子，更多细节请参见第3节。）记$\mathcal{M}_1(E)$为概率测度构成的拓扑空间，其上赋予依分布收敛拓扑。对于定义在 E 上的任意函数 G，以及 $x_1, \dots, x_k \in \Omega_\delta$，记

$$\psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(x_1,\dots,x_k; G) := (J_\delta)^k\, \mathrm{E}^{\mathrm{ref}}_\delta\Big[G(\sigma)\prod_{j=1}^{k}\sigma_{x_j}\Big]\,. \tag{2.17}$$

我们将$\mathcal{C}_b(E)$记作有界连续函数 $G\colon E \to \mathbb{R}$的集合。以下结果说明了无序模型在中间无序区间内的测度层面收敛性，并特别构造了一个连续统无序模型。

定理 2.7 （吉布斯测度的标度极限）。 假设定理 *2.6* 的条件成立。若进一步有，

(a) $\mathrm{P}^{\mathrm{ref}}_{\Omega_\delta}$ 在 $M_1(E)$ 中收敛于概率分布 $\mathbf{P}_\Omega$；*(b)* 对每个函数 $G \in \mathcal{C}_b(E)$ 以及每个 $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi^{(k)}_{\Omega_\delta}(\cdot\, G)$，在 $L^q_s(\Omega^k)$ 中收敛；*(c)* 对任意 $\hat{\beta} \geqslant 0$，连续统配分函数 $\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\beta}_{\Omega}$ 几乎必然严格为正。

于是，在 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times M_1(E)$ 中，我们得到如下联合依分布收敛，$s > \frac{D}{2}$， —

$$(\zeta_\delta, \mathrm{P}^{\omega,\beta_\delta}_{\Omega_\delta}) \xrightarrow{(d)} (\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{P}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}_{\Omega}) \quad as\ \delta \downarrow 0\,,$$

其中，$\mathbf{P}^{\boldsymbol{\zeta},\beta}_{\Omega}$是无序版本的$\mathbf{P}_\Omega$；该陈述的一部分是测度$\mathbf{P}^{\boldsymbol{\zeta},\beta}_{\Omega}$定义良好。

假设 (a) 和 (b) 非常自然。人们可能会希望，假设 (c) 实际上是 $Z^{\omega,\beta_\delta}_{\Omega_\delta}$ 收敛到 $\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\beta}_{\Omega}$ 的结果。不幸的是，我们尚未找到在一般设定下证明这一点的方法。我们应该尝试证明事件 $\{\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\beta}_{\Omega} = 0\}$ 实际上是平凡的，也就是说，它具有

概率为 0 或 1，因此由于 $\mathrm{E}[\mathcal{Z}^{\zeta,\beta}\,\Omega\ ]=1$，它必然具有概率 1。例如，[BL22 的命题 4.4] 就是这样处理的。我们将在第3节中，结合无序钉扎模型和长程定向聚合物模型的背景，进一步讨论这个问题。

注 2.8 (标度极限的普适性)。值得注意的是，上述定理中构造的极限对象只取决于少数几个参数。例如，$\mathbf{P}^{\zeta,\ \beta}\,\Omega$ 既不取决于Ω_δ 的具体离散化方式，也不取决于离散环境尾部(2.11) 中出现的缓变函数 φ 。特别是，重标度 β_δ 取决于这些微观细节，但标度极限具有普适性。

2.3.3. 关于无序相关性。我们不禁会想，是否确实有必要进行重标度 β 才能得到标度极限，或者说，中间无序标度 $\beta_\delta\sim\hat{}\beta J_\delta/V_\delta$ 是否真的是相关标度。首先，让我们给出以下结果，它是定理 2.6 的直接推论，并表明 $\lim_{\delta\downarrow0}\beta_\delta\frac{V_\delta}{J_\delta}=0$ 处于所谓的弱无序 区间。

推论 2.9（弱无序）。假设定理 *2.6* 的条件成立。若 极限$\lim_{\delta\downarrow0}\beta_\delta\frac{V_\delta}{J_\delta}=0$，则 $Z^{\omega,\beta_\delta\Omega_\delta}$ 收敛到 $Z^{\zeta,\beta=0}\,\Omega=1$，且对每个 $p\in(0,\gamma)$，均在$\mathbb{L}^p$ 中成立。

另一方面，我们希望证明，若 $\beta_\delta V_\delta/J_\delta\to\infty$，则配分函数 $Z^{\omega,\beta_\delta\Omega_\delta}$依概率收敛到 0。这一性质是无序相关性的一个简化情形。与连续统配分函数严格为正的情形一样，实际上，这一性质取决于均匀系统更精细的性质，而不仅仅是相关函数的标度形式；在如此一般的情况下，要对此问题给出肯定答案并非易事。我们决定给出一个充分条件（在许多模型中均已验证，包括钉扎模型和定向聚合物模型，见下文第 2.3 节），以说明对于次临界系统，这一性质是普遍的。

定理 2.10（强无序）。假设 $J_\delta v_\delta\sum_{x\in\Omega_\delta}\sigma_x$ 在 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$下依分布收敛（当 $\delta\downarrow0$ 时），且极限为严格正随机变量。那么，若 $\lim_{\delta\downarrow0}\frac{\beta_\delta V_\delta}{J_\delta}=+\infty$，配分函数 $Z^{\omega,\ \beta_\delta\Omega_\delta}$依概率趋于0。

注意，可以验证

$$\mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[J_\delta v_\delta\sum_{x\in\Omega_\delta}\sigma_x\Big]=v_\delta\sum_{x\in\Omega_\delta}\psi_{\Omega_\delta}^{(1)}(x)\xrightarrow{\delta\downarrow0}\int_\Omega\boldsymbol{\psi}_\Omega^{(1)}(x)\mathrm{d}x\,.$$

Thi s 至少表明，$J_\delta v_\delta$ 是随机变量$\sum_{x\in\Omega_\delta}\sigma_x$的正确归一化 .

2.4. **进一步评论**。

关于无限均值情形。与 [BL21；BL22] 针对定向聚合物模型所采用的方法不同，我们的方法不涵盖具有 $\gamma\in(0,1]$的 γ-稳定噪声情形。这是因为，关于此类噪声的多项式混沌不具有任何有限的 L^p 矩（当 $p\geqslant1$时）。我们将这一情形下定理 2.3 和 2.5 的类似结果所需的一般且必要条件留作开放问题。

一般 *Lévy* 噪声的情形。与 [BL21; BL22]相比的另一项限制是，我们只考虑稳定噪声，而非一般 Lévy 噪声。给定 $\mathbb{R}$ 上满足 $\int_{\mathbb{R}}(x^2\wedge1)\lambda(\mathrm{d}x)<+\infty$的测度 λ，可将 Ω 上以 λ 为莱维测度的 Lévy 白噪声 ζ 定义为截断噪声在 $a\downarrow0$ 时的几乎必然极限

$$\zeta^{(a)}=\sum_{(x,z)\in\Lambda}z\mathbb{1}_{|z|>a}\delta-\kappa(a)\mathrm{d}x\,,$$

其中 Λ i 是 $\Omega\times\mathbb{R}$ 上强度测度为 $\mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z)$的泊松点过程，且 $\kappa(a)=\int_{\mathbb{R}}z\mathbb{1}_{|z|>a}\lambda(\mathrm{d}z)$。I n 在这种情形下, 相关量为莱维测度的截断矩，由下式给出

$$m_p(a,b)=\int_{\mathbb{R}}|z|^p\mathbb{1}_{a<|z|\leqslant b}\lambda(\mathrm{d}z)\,,$$

而我们的证明给出了定理 2.3 的以下推广（记号相同):

定理 2.11。 设 $\boldsymbol{\zeta}$ 为一个莱维白噪声，其莱维测度为 λ，并且存在 $1<p<q<2$ 使得 $m_p(1,\ +\infty)<+\infty$ 且 $m_q(0,\ 1)<+\infty$。设函数族 $(\boldsymbol{\psi}^{(k)})_{k\geqslant 0}$ 满足以下条件：对每个常数 $C\geqslant 0$,

$$\sum_{k\geqslant 0} C^k \big\|\boldsymbol{\psi}^{(k)}\big\|_q < +\infty\,. \tag{2.18}$$

于是，对每个 $a\in(0,1]$， $\Phi^{(a)}$ 都有良好定义；并且$(\boldsymbol{\Phi}^{(a)})_{a\in(0,1]}$ 是相对于滤过 $F=(F_a)_{a>0}$的时间反向鞅。

此外，$(\boldsymbol{\Phi}^{(a)})_{a\in(0,1]}$ 在$\mathbb{L}^p$ 中有界，因此存在极限 $\boldsymbol{\Phi}:=\lim_{a\downarrow 0}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}$，且几乎必然收敛并在$\mathbb{L}^p$中收敛。此外，存在一个普适常数 C_0'，使得

$$\big\|\boldsymbol{\Phi}\big\|_p \leqslant \sum_{k\geqslant 0}\Big(\frac{C_0'}{p-1}(m_p(1,+\infty)+m_q(0,1))\Big)^k \big\|\boldsymbol{\psi}^{(k)}\big\|_q\,. \tag{2.19}$$

更多细节请参见命题 4.11。

一般 Lévy 噪声 $\boldsymbol{\zeta}$ 不满足任何尺度不变性，因此，相对于 $\boldsymbol{\zeta}$ 的多项式混沌不能作为具有固定无序分布的离散多项式混沌的标度极限出现。允许离散无序随机变量 ω 的分布依赖于 δ，则可以绕过这一障碍。例如，对每个 $\delta>0$ 以及每个 $x\in\Omega_\delta$，定义

$$\omega_x^{(\delta)} = V_\delta \int_{\mathcal{C}_\delta(x)} \zeta(\mathrm{d}y)\,,$$

其中常数 V_δ 的选取使得 $\mathrm{P}[|\omega_x^{(\delta)}|>1]=1/2$ 成立（常数 1 和$1/2$ 的具体选取无关紧要）。对于每个固定的 δ，随机变量 $(\omega_x^{(\delta)})$ 独立同分布且中心化。因此，很自然地猜想，在这一设定下，满足定理 2.11 的假设的 Lévy 噪声也存在与定理 2.5 类似的结论。

与随机偏微分方程的关系。 研究连续统配分函数的一个重要动机，是构造随机偏微分方程的解。假设齐次系统具有时间方向（且时间范围有限）并且是马尔可夫的，即 $\Omega=(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 对于某个 $T>0$（当 $d=0$ 时，$\Omega=(0,T)$），并且存在函数 $\boldsymbol{\psi}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$（可解释为转移核的密度），使得连续统相关函数由下式给出

$$\boldsymbol{\psi}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)=\boldsymbol{\psi}(t_1,0,x_1)\boldsymbol{\psi}(t_2-t_1,x_1,x_2)\dots\boldsymbol{\psi}(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)\,,$$

对于每个 $0<t_1<\cdots<t_k<T$和 $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}^d$。那么，由混沌展开定义的点到点配分函数

$$\mathcal{Z}_{st}^{\hat\beta}(x,y)=\boldsymbol{\psi}(t-s,y-x)\sum_{k\geqslant 1}\hat\beta^k\int_{s<t_1<\cdots<t_k<t}\int_{x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}^d}\boldsymbol{\psi}(t_1-s,x,x_1)\boldsymbol{\psi}(t_2-t_1,x_1,x_2)$$

$$\dots\boldsymbol{\psi}(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)\boldsymbol{\psi}(t-t_k,x_k,y)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j)\,,$$

形式上满足流方程

$$\mathcal{Z}_{st}^{\hat\beta}(x,y)=\boldsymbol{\psi}(t-s,x,y)+\hat\beta\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{Z}_{su}^{\hat\beta}(x,z)\boldsymbol{\psi}(t-u,z,y)\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}u\mathrm{d}z)\,. \tag{2.20}$$

如果 ψ 是 微分算子 $\mathcal{L}$的格林函数（具有时间平移不变性），那么形式上，这 s
流方程 与.....相关的方程

$$\mathcal{L}u(t,x)=\hat\beta\,u(t,x)\cdot\boldsymbol{\zeta}(t,x)\,,\quad t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d\,. \tag{2.21}$$

注意，该方程关于 u是线性的，但包含乘性噪声，这可能导致奇异行为和适定性问题。

先前的研究（[Sai98；Bal14；BN17；Bal23；BJ24]）主要在两种经典算子的背景下探讨了形式如 (2.21) 的方程：热算子 $\partial_t-\Delta_x$ 和波算子

$\partial_{tt} - \Delta_x$。与本文尤为相关的是近期的研究 [BJ24], ，该研究聚焦于对称噪声（$c_+ = c_-$ 在 (2.1) 中），并依赖 Lepage 表示。该研究中的假设 1。2 和 1。3 在理念上与定理 2.3 的条件 (2.6) 密切相关，因为二者都要求可积性略高于 L^γ。

2.5. **本文其余部分的安排**。本文其余部分安排如下。第3节中，我们将一般结果应用于例 3–4 中已介绍的两个具体系统。第4节旨在证明定理 4.1 和 4.2，它们给出了离散混沌和连续混沌的一般 L^p 估计。随后，在第5节中，我们将这些结果用于证明主要结果（定理 2.3 和 2.5）。第6节旨在证明第 2.3 节中陈述的结果。第7–8节给出了第3节中结果的证明。最后，附录汇集了一些进一步的技术性结果。附录 A 汇集了关于离散噪声 ζ_δ 及其向连续统噪声 ζ 收敛的结果。附录 B 证明了一个有用的不等式，该不等式比较了多元级数与其连续积分形式。

致谢： 作者衷心感谢 Quentin Berger 提出这个问题、始终给予支持，并花时间阅读本手稿的多个版本。作者还感谢 Pierre Faugère 和 Hubert Lacoin 就定理 3.3 进行讨论。

3. 统计力学模型中的具体应用

现在让我们更详细地说明第 2.1 节的结果如何应用于两个指导性示例：无序钉扎模型（例1和例3）以及长程定向聚合物模型（例2和例4）。

3.1. **（无序）钉扎模型**。在介绍钉扎模型的结果之前，我们先回顾钉扎模型的定义，它推广了例1中的设定。

3.1.1. 均匀钉扎模型及其标度极限。令 $\tau = (\tau_k)_{k \geqslant 1}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的一个常返非周期更新过程，其间隔分布为

$$\mathrm{P}[\tau_1 = n] := \frac{\ell(n)}{n^{1+\alpha}}, \tag{3.1}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$，且 $\ell(\cdot)$ 是一个缓变函数[5]。我们也可以将 τ 解释为 $\mathbb{N}$ 的一个随机子集。现在引入更新质量函数 $u(N) := \mathrm{P}[N \in \tau]$，它起着至关重要的作用。在[Don97, 定理 B], 中证明了

$$u(N) := \mathrm{P}[N \in \tau] \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{C_\alpha}{\ell(N) N^{1-\alpha}}, \qquad \text{with} \quad C_\alpha = \frac{\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi}. \tag{3.2}$$

需要强调的是，在 [Gia07, 第 A.5 节], 中，已证明重缩放后的子集 $\frac{1}{N}\tau \subset \mathbb{R}_+$–在 $N \to +\infty$ 下依分布收敛至 $\mathcal{A}_\alpha$，即指标为 α 的再生集。收敛发生在闭子集的空间 $\mathcal{C}_\infty$ 中，该空间配备了 Matheron 拓扑，因此是一个波兰空间。再生集 $\mathcal{A}_\alpha$ 可定义为 α-稳定子ordinator $(\sigma_t^{(\alpha)})_{t \geqslant 0}$ 的值域，其特征由其拉普拉斯变换给出

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda \sigma_t^{(\alpha)}}] = \mathrm{e}^{-t|\lambda|^\alpha}, \quad \text{for } \lambda \geqslant 0,\, t \geqslant 0,$$

即 $\mathcal{A}_\alpha := \overline{\{\sigma_t^{(\alpha)}, t \geqslant 0\}}$。

均匀钉扎模型是在每个 $h \in \mathbb{R}$（钉扎参数）和 $N \geqslant 1$ 下定义在 $\mathbb{N}$ 的子集上的概率测度，其定义为

$$\frac{\mathrm{dP}_{N,h}}{\mathrm{dP}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,h}} \exp\left(h \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{n \in \tau}\right) \quad \text{with} \quad Z_{N,h} := \mathrm{E}\left[\exp\left(h \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{n \in \tau}\right)\right]. \tag{3.3}$$

[5]如果对于任意 $a > 0$ 都满足 $\lim_{t \to \infty} \ell(at)\,/\,\ell(t) = 1$，则称函数 ℓ 为缓变函数，参见 [BGT87]。

直观来说，参数 h 会对 τ 中的更新点给予奖励（若 $h>0$）或惩罚（若 $h<0$）。该模型的经典参考文献是 [Gia07，第 2] 章。

关于均匀模型的标度极限， [Soh09] 证明，需要将钉扎参数 h 重新标度为

$$h_N := \frac{\hat{h}}{Nu(N)}, \quad \hat{h}\in\mathbb{R}. \tag{3.4}$$

接着， [Soh09，定理 3.1] 指出，当闭子集 $\frac{1}{N}\tau\cap[\![1,\ N]\!]$ 按照 $\mathbf{P}_{N,\ h_N}$抽样，其中 h_N 如 (3.4) 所示时，它在 $N\to+\infty$ 时依分布收敛（相对于 Matheron 拓扑）至随机闭子集 $\mathcal{B}_{\alpha,\ \hat{h}}\subset[0,1]$。$\mathbf{P}_{\alpha,\ \hat{h}}$ 的分布相对于$\mathcal{A}_\alpha$的分布绝对连续，其 Radon-Nikodym 导数等于 $\mathrm{e}^{\hat{h}L_1^{(\alpha)}}/\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\hat{h}L_t^{(\alpha)}}]$，其中 $L_t^{(\alpha)}=\inf\{s\geqslant 0,\ \sigma_s^{(\alpha)}\geqslant t\}$ 是子*ordinator* 的局部时。特别地，这表明对于齐次参考测度 $P_{,\ h_N}$，定理 2.7 中的假设 (a) 成立。

为了定义连续齐次钉扎模型的极限相关函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\ \hat{h}}$，我们先定义连续统齐次配分函数及其条件对应形式。对于每个 $t\geqslant 0$，令

$$\mathcal{Z}_{t,\hat{h}} := \mathbf{E}\Big[\mathrm{e}^{\hat{h}L_t^{(\alpha)}}\Big] \qquad \text{and} \qquad \mathcal{Z}^c_{t,\hat{h}} := \alpha\, t^{\alpha-1}\mathbf{E}\Big[\mathrm{e}^{\hat{h}L_t^{(\alpha)}}\ \Big|\ t\in\mathcal{A}_\alpha\Big]. \tag{3.5}$$

需要强调的是，第二个定义仅具形式意义，因为$\mathbf{P}[t\in\mathcal{A}_\alpha]=0$。 [Soh09] 的一个推论是，对于每个 $t\geqslant 0$，$(Z_{Nt,h_N})_{N\geqslant 1}$在 $N\to+\infty$时收敛到$\mathcal{Z}_{t,\hat{h}}$。另一方面，考虑离散条件配分函数 $Z^c_{N,h}:=\mathrm{E}\big[\exp\big(h\sum_{n=1}^N\mathbb{1}_{n\in\tau}\big)\mathbb{1}_{N\in\tau}\big]$,时，$\mathcal{Z}^{c}_{t\ ,\hat{h}}$可严格定义为当 $N\to+\infty$时 $\mathbf{P}[N\ \in\tau]^{-1}Z^c_{Nt,h_N}$ 的极限。我们在引理 7.1 中证明该极限存在，并给出条件与非条件连续统齐次配分函数关于 Mittag-Leffler 函数的显式表达式。

根据定义 (3.5)， $k\geq 1$时的连续 k点相关函数是对称函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\ \hat{h}}$：$(0,\ 1)^k\to\mathbb{R}$，定义于 $t_0:=0<t_1<\cdots<t_k<1$，其定义为

$$\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\hat{h}}(t_1,\dots,t_k) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{1,\hat{h}}}\prod_{j=1}^k\big(\mathcal{Z}^c_{t_j-t_{j-1},\hat{h}}\big)\mathcal{Z}_{1-t_k,\hat{h}}\,. \tag{3.6}$$

3.1.2. 无序钉扎模型及其标度极限。设 $(\omega_n)_{n\geqslant 1}$ 为独立同分布随机变量，满足 $\omega>-1$ （几乎处处）。那么，对于 $N\in\mathbb{N}$、 $\beta\in[0,1]$ 和 $h\in\mathbb{R}$，定义无序钉扎测度如下：

$$\frac{\mathrm{dP}^{\omega,\beta}_{N,h}}{\mathrm{dP}_{N,h}}(\tau) := \frac{1}{Z^{\omega,\beta}_{N,h}}\prod_{n=1}^N(1+\beta\omega_n\mathbb{1}_{n\in\tau}), \quad \text{with} \quad Z^{\omega,\beta}_{N,h} := \mathrm{E}_{N,h}\Big[\prod_{n=1}^N(1+\beta\omega_n\mathbb{1}_{n\in\tau})\Big]. \tag{3.7}$$

接着，我们可以将定理 2.6 应用于钉扎模型的配分函数 $Z^{\omega,\ \beta}_{N,\ h}$，得到如下结论。假设 $\mathbb{E}[\omega]=0$，并且如 (2.11) 所示，当 $t\to\infty$ 时，$\mathbf{P}[\omega>t]\sim\varphi(t)t^{-\gamma}$，其中某个 $\gamma\in(1,\ 2)$。此外，如 (2.12) 所示，令 V_N 满足

$$\mathbb{P}[\omega>V_N]\sim N^{-1} \quad \text{as} \quad N\to+\infty, \tag{3.8}$$

并注意到 V_N 是指数为 $1/\gamma$ 的正则变动函数。

定理 3.1 （配分函数的中间无序）。 设更新过程 τ 满足 (3.1)，并假设 $1-\alpha<\frac{1}{\gamma}$。特别要注意，这保证了 $u\,(N)\ V_N\to\infty$ 当 $N\to\infty$ 时成立。另假设参数 β_N、h_N 满足以下标度关系：

$$\lim_{N\to\infty}\beta_N\,u(N)V_N=\hat{\beta}\in(0,+\infty)\,, \qquad \lim_{N\to\infty}h_N\,u(N)N=\hat{h}\in\mathbb{R}\,. \tag{3.9}$$

于是我们得到如下依分布收敛：

$$Z^{\omega,\beta_N}_{N,h_N}\xrightarrow[N\to\infty]{(d)}\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}_{\hat{h}}=1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{\hat{\beta}^k}{k!}\int_{(0,1)^k}\boldsymbol{\psi}^{(k)}_{\hat{h}}(t_1,\dots,t_k)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}t_j), \tag{3.10}$$

其中， ζ 是定义在 $(0,1)$ 上的 γ-稳定噪声；对每个 $k\geqslant 1$， $\psi_{\hat{h}}^{(k)}$ 按 (3.6) 定义。该收敛与离散噪声收敛到 ζ 联合成立。此外，对每个 $p\in[1,\gamma)$，$Z^{\zeta,\beta,\hat{h}}$ 具有 p 阶有限矩，并且 $\lim_{N\to+\infty}E[(Z^{\omega,N^{\beta_N},h_N})^p]=E[(Z^{\zeta,\beta,\hat{h}})^p]$。

注意，（3.10）中出现的多重积分可以表示为如下的迭代随机积分。通过对每个 $t\geqslant 0$ 设定 $\mathbf{L}_t=\int_0^t\zeta(\mathrm{d}t)$，定义（谱正的） γ-稳定 Lévy 过程 $(\mathbf{L}_t)_{t\geqslant 0}$。于是，我们可以写成

$$\mathcal{Z}_{\hat{h}}^{\zeta,\hat{\beta}}=1+\sum_{k\geqslant 1}\hat{\beta}^k\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\psi_{\hat{h}}^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)\prod_{j=1}^k\mathrm{d}\mathbf{L}_{t_j},$$

