无界区域上的反弹性散射单调性方法 *

Bastian Harrach[†]和向建立 [‡]

摘要。我们讨论无界均匀背景介质中具有紧支集、可穿透且可能非均匀的散射体对应的纳维方程时谐反散射问题，并针对将入射平面波的叠加映射为相应散射波的远场模式的远场算子，建立单调性关系。结合单调性关系与局部化势方法，我们将所谓的单调性方法推广到利用远场算子刻画拉′梅参数和密度中非均匀性的支集。

关键词。单调性方法、反散射、纳维方程、远场算子、非均匀介质

AMS 学科分类。35J20, 35P25,35R30, 45Q05

arXiv:2602.04453v1 [math.AP] 4 Feb 2026

1. 引言。波散射问题是偏微分方程逆问题中的一个重要研究方向，已广泛应用于无损检测、环境科学、地球物理勘探和医学诊断等工程领域。尽管人们已经通过积分方程和变分方法对正散射问题的适定性进行了深入研究，逆问题也同样吸引了广泛而深入的研究 [5]。

根据远场数据重建未知散射体的位置和形状，是反散射问题中的一个基础性问题，但其严重不适定。过去二十年来，高效的定性重建算法受到广泛关注，其中有两类具有代表性的非迭代方法：分解方法和采样方法。分解方法包括对偶空间方法 [5]和点源方法 [23], ；采样方法包括奇异源方法 [24], 、探测法 [20], 、线性采样法 [4] 和因子分解法 [21], 。这些方法的主要思想是构造一个与测量数据相关的判据，以检测目标物体。在用于形状重建的定性方法中，Harrach 最近在 [18] 中将单调性方法引入电阻抗层析成像。该方法以远场算子表述，这些算子将入射平面波的叠加映射为相应散射波的远场模式；入射平面波在未知散射物体处发生散射。与因子分解法 [21], 相比，单调性方法的一般定理不要求远场算子的中间算子的实部可分解为一个正的强制算子和一个紧算子，这意味着单调性方法能够在以下条件下生成重建方案：

*提交给编辑的日期。

[†]法兰克福歌德大学数学研究所，德国美因河畔法兰克福（harrach@math.uni-frankfurt.de）。

[‡]通讯作者：三峡大学数理学院三峡数学研究中心，中国宜昌 443002（xiangjianli@ctgu.edu.cn）。

本手稿仅供评审使用。

对未知目标采用更弱的先验假设 [14]。

在 [22], Lakshtanov 和 Lechleiter 通过对两个远场算子之差进行特定因子分解，推广了用于介质逆散射的因子分解法，并获得了单调性原理，从而给出了一种计算边界值上下界的简单算法。因此，单调性方法与因子分解法密切相关。最近， [18] 中的单调性分析已扩展到有界区域内亥姆霍兹方程的系数逆问题，其中频率固定为非共振频率，且散射系数函数 [16, 17], 为实值；作者证明了散射系数与局部诺伊曼到狄利克雷算子之间的单调性关系。结合局部位势方法，他们从部分边界数据 [16] 中推导出了基于单调性的散射体构造性刻画，并改进了空间维数 [17]下的界。随后，Griesmaier 和 Harrach [15] 将这些结果推广到了无界区域上的介质反散射问题，其中采用平面波入射场，并通过对散射波的远场观测进行研究。此外，单调性方法还扩展到了混合障碍物逆散射 [1], 、狄利克雷裂纹逆检测 [6], 、开放周期波导 [13], 、封闭圆柱波导 [3]以及其中的参考文献 [2, 14, 19]。

关于稳态情形下的各向同性线性弹性，Lam´e参数与诺伊曼到狄利克雷算子之间的单调性结果以及局部化势的存在性已在 [10], 中给出，并在 [8, 9, 12]中被应用于基于标准单调性检验以及线性化单调性检验来检测和重构夹杂物。为了相对于标准正则化技术取得显著改进，Eberle和Harrach采用基于单调性的正则化方法 [7]处理了同一问题。对于纳维方程的非稳态或时间谐波情形，论文 [11]将单调性方法推广到夹杂物检测，并说明了如何确定Lam´e参数和密度中某些类型的非均匀性。本文的主要贡献是将单调性方法推广到无界区域上的时间谐波弹性逆散射问题。我们的方法依赖于远场算子关于Lam´e参数以及密度的单调性，以及局部化势技术。