其中，单纯形 $\{0<t_1<\cdots<t_k<1\}$ 上的积分可以视为关于过程 $\mathbf{L}$ 的迭代伊藤积分。

注 3.2. 需要强调的是，连续统配分函数还有另一种表示形式，它更接近 *[CSZ16a，定理 3.1]*,中得到的极限：

$$\mathcal{Z}_{\hat{h}}^{\zeta,\hat{\beta}}=(\mathcal{Z}_{1,\hat{h}})^{-1}\Bigg(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\int_{(0,1)^k}\prod_{j=1}^k\phi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)\prod_{j=1}^k(\hat{\beta}\zeta(\mathrm{d}t_j)+\hat{h}\mathrm{d}t_j)\Bigg),\tag{3.11}$$

其中，对每个 $k\geqslant 1$， $\phi^{(k)}$ 都是一个对称函数（对应于 $hh=0$ 连续统齐次钉扎模型，即 $\phi^{(k)}=\psi^{(k)}_{\hat{h}=0}(t_1,\ldots,t_k)$），定义在 $0=:t_0<t_1<\cdots<t_k<1$ 上，其定义为

$$\phi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k):=\prod_{i=1}^k(t_i-t_{i-1})^{-(1-\alpha)}.$$

思路很简单：展开(3.11) 中的乘积 $\prod_{j=1}^k(\hat{\beta}\zeta(\mathrm{d}t_j)+\hat{h}\mathrm{d}t_j)$，并按照 t_j 对积分变量重新分组。利用连续统齐次配分函数的显式表达式（见引理 *7.1*），即可重构相关函数(3.6) 并得到(3.10)。关于这一过程的详细说明，可参见 *[BL24, §5.1]*, ；该处的背景与本文非常相似。

我们将离散钉扎测度 $\mathrm{P}_N^{\omega,\beta,h}$ 视为闭子集 $\mathbb{R}$ 空间$\mathcal{C}_\infty$ 上的一个测度；这里考虑的是闭子集 $\frac{1}{N}\tau$，并赋予该空间 Matheron 拓扑。记$\mathcal{M}_1(\mathcal{C}_\infty)$为$\mathcal{C}_\infty$上概率测度的集合，并赋予依分布收敛拓扑。

定理 3.3（无序钉扎的中间无序）。 在与定理 *3.1* 相同的假设下，对每个 $\beta\in[0,\infty)$ 和 $h\in\mathbb{R}$，存在一个随机概率测度$\mathbf{Q}^{\zeta,\beta,\hat{h}}$，定义在 $\mathcal{C}_\infty$ 上，使得以下依分布收敛在 $\mathcal{M}_1(\mathcal{C}_\infty)$中成立，

$$\mathrm{P}_{N,h_N}^{\beta_N,\omega}\xrightarrow[N\to+\infty]{(d)}\mathbf{Q}_{\hat{h}}^{\zeta,\hat{\beta}}.$$

该收敛与离散噪声收敛到 ζ 同时成立。我们将测度 $\mathbf{Q}^{\zeta,\beta,\hat{h}}$ 称为带有 连续统无序钉扎模型 γ-稳定 Lévy噪声。

该结果的证明基本上源于定理 3.1 以及关于钉扎模型的现有文献。唯一额外的要素是连续统配分函数 $\mathcal{Z}^{\zeta,\beta,\hat{h}}$ 的严格正性，这是应用一般性定理 2.7 所必需的。这个微妙的问题已在 [FL] 中得到解决。

最后，我们提及以下结果：在 (3.9) 中分别取 $\beta=0$ （弱无序）或 $\beta=+\infty$ （强无序）时，结论如下。

定理 3.4。 设非周期且常返的更新过程 τ满足 (3.1)，其中某个 $\alpha\in(\frac{\gamma-1}{\gamma},1)$。假设 $\lim_{N\to\infty}h_Nu(N)N=\hat{h}\in\mathbb{R}$，如 (3.9) 中所述。

(i) 如果 $\lim_{N\to+\infty}\beta_Nu(N)V_N=0$，那么 $Z^{\omega,N^{\beta_N},h_N}$依概率趋于 1（并且对每个 $1\leqslant p<\gamma$，在 $\mathbb{L}^p$ 中也成立）。*(ii)* 如果 $\lim_{N\to+\infty}\beta_Nu(N)V_N=+\infty$，那么 $Z^{\omega,N^{\beta_N},h_N}$依概率趋于 0。

特别是，上述结果表明，在第 2.3.3 节讨论的无序相关性性质适用于无序钉扎模型。

3.1.3. 进一步讨论与展望。 点对点无序配分函数对每个 $1 \leqslant M \leqslant N$ 定义如下：

$$Z^{\omega,\beta,c}_{M,N,h} := \mathrm{E}_{N,h}\Big[\prod_{n=M+1}^{N} (1+\beta\omega_n \mathbb{1}_{n\in\tau}) \mathbb{1}_{N\in\tau} \mid M \in \tau \Big].$$

我们的主要结果同样适用于这种情况，并且可以证明，若 $\lim_{N\to+\infty} \beta_N u(N) V_N = \hat{}\beta \in \mathbb{R}_+$ 且 $\lim_{N\to+\infty} h_N u(N) N = \hat{}h \in \mathbb{R}$，则对每个 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$，$u(N)^{-1} Z^{\omega,\beta_N,Ns\,Nt^{c},h_N}$ 依分布收敛于一个记作 $\mathcal{Z}^{\beta}_{s\,t,\hat{h}}$ 的随机变量。事实上，可以证明

$$\big(u(N)^{-1} Z^{\omega,\beta_N,c}_{\lfloor Ns\rfloor,\lfloor Nt\rfloor,h_N}\big)_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1} \xrightarrow[N\to+\infty]{(d)} \big(\mathcal{Z}^{\hat{\beta}}_{s,t,\hat{h}}\big)_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1},$$

依有限维分布的意义下。若能像 [CSZ16b]那样，将这一收敛加强为在适当函数空间中的依分布收敛，将会很有意思。由于极限可表示为关于 Lévy 白噪声的多项式混沌，一个自然的候选空间是 *D*空间($[0,1]^{2,\leqslant}$，$\mathbb{R}_+$)，由定义在单纯形 $\{0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\}$ 上且在两个变量中均为右连续且有左极限的函数构成。

这个问题的动机在于，当 $\hat{h}=0$，极限随机过程可能是 e 解 下列随机沃尔泰拉流方程的

$$\mathcal{Z}^{\hat{\beta}}_{s,t} = (t-s)^{-(1-\alpha)} + \hat{\beta}\int_s^t (t-u)^{-(1-\alpha)} \mathcal{Z}^{\hat{\beta}}_{u,t} \boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}u),$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 γ-稳定莱维白噪声。受近期工作 [CSZ23], 的启发， [WY24] 在 $\boldsymbol{\zeta}$ 为高斯且处于临界区间 $\alpha = 1/2$ 的情形下，对该方程取得了重大突破。更多背景信息和参考文献，请参阅他们的引言。

3.2. **长程定向聚合物**。在介绍定向聚合物模型的结果之前，我们先回顾一下关于底层随机游走的假设，这些假设略微推广了例2中的设定。

3.2.1. 长程随机游走及其标度极限。我们考虑定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的随机游走 $S=(S_n)_{n\geq 0}$，它属于一个 α稳定分布的吸引域，且 $\alpha \in (0,2]$, 不经过中心化。换言之，我们假设存在一个序列$(a_n)_{n\geq 1}$，使得$(\frac{1}{a_n} S_n)_{n\geq 0}$ 在 $n\to+\infty$ 趋于 d时依分布收敛于一个非退化的 α维 α稳定分布$\mathbf{X}_1$。（如果$\mathbf{X}_1$ 的分布无法支撑在 $\mathbb{R}^d$的任何真子空间上，我们就称其为非退化。）为简便起见，以下假设随机游走是非周期的；这排除了简单随机游走（见 [BL21]）等情形，但能使论述简单得多。

d维吸引域的刻画在 $d=1$维中是众所周知的，参见经典文献 [Fel66，第 IX 页；8], 而在 $d\geq 2$维中，这可追溯至 [HOR84；RG79]；一般性概述参见 [Res04] 。特别地，标度序列（a_N）$_{N\geq 1}$ 必然以指数 $1/\alpha$正则变动； $\alpha=2$ 的情形对应于高斯情形。注意，由于我们考虑的是一个无需中心化的吸引域，这要求当 $\alpha \in$ （$1,2$]时，$\mathrm{E}[S_1]=0$； $\alpha=1$ 的情形则更为微妙。

需要强调的是，对于（S_N）$_{N\geq 0}$，我们同样有Donsker不变性原理以及局部极限定理。特别地，这将确保定理 2.7中的条件（（a））和（（b））成立。

我们先陈述局部极限定理，例如参见 [Don91；Gri86]：在非周期条件下，我们有

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \Big| (a_n)^d \,\mathrm{P}(S_n = x) - g_1\Big(\frac{x}{a_n}\Big)\Big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,,$$

其中， $g_1(\cdot)$ 是$\mathbf{X}_1$ 的密度。

就不变性原理而言，我们引入 *D*空间 := *D*空间($[0,1],\mathbb{R}^d$)，即取值于 $\mathbb{R}^d$ 的右连续且有左极限函数空间，并赋予 Skorokhod 拓扑（亦称 J_1 拓扑）。对于

每个 $N \geqslant 1$ 和 $t \in [0,1]$，我们考虑重标度随机游走 $S_t^{(N)} = \frac{1}{a_N} S_{\lfloor Nt \rfloor}$，其中 $(S_t^{(N)})_{t\in[0,1]}$被视为 D空间 中的一个元素。那么，不变性原理（参见例如 [Res07，定理 7.1]）表明，我们在 D空间 中有如下依分布收敛：

$$(S_t^{(N)})_{t\in[0,1]} \xrightarrow[N\to\infty]{(d)} (\mathbf{X}_t)_{t\in[0,1]}\,,$$

其中 $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,1]}$ 是一个 d 维的 α-稳定过程。对于每个 $t \in (0,1]$, ，我们用 $g_t(\cdot)$ 表示 $\mathbf{X}_t$ 的密度：它由 $g_t(x) = t^{-d/\alpha} g_1(x\, t^{-1/\alpha})$ 给出。

特别地，由此可得，连续 k点相关函数（对于 $k \geq 1$）是对称函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$： $\big((0,1) \times \mathbb{R}^d\big)^k \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\boldsymbol{\psi}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) = \prod_{j=1}^{k} g_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}) \tag{3.12}$$

对于 $t_0 := 0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$ 以及 $x_0 := 0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$。

3.2.2. 长程定向聚合物模型及其标度极限。现在我们可以引入该模型的无序版本。设 $(\omega_{n,x})_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{Z}^d}$ 为独立同分布的中心化重尾随机变量，满足某个 $\gamma \in (1,2)$ 下的 (2.11)；还假设 $\omega > -1$ 几乎必然成立。那么，（长程）定向聚合物模型是随机游走 $(S_n)_{n\geq 1}$ 的分布经吉布斯修正后得到的概率测度，其中该随机游走已在上文定义：对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\beta \in [0,1]$，我们令

$$\frac{\mathrm{dP}_N^{\omega,\beta}}{\mathrm{dP}}(S) = \frac{1}{Z_N^{\omega,\beta}} \prod_{n=1}^{N} (1 + \beta\omega_{n,S_n})\,, \quad \text{with} \quad Z_N^{\omega,\beta} = \mathrm{E}\Big[\prod_{n=1}^{N}(1+\beta\omega_{n,S_n})\Big]\,. \tag{3.13}$$

我们将 V_N 定义到渐近等价为

$$\mathbb{P}[|\omega| > V_N] \sim \frac{1}{N\,(a_N)^d} \quad \text{as } N \to +\infty\,, \tag{3.14}$$

并注意到， V_N是指标为 $\frac{1}{\gamma}(1+\frac{d}{\alpha})$ 的正则变动函数。 –

请注意，我们无法直接应用定理2.6和定理2.7来获得关于定向聚合物模型的结果，因为这里的环境空间为 $\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}^d$，它并非有界。不过，我们能够证明以下结果。

定理 3.5 (配分函数的中间无序)。 设 $S = (S_n)_{n\geq 0}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 上满足第 *3.2.1* 节假设的随机游走，并假设 $\gamma < 1 + \frac{\alpha}{d}$。特别注意，这保证了当 $N \to \infty$ 时， $V_N (a_N)^{-d} \to \infty$。此外，还假设参数 β_N 具有以下标度：

$$\lim_{N\to\infty} \beta_N V_N (a_N)^{-d} = \hat{\beta} \in [0,\infty)\,. \tag{3.15}$$

那么，我们得到以下依分布收敛：

$$Z_N^{\omega,\beta_N} \xrightarrow[N\to\infty]{(d)} \mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{\hat{\beta}^k}{k!} \int_{(0,1)^k\times(\mathbb{R}^d)^k} \prod_{j=1}^{k} \boldsymbol{\psi}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) \prod_{j=1}^{k} \boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}t_j \mathrm{d}x_j)\,, \tag{3.16}$$

其中， $\boldsymbol{\zeta}$ 是 $(0,1) \times \mathbb{R}^d$ 上的 γ-稳定噪声，而 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ 定义于 (3.12)。该收敛与离散噪声收敛到 $\boldsymbol{\zeta}$ 同时成立。此外，对每个 $p \in [1,\gamma)$，$Z^{\boldsymbol{\zeta},\,\beta}$ 都有 p 阶有限阶矩，并且 $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[(Z^{\omega,\,\beta_N})^p] = \mathbb{E}[(Z^{\boldsymbol{\zeta},\,\hat{\beta}})^p]$。

注意，聚合物测度可视为D空间 := D空间$([0,1],\mathbb{R}^d)$上的概率测度，其设定方式为：对每一个连续且有界的函数 G：D空间 $\to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}_N^{\omega,\beta}[G] := \frac{1}{Z_N^{\omega,\beta}} \mathrm{E}\Big[G(S^{(N)}) \prod_{n=1}^{N}(1+\beta\omega_{n,S_n})\Big]\,.$$

然后我们 定向聚合物测度向连续对象有如下收敛 t.

定理 3.6 (长程定向聚合物的中间无序)。 在与定理 *3.5* 相同的假设下，对于每个$\hat{}\ \beta \in [0,\infty)$，存在一个随机概率测度$\mathbf{Q}^{\zeta,\ \hat{\beta}}$定义在 D空间上，使得以下依分布收敛在 $M_1(D$空间$)$中成立，

$$\mathrm{P}_N^{\omega,\beta_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{(d)} \mathbf{Q}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}\,.$$

该收敛与离散噪声收敛至 $\boldsymbol{\zeta}$同时成立。我们将测度$\hat{}\mathbf{Q}^{\zeta,\ \beta}$称为具有 γ-稳定 Lévy噪声的连续长程定向聚合物模型。

我们提到，定理 3.5-3.6 是 [BL21]，中定理 2.1 和 2.4 的对应结果，其中结果是在简单随机游走的情形下得到的（这对应于 $\alpha = 2$）。因此，我们的结果更为一般，并且完全回答了 [BL21，第 2 节中的问题。2] （注意， γ 和 α 的作用是相反的）。

最后，我们提及以下结果，以结束对情形的讨论：在 (3.15) 中，有$\hat{}\ \beta = 0\hat{}$（弱无序）或 $\beta = +\infty$ （强无序）。

定理 3.7。 设随机游走 $(S_n)^{n\geq 0}$ 满足第 *3.2.1* 节的假设，并假设$1 + \frac{\alpha}{d} > \gamma - 1$。

–

(i) 若$\lim_{N\to+\infty} \beta_N V_N(a_N)^{-d} = 0$，则 $Z^{\omega,}{}_N{}^{\beta_N}$依概率（且在 L^1 中）趋于1。

(ii) 若$\lim_{N\to+\infty} \beta_N V_N(a_N)^{-d} = +\infty$，则 $Z^{\omega,}{}_N{}^{\beta_N}$依概率趋于$0$。

这表明，第 2.3.3 节讨论的无序相关性性质同样适用于长程定向聚合物模型。

3.2.3. 进一步讨论与展望。 对于该模型，每个 $1 \leqslant M \leqslant N$和 $x, y \in \mathbb{Z}^d$都定义了点到点配分函数，其定义为

$$Z^{\omega,\beta,c}_{M,N}(x,y) := \mathrm{E}\Big[\prod_{n=M+1}^{N} (1+\beta\omega_{n,S_n})\mathbb{1}_{S_N=y} \mid S_M = x\Big]\,.$$

对于 $x \in \mathbb{R}^d$，我们将 x 在 $\mathbb{Z}^d$中的一个最近邻记为 $\lfloor x \rfloor$。我们的方法可加以调整，以证明存在一个$\hat{}$过程 $\big(\mathcal{Z}^{\zeta\ \beta}_{s\ t},(x,y)\big)_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\ x,y\in\mathbb{R}^d}$，使得

$$(a_N)^{-1} Z^{\omega,\beta_N,c}_{\lfloor Ns\rfloor,\lfloor Nt\rfloor}\big(\lfloor a_N x\rfloor, \lfloor a_N y\rfloor\big) \xrightarrow[N\to+\infty]{(d)} \mathcal{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}_{s,t}(x,y)\,, \tag{3.17}$$

在有限维分布的意义下。极限过程是与下述随机分数阶热方程相关联的流的候选解

$$\partial_t u(t,x) = \mathcal{L}_\alpha u(t,x) + \hat{\beta}\,\boldsymbol{\zeta}(t,x)\cdot u(t,x)\,, \quad t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d\,. \tag{3.18}$$

这里，$\mathcal{L}_\alpha$ 表示指标为 α的分数阶拉普拉斯算子，而 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 γ-稳定噪声。当 $\alpha = 2$时，$\mathcal{L}_\alpha$ 退化为标准拉普拉斯算子$\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j,\ x_j}$，此时（3.18）变为带乘性噪声的随机热方程（SHE）。当噪声 $\boldsymbol{\zeta}$ 为高斯噪声时，该方程已得到广泛研究。在这种情况下，SHE 解的 Cole-Hopf 变换预计将满足 KPZ 方程；KPZ 方程是一种描述随机生长前沿演化的奇异随机偏微分方程；近年来，这一方向取得了突破性进展 [CSZ20；CSZ23]。研究 SHE 的另一个重要动机是局域化或间歇性 [Zel+87；CM94]现象。非正式地说，这指的是随机场在大时间下出现尖锐峰值的现象（$u(t,\ x))_{t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^d}$，其中 u 是（3.18）的一个解。

关于由莱维噪声驱动的随机热方程，早期研究成果见 [Sai98]，，但其对莱维测度的假设排除了 γ-稳定噪声。在 γ-稳定情形下， [BCL23] 证明了存在性、唯一性和间歇性（另见 [CK23]）。

正如关于随机沃尔泰拉方程时已经提到的，将收敛（3.17）加强为在适当函数空间中的收敛会很有意义。我们同样预期时间方向上具有右连续且有左极限正则性。空间正则性则是一个更为微妙且研究较少的问题，尤其是考虑到间歇性。关于这一方向的相关结果，请参见 [CDH18] 。

4. 混沌的重要 L^p 估计

本节证明离散混沌和连续混沌的有用且一般的矩不等式。特别是，这些不等式说明了为什么我们需要在第 2.4 节引入对称范数。本节的所有设定和记号均与第 2 节相同。

称函数 $\mathbf{f}\colon \Omega^k \mapsto \mathbb{R}$ 在对角线上为零，如果只要存在两个指标 $i \neq j$ 使得 $x_i = x_j$，就有 $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) = 0$。我们现在给出两个基于在对角线上为零的对称函数的混沌结果：一个关于离散混沌，一个关于连续混沌。在这两种情形下，所述不等式的含义是：若右端有限，则左端有良好定义，且此时不等式成立。随后我们将这些不等式应用于 k 点相关函数 $\frac{1}{k}\,!\psi^{(k)}$。

定理 4.1. 假设 ω 是中心化的，并且对 $\gamma \in (1,2)$ 满足 (2.11) 。对每一个 $p \in (1, \gamma)$ 以及 $q \in (\gamma, 2]$，存在常数 $C_0 = C_0(p, q, \gamma, \Omega)$，使得对每一个 $k \geqslant 1$、$\delta \in (0, 1)$ 以及对称且在对角线上为零的 $f : \Omega_\delta^k \to \mathbb{R}$：

$$\left\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1, \ldots, x_k \in \Omega_\delta} f(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \frac{\omega_{x_j}}{V_\delta} \right\|_p \leqslant (C_0)^k \left\| \overline{f} \right\|_q . \tag{4.1}$$

这里我们回顾一下，V_δ 由关系(2.12)定义（精确到渐近等价），而 f 是(2.9)中引入的 f 的分段延拓。

关于常数 C_0 如何依赖于 p, q, γ, Ω，请参见注 2.4（见（2.8））。

定理 4.2。 假设 ζ 是 γ-稳定 *Lévy* 白噪声，且 $\gamma \in (1,2)$。对于任意 $p \in (1, \gamma)$ 和 $q \in (\gamma, 2]$，定理 *4.1* 中的常数 C_0 满足：对于任意 $k \geqslant 1$, $a \in (0, 1]$ 以及 $\mathbf{f}\colon \Omega^k \mapsto \mathbb{R}$，若其为对称函数且在对角线上为零，

$$\left\| \frac{1}{k!} \int_{\Omega^k} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \boldsymbol{\zeta}^{(a)}(\mathrm{d}x_j) \right\|_p \leqslant (C_0)^k \|\mathbf{f}\|_q . \tag{4.2}$$

4.1. 解耦不等式及其若干推论。 定理 4.1 和 4.2 的证明所需的一项关键工具是所谓的解耦不等式。关于这些方法的概述，请参见 [PG00] 。出于教学考虑，我们回顾一下在本文设定中使用的主要定义和不等式。仅在本节中，我们不再针对一般求和指标 Ω_δ 进行讨论，而是对形如 $[\![1, N]\!] = \{1, \ldots, N\}$ 的集合求和，其中 N 是 Ω_δ 中的点数。此外，我们不再使用在对角线上为零的对称函数，而是使用四面体函数，即定义在 $(n_1, \ldots, n_k)$ 上且满足 $n_1 < \ldots < n_k$ 的函数。本节的主要结果（下文的定理 4.3）很容易推广到定理 4.1 的设定中，且估计对 N 一致——这一点将在第4.2节中证明。连续混沌的相应推广将在第4.3节中完成。

4.1.1. 结果陈述。 令 $k \geqslant 1$，并且对每个 $1 \leqslant j \leqslant k$，令 $\omega^{(j)} = (\omega_n^{(j)})_{n \geqslant 1}$ 为一个由独立且中心化随机变量组成的序列。我们不假设序列 $\omega^{(j)}$ 彼此独立或同分布，但要求它们联合地按层独立。这意味着，对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{L}_n = \sigma(\omega_n^{(j)}, 1 \leqslant j \leqslant k)$ 表示“层 n” σ-代数，则 $(\mathcal{L}_n)_{n \geqslant 1}$ 构成一个独立族。例如，令 $\omega = (\omega_n)_{n \geqslant 1}$ 为一个独立随机变量序列，并对每个 $1 \leqslant j \leqslant k$ 定义 $\omega^{(j)} = \omega$：那么，序列 $\omega^{(j)}$ 虽然相同，但仍然按层独立。

对于任意 $k \geqslant 1$ 和 $N \geqslant 1$，令 $\mathcal{T}_N^k$ 表示定义在四面体上的函数集合

$$\{(n_1, \ldots, n_k) \in [\![1, N]\!], 1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k \leqslant N\}.$$

对于 $f \in \mathcal{T}_N^k$，定义

$$X_N(f; \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}) := \sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k \leqslant N} f(n_1, \ldots, n_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{n_j}^{(j)}.$$

解耦不等式比较随机变量 $X_N(f;\,\omega^{(1)},\,\ldots\ldots,\,\omega^{(k)})$ 的分布与同一随机变量在将随机序列 $\omega^{(1)},\,\ldots\ldots,\,\omega^{(k)}$ 替换为相互独立的版本后的分布。

定理 4.3 ($\mathbb{L}^p$ 解耦不等式)**.** 存在一个常数 C_1，使得对于每个 $p\in(1,2],$，任意 $k\geqslant 1$、$N\geqslant 1$ 以及任意四面体函数 $f\in \boldsymbol{T}^{\,k}_N$,

$$\left\|X_N(f;\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)})\right\|_p \leqslant \Big(\frac{C_1}{p-1}\Big)^k \left\|X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})\right\|_p, \tag{4.3}$$