本文结构安排如下。第 2 节简要介绍散射问题的数学框架；第 3 节推导远场算子的单调性关系。第 4 节讨论无界区域中纳维方程的局部化波函数的存在性，并利用它们给出第 3 节所述单调性关系的逆命题。第 5 节则基于远场算子，对散射对象的支集进行严格刻画。

2. 问题表述。本文研究时谐弹性波的介质逆散射问题，并处理形状重建问题，该问题也称为检测问题。假设时谐波在各向同性、非吸收非均匀弹性介质中传播，其密度函数为ρ，拉梅´常数为 μ 和 λ，且满足 $\mu > 0$， $\mu + \lambda > 0$ 在 $\mathbb{R}^2$中。我们特别关注确定材料参数 λ, μ 或 ρ 与已知常数背景值 λ_0， μ_0 或 ρ_0不同的区域，其中已知一组远场测量

本手稿仅供审阅。

其形式为远场算子。该问题在物理上对应于根据远场测量确定物体 Ω 中的非均匀区域。这里假设 λ_0、μ_0、 $\rho_0 > 0$ 是一些已知常数，并且材料参数存在跳跃

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \chi_{D_1}\psi_1, \quad D_1 \subseteq \Omega,\\ \mu &= \mu_0 + \chi_{D_2}\psi_2, \quad D_2 \subseteq \Omega,\\ \rho &= \rho_0 - \chi_{D_3}\psi_3, \quad D_3 \subseteq \Omega,\end{aligned}$$

其中，χ_{D_j} $(j = 1,2,3)$ 是集合 D_j 和 $\psi_j|_{D_j} \in L_+^\infty(D_j) := \{\psi \in L^\infty(D_j), \operatorname{ess\,inf}_{D_j}\psi > 0\}$ 的特征函数，因此，在材料参数与背景值不同的区域边界 ∂D_j 处，材料参数存在跳跃。

The 我们研究的散射问题由以下纳维方程描述 :

$$\Delta^*_{\lambda,\mu}u_c + \rho\omega^2 u_c = 0, \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \quad (c := (\lambda,\mu,\rho)). \tag{2.1}$$

圆频率为 $\omega > 0$，$\Delta^*_{\lambda,\mu}$ 表示 Lam´e 算子 $\mu\Delta + (\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot)$。这里，$u_c = u^{\text{in}} + u_c^{\text{sc}}$为总位移场，它由给定的入射平面波 u^{in} 和散射波 u_c^{sc} 叠加而成。根据亥姆霍兹分解定理，散射场 u_c^{sc}可分解为 $u_c^{\text{sc}} = u_p + u_s$，其中 u_p 表示压缩波， u_s 表示剪切波， k_p 为压缩波波数， k_s 为剪切波波数。它们分别具有以下形式:

$$u_p := u_p(\lambda,\mu,\rho) := -\frac{1}{k_p^2}\nabla(\nabla\cdot u_c^{\text{sc}}), \qquad u_s := u_s(\lambda,\mu,\rho) := \frac{1}{k_s^2}\overrightarrow{\operatorname{curl}}\operatorname{curl} u_c^{\text{sc}},$$

$$k_p := k_p(\lambda,\mu,\rho) := \omega\sqrt{\frac{\rho}{2\mu+\lambda}}, \qquad k_s := k_s(\lambda,\mu,\rho) := \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}},$$

with

$$\nabla\cdot u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \operatorname{curl} u = \nabla^\perp\cdot u := \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \overrightarrow{\operatorname{curl}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^\top, \quad u = [u_1,u_2]^\top.$$

且 u_p, u_s 满足 $\Delta u_p + k_p^2 u_p = 0$ 和 $\Delta u_s + k_s^2 u_s = 0$。此外，散射场 u_c^{sc} 还必须满足库普拉泽辐射条件，即

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u_p}{\partial r} - ik_{p_0}u_p\right) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_{s_0}u_s\right) = 0, \quad r = |x|. \tag{2.2}$$