其中，随机序列 $\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)}$ 相互独立，并且对于每个 $1\leqslant j\leqslant k$，$\tilde{\omega}^{(j)}$ 与 $\omega^{(j)}$ 具有相同分布。

注意，随机变量 $X_N(f;\,\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)})$ 是U统计量的一个例子，解耦不等式在这一领域由来已久；有关该主题的介绍，请参阅 [PG00] 。不过需要强调的是，定理 4.3 的解耦不等式有一个显著特点：其中对 k 的依赖形式为 C_1^k，且常数 C_1 为普适常数。一般的U统计量并不具备这一性质，而且本文用于推导该不等式的方法与通常用于获得解耦不等式的技术大不相同。例如，在 [PM95], 中，作者得到了更一般的解耦不等式，但其中对 k 的依赖形式为 C^{k^2}。

我们将定理 4.3 的证明推迟到下文第 4.1.3 节，先推导一些推论。

4.1.2. 一些有用的推论。 由定理 4.3，我们可以推出以下推论；就我们的目的而言，这是本节最有用的结果。

推论 4.4。 假设 $\omega^{(j)}=(\omega_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ 是相互独立且中心化的随机变量序列。存在一个常数 C_2，使得对每个 $p\in(1,2],$、每个 $k\geqslant 1$、$N\geqslant 1$ 以及任意四面体函数 $f\in \boldsymbol{T}^{\,k}_N$,

$$\left\|X_N(f;\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)})\right\|_p \leqslant \Big(\frac{C_2}{p-1}\Big)^k \left(\sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N} |f(n_1,\ldots,n_k)|^p \prod_{j=1}^k \|\omega_{n_j}^{(j)}\|_p^p\right)^{1/p}.$$

证明。 首先应用定理 4.3：我们得到

$$\left\|X_N(f;\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)})\right\|_p \leqslant \Big(\frac{C_1}{p-1}\Big)^k \left\|X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})\right\|_p. \tag{4.4}$$

现在固定 $k-1$ 前面的变量 $\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k-1)}$ 于 $X_N(f;\,\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})$ 中，并将 $\mathcal{F}_n^{(k)}=\sigma(\tilde{\omega}_i^{(k)}\,,i\leq n)$ 记作 $n\geq 1$。接着，我们考虑 $\mathcal{F}_n^{(k)}$-鞅

$$X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)}) = \sum_{n=1}^N F(n)\tilde{\omega}_n^{(k)}$$

其中 $n\geqslant 1$,

$$F(n) := \sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_{k-1}<n} f(n_1,\ldots,n_{k-1},n)\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{\omega}_{n_j}^{(j)},$$

并注意到 $F(n)$ 是与 $(\mathcal{F}_n^{(k)})_{n\geqslant 1}$ 相互独立的随机变量。应用 Burkholder– Davis–Gundy（BDG）不等式 [BDG72]（另见下文命题 4.7），可得

$$\|X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})\|_p \leq C_p\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^N F(n)^2(\tilde{\omega}_n^{(k)})^2\right)^{p/2}\right]^{1/p},$$

对于某个常数 C_p （它对于 $p\in[1,2]$ 一致地被一个普适常数所界）。由于 $p/2\in[0,1]$，我们可以对任意非负的 a_i 使用不等式 $\big(\sum_i a_i\big)^{p/2}\leq\sum_i a_i^{p/2}$，从而得到上述量被以下表达式所界

$$C_p\Big(\sum_{n=1}^N \mathbb{E}\big[|F(n)|^p\big]\mathbb{E}\big[|\omega_n^{(k)}|^p\big]\Big)^{1/p},$$

同时利用（$\tilde{\omega}_i^{(k)}$）$_{i\geq 1}$ 与（$\omega_i^{(k)}$）$_{i\geq 1}$ 具有相同分布。

总而言之，若对于任意 $1\leqslant n_k\leqslant N$，我们记 $f_{n_k}(n_1,\ldots\ldots,n_{k-1})=f(n_1,\ldots\ldots,n_k)$，那么 $f_{n_k}\in\mathcal{T}_{(k-1)^{n_k-1}}$，并回顾 $F(n)$ 的定义，可得 $F(n_k)=X_{n_k-1}(f_{n_k};\tilde{\omega}^{(1)},\ldots\ldots,\tilde{\omega}^{(k-1)})$，因此

$$\left\|X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})\right\|_p^p\leqslant(C_p)^p\sum_{n_k=1}^{N}\left\|X_{n_k-1}(f_{n_k};\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k-1)})\right\|_p^p\left\|\omega_{n_k}^{(k)}\right\|_p^p.$$

接下来，我们可以反复应用这个不等式，最终得到

$$\left\|X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})\right\|_p^p\leqslant(C_p)^{pk}\sum_{1\leq n_1<\cdots<n_k\leq N}|f(n_1,\ldots,n_k)|^p\prod_{j=1}^{k}\left\|\omega_{n_j}^{(j)}\right\|_p^p. \tag{4.5}$$

结合式 (4.4)，推论 4.4 的证明至此完成。 □

备注 4.5. 我们强调，推论 *4.4* 在下文中将非常有用，但它并非完全尖锐，这与定理 *4.1* 不同。例如，考虑 $k=1$ 且随机变量 ω 独立同分布的情形，如 (2.11) 所示，具有纯多项式尾，即 $\mathbb{P}(|\omega|>t)\sim t^{-\gamma}$ 当 $t\to\infty$。这是一个经典事实，参见 *[Fel66，第 XVII 页。γ],*，有

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}f(n)\omega_n\propto\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|f(n)|^\gamma\Big)^{1/\gamma},$$

也就是说，左侧与右侧之比依分布收敛到一个非退化的（γ-稳定）随机变量；这对应于中心极限定理的重尾类比。接下来，我们注意到，推论 *4.4* 并未体现这一正确的标度，因为无法将该不等式应用于 $p=\gamma$。推论 *4.4* 的局限在于，它没有充分利用 ω 的完整重尾结构；事实上，对于任何具有有限 $\mathbb{L}^p$ 阶矩的随机变量 ω，该推论都成立。

在转向定理 4.3 的证明之前，鉴于上述评论，我们先陈述一个略强的推论 4.4 版本。为了充分利用重尾结构，我们需要对某些随机变量族 $\omega^{(j)}$ 进行 L^p 估计，并对其余随机变量进行带有$p\neq q$ 的 L^q 估计：在下文的陈述中，集合 $I\subset[\![1,k]\!]$ 被视为用于进行 L^p 估计的指标集合。

推论 4.6. 存在一个常数 C_2，使得对于每个 $p\in(1,2]$ 和 $p\leq q\leq 2$，对于每个 $k\geqslant 1$、$N\geqslant 1$ 和 $I\subset[\![1,k]\!]$，对于任意四面体函数 $f\in T_N^k$，

$$\begin{aligned}&\left\|X_N(f;\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)})\right\|_p\\&\leqslant\Big(\frac{C_2}{p-1}\Big)^k\Bigg(\sum_{n_i,i\in I}\prod_{i\in I}\|\omega_{n_i}^{(i)}\|_p^p\Big(\sum_{\substack{n_i,i\notin I\\1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}}|f(n_1,\ldots,n_k)|^q\prod_{i\notin I}\|\omega_{n_i}^{(i)}\|_q^q\Big)^{p/q}\Bigg)^{1/p}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

此外，应用詹森不等式（对第一项求和）可知，上述量有如下界：

$$\Big(\frac{C_2}{p-1}\Big)^k N^{|I|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Bigg(\sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}|f(n_1,\ldots,n_k)|^q\prod_{i\in I}\|\omega_{n_i}^{(i)}\|_p^q\prod_{i\notin I}\|\omega_{n_i}^{(i)}\|_q^q\Bigg)^{1/q}.\tag{4.7}$$

证明。由 the $\mathrm{d}_{\text{ecoup}}$ ling $\mathrm{i}_{\text{nequa}}$ lity of Theorem 4.3 weon ly 需要d to treat $X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\cdots\cdots\tilde{\omega}^{(k)})$, th 当序列 $\tilde{\omega}^{(j)}$ 相互独立时。

令 $I\subset[\![1,\ k]\!]$ 并对每个指标 $(n_i)_{i\in I}$定义随机变量

$$g((n_i)_{i\in I})=\sum_{\substack{n_i,i\notin I\\1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}}f(n_1,\ldots,n_k)\prod_{i\notin I}\tilde{\omega}_{n_i}^{(i)}.$$

注意到 随机变量 $g((n_i)_{i\in I})$ 与随机序列 $\tilde{\omega}^{(i)}$ for $i\in I$ 相互独立。重写 g

$$X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}^{(k)})=\sum_{n_i,i\in I}g((n_i)_{i\in I})\prod_{i\in I}\tilde{\omega}_{n_i}^{(i)},$$

因此，我们可以对随机变量 $\tilde{\omega}^{(i)}$for $i \notin I$ 有条件地应用推论 4.4，更准确地说是 (4.5)。我们得到

$$\left\| X_N(f;\tilde{\omega}^{(1)},\dots,\tilde{\omega}^{(k)}) \right\|_p \leq (C_p)^{|I|} \Big(\sum_{n_i, i\in I} \prod_{i\in I} \|\omega_{n_i}^{(i)}\|_p^p \mathbb{E}\Big[\big| g((n_i)_{i\in I}) \big|^p \Big] \Big)^{1/p}.$$

现在，利用詹森不等式，由于 $p \leq q$，我们得到

$$\mathbb{E}\Big[\big| g((n_i)_{i\in I}) \big|^p \Big] \leq \mathbb{E}\Big[\big| g((n_i)_{i\in I}) \big|^q \Big]^{p/q}.$$

现在再次应用推论 4.4（更准确地说，应用 (4.5)），得到

$$\mathbb{E}\Big[\big| g((n_i)_{i\in I}) \big|^q \Big]^{1/q} \leqslant (C_q)^{k-|I|} \Big(\sum_{\substack{n_i, i\notin I \\ 1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}} |f(n_1,\dots,n_k)|^q \prod_{i\notin I} \|\omega_{n_i}^{(i)}\|_q^q \Big)^{1/q}.$$

综合以上结果，回顾 (4.4) 以及 C_p，C_q 均由一个普适常数界定这一事实，证明即告完成。

□

4.1.3. 定理 *4.3* 的证明。 该证明基于鞅理论中的两个初等结果，是对连续版本证明的直接改编；该证明可见于 [BCL23]。

陈述下面将用到的两个结果。设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间，且 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$为一个滤过。第一个结果是离散鞅的 BDG 不等式，参见 [BDG72，定理 1.1]。

命题 4.7 (BDG 不等式)。 设$(M_n)_{n\geqslant 1}$ 是相对于$(F_n)_{n\geqslant 1}$ 的鞅，且满足$M_0 = 0$。记 $\langle M\rangle$为其二次变差，即 $\langle M\rangle^2 = \sum_{n\geqslant 1}(M_n - M_{n-1})^2$且 $M^* =$上确界$_{n\geqslant 1}|M_n|$。那么，对于任意 $p \geqslant 1$，存在一个常数 C_p，它仅依赖于 p（并且关于 $p \in [1,2]$一致有界），使得

$$\frac{1}{C_p}\,\mathbb{E}\big[\langle M\rangle^{p/2}\big] \leqslant \mathbb{E}\big[(M^*)^p\big] \leqslant C_p\,\mathbb{E}\big[\langle M\rangle^{p/2}\big]. \tag{4.8}$$

第二个结果讨论切过程。若对所有 $n \geqslant 1$ 和所有 $t \in \mathbb{R}$，几乎处处有 $\mathrm{P}[e_n \geqslant t|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathrm{P}[d_n \geqslant t|\mathcal{F}_{n-1}]$，则称两个适应过程 $(d_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是相切的 。以下结果的证明见 [Hit88，定理 2]。

命题 4.8 (比较切过程的 $\mathbb{L}^p$ 范数)。 设$(e_n)_{n\geqslant 1}$ 和$(d_n)_{n\geqslant 1}$ 是两个相切的非负过程。那么对于任意 $p > 0$，存在一个常数 C'_p，使得

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n\geqslant 1} e_n \Big)^p \Big] \leqslant C'_p\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n\geqslant 1} d_n \Big)^p \Big].$$

这一最后命题的显著特点是，它对于 $p \in (0,1]$ 也成立，而且尤其不需要凸性；事实上，对于 $p \in (0,1]$ （更一般地说，对于凹函数），可以取 $C_p = 6$，见[Hit88，第 228] 页。这对我们至关重要，因为我们将把它应用于 $p/2 \leq 1$。

注 4.9。 上述两个结果实际上都适用于一个更一般的情形，该情形严格包含$\mathbb{L}^p$ 范数。因此可以预期，定理 *4.1* 的结果对更一般的泛函也成立。不过，我们最终会使用 *Doob* 不等式，而这正是我们必须将范围限制在$\mathbb{L}^p$ 范数上的原因。

定理 *4.3* 的证明。我们的主要目标是证明，存在一个常数 C_1，使得对于每个$1 \leqslant i \leqslant k$,

$$\left\| X_N(f;\omega^{(1)},\dots,\omega^{(i)},\tilde{\omega}^{(i+1)},\dots,\tilde{\omega}^{(k)}) \right\|_p \leqslant C_1 \left\| X_N(f;\omega^{(1)},\dots,\omega^{(i-1)},\tilde{\omega}^{(i)},\tilde{\omega}^{(i+1)},\dots,\tilde{\omega}^{(k)}) \right\|_p.$$

通过迭代即可轻松得到证明。此外，对随机变量 $\tilde{\omega}^{(i+1)},\dots,\tilde{\omega}^{(k)}$ 进行条件化后，实际上只需证明 $i = k$ 的情形。

对于 $N \geq 1$，定义 σ 代数 $\mathcal{F}_N = \sigma(\omega_n^{(j)}, 1 \leqslant j \leqslant k, 1 \leqslant n \leqslant N;\ \tilde{\omega}_n^{(k)}, 1 \leqslant n \leqslant N)$。于是，过程 $(X_N(f;\ \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}))_{N \geqslant 1}$ 和 $(X_N(f;\ \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k-1)}, \tilde{\omega}^{(k)}))_{N \geqslant 1}$ 相对于滤过 $(\mathcal{F}_N)_{N \geqslant 1}$ 都是鞅。因此，根据 BDG 不等式（命题 4.7），我们有

$$\left\| X_N(f; \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}) \right\|_p \leqslant C_p \, \mathbb{E}\left[\left\langle X(f; \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}) \right\rangle_N^{p/2} \right]^{1/p}.$$

过程 $(\langle X(f;\ \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}) \rangle_N)_{N \geqslant 1}$ 的增量由下式给出

$$e_N = \left(\sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_{k-1} < N} f(n_1, \ldots, n_{k-1}, N) \prod_{j=1}^{k-1} \omega_{n_j}^{(j)} \omega_N^{(k)} \right)^2,$$

它们是非负的。由于 $\tilde{\omega}^{(k)}$ 与 $\omega^{(k)}$ 同分布，并且借助联合层独立性，$(e_N)_{N \geqslant 1}$ 与 $(d_N)_{N \geqslant 1}$ 相切，其中

$$d_N = \left(\sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_{k-1} < N} f(n_1, \ldots, n_{k-1}, N) \prod_{j=1}^{k-1} \omega_{n_j}^{(j)} \tilde{\omega}_N^{(k)} \right)^2.$$

现在我们注意到，$(d_N)_{N \geqslant 1}$ 恰好是 $(X_N(f;\ \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k-1)}, \tilde{\omega}^{(k)}))_{N \geqslant 1}$ 的二次变差的增量过程。因此，由命题 4.8，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| X_N(f; \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}) \right\|_p &\leqslant C_p C'_{p/2} \, \mathbb{E}\left[\left\langle X(f; \omega^{(1)}, \ldots, \tilde{\omega}^{(k)}) \right\rangle_N^{p/2} \right]^{1/p} \\
&\leqslant C_p^2 C'_{p/2} \left\| \sup_{1 \leqslant n \leqslant N} X_n(f; \omega^{(1)}, \ldots, \tilde{\omega}^{(k)}) \right\|_p \\
&\leqslant C_p^2 C'_{p/2} \frac{p}{p-1} \left\| X_N(f; \omega^{(1)}, \ldots, \tilde{\omega}^{(k)}) \right\|_p,
\end{aligned}$$

其中，我们对第二个不等式应用了反向 BDG 不等式，并对最后一个不等式应用了 Doob 不等式。至此完成定理 4.3 的证明，其中 $C_1 = \sup_{p \in [1,2]} \{ p C_p^2 C'_{p/2} \}$。□

4.2. 离散混沌的应用：定理 4.1 的证明。 首先，让我们在多项式混沌的背景下重新表述推论 4.6。对于 $k \geqslant 1$，设 $\omega^{(j)} = (\omega_x^{(j)})_{x \in \Omega_\delta}$, $1 \leqslant j \leqslant k$ 为独立同分布且中心化的随机变量序列，并且联合层独立（其定义见第4.1节开头）。作为推论 4.6 的一个简单推论，我们得到如下结果。

命题 4.10. 存在常数 C_2，使得对每个 $p \in (1, 2]$ 与 $p \leq q \leq 2$，对每个 $k \geqslant 1$、$\delta > 0$ 与 $J \subset [\![1, k]\!]$，对任意在对角线上消失的对称函数 $f\colon \Omega_\delta^k \to \mathbb{R}$，

$$\left\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1, \ldots, x_k \in \Omega_\delta} f(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{x_j}^{(j)} \right\|_p \leqslant \left(\frac{C_2}{p-1} \right)^k |\Omega|^{|J|(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\overline{f}\|_q \prod_{j \in J} \frac{\|\omega^{(j)}\|_p}{v_\delta^{1/p}} \prod_{j \notin J} \frac{\|\omega^{(j)}\|_q}{v_\delta^{1/q}}.$$

这里回顾一下，$\overline{f}$ 是 f 的分段常值延拓，而 v_δ 是 Ω_δ 中任意单元的体积。

Note that we may also bound $|\Omega|^{|J|(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \leq (|\Omega| \vee 1)^{k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}$ since $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0$ in the above.

证明。由于集合 Ω_δ 是有限的，只需对 $\Omega_\delta = [\![1, N]\!]$ 证明该结果，其中 N 是 Ω_δ 的元素个数（也就是单元的个数）。然后，令 $\mathfrak{S}_k$ 为 $[\![1, k]\!]$ 的对称群，我们可以写成

$$\frac{1}{k!} \sum_{n_1, \ldots, n_k \in [\![1, N]\!]} f(n_1, \ldots, n_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{n_j}^{(j)} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k \leqslant N} f(n_1, \ldots, n_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{n_j}^{(\sigma(j))}.$$

接着，对于每个固定的 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ 和 $I = \sigma^{-1}(J)$，我们都可以应用推论 4.6-(4.7)，从而得到

$$\Big\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} f(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{x_j}^{(j)} \Big\|_p \\ \leq \Big(\frac{C_2}{p-1}\Big)^k \prod_{j\in J} \|\omega^{(j)}\|_p \prod_{j\notin J} \|\omega^{(j)}\|_q \times N^{|J|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Big(\sum_{1\leqslant n_1<\dots<n_k\leqslant N} |f(n_1,\dots,n_k)|^q \Big)^{1/q},$$

这里我们用到了这样一个事实：对于每个固定的 $j \in [\![1,\ k]\!]$，随机变量 $(\omega_n^{(j)})$ 同分布。现在注意到，利用 f 的对称性并回顾 $\|f\|_q$ 的公式 (2.10)，我们有

$$N^{|J|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Big(\sum_{1\leqslant n_1<\dots<n_k\leqslant N} |f(n_1,\dots,n_k)|^q \Big)^{1/q} = |\Omega|^{|J|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (v_\delta)^{-|J|/p} (v_\delta)^{-(k-|J|)/q} \big\|\overline{f}\big\|_q ,$$

同时也用到了 $|\Omega| = N v_\delta$ 这一事实。至此，证明完成。 □

现在我们可以完成定理 4.1 的证明了。

定理 *4.1* 的证明。 对每个 $x \in \Omega_\delta$，定义截断随机变量

$$\hat{\omega}_x = \omega_x \mathbb{1}_{|\omega_x|>V_\delta} - \mathbb{E}[\omega_x \mathbb{1}_{|\omega_x|>V_\delta}], \tag{4.9}$$

and

$$\check{\omega}_x = \omega_x \mathbb{1}_{|\omega_x|\leqslant V_\delta} - \mathbb{E}[\omega_x \mathbb{1}_{|\omega_x|\leqslant V_\delta}]. \tag{4.10}$$

特别地，我们有 $\omega_x = \hat{\omega}_x + \check{\omega}_x$，且 $\mathrm{E}[\hat{\omega}_x] = \mathrm{E}[\check{\omega}_x] = 0$。展开乘积 $\prod_{j=1}^k (\hat{\omega}_{x_j} + \check{\omega}_{x_j})$ 并应用闵可夫斯基不等式，得到

$$\Big\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} f(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{x_j} \Big\|_p \leqslant \sum_{J\subset[\![1,k]\!]} \Big\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} f(x_1,\dots,x_k) \prod_{j\in J} \hat{\omega}_{x_j} \prod_{j\notin J} \check{\omega}_{x_j} \Big\|_p .$$

对于每个子集 $J \subset [\![1,k]\!]$，我们应用命题 4.10，对变量 $\hat{\omega}$ 使用 L^p 估计，对变量 $\check{\omega}$ 使用 L^q估计，其中 $p \in (1,\gamma)$ 和 $q \in (\gamma,2]$。由此得到

$$\Big\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} f(x_1,\dots,x_k) \prod_{j\in J} \hat{\omega}_{x_j} \prod_{j\notin J} \check{\omega}_{x_j} \Big\|_p \leqslant \Big(\frac{C_2}{p-1}(|\Omega|\vee 1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big)^k \|\overline{f}\|_q \Big(\frac{\|\hat{\omega}\|_p}{v_\delta^{1/p}}\Big)^{|J|} \Big(\frac{\|\check{\omega}\|_q}{v_\delta^{1/q}}\Big)^{k-|J|}.$$

然后，对 $J \subset [\![1,k]\!]$ 求和，得到

$$\Big\| \frac{1}{k!} \sum_{x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta} f(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^{k} \omega_{x_j} \Big\|_p \leqslant \Big(\frac{C_2}{p-1}(|\Omega|\vee 1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big)^k \|\overline{f}\|_q \Big(\frac{\|\hat{\omega}\|_p}{v_\delta^{1/p}} + \frac{\|\check{\omega}\|_q}{v_\delta^{1/q}}\Big)^k. \tag{4.11}$$

利用随机变量 $|\omega|$ 的尾部由 (2.11) 给出的事实，根据正则变函数的性质可以容易地验证，对于任意固定的 $p<\gamma$ 和 $q>\gamma$，当 $t\to\infty$ 时，我们有

$$\mathbb{E}[|\omega|^p \mathbb{1}_{|\omega|>t}] \sim \frac{\gamma}{\gamma-p}\, t^{p-\gamma}\varphi(t) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}[|\omega|^q \mathbb{1}_{|\omega|\leqslant t}] \sim \frac{\gamma}{q-\gamma}\, t^{\gamma-q}\varphi(t).$$

特别地，回顾 V_δ 的定义 (2.12)，可得对任意 $a>0$

$$\begin{aligned} &\text{for } 0<p<\gamma, \qquad \mathbb{E}[|\omega|^p \mathbb{1}_{|\omega|>aV_\delta}] \underset{\delta\to 0}{=} (1+o(1))\frac{\gamma}{\gamma-p} a^{p-\gamma}(V_\delta)^p v_\delta, \\ &\text{for } q>\gamma \qquad \mathbb{E}[|\omega|^q \mathbb{1}_{|\omega|\leqslant aV_\delta}] \underset{\delta\to 0}{=} (1+o(1))\frac{\gamma}{q-\gamma} a^{q-\gamma}(V_\delta)^q v_\delta . \end{aligned} \tag{4.12}$$

（我们加入了参数 $a>0$ 以备将来使用，但在这个证明中，我们只将它用于 $a=1$。）特别地，我们得到存在某个常数 C（它不依赖于 p，q 或 γ），使得对每个 $\delta>0$,

$$\|\hat{\omega}\|_p \leqslant \frac{C}{(\gamma-p)^{1/p}} v_\delta^{1/p} V_\delta \qquad \text{and} \qquad \|\check{\omega}\|_q \leqslant \frac{C}{(q-\gamma)^{1/q}} v_\delta^{1/q} V_\delta . \tag{4.13}$$

将这些估计代入 (4.11)，得到上界 $(C_0)^k(V_\delta)^k\|f\|_q$，其中常数

$$C_0 = \frac{2CC_2}{p-1}\max\{(\gamma-p)^{-1/p},(q-\gamma)^{-1/q}\}\left(|\Omega|\vee 1\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

如注 2.4 所述。证明至此完成。 □

4.3. **连续混沌的应用：定理 4.2 的证明**。在本节中，我们证明定理 4.2。我们的策略是先对简单函数证明 4.2，然后通过稠密性论证得出结论。固定 $k\geqslant 1$。简单对称函数 $\mathbf{f}\colon \Omega^k\to\mathbb{R}$ 是形如以下形式的可测函数

$$\mathbf{f} = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k\leqslant M} \alpha_{i_1,\dots,i_k}\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_k}}, \tag{4.14}$$

其中，可测集 $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant M}$ 构成 Ω 的一个划分，系数 $\alpha_{i_1,\dots,i_k}$ 是对称的，并且满足 $\alpha_{i_1,\dots,i_k}=0$，若对某个 $l\neq m$, $i_l=i_m$。特别地，对称简单函数在对角线上为零。对每个 $a\in(0,1)$，我们定义

$$\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}) = \frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}^{(a)}(\mathrm{d}x_j).$$

对每个 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$ 和 $p\geqslant 1$，定义噪声 $\boldsymbol{\zeta}$ 的截断矩，

$$m_p(a,b) = \int_{\mathbb{R}}|z|^p\mathbb{1}_{a<|z|\leqslant b}\lambda(\mathrm{d}z). \tag{4.15}$$

在我们的情形中，莱维测度 λ是显式的，我们可以计算截断矩，但以下结果更为一般（见定理 2.11 及此前的讨论）。

命题 4.11. 存在一个普适常数 C_3，使得对于每个 $1<p<q\leqslant 2$、每个$a\in(0,1)$ 以及每个简单对称函数 $\mathbf{f}\colon \Omega^k\to\mathbb{R}$,

$$\left\|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})\right\|_p \leqslant \Big(\frac{C_3}{p-1}(|\Omega|\vee 1)^{1/p-1/q}\Big)^k\Big(m_p(1,+\infty)^{1/p}+m_q(a,1)^{1/q}\Big)^k\|\mathbf{f}\|_q.$$

定理 *4.2* 的证明。若莱维测度为 $\lambda(\mathrm{d}z)=(c_+\mathbb{1}_{z>0}+c_-\mathbb{1}_{z<0})\gamma|z|^{-1-\gamma}\mathrm{d}z$，则对于每个$p\in(1,\gamma)$ 和 $q\in(\gamma,2)$,

$$m_p(1,+\infty)\leqslant\frac{2\gamma}{\gamma-p},\ \text{and}\quad m_q(a,1)\leqslant m_q(0,1)\leqslant\frac{2\gamma}{q-\gamma}.$$

这就证明了定理 4.2 对简单函数成立，且常数有界于 C_0。

接下来需要处理一般函数$\mathbf{f}\in L^q_s(\Omega^k)$，我们将通过稠密性论证来说明。对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，设 $\mathbf{f}^{(\varepsilon)}$ 是一个简单对称函数，当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，它在 $L^q_s(\Omega^k)$ 中逼近 $\mathbf{f}$。然后，对 $\mathbf{f}^{(\varepsilon)}-\mathbf{f}^{(\varepsilon')}$ 应用 (4.2)，其中 $\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1)$，得到

$$\left\|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}^{(\varepsilon)})-\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}^{(\varepsilon')})\right\|_p\leqslant(C_0)^k\left\|\mathbf{f}^{(\varepsilon)}-\mathbf{f}^{(\varepsilon')}\right\|_q.$$

由于$\mathbf{f}^{(\varepsilon)}$在 $L^q_s(\Omega^k)$中当 $\varepsilon\downarrow 0$时收敛，因此随机变量族$\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}_{(\varepsilon)})$是$\mathbf{L}^p$中的柯西序列。因此，它收敛于随机变量$\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}):=\frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}^{(a)}(\mathrm{d}x_j)$，并且该随机变量满足（4.2）。$\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})$的定义不依赖于近似$\mathbf{f}^{(\varepsilon)}$的选取，也不依赖于 p。

□

命题 *4.11* 的证明。对每个 $i\in[\![1,\ k]\!]$, $\omega_i=\boldsymbol{\zeta}^{(a)}(A_i)$ 记作。系数$\alpha_{i_1,\dots,i_k}$ 的性质表明

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}^{(a)}(\mathrm{d}x_j) &= \frac{1}{k!}\sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k\leqslant M}\alpha_{i_1,\dots,i_k}\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}^{(a)}(A_{i_j})\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M}\alpha_{i_1,\dots,i_k}\prod_{j=1}^k\omega_{i_j}.\end{aligned}$$

对每个 $i \in [\![1,\ k]\!]$，定义截断随机变量

$$\hat{\omega}_i = \sum_{(x,z)\in\Lambda} \mathbb{1}_{A_i}(x) z \mathbb{1}_{|z|>1} - |A_i| \int_{\mathbb{R}} z \mathbb{1}_{|z|>1} \lambda(\mathrm{d}z)\,, \tag{4.16}$$

and

$$\check{\omega}_i = \sum_{(x,z)\in\Lambda} \mathbb{1}_{A_i}(x) z \mathbb{1}_{a<|z|\leqslant 1} - |A_i| \int_{\mathbb{R}} z \mathbb{1}_{a<|z|\leqslant 1} \lambda(\mathrm{d}z)\,. \tag{4.17}$$

特别地，我们有 $\omega_i = \hat{}\omega_i + \check{}\omega_i$ 且 $\mathrm{E}[\hat{}\omega_i] = \mathrm{E}[\check{}\omega_i] = 0$。展开乘积 $\prod_{j=1}^k (\hat{}\omega_{i_j} + \check{}\omega_{i_j})$ 并应用闵可夫斯基不等式，可得

$$\Big\| \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j=1}^k \omega_{i_j} \Big\|_p \leqslant \sum_{J\subset[\![1,k]\!]} \Big\| \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j\in J} \hat{\omega}_{i_j} \prod_{j\notin J} \check{\omega}_{i_j} \Big\|_p .$$

对于每个子集 $J \subset [\![1,k]\!]$，我们应用推论 4.6，对变量 $\hat{}\omega$ 使用 L^p 估计，对变量 $\check{}\omega$ 使用 L^q 估计，其中 $p \in (1,\gamma)$ 且 $q \in (\gamma, 2]$。由此得到

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j\in J} \hat{\omega}_{i_j} \prod_{j\notin J} \check{\omega}_{i_j} \Big\|_p \leqslant \\ &\qquad \Big(\frac{C_2}{p-1}\Big)^k \Bigg(\sum_{i_j,j\in J} \prod_{j\in J} \|\hat{\omega}_{i_j}\|_p^p \Big(\sum_{\substack{i_j,j\notin J \\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M}} |\alpha_{i_1,\ldots,i_k}|^q \prod_{j\notin J} \|\check{\omega}_{i_j}\|_q^q \Big)^{p/q} \Bigg)^{1/p} . \end{aligned} \tag{4.18}$$

文献 [BCL23 第 6 节证明了 C 是一个普适常数，使得对于每个可测函数 $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$，每个 $p \in (1,2]$ 和 $0 < a \leqslant b \leqslant +\infty$,

$$\Big\| \sum_{(x,z)\in\Lambda} g(x) z \mathbb{1}_{a<|z|\leqslant b} - \int_{\Omega\times\mathbb{R}} g(x) z \mathbb{1}_{a<|z|\leqslant b} \mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z) \Big\|_p \leqslant C \Big(\int_{\Omega\times\mathbb{R}} |g(x)|^p |z|^p \mathbb{1}_{a<|z|\leqslant b} \mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z) \Big)^{1/p} .$$

这个不等式也可以视为推论 4.4 的泊松类比（针对一阶混沌）。因此，对于每个 $i \in [\![1,k]\!]$,

$$\|\hat{\omega}_i\|_p \leqslant C|A_i|^{1/p} m_p(1,+\infty)^{1/p}\,,\ \text{and} \quad \|\check{\omega}_i\|_q \leqslant C|A_i|^{1/q} m_q(a,1)^{1/q}\,.$$

将这些估计代入（4.18），得到:

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j\in J} \hat{\omega}_{i_j} \prod_{j\notin J} \check{\omega}_{i_j} \Big\|_p \leqslant \\ &\quad \Big(\frac{C_2'}{p-1}\Big)^k m_p(1,+\infty)^{|J|/p} m_q(a,1)^{k-|J|/q} \Bigg(\sum_{i_j,j\in J} \prod_{j\in J} |A_{i_j}| \Big(\sum_{\substack{i_j,j\notin J \\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M}} |\alpha_{i_1,\ldots,i_k}|^q \prod_{j\notin J} |A_{i_j}| \Big)^{p/q} \Bigg)^{1/p} . \end{aligned}$$

对第一个求和应用詹森不等式，最终得到:

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j\in J} \hat{\omega}_{i_j} \prod_{j\notin J} \check{\omega}_{i_j} \Big\|_p \leqslant \\ &\quad \Big(\frac{C_2'}{p-1}\Big)^k m_p(1,+\infty)^{|J|/p} m_q(a,1)^{k-|J|/q} |\Omega|^{|J|(1/p-1/q)} \Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant M} |\alpha_{i_1,\ldots,i_k}|^q \prod_{j=1}^k |A_{i_j}| \Big)^{1/q} . \end{aligned}$$

对 $J \subset [\![1,k]\!]$ 求和即可完成证明，因为 $\mathbf{f}$ 的对称 L^q 范数为 $\mathbf{b}$ y

$$\|\mathbf{f}\|_q = \Big(\frac{1}{k!} \sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant M} |\alpha_{i_1,\ldots,i_k}|^q \prod_{j=1}^k |A_{i_j}| \Big)^{1/q} .$$

□

5. 多重 Lévy 积分与多项式混沌的标度极限

本节旨在证明定理 2.3 和 2.5。与 Berger 和 Lacoin 在 [BL21] and [BL22], 中的证明相比，我们方法的优势之一在于可以逐个混沌地进行分析。这一点对于 L^p 估计成立，如第4节所示；对于标度极限也同样成立。因此，我们将定理 2.3 和 2.5 的完整证明推迟到最后的第 5.3 节。在此之前，我们将在第 5.1 节和第 5.3 节中处理固定阶数 $k \geqslant 1$ 的混沌。

5.1. 定义 k 阶连续混沌 设 $k \geqslant 1$, $q \in (\gamma, 2)$，并设 $\mathbf{f} \in L_s^q(\Omega^k)$ 是一个对称函数。回顾截断噪声 $\zeta^{(a)}$ 的定义 (2.1)：它借助定义在 $\mathbb{R} \times \Omega$ 上、强度测度为 $\mu(\mathrm{d}x\mathrm{d}z) = \mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z)$ 且满足 $\lambda(\mathrm{d}z) = (c_+ \mathbb{1}_{z>0} + c_- \mathbb{1}_{z<0})\gamma|z|^{-1-\gamma}\mathrm{d}z$ 的泊松点过程 Λ 构造而成。对每个 $a \in (0,1]$,

$$\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}) = \frac{1}{k!} \int_{\Omega^k} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \zeta^{(a)}(\mathrm{d}x_j)\,, \tag{5.1}$$

它关于 $\mathcal{F}^{(a)} := \sigma(\Lambda \cap (\Omega \times (-\infty, a] \cup [a, \infty))$ 可测。

命题 5.1. 过程 $(\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}))_{a\in(0,1]}$ 是关于滤过 $F = (F^{(a)})_{a\in(0,1]}$ 的时间反向右连续且有左极限的鞅。此外，对每个 $p \in (1, \gamma)$，它在 $\mathbb{L}^p$ 中有界；并且对每个 $a \in (0,1]$，我们有：

$$\|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})\|_p \leqslant (C_0)^k \|\mathbf{f}\|_q, \tag{5.2}$$

其中常数 $C_0 = C_0(p, q, \gamma, \Omega)$ 由定理 *4.1* 给出。特别地，我们有以下极限 $\mathbf{X}(\mathbf{f}) := \lim_{a\downarrow 0} \mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})$ $\mathbb{P}$几乎必然收敛且在 $\mathbb{L}^p$ 中收敛。

证明。 函数 $\mathbf{f}$ 具有有限的 L_s^q 范数，因此根据定理 4.2，随机变量 $\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})$ 定义良好，且族 $(\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}))_{a\in(0,1]}$ 在 L^p 中有界，其中 $\|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})\|_p \leqslant (C_0)^k \|\mathbf{f}\|_q$。

只需证明它相对于滤过 $(\mathcal{F}^{(a)})_{a\in(0,1]}$ 是一个鞅。回顾定义 (2.1)，我们先写出

$$\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}) = \frac{1}{k!} \int_{\Omega^k \times \mathbb{R}^k} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} z_j \mathbb{1}_{|z_j| \geqslant a} \prod_{j=1}^{k} (\delta_\Lambda - \mu)(\mathrm{d}x_j \mathrm{d}z_j).$$

现在，对于 $b \in (a, 1]$，记 $z\mathbb{1}_{|z|\geqslant a} = z\mathbb{1}_{|z|\geqslant b} + z\mathbb{1}_{a\leqslant|z|<b}$ 并展开乘积。注意，形如 $z_j \mathbb{1}_{|z_j|\geqslant b}$ 的项对点过程 Λ 积分后，相对于 $\mathcal{F}^{(b)}$ 可测；而形如 $z_j \mathbb{1}_{a\leqslant|z_j|<b}$ 的项则与 $\mathcal{F}^{(b)}$ 独立。因此，我们有

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}) \mid \mathcal{F}^{(b)}] = \frac{1}{k!} \sum_{I \subset [\![1,k]\!]} \int_{\Omega^{|I|} \times \mathbb{R}^{|I|}} \mathbb{E}\Bigg[\int_{\Omega^{k-|I|} \times \mathbb{R}^{k-|I|}} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{i \notin I} z_i \mathbb{1}_{a\leqslant|z_i|<b} (\delta_\Lambda - \mu)(\mathrm{d}x_i \mathrm{d}z_i) \Bigg] \cdot \prod_{i\in I} z_i \mathbb{1}_{|z_i|\geqslant b} \prod_{i\in I} (\delta_\Lambda - \mu)(\mathrm{d}x_i \mathrm{d}z_i)\,.$$

由 Mecke 多元公式 [LP18，定理 4.4], ，当 $I \neq [\![1,k]\!]$ 时，有

$$\mathbb{E}\Bigg[\int_{\Omega^{k-|I|} \times \mathbb{R}^{k-|I|}} \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{i\notin I} z_i \mathbb{1}_{a\leqslant|z_i|<b} (\delta_\Lambda - \mu)(\mathrm{d}x_i \mathrm{d}z_i) \Bigg] = 0\,.$$

因此，上述求和中只剩下项 $I = [\![1,k]\!]$，从而得到 $\mathrm{E}[\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}) \mid \mathcal{F}^{(b)}] = \mathbf{X}^{(b)}(\mathbf{f})$，并完成证明。□

5.2. 阶为 k 的离散混沌的标度极限。 我们现在讨论离散多重积分向其连续对应物的收敛问题。对任意函数 $f : \Omega_\delta^k \to \mathbb{R}$，记

$$X_\delta(f) := \frac{1}{k!} \sum_{x_1,\ldots,x_k \in \Omega_\delta} f(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \frac{\omega_{x_j}}{V_\delta} = \frac{1}{k!} \int_{x_1,\ldots,x_k\in\Omega} \overline{f}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=1}^{k} \zeta_\delta(\mathrm{d}x_j)\,,$$

其中，对于第二个等式，我们回顾离散噪声 ζ_δ 的定义(1.12)，而 f 表示 f 到Ω^k的分段延拓（在每个单元上为常数）。

命题 5.2. 假设 ω 是中心化的，并且在 $\gamma \in (2.11)$ (1、2)下满足条件。设 $\mathbf{f} : \Omega^k \to \mathbb{R}$ 是一个对称函数，并且对每个 $\delta > 0$， $f_\delta : \Omega_\delta^k \to \mathbb{R}$ 都是在对角线上取值为零的对称函数。再假设存在某个 $q \in (\gamma,\ 2]$ 使得

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \|\mathbf{f} - \overline{f}_\delta\|_q = 0.$$

那么，对于 每个 $s > \frac{D}{2}$，我们在 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathbb{R}$ 中有如下联合依分布收敛：当 $\delta \downarrow 0$ ，

$$(\zeta_\delta, X_\delta(f_\delta)) \xrightarrow{(d)} (\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}(\mathbf{f})),$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}$是一个 γ-稳定 *Lévy*噪声，且 $X(f) = \int_{\Omega^k} f(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^k \boldsymbol{\zeta}(dx_j)$ 定义见命题 *5.1*（并且是 $\boldsymbol{\zeta}$-可测的）。若对每个 $j \in [\![1,\ M]\!]$， $f_j,\ \delta : \Omega^{k_j} \to \mathbb{R} (k_j \geqslant 1)$ 都是对称的、在对角线上取值为零，并且在 $L_s^q(\Omega^{k_j})$ 中收敛到某个函数 f_j，则该结论可推广至有限个混沌 $(X_\delta(f_{j,\delta}))_{1 \leqslant j \leqslant M}$ 的联合收敛。

证明。 我们证明命题 5.2 的策略依赖于两种逼近：*(i)* 用一个光滑（且具有紧支集）的函数逼近$\mathbf{f}$；*(ii)* 用截断噪声逼近离散噪声 ζ_δ。单个混沌的证明可以直接推广到多个混沌的情形。

出于技术原因，我们需要引入以下记号：给定 $\mathbf{f} : \Omega^k \to \mathbb{R}$ 和 $\delta > 0$，令 $\mathbf{f}_\delta$表示将 $\mathbf{f}_{|\Omega_\delta}$延拓到 Ω 上得到的分段常值延拓，即 $\mathbf{f}_\delta(y) = \mathbf{f}(x)$，对每个 $y \in \mathcal{C}_\delta(x)$ 均成立。若函数 $\mathbf{f}$ 在 Ω^k上连续且具有紧支集，则$\mathbf{f}_\delta$ 一致收敛到$\mathbf{f}$，当 $\delta \downarrow 0$时。

(i) 化归为具有紧支集的光滑函数 $\mathbf{f}$。设 $(\mathbf{f}^{(\varepsilon)})_{\varepsilon \in (0,1]}$ 是 Ω^k 上具有紧支集的无穷次可微函数列，$^* = \{(x_1,\ \dots,\ x_k) \in \Omega^k,\ \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\}$，当 $\varepsilon \downarrow 0$[6] 时，它们在$L_s^q(\Omega^k)$中逼近$\mathbf{f}$。令 F为 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathbb{R}$空间上的有界利普希茨函数，其 Lipschitz 常数为 $\|\nabla F\|_\infty$。于是，我们有

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}(\mathbf{f}))\right] - \mathbb{E}\left[F(\zeta_\delta, X_\delta(f_\delta))\right]| &\leqslant \|\nabla F\|_\infty \mathbb{E}\left[|\mathbf{X}(\mathbf{f}) - \mathbf{X}(\mathbf{f}^{(\varepsilon)})|\right] \\ &\quad + \left|\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}(\mathbf{f}^{(\varepsilon)}))\right] - \mathbb{E}\left[F(\zeta_\delta, X_\delta(\mathbf{f}^{(\varepsilon)}))\right]\right| + \|\nabla F\|_\infty \mathbb{E}\left[|X_\delta(\mathbf{f}^{(\varepsilon)}) - X_\delta(f_\delta)|\right].\end{aligned}$$

根据命题 5.1，第一项由 $(C_0)^k \|\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(\varepsilon)}\|_q$ 界定；根据定理 4.1，第三项由 $(C_0)^k \|\mathbf{f}_\delta^{(\varepsilon)} - f_\delta\|_q$界定。但根据三角不等式，我们有

$$\|\mathbf{f}_\delta^{(\varepsilon)} - \overline{f_\delta}\|_q \leqslant \|\mathbf{f}_\delta^{(\varepsilon)} - \mathbf{f}\|_q + \|\mathbf{f} - \overline{f_\delta}\|_q.$$

因此，由于 $\mathbf{f}_{(\varepsilon)\,\delta}$一致收敛于 $\mathbf{f}^{(\varepsilon)}$，并且根据假设 $\|\mathbf{f} - f_\delta\|_q \to 0$当 $\delta \downarrow 0$时，我们有

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta \downarrow 0} \left|\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}(\mathbf{f}))\right] - \mathbb{E}\left[F(\zeta_\delta, X_\delta(f_\delta))\right]\right| &\leqslant 2\|\nabla F\|_\infty \|\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(\varepsilon)}\|_q \\ &\quad + \limsup_{\delta \downarrow 0} \left|\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}(\mathbf{f}^{(\varepsilon)}))\right] - \mathbb{E}\left[F(\zeta_\delta, X_\delta(\mathbf{f}^{(\varepsilon)}))\right]\right|.\end{aligned}$$

因此，只需证明：对于任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$，最后一项当 $\delta \downarrow 0$时趋于 0。然后，再令 $\varepsilon \downarrow 0$，即可得到结论。

换言之，只需证明，对于任意无限次可微且紧支撑的函数$\mathbf{f}$，都有如下依分布收敛：当 $\delta \downarrow 0$

$$(\zeta_\delta, X_\delta(\mathbf{f})) \xrightarrow{(d)} (\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}(\mathbf{f})). \tag{5.3}$$

[6]为证明此类逼近函数 $\mathbf{f}^{(\varepsilon)}$的存在性，首先用 $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_k)$ 逼近 $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_k)\mathbb{1}_{\forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon}$ 然后在 $L_s^q(\Omega^{k,\varepsilon})$ 中逼近这个最后得到的函数，其中 $\Omega^{k,\varepsilon} = \{(x_1, \dots, x_k) \in \Omega^k, \forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon\}$。

（*ii*）截断噪声。为证明 (5.3)，我们引入对随机变量的截断 ω。对于 $a>0$ 和 $x\in\Omega_\delta$，定义

$$\omega_x^{(a)}=\omega_x\mathbb{1}_{|\omega_x|>aV_\delta}-\kappa_\delta(a)\,, \tag{5.4}$$

其中 $\kappa_\delta(a)=\mathrm{E}[\omega\mathbb{1}_{|\omega|>aV_\delta}]$。随机变量 $(\omega_x^{(a)})_{x\in\Omega_\delta}$ 相互独立同分布且中心化。然后，对每个 $\delta>0$ 和 $a\in(0,1)$，定义：

$$X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})=\frac{1}{k!}\sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k\frac{\omega_{x_j}^{(a)}}{V_\delta}\,,$$

引理 5.3。若$\mathbf{f}$ 是一个在$\Omega^{k,\,*}$中具有紧支集的光滑函数，则以下一致逼近成立：

$$\lim_{a\downarrow0}\limsup_{\delta\downarrow0}\left\|X_\delta(\mathbf{f})-X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})\right\|_1=0.$$

我们先来看这个引理如何推出 (5.3)，即命题 5.2。设 F 是空间 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\times\mathbb{R}$上的有界利普希茨函数，其 Lipschitz 常数为 $\|\nabla F\|_\infty$。那么

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\big[F(\zeta_\delta,X_\delta(\mathbf{f}))\big]-\mathbb{E}\big[F(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{X}(\mathbf{f}))\big]\right|&\leqslant\|\nabla F\|_\infty\mathbb{E}\big[|X_\delta(\mathbf{f})-X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})|\big]\\&\quad+\left|\mathbb{E}\big[F(\zeta_\delta,X_\delta^{(a)}(\mathbf{f}))\big]-\mathbb{E}\big[F(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}))\big]\right|+\|\nabla F\|_\infty\mathbb{E}\big[|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})-\mathbf{X}(\mathbf{f})|\big].\end{aligned}$$