假设辐射条件（2.2）在所有方向 $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S} := \{x \in\mathbb{R}^2, \ |x| = 1\}$ 以及 $k_{t_0} := k_t$ （λ_0， μ_0， ρ_0） （$t = p$， s）成立。本文中，满足库普拉泽辐射条件（2.1）的纳维方程（2.2）的解称为辐射解。众所周知，纳维方程的辐射解具有以下渐近展开:

$$u_c^{\text{sc}}(x) = \frac{e^{ik_{p_0}r}}{\sqrt{r}}u_p^\infty(\hat{x})\hat{x} + \frac{e^{ik_{s_0}r}}{\sqrt{r}}u_s^\infty(\hat{x})\hat{x}^\perp + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad \text{as } r\to\infty,$$

本手稿仅供审阅。

and

$$T_{\lambda,\mu}u_c^{\mathrm{sc}}(x) = \frac{i\omega^2}{k_{p_0}}\frac{e^{ik_{p_0}r}}{\sqrt{r}}u_p^\infty(\hat{x})\hat{x} + \frac{i\omega^2}{k_{s_0}}\frac{e^{ik_{s_0}r}}{\sqrt{r}}u_s^\infty(\hat{x})\hat{x}^\perp + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{r}\Big), \quad \text{as } r\to\infty.$$

应力向量 $T_{\lambda,\ \mu}u$ 定义为

$$T_{\lambda,\mu}u := 2\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda\nu\ \nabla\cdot u - \mu\nu^\perp\nabla^\perp\cdot u,$$

其中， ν 表示单位外法向量， $\nu^\perp$ 由 ν 逆时针旋转 $\pi/2$得到。函数 u_p^∞和 u_s^∞分别称为 u_c^{sc}的压缩波和剪切波远场模式。我们将相应散射场的远场模式对（$u_p^\infty(\hat{x})$ $u_s^\infty(\hat{x})$）记为 $u_c^\infty(\hat{x})$，即

$$u_c^\infty(\hat{x}) = (u_p^\infty(\hat{x}), u_s^\infty(\hat{x})).$$

接下来，我们引入密度为 $g = (g_p, g_s) \in [L^2(\mathbb{S})]^2$的弹性赫尔格洛茨波函数，定义如下：

$$v_g(x) = e^{-i\pi/4}\int_{\mathbb{S}}\left\{\sqrt{\frac{k_{p0}}{\omega}}e^{ik_{p_0}d\cdot x}dg_p(d) + \sqrt{\frac{k_{s0}}{\omega}}e^{ik_{s_0}d\cdot x}d^\perp g_s(d)\right\}\mathrm{d}s(d). \tag{2.3}$$

本文中的希尔伯特空间 $[L^2(\mathbb{S})]^2$ 配备如下内积：

$$\langle g, h\rangle = \frac{\omega}{k_p}\int_{\mathbb{S}} g_p\overline{h_p}\mathrm{d}s + \frac{\omega}{k_s}\int_{\mathbb{S}} g_s\overline{h_s}\mathrm{d}s, \quad g, h\in[L^2(\mathbb{S})]^2.$$

对于平面波入射场 $u^{\mathrm{in}}(x,d) = de^{ik_{p_0}x\cdot d} + d^\perp e^{ik_{s_0}x\cdot d}$这一特殊情形，我们通过第二个自变量明确表示对入射方向 $d\in\mathbb{S}$ 的依赖，因此将问题（2.1）—（2.2）对应的散射场、总场和远场模式分别记为 $u_c^{\mathrm{sc}}(x,d)$、 $u_c(x,d)$和 $u_c^\infty(\hat{x},d)$。定义弹性远场算子 F_cg：$[L^2(\mathbb{S})]^2 \longrightarrow [L^2(\mathbb{S})]^2$ ($c := (\lambda,\mu,\rho)$)如下：

$$(F_cg)(\hat{x}) = e^{-i\pi/4}\int_{\mathbb{S}}\left\{\sqrt{\frac{k_{p_0}}{\omega}}u_c^\infty(\hat{x},d)dg_p(d) + \sqrt{\frac{k_{s0}}{\omega}}u_c^\infty(\hat{x},d)d^\perp g_s(d)\right\}\mathrm{d}s(d), \tag{2.4}$$