根据命题 A.3，当 $\delta\downarrow0$ 时，第二项趋于 0，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{\delta\downarrow0}\left|\mathbb{E}\big[F(\zeta_\delta,X_\delta(\mathbf{f}))\big]-\mathbb{E}\big[F(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{X}(\mathbf{f}))\big]\right|\\&\qquad\leqslant\|\nabla F\|_\infty\limsup_{\delta\downarrow0}\|X_\delta(\mathbf{f})-X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})\|_1+\|\nabla F\|_\infty\|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})-\mathbf{X}(\mathbf{f})\|_1\,.\end{aligned}$$

接着，引理 5.3 表明，当 $a\downarrow0$ 时，第一项趋于 0。此外，命题 5.1 表明 $\lim_{a\downarrow0}\left\|\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})-\mathbf{X}(\mathbf{f})\right\|_1=0$，由此完成 (5.3) 的证明，也就完成了命题 5.2 的证明。

引理 *5.3* 的证明。同样，我们需要将随机变量 ω 分解为两个（中心化的）分量：回顾 $\omega_x^{(a)}$ 的定义 (5.4)，可得

$$\omega_x=\omega_x^{(a)}+\breve{\omega}_x^{(a)},$$

其中 $\breve{\ }\omega_x^{(a)}=\omega_x\mathbb{1}_{|\omega_x|\leqslant aV_\delta}+\kappa_\delta(a)$。接着展开乘积 $\prod_{j=1}^k(\omega_{x_j}^{(a)}+\breve{\ }\omega_{x_j}^{(a)})$，得到

$$X_\delta(\mathbf{f})-X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})=\sum_{J\subsetneq[\![1,k]\!]}\frac{1}{(V_\delta)^k}\sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta}f_\delta(x_1,\dots,x_k)\prod_{j\in J}\omega_{x_j}^{(a)}\prod_{j\notin J}\breve{\omega}_{x_j}^{(a)}.$$

由詹森不等式和闵可夫斯基不等式，对于 $p>1$，我们得到

$$\left\|X_\delta(\mathbf{f})-X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})\right\|_1\leqslant\sum_{J\subsetneq[\![1,k]\!]}\frac{1}{(V_\delta)^k}\left\|\sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j\in J}\omega_{x_j}^{(a)}\prod_{j\notin J}\breve{\omega}_{x_j}^{(a)}\right\|_p.$$

选取 $p\in(1,\gamma)$ 和 $q\in(\gamma,2]$，使得 $\frac{p(q-\gamma)}{\gamma(q-p)}>k-1$（即 p 充分接近 γ）。对于每个$J\subset[\![1,k]\!]$，我们对随机变量 $\omega^{(a)}$ 采用命题 4.10 的 L^p 估计，并对随机变量 $\breve{\ }\omega^{(a)}$采用 L^q 估计。因此，上述和中的各项有界于

$$\frac{1}{(V_\delta)^k}\Big(\frac{C_2}{p-1}(|\Omega|\vee1)^{\frac1p-\frac1q}\Big)^k\|\mathbf{f}_\delta\|_q\left(\frac{\|\omega^{(a)}\|_p}{v_\delta^{1/p}}\right)^{|J|}\left(\frac{\|\breve{\omega}^{(a)}\|_q}{v_\delta^{1/q}}\right)^{k-|J|},$$

其中我们回顾，$\mathbf{f}_\delta$表示将$\mathbf{f}_{\Omega_\delta}$分段常值延拓至 Ω，即 $\mathbf{f}_\delta(y)=\mathbf{f}(x)$ 对每个$y\in\mathcal{C}_\delta(x)$都成立。

此外，利用 (4.12)，我们得到存在常数 $C>0$，使得对于任意 $a\in(0,1)$，当 δ足够小时，有

$$\frac{\|\omega^{(a)}\|_p}{v_\delta^{1/p}V_\delta}\leq\frac{C}{(\gamma-p)^{1/p}}a^{1-\frac{\gamma}{p}}\quad\text{and}\quad\frac{\|\breve{\omega}^{(a)}\|_q}{v_\delta^{1/q}V_\delta}\leq\frac{C}{(q-\gamma)^{1/q}}a^{1-\frac{\gamma}{q}}\,.$$

综上，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|X_\delta(\mathbf{f}) - X_\delta^{(a)}(\mathbf{f})\right\|_1 &\leq (C')^k\, a^{(1-\frac{\gamma}{q})k}\|\mathbf{f}_\delta\|_q \sum_{J\subsetneq[\![1,k]\!]} a^{-(\frac{\gamma}{p}-\frac{\gamma}{q})|J|} \\ &\leq (C')^k a^{(1-\frac{\gamma}{q})k-(\frac{\gamma}{p}-\frac{\gamma}{q})(k-1)}\|\mathbf{f}^{(\delta)}\|_q\,.\end{aligned}$$

其中，对于第二个不等式，我们利用了 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}>0$ and that $|J|\leq k-1$ 在求和中。这就完成了证明，因为我们取 p 充分接近 1，使得 $\frac{p}{(q-\gamma)}\frac{\gamma(q-p)}{} > \frac{k-1}{k}$，即 $(1-\frac{\gamma}{q})k \geqslant (\frac{\gamma}{p}-\frac{\gamma}{q})(k-1)$. □

□

5.3. **多项式混沌：定理 2.3 和 2.5 的证明**。 我们以定理 2.3 和 2.5 的证明结束本节。证明过程直接明了，只需将第4节的结果与本节的结果结合起来。

定理 *2.3* 的证明。 设 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}, k\geqslant 0$ 是分别定义在 Ω^k 上的对称函数，且满足 (2.6)。那么，根据定理 4.2，对于每个 $a\in(0,1]$，(2.3) 中的随机变量 $\Phi^{(a)}$ 都是良定义的；并且对于每个 $p\in(1,\gamma)$，我们有

$$\left\|\boldsymbol{\Phi}^{(a)}\right\|_p \leqslant \sum_{k\geqslant 0} C_0^k \left\|\boldsymbol{\psi}^{(k)}\right\|_q < +\infty\,.$$

（总和有限这一事实源于假设 (2.6)。）此外，根据命题 5.1，$(\boldsymbol{\Phi}^{(a)})_{a\in(0,1]}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_a)_{a\in(0,1]}$的右连续左极限时间反向鞅。由于当$p\in(1,\gamma)$时，它在 L^p中有界，因此它几乎必然收敛，且在 L^p 中收敛到某个定义良好的随机变量 $\boldsymbol{\Phi}$。□

现在我们来证明定理 2.5。

定理 *2.5* 的证明。 设 $\psi_\delta^{(k)}, k\geq 0$是定义在 Ω_δ^k 上、满足定理 2.5 中假设的对称函数。对于每个 $k\geqslant 0$，记 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ $\psi_\delta^{(k)}$ 在 $\delta\downarrow 0$时的极限为 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$。那么，假设 (ii) 告诉我们，对于每个 $C\geqslant 0$，都有

$$\sum_{k\geqslant 0} C^k \left\|\boldsymbol{\psi}^{(k)}\right\|_q < +\infty\,.$$

因此，函数族 $(\boldsymbol{\psi}^{(k)})_{k\geqslant 0}$ 满足定理 2.3 的假设，由此可知明，下列连续混沌展开是良定义的：

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\boldsymbol{\psi}^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}x_j)\,.$$

我们将证明 Φ_δ 按分布收敛到 $\boldsymbol{\Phi}$。证明主要在于证明混沌的逐项收敛。首先，截断该展开：对于 $M\in\mathbb{N}$，定义

$$\Phi_\delta^{(M)} := \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\psi_\delta^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)\prod_{j=1}^k\zeta_\delta(\mathrm{d}x_j), \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\Phi}^{(M)} := \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\boldsymbol{\psi}^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)\prod_{j=1}^k\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}x_j).$$

根据定理 4.1，对于 $p\in(1,\ \gamma)$，我们有

$$\left\|\Phi_\delta - \Phi_\delta^{(M)}\right\|_p \leqslant \sum_{k>M}(C_0)^k\left\|\psi_\delta^{(k)}\right\|_q.$$

因此，利用假设 (ii)，我们得到

$$\lim_{M\to+\infty}\limsup_{\delta\downarrow 0}\left\|\Phi_\delta - \Phi_\delta^{(M)}\right\|_p = 0\,. \tag{5.5}$$

类似地，利用定理 4.2，对于连续对应物和假设 (ii)，我们得到

$$\lim_{M\to+\infty}\left\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}^{(M)}\right\|_p = 0\,. \tag{5.6}$$

最后，命题 5.2 表明以下依分布收敛成立：对于任意固定的 M，当 $\delta \downarrow 0$ 时，

$$\Big(\zeta_\delta, \int_\Omega \psi_\delta^{(1)}(x)\zeta_\delta(\mathrm{d}x), \dots, \int_{\Omega^M} \psi_\delta^{(M)}(x_1,\dots,x_M) \prod_{j=1}^M \zeta_\delta(\mathrm{d}x_j)\Big)$$
$$\xrightarrow{(d)} \Big(\boldsymbol{\zeta}, \int_\Omega \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x)\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}x), \dots, \int_{\Omega^M} \boldsymbol{\psi}^{(M)}(x_1,\dots,x_M) \prod_{j=1}^M \boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}x_j)\Big).$$

因此， $\Phi_\delta^{(M)}$ 依分布收敛于 $\boldsymbol{\Phi}^{(M)}$，且与噪声联合收敛。结合 (5.5) 和 (5.6)，定理 2.5 的证明至此完成。□

6. 无序吉布斯测度的收敛与无序相关性

本节中，我们在第 6.1 节证明无序吉布斯测度的收敛，即定理 2.7。我们还将在第 6.2 节探讨无序相关性问题，即定理 2.10

6.1. 定理 2.7 的证明。对于 E上的任意有界连续函数 G，定义

$$Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}(G) := \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[G(\sigma)\prod_{x\in\Omega_\delta}(1+\beta_\delta\omega_x)\Big],$$

因此，采用此记号，我们有 $\mathrm{P}^{\omega,\ \beta_\delta\Omega_\delta}(G) = Z^{\omega,\ \beta_\delta\Omega_\delta}(G)/Z^{\omega,\ \beta_\delta\Omega_\delta}\ \cdot$给定分布 $T \in D$空间′(Ω) 和检验函数 $\mathbf{f} \in D$空间(Ω)（无限次可微且具有紧支集），我们用 $\langle T, \mathbf{f}\rangle$ 表示 T 在$\mathbf{f}$上的作用。

以下引理改编自 [BL21] ，并在稍更一般的背景下陈述。为完整起见，我们在此给出证明。它为离散概率测度$\mathrm{P}^{\omega,\beta_\delta\Omega_\delta}$ 存在标度极限提供了充分条件。该证明的一个重要特点是不要求状态空间Ω有界；这使得我们能够在定理 3.6的证明中将其应用于长程聚合物模型。

引理 6.1. 假设存在 β_δ ，使得下列条件成立：

(a) $\mathrm{P}_{\Omega_\delta}^{\mathrm{ref}}$ 在$M_1(E)$中收敛到概率分布$\mathbf{P}_\Omega$；*(b)* 对每个函数 $G \in C_b(E)$，以及对每个$\mathbf{f} \in D$空间(Ω)，存在一个关于 $\boldsymbol{\zeta}$ 可测的随机变量$Z^{\boldsymbol{\zeta}}\ \Omega$，使得当 $\delta \downarrow 0$时，

$$\big(\langle\boldsymbol{\zeta}_\delta, \mathbf{f}\rangle, Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}(G)\big) \xrightarrow{(d)} \big(\langle\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{f}\rangle, \mathcal{Z}_\Omega^{\boldsymbol{\zeta}}(G)\big)\,.$$

(c) 随机变量$Z^{\boldsymbol{\zeta}}\ \Omega(1)$ 几乎必然严格为正。

则存在一个随机概率测度$\mathbf{P}^{\boldsymbol{\zeta}}\ \Omega\in\ M_1(E)$，使得我们在 $H^{-s}\ \mathrm{loc}(\Omega)\ \times M_1(E)$中有如下联合依分布收敛，$s > \frac{D}{2}$，

$$(\zeta_\delta, \mathrm{P}_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}) \xrightarrow{(d)} (\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{P}_\Omega^{\boldsymbol{\zeta}}) \quad as\ \delta \downarrow 0\,.$$

证明。 首先我们证明有限维边缘分布的收敛。由于 ζ_δ 和 $\mathrm{P}^{\omega,\ \beta_\delta\Omega_\delta}$ 都可以视为线性形式，因此实际上只需证明一维边缘情形的收敛，这恰好就是条件 (b)。

其次，我们证明这对 $(\zeta_\delta, \mathrm{P}^{\omega,\beta_\delta\Omega_\delta})$ 的紧性。随机分布族 $\{\zeta_\delta\}^{\delta\in(0,1)}$ 在 $H^{-s}\ \mathrm{loc}\ (\Omega)$ 中是紧的，见附录中的定理 A.2。因此，只需证明随机概率测度族 $(\mathrm{P}^{\omega,\beta_\delta\Omega_\delta})^{\delta\in(0,1)}$ 是紧的。由条件 (b) 和 (c)， $Z^{\omega,\ \beta_\delta\Omega_\delta}\ (d)\longrightarrow \mathrm{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}}\ \Omega$，其中 $\hat{}\mathrm{Z}^{\boldsymbol{\zeta},\beta}\ \Omega > 0$ 几乎必然成立，因此存在一个趋于零的序列 $(\varepsilon_m)_{m\geqslant 0}$ ，使得对所有 $\delta > 0$ 和 $m \geqslant 0$

$$\mathbb{P}[Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta} \leqslant \varepsilon_m] \leqslant 2^{-m}\,.$$

由于根据假设 (a)，概率测度族 $\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}$ 在$\mathcal{M}_1(E)$空间中随 $\delta \downarrow 0$ 收敛，因此它是$\mathcal{M}_1(E)$中的一个紧族。因此，我们可以找到 E 的紧子集 $(K_m)_{m\geq 1}$，使得对所有$\delta > 0$和 $m \geqslant 0$,

$$\mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}(K_m) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon_m}{4^m}\,.$$

现在，对每个 $n \geqslant 1$，我们定义

$$\mathcal{K}_n = \left\{\mu \in \mathcal{M}_1(E)\,;\, \forall m > n,\, \mu(K_m^c) \leqslant 2^{-m}\right\}.$$

集合 $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}_1(E)$ 是闭集，且 $\mathcal{K}_n$ 中的任意序列都是紧的，因此它是$\mathcal{M}_1(E)$ 的紧子集。此外，由次可加性可得

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{P}_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta} \notin \mathcal{K}_n\right] \leqslant \sum_{m>n} \mathbb{P}[\mathrm{P}_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}(K_m^c) > 2^{-m}]\,.$$

利用马尔可夫不等式以及 $\mathrm{E}[Z^{\omega,\beta_\delta}{}_{\Omega_\delta}(\mathbb{1}_{K_m^c})] = \mathrm{P}_\delta^{\mathrm{ref}}(K_m^c) \leq \varepsilon_m 4^{-m}$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathrm{P}_{\delta,\beta_\delta}^{\omega}(K_m^c) > 2^{-m}] &\leqslant \mathbb{P}[Z_{\delta,\beta_\delta}(\mathbb{1}_{K_m^c}) > \varepsilon_m 2^{-m}] + \mathbb{P}[Z_{\delta,\beta_\delta} \leqslant \varepsilon_m] \\ &\leqslant 2^m \varepsilon_m^{-1} \mathrm{P}_\delta(K_m^c) + 2^{-m} \leqslant 2 \cdot 2^{-m}\,.\end{aligned}$$

这表明 $\sup_{\delta\in(0,1)} \mathbb{P}[\mathrm{P}^{\omega,}{}_{\beta_\delta\Omega_\delta} \notin \mathcal{K}_n] \leq 2 \cdot 2^{-n}$，当 n 取足够大时，该值可以任意小。至此证明完毕。□

现在，我们将引理 6.1 用于定理 2.7 的证明。

定理 *2.7* 的证明。我们只需检验引理 6.1 的条件 (b) 是否成立。

令 $G \in \mathcal{C}_b(E)$。仿照 (1.7) 和 (1.13) 推导，随机变量 $Z^{\omega,}{}_{\beta_\delta\Omega_\delta}(G)$ 具有如下多项式混沌展开：

$$Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}(G) = \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}[G(\sigma)] + \sum_{k\geqslant 1} \frac{\hat{\beta}^k}{k!} \sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta} \psi_\delta^{(k)}(x_1,\dots,x_k;G) \prod_{j=1}^k \frac{\omega_{x_j}}{V_\delta}\,, \tag{6.1}$$

回忆 G 加权的 k 点相关函数 $\psi_\delta^{(k)}(x_1,\dots,x_k;\, G)$ 的定义 (2.17)。由于函数 G 有界，因此对每个 $k \geqslant 1$ 以及 $x_1,\dots,x_k \in \Omega_\delta$,

$$|\psi_\delta^{(k)}(x_1,\dots,x_k;G)| \leqslant \|G\|_\infty \psi_\delta^{(k)}(x_1,\dots,x_k)\,.$$

这意味着函数 $\psi_\delta^{(k)}(\cdot\, G)$ 满足定理 2.5 的假设 (ii)。根据条件 (b)，它们也满足定理 2.7 的假设 (i)。注意，由于条件 (a)，对 $k = 0$ 收敛性同样成立。

因此，定理 2.5 适用，并得到条件 (b)；这里还利用了：对检验函数进行作用是从 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续泛函。□

6.2. 无序相关性：定理 2.10 的证明。 证明遵循标准的测度变换论证。回忆一下，在定理 2.10 中，我们假设随机变量 $J_\delta v_\delta \sum_{x\in\Omega_\delta} \sigma_x$ 在 $\delta \to 0$ 时收敛到一个严格正随机变量。

引理 6.2。 假设 $\hat{}\ \beta_\delta := \beta_\delta V_\delta J_\delta^{-1}$ 满足 $\lim_{\delta\downarrow 0} \hat{}\beta_\delta = +\infty$，并定义以下事件（对于环境 ω）：

$$A_\delta = \{\omega\colon \forall x \in \Omega_\delta,\, |\omega_x| < a_\delta V_\delta\}\,, \quad \textit{with} \quad a_\delta := (\hat{\beta}_\delta)^{4/(\gamma-1)}\,.$$

那么，我们有

(i) 极限$_{\delta\to 0}$概率$[(A_\delta)^c] = 0$; *(ii)* 极限$_{\delta\to 0}$ 期望$[Z^{\omega,\beta_\delta}{}_{\Omega_\delta}\ \mathbb{1}_{A_\delta}] = 0$.

这意味着 $Z^{\omega,}{}_{\beta_\delta\Omega_\delta} \to 0$ 依概率。

证明。 首先，请注意，根据定义，我们有 $\lim_{\delta\downarrow 0} a_\delta = +\infty$ ，并且 $\lim_{\delta\downarrow 0} a_\delta^{-(\gamma-1)/2}\,\hat{}\,\beta_\delta = +\infty$。还请注意，根据 Potter界（见 [BGT87，定理 1.5.4]），对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在常数 C_ε和 c_ε，使得对于每个 $a \geqslant 1$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$,

$$c(\varepsilon)a^{-\varepsilon}\varphi(V_\delta) \leqslant \varphi(aV_\delta) \leqslant C(\varepsilon)a^{\varepsilon}\varphi(V_\delta)\,. \tag{6.2}$$

我们从 (i) 开始。利用次可加性，再利用 Potter界 (6.2)（例如取 $\varepsilon = \gamma/2$），可得

$$\mathbb{P}[(A_\delta)^c] \leqslant \mathrm{Card}(\Omega_\delta)\,\mathbb{P}[|\omega| \geqslant a_\delta V_\delta] \leqslant C\,a_\delta^{-\gamma/2}|\Omega|\,\frac{1}{v_\delta}\mathbb{P}[|\omega| \geqslant V_\delta]\,,$$

其中我们还用到了 $|\Omega| = v_\delta \mathrm{Card}(\Omega_\delta)$。回顾 (2.12)，可得 $\frac{1}{v_\delta}\mathbb{P}[|\omega| \geqslant V_\delta] \to 1$，因此当 $\delta \downarrow 0$ 时，上式趋于 0，因为 $\lim_{\delta\downarrow 0} a_\delta = +\infty$。

对于 (ii)，由富比尼定理可得

$$\mathbb{E}[Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}\mathbb{1}_{A_\delta}] = \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{A_\delta}\prod_{x\in\Omega_\delta}(1+\beta_\delta\omega_x\sigma_x)\Big]\Big] = \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\mathbb{P}_\delta^\sigma[A_\delta]\Big]\,, \tag{6.3}$$

其中，给定场 σ 的一个实现，P_δ^σ 是由下式定义的尺寸偏置测度

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_\delta^\sigma}{\mathrm{d}\mathbb{P}}(\omega) = \prod_{x\in\Omega_\delta}(1+\beta_\delta\omega_x\sigma_x)\,.$$

注意，P_δ^σ 是一个概率分布，因为 $\mathrm{E}[\prod_{x\in\Omega_\delta}(1+\beta_\delta\omega_x\sigma_x)] = 1$；并且在 P_δ^σ 下，随机变量 $(\omega_x)_{x\in\Omega_\delta}$ 相互独立。此外，若 $\sigma_x = 0$，则 ω_x 的分布与 P 下的 ˜ ˜相同；若 $\sigma_x = 1$，则 ω_x 的分布为 P_δ，其定义为 $\mathrm{dP}_\delta(\omega) = (1+\beta_\delta\omega)\mathrm{dP}(\omega)$。

现在，我们通过观察到 $A_\delta \subset \{\forall x \in \sigma, |\omega_x| \leqslant a_\delta V_\delta\}$来对6.3给出界：我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}\mathbb{1}_{A_\delta}] &\leqslant \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\mathbb{P}_\delta^\sigma\big[\forall x\in\sigma, |\omega_x| \leqslant a_\delta V_\delta\big]\Big] = \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\prod_{x\in\sigma}(1-\tilde{\mathbb{P}}_\delta(|\omega_x| > a_\delta V_\delta))\Big] \\ &\leqslant \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\exp\Big(-\tilde{\mathbb{P}}_\delta\big(|\omega| > a_\delta V_\delta\big)\sum_{x\in\Omega_\delta}\sigma_x\Big)\Big],\end{aligned}$$

其中，对于最后一个不等式，我们只是用到了 $1-x \leqslant e^{-x}$对任意 x成立。现在，利用P_δ的定义˜，我们得到

$$\tilde{\mathbb{P}}_\delta\big(|\omega| > a_\delta V_\delta\big) = \mathbb{P}\big(|\omega| > a_\delta V_\delta\big) + \beta_\delta\mathbb{E}\big[\omega\mathbb{1}_{\{|\omega|>a_\delta V_\delta\}}\big] \sim \frac{\gamma}{\gamma-1}\beta_\delta\varphi(a_\delta V_\delta)(a_\delta V_\delta)^{-(\gamma-1)} \quad \text{as } \delta\downarrow 0\,.$$

结合Potter下界(6.2)（例如取 $\varepsilon = (\gamma-1)/2$），由此得到

$$\tilde{\mathbb{P}}_\delta\big(|\omega| > a_\delta V_\delta\big) \geqslant c'\,\beta_\delta a_\delta^{-(\gamma-1)/2}\mathbb{P}\big(|\omega| > V_\delta\big) \geq c''\hat{\beta}_\delta a_\delta^{-(\gamma-1)/2}J_\delta v_\delta\,,$$

r回顾ˆ β_δ的定义以及$\mathrm{P}[|\omega| \geqslant V_\delta] \sim v_\delta$这一事实（见(2.12)）。我们最终得到

$$\mathbb{E}[Z_{\Omega_\delta}^{\omega,\beta_\delta}\mathbb{1}_{A_\delta}] \leq \mathrm{E}_\delta^{\mathrm{ref}}\Big[\exp\Big(-c''\hat{\beta}_\delta a_\delta^{-(\gamma-1)/2}J_\delta v_\delta\sum_{x\in\Omega_\delta}\sigma_x\Big)\Big]\,,$$

当 $\delta \downarrow 0$ 时它趋于0，因为$\lim_{\delta\downarrow 0}\,\hat{}\,\beta_\delta a_\delta^{-(\gamma-1)/2} = +\infty$ ，且$J_\delta v_\delta\sum_{x\in\Omega_\delta}\sigma_x$ 依分布收敛于一个正的随机变量。至此证明结束。□

7. 无序钉扎模型的证明

本节我们证明定理 3.1 和定理 3.4。回顾一下，我们假设$1-\alpha < \frac{1}{\gamma}$，这等价于 $\gamma(1-\alpha) < 1$。

考虑 $N \in \mathbb{N}\,\Omega_N := \{\frac{n}{N},\ 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 的离散化，其中 $\Omega := (0,\ 1)$。本节中，我们不采用第 1 节和第 2 节中的连续离散化参数 δ，而是倾向于使用离散参数 N（其中 $\delta = N^{-1}$）。每个单元的体积为 $v_N = N^{-1}$；回想一下，V_N由渐近关系 (3.8) 定义。我们还设 ˆ $\beta_N := \beta_N u(N)V_N$，并回想一下，我们假设 $\lim_{N\to\infty}\,\hat{}\,\beta_N = \hat{}\,\beta \in [0,\infty)$。

7.1. 定理 3.1 的证明。 强更新定理 (3.2) 的一个推论是，存在常数 C，使得对每个 $N \geqslant 1$,

$$\frac{1}{C} \leqslant u(N)\ell(N)N^{1-\alpha} \leqslant C. \tag{7.1}$$

此外，对每个 $N \geqslant 1$ 和 $t \in [0,1]$，记作

$$U_N(t) := \frac{u(\lfloor Nt \rfloor)}{u(N)}, \tag{7.2}$$

t函数 $(U_N)_{N \geqslant 1}$ 在 $(0,1]$ 的每个紧子集上一致收敛到 $U(t) := t^{\alpha-}$ [1].

仿照 (1.4) 和 (1.13) 中的论证，我们将配分函数 $Z^{\omega,_N{}^{\beta_N},h_N}$ 改写为关于变量 ω 的多项式混沌：

$$\begin{aligned} Z_{N,h_N}^{\omega,\beta_N} &= 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{(\beta_N)^k}{k!} \sum_{t_1,\dots,t_k \in \Omega_N} \mathrm{E}_{N,h_N}\Big[\prod_{j=1}^k \mathbb{1}_{Nt_j \in \tau}\Big] \prod_{j=1}^k \omega_{Nt_j} \\ &= 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{(\hat{\beta}_N)^k}{k!} \sum_{t_1,\dots,t_k \in \Omega_N^k} \psi_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k) \prod_{j=1}^k \frac{\omega_{Nt_j}}{V_N}\,. \end{aligned}$$

这里，对每个 $k \geqslant 1$, $\psi_N^{(k)}$，$(\Omega_N)^k \to \mathbb{R}$ 是一个在对角线上为零的对称函数，对 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant 1$（在 Ω_N中）定义为

$$\psi_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k) := u(N)^{-k}\,\mathrm{P}_{N,h_N}\left[\{Nt_1,\dots,Nt_k\} \subset \tau\right].$$

其到 Ω^k 上的分段常值延拓满足：对每个 $t_0 := 0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant 1$,

$$\overline{\psi}_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k) = u(N)^{-k}\,\mathrm{P}_{N,h_N}\left[\{\lfloor Nt_1 \rfloor,\dots,\lfloor Nt_k \rfloor\} \subset \tau\right].$$

现在，我们验证函数族 $(\psi_N^{(k)})_{k \geqslant 1}$ 满足定理 2.5 的假设，并确定其标度极限。

我们回顾离散齐次受限配分函数的定义：

$$Z_{M,h}^c := \mathrm{E}\Big[\exp\Big(h\sum_{n=1}^M \mathbb{1}_{n \in \tau}\Big)\mathbb{1}_{M \in \tau}\Big].$$

根据更新过程 τ 的马尔可夫性，我们得到，对于每个 $t_0 := 0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant 1$

$$\overline{\psi}_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k) = \frac{1}{Z_{N,h_N}} \prod_{j=1}^k \left(\frac{Z^c_{\lfloor Nt_j \rfloor - \lfloor Nt_{j-1} \rfloor, h_N}}{u(N)}\right) Z_{N-\lfloor Nt_k \rfloor, h_N}.$$

对于每个 $\alpha \in (0,1)$，（修正的）米塔格-莱夫勒函数定义为

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

以下引理的证明主要涉及技术细节，因此推迟至附录 B。

引理 7.1. 回顾（自由和条件）连续统配分函数 $Z_{t,\hat{h}}$ 和 $Z^c_{t,\hat{h}}$ 的定义 (3.5) 。若 $\lim_{N\to+\infty} \frac{M_N}{N} = t \in (0,1]$, ，则

$$\lim_{N\to+\infty} Z_{M_N,h_N} = \mathcal{Z}_{t,\hat{h}} := E_\alpha(\hat{h}t^\alpha), \qquad \textit{and} \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{Z^c_{M_N,h_N}}{u(N)} = \mathcal{Z}^c_{t,\hat{h}} := \alpha t^{\alpha-1} E'_\alpha(\hat{h}t^\alpha),$$

这些收敛在 t 的每个紧子集上均一致成立$(0,1]$。此外，存在 a 常数 $C = C_{\hat{h}}$ 使得对于每个 $1 \leqslant M \leqslant N$,

$$Z_{M,h_N} \leq C \quad \textit{and} \quad Z^c_{M,h_N} \leqslant C u(M). \tag{7.3}$$

因此，对于每个 $k\geqslant 1$，$(\psi_N^{(k)})_{N\geqslant 1}$ 在 $\{(t_1,\dots,t_k)\in(0,1)^k,\forall i\neq j,t_i\neq t_j\}$ 的每个紧子集上一致收敛于 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_{\hat{h}}$（定义见 (3.6)）。此外，界 (7.3) 表明，对于每个$t_0:=0<t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$,

$$\psi_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k)\leqslant C^k\prod_{j=1}^k\frac{u(\lfloor Nt_j\rfloor-\lfloor Nt_{j-1}\rfloor)}{u(N)},$$

由（7.1）可知

$$\psi_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k)\leq(C')^k u(N)^{-k}\prod_{j=1}^k\frac{(\lfloor Nt_j\rfloor-\lfloor Nt_{j-1}\rfloor)^{-(1-\alpha)}}{\ell(\lfloor Nt_j\rfloor-\lfloor Nt_{j-1}\rfloor)}. \tag{7.4}$$

取极限后，$N\to+\infty$ 得到：对于每个 $k\geqslant 1$,

$$\boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}^{(k)}(t_1,\dots,t_k)\leqslant(C')^k\prod_{j=1}^k\frac{1}{(t_j-t_{j-1})^{1-\alpha}}.$$

令 $q\in(\gamma,\frac{1}{1-\alpha})$。现在我们利用这些不等式来验证

1. 对于每个 $k\geqslant 1$, $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_{\hat{h}}\in L_s^q((0,1)^k)$。2. 函数 $\boldsymbol{\psi}_N^{(k)}$ 满足假设（ii）。3. 对于每个 $k\geqslant 1$, $\boldsymbol{\psi}_N^{(k)}$ 在 $L_s^q((0,1)^k)$ 中收敛到 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}{}_{\hat{h}}$。

1. 记 $\xi:=1-q(1-\alpha)>0$，则得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\int_{(0,1)^k}\boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}^{(k)}(t_1,\dots,t_k)^q\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j&=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}^{(k)}(t_1,\dots,t_k)^q\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j\\&\leqslant(C')^{kq}\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\prod_{j=1}^k(t_j-t_{j-1})^{\xi-1}\mathrm{d}t_j.\end{aligned}$$

因此，利用标准计算（参见 [BL22，引理 A.3]），对于 $\xi>0$，我们有

$$\int_{t_0:=0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}:=t}\prod_{j=1}^{k+1}(t_j-t_{j-1})^{\xi-1}\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j=t^{(k+1)\xi-1}\frac{\Gamma(\xi)^{k+1}}{\Gamma((k+1)\xi)}, \tag{7.5}$$

由此我们可得

$$\left(\frac{1}{k!}\int_{(0,1)^k}\boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}^{(k)}(t_1,\dots,t_k)^q\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j\right)^{1/q}\leqslant(C')^k\left(\frac{\Gamma(\xi)^k}{\Gamma(\xi k+1)}\right)^{1/q}. \tag{7.6}$$

2.现在我们来估计 L^q 阶矩 $\psi_N^{(k)}$（回忆一下，函数 $\psi_N^{(k)}$ 在对角线上为零）。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\int_{(0,1)^k}\overline{\psi}_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k)^q\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j&=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\overline{\psi}_N^{(k)}(t_1,\dots,t_k)^q\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j\\&=\frac{1}{N^k}\sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}\psi_N^{(k)}\left(\frac{n_1}{N},\dots,\frac{n_k-n_{k-1}}{N}\right)^q.\end{aligned}$$

由 (7.4)，这可以由以下量界定

$$\frac{(C')^k}{N^k u(N)^{qk}}\sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}\prod_{j=1}^k\frac{(n_j-n_{j-1})^{\xi-1}}{\ell(n_j-n_{j-1})^q},$$

其中 $\xi = 1 - q(1-\alpha) > 0$ 如上所述。设 $\varepsilon > 0$ 满足 $\xi > \varepsilon$。应用命题 B.1（例如取$\varepsilon = \xi/2$），存在常数 C，使得对任意 $k \geqslant 1$ 和 $N \geqslant 1$,

$$\sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k \leqslant N} \prod_{j=1}^{k} \frac{(n_j - n_{j-1})^{\xi-1}}{\ell(n_j - n_{j-1})^q} \leqslant \frac{C^k}{\ell(N)^{kq}} N^{k\xi} \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \prod_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1})^{\frac{1}{2}\xi - 1} \mathrm{d}t_j.$$

因此，利用 (7.1) 的下界，我们最终得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k!} \int_{(0,1)^k} (\overline{\psi}_N^{(k)}(t_1, \ldots, t_k))^q \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}t_j \right)^{1/q} &\leqslant (C'')^k \left(\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \prod_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1})^{\frac{1}{2}\xi - 1} \mathrm{d}t_j \right)^{1/q} \\ &\leq (C'')^k \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\xi)^k}{\Gamma(\frac{1}{2}\xi k + 1)} \right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

采用与 (7.6) 相同的计算方法。随着 $k \to +\infty$ 增大，这一项比指数函数衰减得更快，因此定理 2.5 的假设 (ii) 得到验证。

3. 对每个 $k \geqslant 1$，函数 $(\psi_N^{(k)})_{N \geqslant 1}$ 在 $\{(t_1, \ldots, t_k) \in (0,1)^k, \forall i \neq j, t_i \neq t_j\}$ 的每个紧子集上一致收敛。此外，对于每个 $q \in (\gamma, \frac{1}{1-\alpha})$，它们在 $L_s^q((0,1)^q)$ 中一致有界。由控制收敛可知，这表明对于每个 $q \in (\gamma, \frac{1}{1-\alpha})$，它们在 $L_s^q((0,1)^q)$ 中收敛。□

7.2. **定理 3.3 的证明**。我们应用一般的定理 2.7。它

证明 d in [Gia07，定理 A.8]重标度后的更新过 程

$$\tau^{(N)} := \frac{1}{N}\tau \subset \mathbb{R}_+$$

依 分布收敛（相对于 Matheron 拓扑）到 α-稳定再生集 $\mathcal{A}_\alpha$.

因此 假设 (a) 得到验证。

现在验证假设 (b)。设 G 是空间 $\mathcal{C}_\infty$ 上的有界连续函数。将定义 2.15 调整至钉扎模型后，对每个固定的 $k \geqslant 1$，以及每个 $0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$，我们定义

$$\psi_N^{(k)}(t_1, \ldots, t_k; G) := u(N)^{-k} \mathrm{E}_{N,h_N} \left[G\left(\frac{\tau}{N}\right) \mathbb{1}_{\lfloor Nt_1 \rfloor, \ldots, \lfloor Nt_k \rfloor \in \tau} \right].$$

这可以改写为

$$\psi_N^{(k)}(t_1, \ldots, t_k; G) = \psi_N^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) \mathrm{E}_{N,h_N} \left[G\left(\frac{\tau}{N}\right) \mid \lfloor Nt_1 \rfloor, \ldots, \lfloor Nt_k \rfloor \in \tau \right].$$

我们必须证明，对每个 $q \in (\gamma, \frac{1}{1-\alpha})$，对称函数 $\psi_N^{(k)}(\,\cdot\,; G)$ 在 $L_s^q((0,1)^k)$ 中依分布收敛。由于 G 有界，

$$\psi_N^{(k)}(t_1, \ldots, t_k; G) \leqslant \|G\|_\infty \psi_N^{(k)}(t_1, \ldots, t_k),$$

由此可知，根据 (7.7)， $\psi_N^{(k)}(\,\cdot\,; G)$ 在 $L_s^q((0,1)^k)$ 中一致有界。此外，根据 [CSZ16b，命题 A.8]，，对每个固定的 $T > 0$，在给定 $\lfloor NT \rfloor \in \tau$ 的条件下，随机闭集 $\tau^{(N)} \cap [0,T]$ 依分布收敛（在 Matheron 拓扑下）至 α-稳定再生集 $\mathcal{A}_\alpha$，其条件为 $T \in \mathcal{A}_\alpha$。因此，对每个固定的 $0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$,

$$\mathrm{E}_{N,h_N} \left[G\left(\frac{\tau}{N}\right) \mid \lfloor Nt_1 \rfloor, \ldots, \lfloor Nt_k \rfloor \in \tau \right] \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathbf{E}_{\hat{h}} \left[G(\mathcal{A}_\alpha) \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{A}_\alpha \right].$$

这里，条件期望 $\mathbf{E}_{\hat{h}}[\,\cdot \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{A}_\alpha]$ 理解为以下集合的拼接所服从的分布： k 个相互独立的 α-稳定再生集（$\mathcal{A}_\alpha^{(i)} \cap [0, t_i - t_{i-1}]$）$1 \leqslant i \leqslant k$ 分别以满足$t_i - t_{i-1} \in \mathcal{A}_\alpha^{(i)}$为条件，其中每个 $i \in [\![1,k]\!]$ 对应一个；以及一个不加条件的 α-稳定再生集 $\mathcal{A}_\alpha^{(k+1)} \cap [0, 1 - t_k]$。

最后，几[此证明了连续函数的情况，对于一般有界函数，证毕。

7.3. 定理 3.4 的证明。 根据定理 2.10，只需证明随机变量

$$D_N := \frac{1}{Nu(N)} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{n\in\tau}$$

依分布收敛于 $N \to +\infty$ 一个严格正随机变量。 D_N 的拉普拉斯变换为

$$\mathrm{E}_{N,h_N}[\mathrm{e}^{\lambda D_N}] = \mathrm{E}_{N,h_N}\Big[\exp\Big(\lambda_N \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{n\in\tau}\Big)\Big] = \frac{Z_{N,h_N+\lambda_N}}{Z_{N,h_N}},$$

其中 $\lambda_N := \frac{\lambda}{Nu(N)}$。根据引理 7.1（或 [Soh09，定理 3.1]），我们有

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_{N,h_N}[\mathrm{e}^{\lambda D_N}] = \frac{\mathcal{Z}_{1,\hat{h}+\lambda}}{\mathcal{Z}_{1,\hat{h}}} = \mathbf{E}_{\alpha,\hat{h}}\Big[\mathrm{e}^{\lambda L_1^{(\alpha)}}\Big],$$

其中 $\mathrm{d}\mathbf{P}_{\alpha,\,\hat{h}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{1,\,\hat{h}}} \mathrm{e}^{\hat{h} L_1^{(\alpha)}}\, \mathrm{d}\mathbf{P}$ 是连续齐次钉扎模型的分布，其中$\mathbf{P}$ 是 α-稳定子ordinator 的分布，$\sigma^{(\alpha)}$而 $L_1^{(\alpha)} = \inf\{s \geqslant 0,\ \sigma_s^{(\alpha)} \geqslant t\}$ 是其局部时（概述见第 3.1.1 节）。右侧是局部时在$\mathbf{P}_{\alpha,\,\hat{h}}$下的拉普拉斯变换，该局部时几乎处处严格为正。证明至此完成。□

8. 长程定向聚合物的证明

在本节中，我们证明定理 3.5、定理 3.6 和 3.7。需要强调的是，在这种情况下，由于 $\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}^d$ 不是有界的，因此不能直接应用定理 2.6-2.7。因此，我们引入某种截断论证，仅在有界带状区域内考虑随机游走。

对每个 $N \geqslant 1$，记 $S_N^* = \max_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{|S_n|}{a_N}$。设 $f\colon\ \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ 为光滑的非增函数，使得若 $x \leqslant 1$ 则 $f(x) = 1$，且若 $x > 2$ 则 $f(x) = 0$，并对每个 $A > 0$，令 $f_A(x) = f(x/A)$。然后，定义截断配分函数

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta_N} := \mathrm{E}\Big[f_A(S_N^*) \prod_{n=1}^{N} (1 + \beta_N \omega_{n,S_n})\Big].$$

我们回顾，$(\mathbf{X}_t)_{t\geq 0}$ 是作为随机游走的标度极限而出现的多元 α-稳定 Lévy 过程，其密度 $g_t(x)$ 连续且有界（参见例如 [Wat07]，其中也给出了它们的衰减速率）。我们还用 $\mathbf{X}^* = \sup_{t\in[0,1]} |\mathbf{X}_t|$ 来表示，并引入形式记号

$$\mathbf{P}\big(\,\cdot\,\big|\,\mathbf{X}_{t_1} = x_1, \ldots, \mathbf{X}_{t_k} = x_k\big)$$

对于$\mathbf{X}$ 从 x_{i-1} 到 x_i 、在时间 t_{i-1} 和 t_i 之间的桥的拼接所对应的分布（这可以定义为随机游走 $\big(\frac{1}{a_N} S_{\lfloor tN\rfloor}\big)_{t\geq 0}$ 在条件 $S_{\lfloor t_i N\rfloor} = \lfloor x_i a_N\rfloor$ 对于$1 \leq i \leq k$成立下的标度极限，见 [Lig70]）。

对于有界连续函数 $G\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$，定义

$$Z_N^{\omega,\beta_N} := \mathrm{E}\Big[G(S^{(N)}) \prod_{n=1}^{N} (1 + \beta_N \omega_{n,S_n})\Big].$$

在第 8.2 节中，我们说明如何调整定理 3.5 的证明，以证明 $Z^{\omega,\beta_N}_N(G)$的依分布收敛。

8.1. 定理 3.5 的证明。 证明的核心是截断配分函数 $Z^{\omega,\beta_N}_{N,A}$的收敛。

引理 8.1。 假设 $\lim_{N\to\infty} \beta_N V_N(a_N)^{-d} = \hat{\beta} \in [0,\infty)$。那么，对于每个 $A > 0$，我们都有如下依分布收敛：

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta_N} \xrightarrow[N\to\infty]{(d)} \mathcal{Z}_A^{\boldsymbol{\zeta},\hat{\beta}} = \sum_{k\geqslant 0} \hat{\beta}^k \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \boldsymbol{\psi}_A^{(k)}\big((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k)\big) \prod_{j=1}^{k} \boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}t_j \mathrm{d}x_j), \tag{8.1}$$

其中 $\psi_A^{(k)}((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)) := \prod_{j=1}^{k} g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})\, E[f_A(X^*) \mid X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_k}=x_k]$.该过程 $(Z^{\omega,N^{\beta_N}_A},)_{A>0}$ 的有限维边缘分布也收敛。此外，对于每个 $p\in[1,\gamma)$，$\lim_{N\to+\infty} E[|Z^{\omega,\beta_N}_{N,A}|^p] = E[|Z^{\zeta}_{A}{}^{\beta}|^p] < +\infty$，。

在证明这个引理之前，我们先看看它如何推出定理 3.5。

定理 *3.5* 的证明。由于 $f_A \leqslant 1$，我们有

$$\mathbb{E}\Big[|Z_N^{\omega,\beta_N} - Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}|\Big] = \mathbb{E}[Z_N^{\omega,\beta_N}] - \mathbb{E}[Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}] = \mathrm{E}[1-f_A(S_N^*)] \le \mathrm{P}[S_N^* \ge A]\,. \tag{8.2}$$

现在，根据不变性原理（例如参见 [Res07，定理 7.1]），我们知道 S_N^* 依分布收敛到 $\mathbf{X}^*$，当 $N\to+\infty$ 时，因此得到

$$\limsup_{N\to+\infty} \mathbb{E}\Big[|Z_N^{\omega,\beta_N} - Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}|\Big] \leqslant \mathbf{P}(\mathbf{X}^*\ge A) \xrightarrow[A\to\infty]{} 0\,. \tag{8.3}$$

对于 $A\le B$，注意到我们有 $0 \le Z^{\omega,N^{\beta_N}_A} \leqslant Z^{\omega,N^{\beta_N}_B}$。因此，引理 8.1 意味着 $0 \le \mathcal{Z}^{\zeta}_{A}{}^{\beta} \leqslant \mathcal{Z}^{\zeta}_{B}{}^{\beta}$ 几乎必然成立。特别地，我们有 $\mathcal{Z}^{\zeta,\hat\beta} := \lim_{A\to\infty} \mathcal{Z}^{\zeta}_{A}{}^{\hat\beta}$ 几乎必然存在。现在我们来证明$\mathcal{Z}^{\zeta,\hat\beta} < +\infty$几乎必然成立。为此，注意到由于 $\mathcal{Z}^{\zeta}_{A}{}^{\hat\beta} \leqslant \mathcal{Z}^{\zeta}_{B}{}^{\beta}$我们有

$$\mathbb{E}[|\mathcal{Z}_B^{\zeta,\hat\beta} - \mathcal{Z}_A^{\zeta,\hat\beta}|] = \mathbb{E}[\mathcal{Z}_B^{\zeta,\hat\beta}] - \mathbb{E}[\mathcal{Z}_A^{\zeta,\hat\beta}] = \lim_{N\to+\infty} \big(\mathbb{E}[Z_{N,B}^{\omega,\beta_N}] - \mathbb{E}[Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}]\big)\,.$$

根据不变性原理（[Res07，定理 7.1]），S_N^* 依分布收敛到$\mathbf{X}^*$，因此

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}] = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{E}[f_A(S_N^*)] = \mathbf{E}[f_A(\mathbf{X}^*)]\,, \tag{8.4}$$

因此

$$\mathbb{E}[|\mathcal{Z}_B^{\hat\beta} - \mathcal{Z}_A^{\hat\beta}|] = \mathbf{E}[f_B(\mathbf{X}^*) - f_A(\mathbf{X}^*)] \le \mathbf{P}(\mathbf{X}^*\ge A) \xrightarrow[A\to\infty]{} 0\,.$$

这表明随机变量族（$\mathcal{Z}^{\beta}_{A}$）$_{A\geqslant 1}$ 在 $\mathbf{L}^1$, 中是柯西族，因此极限 $\mathcal{Z}^{\zeta,\hat\beta} := \lim_{A\to\infty}\mathcal{Z}^{\zeta}_{A}{}^{\beta}$,也在 $\mathbf{L}^1$ 中成立。因此，引理 8.1 与（8.3）共同完成了定理 3.5 的证明。□

引理 *8.1* 的证明。我们需要用到的一个基本工具是局部极限定理，参见例如 [Don91；Gri86], ，现为方便起见回顾如下：

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \Big|(a_n)^d\,\mathrm{P}(S_n=x) - g_1\Big(\frac{x}{a_n}\Big)\Big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,. \tag{8.5}$$

由于密度 g_1 连续且有界，存在常数 C，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$和 $x\in\mathbb{Z}^d$,

$$\mathrm{P}(S_n=x) \leqslant \frac{C}{(a_n)^d}\,. \tag{8.6}$$

现在我们将应用定理 2.5，为此需要说明 $Z^{\omega,N^{\beta_N}_A}$,的收敛如何符合其框架。首先， $Z^{\omega,N^{\beta_N}_A}$,的多项式混沌展开为：