由线性性，对于任意给定的函数 $g\in[L^2(\mathbb{S})]^2$, ， 入射场为由2.1）-（2.2）定义的弹性赫尔格洛茨波函数v_g （2.3）的正散射问题解为

$$u_{c,g}(x) = \int_{\mathbb{S}} u_c(x,d)g(d)\mathrm{d}s(d), \quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{2.5}$$

以及相应的散射场

$$u_{c,g}^{\mathrm{sc}}(x) = \int_{\mathbb{S}} u_c^{\mathrm{sc}}(x,d)g(d)\mathrm{d}s(d), \quad x\in\mathbb{R}^2,$$

本手稿仅供审阅。

具有远场模式$u_{c,g}^{\infty}$ 满足$u_{c,g}^{\infty} = F_c g$。

最后，我们引入纳维方程（2.1）在 $\mathbb{R}^2$ 空间中的基本解，其表达式为

$$\Gamma_c(x,y) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s|x-y|)I + \frac{i}{4\omega^2}\nabla_x^{\top}\nabla_x\big(H_0^{(1)}(k_s|x-y|) - H_0^{(1)}(k_p|x-y|)\big)$$

对于 x， $y \in \mathbb{R}^2$ 和 $x \neq y$，其中 $H_0^{(1)}(\cdot)$ 是零阶第一类汉克尔函数， I 是单位矩阵。此外，下标 x 表示对相应变量求导。远场模式 Γ_p^{∞}和 Γ_s^{∞}由下式给出

$$\Gamma_p^{\infty}(\widehat{x},y) = \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_p}} e^{-ik_p\widehat{x}\cdot y} J(\widehat{x}), \qquad \Gamma_s^{\infty}(\widehat{x},y) = \frac{1}{\mu}\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_s}} e^{-ik_s\widehat{x}\cdot y} J(\widehat{x}^{\perp}),$$

其中，对于任意 $z \in \mathbb{R}^2$、 $z \neq 0$， $J(z) = \frac{zz^{\top}}{|z|^2}$。

3. 远场算子的单调性关系。本节推导参数（λ， μ， ρ）与远场算子 F之间的一些单调性关系。这些关系对于论证基于单调性的形状重构至关重要，并将在后续章节中用到。

引理 3.1。设 λ， μ， $\rho \in L_+^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，并设 $B_R(O)$是一个包含 Ω的球。则

$$\langle g, F_c g\rangle = \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}} \int_{\partial B_R(O)} \big(T_0 v_g\ \overline{u_{c,g}^{\mathrm{sc},+}} - T_0\overline{u_{c,g}^{\mathrm{sc},+}}\ v_g\big)\mathrm{d}s. \tag{3.1}$$

若 λ_j, μ_j, $\rho_j \in L_+^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，则对任意 $j,l \in \{1,2\}$，有

$$\int_{\partial B_R(O)} (u_{c_j,g}^{\mathrm{sc},+}\ T_0\overline{u_{c_l,g}^{\mathrm{sc},+}} - \overline{u_{c_l,g}^{\mathrm{sc},+}}\ T_0 u_{c_j,g}^{\mathrm{sc},+})\mathrm{d}s = -2i\omega\langle F_{c_j} g, F_{c_l} g\rangle. \tag{3.2}$$

证明。 $E_{\lambda,\mu}(u,v)$ 的一般形式为

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\mu}(u,v) =& (2\mu+\lambda)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big) + \mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Big) \\ &+ \lambda\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big) + \mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big). \end{aligned}$$

根据贝蒂表示定理，我们有

$$u_{c,g}^{\mathrm{sc},+}(x) = \int_{\partial B_R(O)} \Big[\big[T_0\Gamma_0(x,y)\big]^{\top} u_{c,g}^{\mathrm{sc},+}(y) - \Gamma_0(x,y) T_0 u_{c,g}^{\mathrm{sc},+}(y)\Big]\mathrm{d}s(y), \quad x \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{\Omega},$$

with

$$T_j u := T_{\lambda_j,\mu_j} u = 2\mu_j\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda_j \nu\ \nabla\cdot u - \mu_j \nu^{\perp}\nabla^{\perp}\cdot u, \quad \Delta_j^* := \Delta_{\lambda_j,\mu_j}^*, \quad E_j := E_{\lambda_j,\mu_j},$$