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta_N} = \mathrm{E}[f_A(S_N^*)] + \sum_{k\geqslant 1} (\beta_N)^k \sum_{\substack{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N\\ x_1,\dots,x_k\in\mathbb{Z}^d}} \mathrm{E}\big[f_A(S_N^*)\,\mathbb{1}_{\{S_{n_1}=x_1,\dots,S_{n_k}=x_k\}}\big] \prod_{j=1}^{k} \omega_{n_j,x_j}\,.$$

设 $\Omega_A = (0,1)\times\{x\in\mathbb{R}^d, |x|<2A\}$，它是 $\mathbb{R}^{1+d}$的有界开集。对于 $N\geqslant 1$，令 $\Omega_{N,A} = \{(\frac{n}{N}, \frac{x}{a_N})$ $1\leqslant n\leqslant N, x\in\mathbb{Z}^d$，其中 $|x|<2Aa_N\}$。本节中，我们还使用离散化参数 N，而非 δ（其中 $\delta = N^{-1}$）。离散化 $\Omega_{N,A}$ 自然产生 Ω 的一种镶嵌，其单元体积为 $v_N = N^{-1}(a_N)^{-d}$；回忆一下， V_N 由渐近关系 3.14 定义。对于此模型，根据局部极限定理（8.5）， $J_N = (a_N)^d$。我们还令 $\hat\beta_N := \beta_N V_N (a_N)^{-d}$，并回忆一下，我们假设 $\lim_{N\to\infty}\hat\beta_N = \hat\beta \in [0,\infty)$。

因此，我们可以将多项式混沌展开改写如下：

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta_N} = \mathrm{E}[f_A(S_N^*)] + \sum_{k\geqslant 1} \frac{(\hat{\beta}_N)^k}{k!} \sum_{(t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\in\Omega_{N,A}} \psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) \prod_{j=1}^{k} \frac{\omega_{Nt_j,a_Nx_j}}{V_N}\,.$$

这里，对于每个 $k\geqslant 1$, $\psi_N^{(k)},_A\colon \Omega_{N,A}^k \to \mathbb{R}_+$ 是一个在对角线上为零的对称函数，对每个 $(t_1,x_1)\dots,(t_k,x_k)\in\Omega_{N,A}$，且满足 $t_1<\dots<t_k$，定义为

$$\psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) := (a_N)^{kd}\mathrm{E}[f_A(S_N^*)\mathbb{1}_{\{S_{Nt_1}=a_Nx_1,\dots,S_{Nt_k}=a_Nx_k\}}]\,. \tag{8.7}$$

它在 Ω_A 上的分段延拓记为 $\psi_{N,A}^{(k)}$。现在，我们需要确定函数 $\psi_N^{(k)},_A$ 的标度极限，并证明它们满足定理 2.5 的假设。

引入记号 $\psi_N^{(k)} := \psi_N^{(k)},_{+\infty}$，并约定 $f_{+\infty} := 1$：于是我们可以写成

$$\psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) = \psi_N^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)\mathrm{E}\left[f_A(S_N^*) \mid S_{Nt_j}=a_Nx_j\,\forall j\in[\![1,k]\!]\right].$$

由随机游走的马尔可夫性，当 $t_1<\dots<t_k$ 时，我们得到

$$\psi_N^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) = (a_N)^{kd}\prod_{j=1}^{k}\mathrm{P}\big(S_{N(t_j-t_{j-1})}=a_N(x_j-x_{j-1})\big)\,.$$

因此，由局部极限定理 (8.5) 以及条件随机游走 [Lig70], 的不变性原理（对每个 $k\geqslant 1$），函数 $\psi_N^{(k)}$ 和 $\psi_N^{(k)},_A$ 分别在 $N\to+\infty$ 时逐点收敛到对称函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_A^{(k)}$，它们对每个 $0<t_1<\dots<t_k<1$ 以及 $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}^d$ 定义为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) &= \prod_{j=1}^{k} g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})\,,\\
\boldsymbol{\psi}_A^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big) &= \prod_{j=1}^{k} g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})\,\mathrm{E}\big[f_A(\mathbf{X}^*)\mid \mathbf{X}_{t_j}=x_j\,\forall j\in[\![1,k]\!]\big]\,,
\end{aligned} \tag{8.8}$$

其中我们回顾一下，$\mathbf{P}(\cdot\mid \mathbf{X}_{t_j}=x_j\,\forall j\in[\![1,k]\!])$ 是以下对象的简写：对每个 $j\in[\![1,k]\!]$，将连接 (t_{j-1},x_{j-1}) 与 (t_j,x_j) 的 k 条独立桥进行拼接。

为了证明该收敛确实在 L_s^q 中成立，并证明 $(\psi_{N,A}^{(k)},)$ 满足定理 2.5 的条件 (ii)，我们证明如下。对于每个 $q\in(\gamma,1+\frac{\alpha}{d})$，记 $\xi=\xi_q := \frac{d}{\alpha}(1+\frac{\alpha}{d}-q) > 0$。那么存在一个常数 C，使得以下结论成立：

(i) 对每个 $k\geqslant 1$,

$$\frac{1}{k!}\int_{\Omega_A^k} \boldsymbol{\psi}_A^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)^q \prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j \leqslant \frac{C^k}{\Gamma(\xi k+1)}\,. \tag{8.9}$$

(ii) 对每个 $k\geqslant 1$ 和 $N\geqslant 1$,

$$\frac{1}{k!}\int_{\Omega_A^k} \overline{\psi}_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)^q \prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j \leqslant \frac{C^k}{\Gamma(\frac{1}{2}\xi k+1)}\,. \tag{8.10}$$

注意，由于 $\psi_N^{(k)},_A \leqslant \psi_N^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_A^{(k)}\leqslant\boldsymbol{\psi}^{(k)}$，只需处理 $\psi_N^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$。由于这些界对每个 $q\in(\gamma,1+\frac{\alpha}{d})$ 都成立，控制收敛定理表明，$\psi_N^{(k)},_A$ 到 $\boldsymbol{\psi}_A^{(k)}$ 的逐点收敛可扩展为在 L_s^q 中的收敛。因此，定理 2.5 的条件 (i) 也得到满足。

我们从 (8.9) 开始。对于每个 $k\geqslant 1$，都有

$$\frac{1}{k!}\int_{\Omega_A^k} \boldsymbol{\psi}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)^q \prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j \leqslant \hat{\beta}^k \int_{0<t_1<\dots<t_k<1}\int_{(\mathbb{R}^d)^k} \prod_{j=1}^{k} g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})^q \prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j\,.$$

现在，函数 g 的尺度不变性表明，对于每个 $t>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_t(x)^q \mathrm{d}x = c_q\, t^{\xi-1}\,,$$

其中 $\xi=\xi_q := \frac{d}{\alpha}(1+\frac{\alpha}{d}-q) > 0$ 且 $c_q = \|g\|^q_{L^q(\mathbb{R}^d)}$ 有限，因为 $g\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$。因此，(8.9) 的左端有界于

$$(c_q)^k \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \prod_{j=1}^k (t_j-t_{j-1})^{\xi-1} \prod_{j=1}^k \mathrm{d}t_j = \frac{(c_q\Gamma(\xi))^k}{\Gamma(\xi k+1)}\,,$$

这里用到了 (7.5)。这就证明了 8.9。

现在我们转而证明 (8.10)。对于每个 $k\geq 1$，左端等于

$$\int_{0<t_1<\cdots<t_k} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \overline{\psi}_N^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)^q \prod_{j=1}^k \mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j$$
$$= (v_N(a_N)^{qd})^k \sum_{\substack{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N\\ x_1,\dots,x_k\in\mathbb{Z}^d}} \prod_{j=1}^k \mathrm{P}(S_{n_j-n_{j-1}}=x_j-x_{j-1})^q\,.$$

将一致上界 (8.6) 应用于 $\mathrm{P}(S_{n_j-n_{j-1}}=x_j-x_{j-1})^{q-1}$，并利用 $v_N = N^{-1}a_N^{-d}$，可得其有界于

$$C^k (a_N)^{-k(q-1)d} N^{-k} \sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N} \prod_{j=1}^k \frac{1}{(a_{n_j-n_{j-1}})^{(q-1)d}} \sum_{x_1,\dots,x_k\in\mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^k \mathrm{P}(S_{n_j-n_{j-1}}=x_j-x_{j-1}).$$

现在我们可以利用对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathrm{P}(S_n=x)=1$，对 $x_1,\dots,x_k$ 求和。接着，写作 $a_n=\ell(n)n^{1/\alpha}$，其中 $\ell(\cdot)$ 是一个缓变函数，并回忆 $\xi := \frac{d}{\alpha}(1+\frac{\alpha}{d}-q)$，可得 $(a_n)^{(q-1)d} \underline{=} n^{-(\xi-1)}\ell(n)^{(q-1)d}$。于是，(8.10) 的左端有界于

$$C^k (a_N)^{k(q-1)d} N^{-k} \sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N} \prod_{j=1}^k \frac{(n_j-n_{j-1})^{\xi-1}}{\ell(n_j-n_{j-1})^{(q-1)d}}$$
$$\leq (C')^k (a_N)^{k(q-1)d} N^{-k} \frac{N^{k\xi}}{\ell(N)^{k(q-1)d}} \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \prod_{j=1}^k (t_j-t_{j-1})^{\frac12\xi-1} \prod_{j=1}^k \mathrm{d}t_j = (C')^k \frac{\Gamma(\frac12\xi)^k}{\Gamma(\frac12\xi k+1)}\,,$$

其中，第一个不等式用到了命题 B.1（取 $\varepsilon=\xi/2$），随后用到了 (7.5)。由此得到 (8.10)，证明至此完成。□

8.2. **将证明推广到一般函数** G。不失一般性，假设函数 G 为正。如同在 $G=1$ 的情形中，我们对每个 $A>0$ 定义 $Z^{\omega,\beta_N}_{N,A}(G)$ 的截断版本：

$$Z^{\omega,\beta_N}_{N,A}(G) := \mathrm{E}\Big[f_A(S^*_N)G(S^{(N)})\prod_{n=1}^N(1+\beta_N\omega_{n,S_n})\Big].$$

引理 8.1 可作如下推广：

引理 8.2. 假设 $\lim_{N\to\infty}\beta_N V_N(a_N)^{-d}=\hat\beta\in[0,\infty)$。那么，对每个 $A>0$，我们有 *以下 C分布收敛*：

$$Z^{\omega,\beta_N}_{N,A}(G) \xrightarrow[N\to\infty]{(d)} \mathcal{Z}^{\zeta,\hat\beta}_A(G) = \sum_{k\geqslant 0}\hat\beta^k \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\int_{(\mathbb{R}^d)^k} \boldsymbol{\psi}^{(k)}_A\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k);G\big)\prod_{j=1}^k \boldsymbol{\zeta}(\mathrm{d}t_j\mathrm{d}x_j),$$

where $\boldsymbol{\psi}^{(k)}_A\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k);G\big) := \prod_{j=1}^k g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})\,\mathrm{E}[f_A(\mathbf{X}^*)G(\mathbf{X})\mid \mathbf{X}_{t_1}=x_1,\dots,\mathbf{X}_{t_k}=x_k]$.

该引理意味着 $Z^{\omega,\cdot}{}_{N}{}^{\beta_N}(G)$ 收敛。事实上，由于对于每个 $0\leqslant A\leqslant B$，我们还有，

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}(G)\leqslant Z_{N,B}^{\omega,\beta_N}(G)\,,$$

我们得到

$$\mathbb{E}\Big[|Z_N^{\omega,\beta_N}(G)-Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}(G)|\Big]=\mathrm{E}[G(S^{(N)})(1-f_A(S_N^*))]\leqslant\|G\|_\infty\mathrm{P}[S_N^*\geqslant A]$$

类似地，

$$\mathbb{E}\Big[|\mathcal{Z}_B^{\zeta,\hat\beta}(G)-\mathcal{Z}_A^{\zeta,\hat\beta}(G)|\Big]\leqslant\|G\|_\infty\mathbf{P}[\mathbf{X}^*\geqslant A]\,.$$

因此，

$$\lim_{A\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty}\mathbb{E}\Big[|Z_N^{\omega,\beta_N}(G)-Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}(G)|\Big]=0\,,$$

并且族 $(\mathcal{Z}_A^{\zeta}{}^{\beta,\hat{}}(G))_{A\geqslant1}$ 是 L^1，中的柯西族，因此极限 $\mathcal{Z}^{\zeta,\hat\beta}(G):=\lim_{A\to+\infty}\mathcal{Z}_A^{\zeta}{}^{\beta,\hat{}}(G)$ 在 L^1 中成立。

$Z^{\omega,}{}_{N}{}^{\beta}{}_{A,}(G)$ 的多项式混沌展开为

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta}(G)=\mathrm{E}[f_A(S_N^*)G(S^{(N)})]+\sum_{k\geqslant1}\frac{(\hat\beta_N)^k}{k!}\sum_{(t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\in\Omega_{N,A}}\psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k);G\big)\prod_{j=1}^k\frac{\omega_{Nt_j,a_Nx_j}}{V_N}\,,$$

其中，对于每个 $k\geqslant1$, $\psi_N^{(k)}{}_{,A}(\,\cdot\,;G):\Omega_{N,A}^k\to\mathbb{R}_+$ 是在对角线上为零的对称函数，其定义如下：对于每个 $(t_1,x_1)\dots,(t_k,x_k)\in\Omega_{N,A}$，其中 $t_1<\cdots<t_k$，有

$$\psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k);G\big):=(a_N)^{kd}\mathrm{E}\Big[f_A(S_N^*)G(S^{(N)})\mathbb{1}_{\{S_{Nt_1}=a_Nx_1,\dots,S_{Nt_k}=a_Nx_k\}}\Big]\,.$$

由局部极限定理 (8.5) 和条件随机游走 [Lig70]，的不变性原理可知，当 $N\to+\infty$ 时，它逐点收敛到对称函数 $\boldsymbol{\psi}_A^{(k)}(\,\cdot\,;G)$，该函数对每个 $0<t_1<\cdots<t_k<1$ 以及 $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}^d$ 定义如下：

$$\boldsymbol{\psi}_A^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k);G\big)=\prod_{j=1}^k g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})\mathbf{E}\Big[f_A(\mathbf{X}^*)G(\mathbf{X})\mid X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_k}=x_k\Big]\,.$$

此外，对于每个 $N\geqslant1$,

$$\psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k);G\big)\leqslant\|G\|_\infty\psi_{N,A}^{(k)}\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)\,,$$

因此，在引理 8.1 的证明中对 $G=1$ 证明的可积性条件适用于一般的有界函数 G。

8.3. 定理 3.6 的证明。 我们应用引理 6.1 来证明定理 3.6。

假设 (a) 由不变性原理推出，而假设 (b) 已在第 8.2 节中得到证明。因此，仍需证明 $\mathcal{Z}^{\zeta,\ \beta}$ 几乎必然严格为正。该结果可通过对 [BL22 第 4 节中 $\alpha=2$ 情形的证明作直接改编而得，7], 因此我们决定不在此处予以包含。

8.4. 定理 3.7 的证明。 需要强调的是，条目 (i) 是定理 3.5 的直接推论：若 $\lim_{N\to+\infty}\beta_NV_N(a_N)^{-d}=\hat{}\,\beta=0$，则有 $Z^{\omega,\cdot}{}_{N}{}^{\beta_N}$依分布收敛于 $\mathcal{Z}^{\zeta,\ \hat\beta=0}=1$。

对于条目 (ii) 的证明，在进行截断论证后，这也几乎是定理 2.10 的推论。

引理 8.3. 假设 极限$_{N\to+\infty}\beta_NV_N(a_N)^{-d}=+\infty$，那么对于每个固定的 $A>0$, $Z^{\omega,}{}_{N}{}^{\beta_N}{}_{A,}$依概率趋于0。

证明。对于固定的 $A>0$，由于 $f_A(x)=0$ 对于 $x>2$，我们有

$$Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}\leqslant \mathrm{E}\Big[\mathbb{1}_{\forall 1\leqslant n\leqslant N,|S_n|\leqslant 2Aa_N}\prod_{n=1}^{N}(1+\beta_N\omega_{n,S_n})\Big]\leqslant \tilde{Z}_{N,A}:=\mathrm{E}_{N,A}\Big[\prod_{n=1}^{N}(1+\beta_N\omega_{n,S_n})\Big],$$

其中 $\mathrm{P}_{N,A}(\,\cdot\,)=\mathrm{P}\Big[\,\cdot\;\big|\;\forall 1\leqslant n\leqslant N,\;|S_n|\leqslant 2Aa_N\Big]$。为了将定理 2.10 应用于 $\tilde{Z}_{N,A}$，我们必须证明 $(a_N)^dN^{-1}(a_N)^{-d}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}_{|S_n|\leqslant 2Aa_N}$ 在 P 下依分布收敛于一个严格正的随机变量（回顾一下，对于长程聚合物，$J_N=(a_N)^d$ 和 $v_N=N^{-1}(a_N)^{-d}$）。但这是长程随机游走不变性原理的推论（例如参见 [Res07, Thm. 7.1.]），因为

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}_{|S_n|\leqslant 2Aa_N}\xrightarrow{(d)}\int_0^1\mathbb{1}_{|\mathbf{x}_t|\leqslant 2A}\mathrm{d}t\,,$$

由过程的随机连续性（$\mathbf{X}_t)_{t\in[0,1]}$，该量几乎必然严格为正。

□

现在，我们从这个引理推导出第 (ii) 项的证明。任取 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$。对于每个 $N\geqslant 1$ 和 $A>0$，由 (8.2) 可得

$$\mathbb{E}[|Z_N^{\omega,\beta_N}-Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}|]\leq \mathrm{P}[S_N^*\geq A]\,.$$

选择足够大的 $A>0$，使得

$$\sup_{N\geqslant 1}\mathbb{E}[|Z_N^{\omega,\beta_N}-Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}|]\leq\delta\,. \tag{8.11}$$

于是，对于每个 $N\geqslant 1$,

$$\mathbb{P}[Z_N^{\omega,\beta_N}>2\varepsilon]=\mathbb{P}[(Z_N^{\omega,\beta_N}-Z_{N,A}^{\omega,\beta_N})+Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}>2\varepsilon]\leqslant\mathbb{P}[Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}>\varepsilon]+\mathbb{P}[Z_N^{\omega,\beta_N}-Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}>\varepsilon]\,.$$

因此，根据马尔可夫不等式和 (8.11),

$$\mathbb{P}[Z_N^{\omega,\beta_N}>2\varepsilon]\leqslant\mathbb{P}[Z_{N,A}^{\omega,\beta_N}>\varepsilon]+\delta\varepsilon^{-1}\,,$$

由此，应用该引理可得 $\limsup_{N\to+\infty}\mathrm{P}[Z_N^{\omega,\beta_N}>2\varepsilon]\leqslant\delta\varepsilon^{-1}$。由于 δ 是任意的，证明得以完成。

Appendix A. Lévy noises and Poisson convergence

在对我们的多项式混沌进行了充分的剖析、划分和截断之后，我们有必要在某个阶段建立一个依分布收敛的结果。这正是本附录的目的。

让我们回顾一下设置。集合 Ω 是 $\mathbb{R}^D$ 中有界且开集；对于每个 $\delta\in(0,1)$，Ω_δ 是与 Ω 的一个镶嵌 $\mathcal{C}_\delta=\{\mathcal{C}_\delta(x)\}_{x\in\Omega_\delta}$ 相关联的 Ω 的有限子集（定义见第 2.2.1 节）。对于每个 $\delta\in(0,1)$，给定独立同分布且中心化的随机变量 $(\omega_x)_{x\in\Omega_\delta}$，使得对于每个 $t>0$

$$\mathbb{P}[|\omega_x|>t]=\varphi(t)t^{-\gamma}\,,$$

其中 $\gamma\in(1,2)$ 且 φ 是缓变函数。此外，存在常数 $c_+,c_-\in[0,1]$，满足 $c_++c_-=1$，使得 $c_+=\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}[\omega_x>t]\,\mathbb{P}[|\omega_x|>t]$。离散噪声 ζ_δ 定义为

$$\zeta_\delta:=\frac{1}{V_\delta}\sum_{x\in\Omega_\delta}\omega_x\delta_x\,.$$

令 Λ 为 $\Omega\times\mathbb{R}$ 上的泊松点过程，其强度测度为 $\mu(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)=\mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z)$，其中 $\lambda(\mathrm{d}z)=\gamma(c_+\mathbb{1}_{z>0}+c_-\mathbb{1}_{z<0})|z|^{-1-\gamma}\mathrm{d}z$。我们的第一步是定义 γ-稳定噪声 ζ。对于每个 $a\in(0,1]$，令 $\Lambda^{(a)}$ 表示将点过程 Λ 限制在$\{(x,\ z)\in\Omega\times\mathbb{R},\ |z|>a\}$ 上所得的点过程。$\Omega\times\mathbb{R}$ 的这个子集在 μ下的测度有限，因此点过程 $\Lambda^{(a)}$ 几乎必然有限。这使得我们可以定义

$$\zeta^{(a)}=\sum_{(x,z)\in\Lambda}z\mathbb{1}_{|z|>a}\delta_x-\kappa(a)\mathrm{d}x\,,$$

其形式为 $\kappa(a) = \int_{\mathbb{R}} z\mathbb{1}_{|z|>a}\lambda(\mathrm{d}z)$。截断噪声 $(\zeta^{(a)})_{a\in(0,1]}$ 在某些负阶索 Sobole夫空间中随 $a\downarrow 0$ 几乎必然收敛。为了表述我们的结果，我们先简要介绍这些空间。

Ω 中紧支撑的无穷次可微函数空间记作 $\mathcal{D}_0(\Omega)$。其对偶空间是分布空间 $\mathcal{D}'(\Omega)$，分布 $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ 对元素$\mathbf{f}\in\mathcal{D}_0(\Omega)$ 的作用记作 $\langle T,\mathbf{f}\rangle$。令 $s\in\mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^D)$ 为 $\mathcal{D}_0(\Omega)$ 在希尔伯特范数下的完备化

$$\|\theta\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^D}(1+|z|^2)^s|\hat{\theta}(z)|^2dz\right)^{1/2},$$

其中 $\hat{}\theta$ 是 θ的傅里叶变换。它是$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$的线性子空间。该空间的局部版本为

$$H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{\theta\in\mathcal{D}'(\Omega)\,;\,\forall\psi\in\mathcal{D}_0(\Omega),\psi\theta\in H^s(\mathbb{R}^D)\}.$$

它是一个可分弗雷歇空间。

定理 A.1. $\zeta^{(a)}$ 在 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中对每个 $s>\frac{D}{2}$ 几乎必然收敛。其极限记作 ζ，其分布由下式刻画

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\langle\zeta,\mathbf{f}\rangle}\right] = \exp\left(\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\left(\mathrm{e}^{i\mathbf{f}(x)z}-1-i\mathbf{f}(x)z\right)\mathrm{d}x\lambda(\mathrm{d}z)\right),$$

对每个函数$\mathbf{f}\in\mathcal{D}_0(\Omega)$。

证明在于说明：对于每个函数 $\psi\in\mathcal{D}_0(\Omega)$，几乎必然，族 $(\psi\zeta^{(a)})_{a>0}$在 H^s 中当 $a\to 0$时是柯西列。此类证明可见于 [BL22，附录 A]。尽管他们论文的设定略有不同——作者考虑了更一般的测度 λ, 但其支集仅在$\mathbb{R}_+$)——他们的论证推广到我们的框架并无困难。实数集 s 满足$s>\frac{D}{2}$ 的部分恰好等于满足以下条件的 s 集合

$$\int_{\mathbb{R}^D}(1+|z|^2)^{-s}dz<+\infty\,.$$

这说明 Lévy 噪声与狄拉克分布具有相同的索博列夫正则性。

定理 A.2. 设 $s>\frac{D}{2}$，则 $(\zeta_\delta)_{\delta>0}$ 当 $\delta\to 0$ 时依分布收敛到 ζ，其中拓扑为 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。

该结果的证明可见于 [BL21]（定理 2.4）。这里的设定同样略有不同，但调整他们的证明并无困难。需要证明随机变量族 $(\zeta_\delta)_{\delta>0}$在 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中是紧的（引理 3.2），然后证明对于每个 $\mathbf{f}\in\mathcal{D}_0(\Omega)$，$\langle\zeta_\delta,\mathbf{f}\rangle$ 当 $\delta\to 0$ 时依分布收敛到 $\langle\zeta,\mathbf{f}\rangle$，这是二项分布收敛到泊松分布的推论。

我们现在推导出这一依分布收敛的一个有用推论。设 $k\geqslant 1$ 和 $a\in(0,1]$. 对 r
每个对称 函数 $\mathbf{f}\in D$空间$_0(\Omega^k)$，定义

$$X^{(a)}_\delta(\mathbf{f}) = \frac{1}{k!}\sum_{x_1,\dots,x_k\in\Omega_\delta}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k\frac{\omega^{(a)}_{x_j}}{V_\delta},$$

这里回顾一下（见（5.4））， $\omega^{(a)}_x=\omega_x\mathbb{1}_{|\omega_x|>aV_\delta}-\mathrm{E}[\omega\mathbb{1}_{|\omega|>aV_\delta}]$。

命题 A.3. 设$\mathbf{f}$ 是一个对称的、在$\Omega^{k,*}=\{(x_1,\dots,x_k)\in\Omega^k,\forall i\neq j,x_i\neq x_j\}$中具有紧支集的无穷次可微函数。那么，对每个 $s>\frac{D}{2}$，以下联合依分布收敛在 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\times\mathbb{R}$中成立，当 $\delta\downarrow 0$:

$$(\zeta_\delta, X^{(a)}_\delta(\mathbf{f}))\xrightarrow{(d)}(\zeta,\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}))\,,$$

where $\mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f})=\frac{1}{k!}\int_{\Omega^k}\mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k\zeta^{(a)}(\mathrm{d}x_j)$.

证明。 定义 $a\in(0,1]$ 和 $\delta\in(0,\ 1)$,

$$\zeta^{(a)}_\delta := \frac{1}{V_\delta}\sum_{x\in\Omega_\delta}\omega^{(a)}_x\delta_x = \frac{1}{V_\delta}\sum_{x\in\Omega_\delta}\omega_x\mathbb{1}_{|\omega_x|>aV_\delta}\delta_x-\frac{1}{V_\delta}\mathbb{E}[\omega\mathbb{1}_{|\omega|>aV_\delta}]\sum_{x\in\Omega_\delta}\delta_x\,.$$

利用 $|\Omega| = v_\delta \# \Omega_\delta$ 这一事实以及 V_δ ((2.12)) 的定义，上述表达式中的第二项（该项是确定性的）在任意负 Sobolev 空间中均收敛至 $\kappa(a)\mathrm{d}x$ ，当 $\delta \downarrow 0$ 时。此外，定理 A.2 的证明可推广至截断随机变量 $\omega^{(a)}$，因此对每个固定的 $a \in (0,1]\zeta_\delta^{(a)}$ 在分布意义下收敛于 $\boldsymbol{\zeta}^{(a)}$，收敛空间为 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。现在注意到

$$X_\delta^{(a)}(\mathbf{f}) = \frac{1}{k!}\int_{\Omega^k} \mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k \zeta_\delta^{(a)}(\mathrm{d}x_j)\,.$$

因此，由映射在 $H^{-s}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上的连续性可知，$(\zeta_\delta, X_\delta^{(a)}(\mathbf{f}))$ 收敛至 $(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{X}^{(a)}(\mathbf{f}))$ 的联合收敛性，其中该映射定义为

$$\theta \mapsto \int_{\Omega^k} \mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k \theta(\mathrm{d}x_j)\,.$$

事实上，我们证明一个略强的结论：该多重线性映射

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} H^{-s}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^k \times H^{ks}(\mathbb{R}^{kd}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\theta_1,\dots,\theta_k;\mathbf{f}) & \mapsto & \int_{\Omega^k} \mathbf{f}(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^k \theta_j(\mathrm{d}x_j)\,, \end{array}\right.$$

首先说明它为何定义良好。给定 $x_2,\dots,x_k \in \Omega$，函数 $\mathbf{f}(\cdot\, x_2,\dots,x_k)$ 是 $\mathrm{D}_0(\Omega)$ 的元素，因此 $\theta_1(\mathbf{f}(\cdot\, x_2,\dots,x_k))$ 定义良好，并且映射 $(x_2,\dots,x_k) \mapsto \theta_1(\mathbf{f}(\cdot\, x_2,\dots,x_k))$ 属于 $\mathrm{D}_0(\Omega^{k-1})$。因此，可以像对第一个变量所做的那样，对第二个变量 x_2 应用 θ_2。按照这一过程迭代进行，即可定义 $\mathbf{f}$ 关于 $\theta_1,\dots,\theta_k$ 的积分。由于 $\mathbf{f}$ 是对称的，该定义不存在歧义。

假设 $\zeta_1,\dots,\zeta_k$ 属于 $H^{-s}(\mathbb{R}^D)$。那么根据帕塞瓦尔恒等式和索об列夫范数的定义，

$$|T(\theta_1,\dots,\theta_k;\mathbf{f})| \leqslant \prod_{j=1}^k \|\theta_j\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^D)} \|\mathbf{f}\|_{H^{ks}(\mathbb{R}^{kD})}\,.$$

k对于一般情形，设 $K_1,\dots,K_k$ 是 Ω 的紧集，且$\mathbf{f}$的支撑包含于 $\prod_{j=1}^k K_j$。对于每个 $1 \leqslant j \leqslant k$，取一个光滑紧支撑函数 χ_j，使得它在 K_j 上满足 $\chi_j = 1$。定义$\chi(x_1,\dots,x_k) = \prod_{j=1}^k \chi_j(x_j)$。于是

$$T(\theta_1,\dots,\theta_k;\mathbf{f}) = T(\theta_1,\dots,\theta_k;\chi\mathbf{f}) = T(\chi_1\theta_1,\dots,\chi_k\theta_k;\mathbf{f}) \leqslant \prod_{j=1}^k \|\chi_j\theta_j\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^D)} \|\mathbf{f}\|_{H^{ks}(\mathbb{R}^{kD})}\,,$$

由此完成证明。 □

Appendix B. About homogeneous partition functions

本附录旨在证明引理 7.1。首先，我们需要以下一致上界，在第 8 节中也会用到。

命题 B.1。 设 L 是一个严格正的缓变函数，且设 $\xi > 0$。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C = C_\varepsilon$，使得对于每个 k，$N \in \mathbb{N}^*$，

$$\sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k \leqslant N} \prod_{j=1}^k L(n_j - n_{j-1})(n_j - n_{j-1})^{\xi-1} \leqslant C^k L(N)^k N^{k\xi} \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \prod_{j=1}^k (t_j - t_{j-1})^{\xi-\varepsilon-1}\mathrm{d}t_j\,,$$

and

$$\sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k<n_{k+1}:=N}\prod_{j=1}^{k+1}L(n_j-n_{j-1})(n_j-n_{j-1})^{\xi-1}$$
$$\leqslant C^{k+1}L(N)^{k+1}N^{k\xi+\xi-1}\int_{0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}=1}\prod_{j=1}^{k+1}L(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j-1})^{\xi-\varepsilon-1}\prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j\,.$$

证明。B 通过标准的比较论证，存在一个常数 C，使得对每个 k, $N\in\mathbb{N}$ *,

$$\sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant N}\prod_{j=1}^{k}L(n_j-n_{j-1})(n_j-n_{j-1})^{\xi-1}$$
$$\leqslant C^k\int_{0<t_1<\cdots<t_k<N}\prod_{j=1}^{k}L(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j-1})^{\xi-1}\mathrm{d}t_j\,.$$

通过变量替换 $t_j=Ns_j$，可得右侧等于

$$C^kN^{k\xi}L(N)^k\int_{0<s_1<\cdots<s_k<1}\prod_{j=1}^{k}\frac{L(N(s_j-s_{j-1}))}{L(N)}(s_j-s_{j-1})^{\xi-1}\mathrm{d}s_j.$$

根据 Potter界（见 [BGT87，第 1.5.6 定理.]），对每个 $\varepsilon>0$，存在一个常数 $C=C(\varepsilon)$，使得对每个 $s\leqslant t$, $L(s)\leqslant L(t)\binom{t}{s}^{\varepsilon}$。至此, -第一个不等式的证明完成；第二个不等式的证明方法相同。□

引理 *7.1* 的证明。引入 $\lambda=\mathrm{e}^h-1$。我们可以将条件配分函数改写为关于 λ 的形式，如下所示:

$$Z^c_{M,h}=\mathrm{e}^h\mathrm{E}\left[\prod_{n=1}^{M-1}(1+\lambda\mathbb{1}_{n\in\tau})\mathbb{1}_{M\in\tau}\right].$$

N展开乘积 $\prod(1+\lambda\mathbb{1}_{n\in\tau})$ 并取期望，得到$_{n=1}$

$$Z^c_{M,h}=\mathrm{e}^h\sum_{k\geqslant 0}\lambda^k\sum_{n_0:=0<n_1<\cdots<n_k<n_{k+1}:=M}\prod_{j=1}^{k+1}u(n_j-n_{j-1}).$$

首先，我们证明一致上界 (7.3)。根据 (7.1)，对任意 $k\geqslant 1$,

$$\sum_{n_0:=0<n_1<\cdots<n_k<n_{k+1}:=M}\prod_{j=1}^{k+1}u(n_j-n_{j-1})\leqslant C^{k+1}\sum_{n_0:=0<n_1<\cdots<n_k<n_{k+1}:=M}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{(n_j-n_{j-1})^{\alpha-1}}{\ell(n_j-n_{j-1})}\,.$$

应用命题 B.1 和 (7.5)，可得左侧被以下表达式所界定:

$$C^{k+1}\frac{M^{k\alpha+\alpha-1}}{\ell(M)^{k+1}}\frac{\Gamma(\alpha)^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}.$$

由于 $\lambda=e^h-1\sim h$as $h\to 0$，且 $h_N\sim\hat{}hN^{-1}u(N)^{-1}$as $N\to+\infty$，根据 (7.1)，存在一个常数 $C=C_{\hat{h}}$ 使得

$$\lambda_N\leqslant C\frac{\ell(N)}{N^{\alpha}}\,.$$

因此,

$$Z^c_{M,h_N}\leqslant C\frac{M^{\alpha-1}}{\ell(M)}\sum_{k\geqslant 0}\left(C\frac{M^{\alpha}\ell(N)}{N^{\alpha}\ell(M)}\right)^k\frac{1}{\Gamma((k+1)\alpha)}\,.$$

根据 [BGT87，第 1.5.4 定理。],

$$\sup_{N\geqslant 1}\sup_{1\leqslant M\leqslant N}\frac{M^{\alpha}\ell(N)}{N^{\alpha}\ell(M)}<+\infty.$$

由于序列（$\Gamma((k+1)\alpha))_{k\geqslant 0}$的下降速度快于任何指数速率，这就完成了（7.3）的证明。

现在假设 $M_N/N \to t \in (0,1]$。对于每个 $\varepsilon > 0$和 $k \in \mathbb{N}$，我们将求和指标划分为

$$\mathcal{D}_1^{\varepsilon,N}(k) := \{n_0 := 0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} := M_N;\, \forall j \in [\![1, k+1]\!],\, n_j - n_{j-1} \geqslant \varepsilon N\}\,,$$

and

$$\mathcal{D}_2^{\varepsilon,N}(k) := \{n_0 := 0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} := M_N;\, \exists j \in [\![1, k+1]\!],\, n_j - n_{j-1} < \varepsilon N\}\,,$$

由此得到 $Z^c_{M_N,h_N}$ 的分解，分为两部分：

$$Z^{c,1}_{N,\varepsilon} = \mathrm{e}^{h_N} \sum_{k\geqslant 0} (\lambda_N)^k \sum_{n_1,\dots,n_k \in \mathcal{D}_1^{\varepsilon,N}(k)} \prod_{j=1}^{k+1} u(n_j - n_{j-1})$$

and

$$Z^{c,2}_{N,\varepsilon} = \mathrm{e}^{h_N} \sum_{k\geqslant 0} (\lambda_N)^k \sum_{n_1,\dots,n_k \in \mathcal{D}_2^{\varepsilon,N}(k)} \prod_{j=1}^{k+1} u(n_j - n_{j-1})\,.$$

利用函数 U_N （在（7.2）中引入）重写 $Z^{c,N^{1}}_{,\varepsilon}$，得到

$$Z^{c,1}_{N,\varepsilon} = \mathrm{e}^{h_N} u(N) \sum_{k\geqslant 0} (\lambda_N u(N) N)^k \int_{\substack{0<t_1<\cdots<t_k<\frac{M_N}{N} \\ \forall j\in[\![1,k+1]\!]\,,\, t_j - t_{j-1} \geqslant \varepsilon}} \prod_{j=1}^{k+1} U_N\Big(\frac{\lfloor Nt_j\rfloor - \lfloor Nt_{j-1}\rfloor}{N}\Big) \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}t_j\,.$$

由于函数 U_N在 $(0,1]$ 上一致收敛到函数 $U(t) = t^{\alpha-1}$，我们得到，对于每个固定的 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{Z^{c,1}_{N,\varepsilon}}{u(N)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{k\geqslant 0} \hat{h}^k \int_{\substack{0<t_1<\cdots<t_k<t \\ \forall j\in[\![1,k+1]\!]\,,\, t_j - t_{j-1} \geqslant \varepsilon}} \prod_{j=1}^{k+1} (t_j - t_{j-1})^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}t_j\,,$$

并且当 $\varepsilon \to 0$ 趋于 $\mathcal{Z}^{c}_{t\,,\hat{h}}$ 时，右端收敛（回忆 7.5）。只剩下证明 $Z^{c,N^{2}}_{,\varepsilon}$ 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时渐近可忽略。再次利用界 (7.1) 以及 $M_N \leqslant N$ 这一事实，对于每个 $k \geqslant 0$,

$$\sum_{n_1,\dots,n_k \in \mathcal{D}_2^{\varepsilon,N}(k)} \prod_{j=1}^{k+1} u(n_j - n_{j-1}) \leqslant C^{k+1} \sum_{\substack{1\leqslant n_1<\cdots<n_k<N \\ \exists j\in[\![1,k+1]\!], n_j - n_{j-1} \leqslant \varepsilon N}} \prod_{j=1}^{k} \frac{(n_j - n_{j-1})^{\alpha-1}}{\ell(n_j - n_{j-1})}\,,$$

根据命题 B.1，它被以下数值所界定：

$$C^{k+1} \frac{N^{k\alpha+\alpha-1}}{\ell(N)^{k+1}} \int_{\substack{0<t_1<\cdots<t_k<1 \\ \exists j\in[\![1,k+1]\!]\,,\, t_j - t_{j-1} < \varepsilon}} \prod_{j=1}^{k+1} (t_j - t_{j-1})^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}t_j\,.$$

因此，

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{Z^{c,2}_{N,\varepsilon}}{u(N)} \leqslant C \sum_{k\geqslant 0} C^k \int_{\substack{0<t_1<\cdots<t_k<1 \\ \exists j\in[\![1,k+1]\!]\,,\, t_j - t_{j-1} < \varepsilon}} \prod_{j=1}^{k+1} (t_j - t_{j-1})^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}t_j\,,$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时趋于 0。 □

参考文献

[AKQ14] Tom Alberts、Konstantin Khanin 和 Jeremy Quastel。“维数为 $1+1$ 时定向聚合物的中间无序区间”。载于：《概率年刊》42.3（2014），第 1212–1256 页。[Bal23] Raluca Balan。“具有 Lévy 白噪声的随机波动方程”。载于：《拉丁美洲概率与数理统计杂志》20（2023年1月），第 463 页。doi: 10.30757/ALEA.v20-16。[BJ24] Raluca M Balan 和 Juan J Jiménez。“具有对称 α-稳定 Lévy 噪声的随机偏微分方程级数展开”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2409.12286（2024）。[Bal14] Raluca M. Balan。“具有 α-稳定 Lévy 噪声的随机偏微分方程：随机场方法”。载于：《随机分析国际期刊》2014.1（2014），第 793275 页。[BN17] Raluca M. Balan 和 Cheikh B. Ndongo。“具有 Lévy 白噪声的随机偏微分方程解的 Malliavin 可微性”。载于：《随机分析国际期刊》2017.1（2017），第 9693153 页。doi: https://doi.org/10.1155/2017/9693153。[BCL23] Quentin Berger、Carsten Chong 和 Hubert Lacoin。“具有乘性 Lévy 噪声的随机热方程：存在性、矩与间歇性”。载于：《数学物理通讯》402.3（2023），第 2215–2299 页。[BL21] Quentin Berger 和 Hubert Lacoin。“具有幂律尾部无序的定向聚合物的标度极限”。载于：《数学物理通讯》386（2021），第 1051–1105 页。[BL22] Quentin Berger 和 Hubert Lacoin。“Lévy 噪声中的连续统定向聚合物”。载于：《综合理工学院数学杂志》9（2022），第 213–280 页。[BL24] Quentin Berger 和 Alexandre Legrand。“DNA变性无序广义 Poland-Scheraga 模型的标度极限”。载于：《概率论与相关领域》190.1（2024），第 179–258 页。[BGT87] N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels。《正则变差》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，1987年。[BDG72] D. L. Burkholder、B. J. Davis 和 R. F. Gundy。“鞅上算子凸函数的积分不等式”。载于：第六届伯克利数学统计与概率研讨会论文集。第 2 卷：概率论。加利福尼亚大学出版社，1972年，第 223–240 页。[CSZ16a] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。“无序系统的多项式混沌与标度极限”。载于：《欧洲数学会杂志》19.1（2016），第 1–65 页。[CSZ16b] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。“连续统无序钉扎模型”。载于：《概率论与相关领域》164.1（2016），第 17–59 页。[CSZ17] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。“边缘相关无序系统中的普适性”。载于：《应用概率年刊》27.5（2017），第 3050–3112 页。[CSZ20] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。“整个亚临界区间内的二维 KPZ 方程”。载于：《概率年刊》48.3（2020），第 1086–1127 页。[CSZ23] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。“临界二维随机热流”。载于：《数学新进展》233.1（2023），第 325–460 页。[CSZ25] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。“从无序系统到临界二维随机热流”。载于：预印本 arXiv:2511.08479（2025）。[CM94] René Carmona 和 Stanislav Molchanov。《抛物型Anderson问题与间歇性》。第 108 卷。美国数学会回忆录 518。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1994年。[CDH18] Carsten Chong、Robert C. Dalang 和 Thomas Humeau。“具有 Lévy 噪声的随机热方程解的路径性质”。载于：《随机过程与偏微分方程：分析与计算》7（2018），第 123–168 页。[CK23] Carsten Chong 和 Péter Kevei。“峰值景观：具有 Lévy 噪声的随机热方程的间歇岛”。载于：《概率年刊》51.4（2023），第 1449–1501 页。

[Com17] Francis Comets。《随机环境中的定向聚合物》。第 2175 卷。圣弗卢尔概率暑期学校 XLVI。施普林格国际出版公司，2017年。ISBN：978-3-319-50486-5。[Don97] R.A. Doney。“无限均值情形下的单侧局部大偏差与更新定理”。载于：《概率论与相关领域》107（1997年），第 451–465 页。[Don91] RA Doney。“二元局部极限定理”。载于：《多元分析杂志》36.1（1991年），第 95–102 页。[FL] Pierre Faugère 和 Hubert Lacoin。《Lévy 噪声中的连续钉扎模型》。即将发表。[Fel66] William Feller。《概率论及其应用导论》，第 2 卷。约翰·威立父子出版公司，1966年。[Gia11] Giacomin Giacomin。《通过基本概率模型研究无序与临界现象》。第 2025 卷。圣弗卢尔概率暑期学校 XL。施普林格出版社（柏林·海德堡），2011年。[Gia07] Giambattista Giacomin。《随机聚合物模型》。帝国理工学院出版社，2007年。[Gri86] Philip S Griffin。“独立同分布随机向量的矩阵归一化和”。载于：《概率年刊》（1986年），第 224–246 页。[HOR84] Laurens de Haan、E Omey 和 S Resnick。“吸引域与正则变差，见$\mathbb{R}^d$”。载于：《多元分析杂志》14.1（1984年），第 17–33 页。[Har74] A Brooks Harris。“随机缺陷对伊辛模型临界行为的影响”。载于：《C辑物理学杂志：固态物理》7.9（1974年），第 1671 页。[Hit88] Pawel Hitczenko。“随机变量切序列的矩比较”。载于：《概率论与相关领域》78.2（1988年），第 223–230 页。[HH85] David A Huse 和 Christopher L Henley。“随机杂质导致的伊辛系统畴壁钉扎与粗糙化”。载于：《物理评论快报》54.25（1985年），第 2708 页。[Lac17] Hubert Lacoin。“稳定钉扎模型的边缘相关性”。载于：国际非平衡随机动力学研讨会。施普林格，2017年，第 597–616 页。[LS17] Hubert Lacoin 和 Julien Sohier。“无需哈里斯判据的无序相关性：具有 γ-稳定环境的钉扎模型情形”。（2017年）。[LP18] Günter Last 和 Mathew Penrose。《泊松过程讲义》。第 7 卷。剑桥大学出版社，2018年。[Lig70] ThomasMLiggett。“独立随机向量条件和的弱收敛”。载于：《美国数学会会刊》152.1（1970年），第 195–213 页。[PG00] Victor de la Pena 和 Evarist Giné。“解耦：从依赖到独立、随机停止过程、U统计量与过程、鞅及其他”。载于：《美国统计学会杂志》95（2000年）。[PM95] Victor H de la Pena 和 Stephen J Montgomery-Smith。“多元 U 统计量尾概率的解耦不等式”。载于：《概率年刊》（1995年），第 806–816 页。[Res04] Sidney Resnick。“多元重尾分析基础”。载于：《应用概率杂志》41.A（2004年），第 191–212 页。[RG79] Sidney Resnick 和 Priscilla Greenwood。“二元稳定分布刻画与吸引域”。载于：《多元分析杂志》9.2（1979年），第 206–221 页。[Res07] Sidney I Resnick。《重尾现象：概率与统计建模》。施普林格，2007年。[RW86] J. Rosiński 和 W. A. Woyczyński。“关于相对于 p-稳定运动的 Itô 随机积分：内时钟、样本路径的可积性、二重积分与多重积分”。载于：《概率年刊》14.1（1986年），第 271–286 页。ISSN：00911798，2168894X。[Sai98] Erwan Saint Loubert Bié。“由泊松噪声驱动的随机偏微分方程研究”。载于：《概率论与相关领域》111.2（1998年），第 287–321 页。DOI：https://doi.org/10.1007/s004400050169。[Soh09] Julien Sohier。“齐次钉扎模型的有限尺寸标度”。载于：《ALEA：拉丁美洲概率与数理统计杂志》6（2009年），第 163–177 页。

[Sur85] D Surgailis。“关于多重稳定积分”。载于：概率论及相关领域杂志 70.4（1985年），第 621–632 页。[Viv21] Roberto Viveros。“ γ-稳定随机环境中的定向聚合物”。载于：亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊57.2（2021年），第 1081–1102 页。[Wat07] Toshiro Watanabe。“多维稳定密度的渐近估计及其应用”。载于：《美国数学会会刊》359.6（2007年），第 2851–2879 页。[WY24] Ran Wei 和 Jinjiong Yu。“临界无序钉扎测度”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2402.17642*（2024年）。[Zel+87] Ya B Zel’dovich、S A Molchanov、A A Ruzmaĭkin 和 Dmitrii D Sokolov。“随机介质中的间歇性”。载于：《物理科学进展》152.1（1987年），第 3–32 页。[Zyg24] Nikos Zygouras。“随机环境中的定向聚合物：相变综述”。载于：《随机过程及其应用》177，弗朗西斯·科梅茨纪念专辑（2024年），第 104431 页。

DMA，高等师范学院，PSL大学，法国国家科学研究中心，法国巴黎75005电子邮箱：
gaspard.gomez@ens.psl.eu