此手稿仅供审阅。

$$\Gamma_j(x,y) := \Gamma_{c_j}(x,y) = \frac{i}{4\mu_j} H_0^{(1)}(k_{s_j}|x-y|)I + \frac{i}{4\omega^2}\nabla_x^\top \nabla_x \big(H_0^{(1)}(k_{s_j}|x-y|) - H_0^{(1)}(k_{p_j}|x-y|)\big),$$

$$c_j := (\lambda_j, \mu_j, \rho_j), \quad k_{p_j} := k_p(\lambda_j,\mu_j,\rho_j) := \omega\sqrt{\frac{\rho_j}{2\mu_j+\lambda_j}}, \quad k_{s_j} := k_s(\lambda_j,\mu_j,\rho_j) := \omega\sqrt{\frac{\rho_j}{\mu_j}}.$$

由汉克尔函数 $H_0^{(1)}(\cdot)$ 及远场模式 Γ_p^∞、Γ_s^∞ 的渐近行为可知，$u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}(x)$ 的远场模式为

$$u_p^\infty(d)d = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_{p_0}}}\frac{k_{p_0}^2}{\omega^2}\int_{\partial B_R(O)} \Big\{\big[J(d)T_0 e^{-ik_{p_0}d\cdot y}\big]^\top u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}(y) - J(d)e^{-ik_{p_0}d\cdot y}T_0 u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}(y)\Big\}\mathrm{d}s,$$

$$u_s^\infty(d)d^\perp = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_{s_0}}}\frac{k_{s_0}^2}{\omega^2}\int_{\partial B_R(O)} \Big\{\big[J(d)^\perp T_0 e^{-ik_{s_0}d\cdot y}\big]^\top u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}(y) - J(d)^\perp e^{-ik_{s_0}d\cdot y}T_0 u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}(y)\Big\}\mathrm{d}s$$

其中 $J(d)^\perp = I - J(d)$。因此，

$$\langle g, F_c g\rangle = \frac{\omega}{k_{p_0}}\int_{\mathbb{S}} g_p\overline{u_p^\infty}\mathrm{d}s(d) + \frac{\omega}{k_{s_0}}\int_{\mathbb{S}} g_s\overline{u_s^\infty}\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\int_{\partial B_R(O)} \big(T_0 v_g\ \overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}} - T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c,g}}\ v_g\big)\mathrm{d}s.$$

令 $r > R$，则 $u^{\mathrm{sc}}_{c_j,\ g} \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^2$ 求解（对于 $c_j := (\lambda_j,\ \mu_j,\ \rho_j)$ ）

$$\mu_0\Delta u^{\mathrm{sc}}_{c,g} + (\mu_0+\lambda_0)\nabla(\nabla\cdot)u^{\mathrm{sc}}_{c,g} + \rho_0\omega^2 u^{\mathrm{sc}}_{c,g} = 0 \quad \text{in } B_r(O)\backslash\overline{B_R(O)},$$

并应用贝蒂公式，我们得到

$$\int_{\partial B_r(O)} (u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g}\ T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_l,g}} - \overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_l,g}}\ T_0 u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g})\mathrm{d}s = \int_{\partial B_R(O)} (u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g}\ T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_l,g}} - \overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_l,g}}\ T_0 u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g})\mathrm{d}s \tag{3.3}$$

利用辐射条件（2.2）和远场展开可得，当 $r\to\infty$,

$$\int_{\partial B_r(O)} (u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g}\ T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_l,g}} - \overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_l,g}}\ T_0 u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g})\mathrm{d}s = -2i\omega\langle F_{c_j}g, F_{c_l}g\rangle. \tag{3.4}$$

将（3.4）代入（3.3），并令 $r\to\infty$ 最终得到（3.2）。 ■

接下来，我们将用来证明远场算子的单调性关系的工具是以下积分恒等式。

引理3.2. 若 $\lambda_j,\ \mu_j,\ \rho_j \in L^\infty_+(\mathbb{R}^2)$ 且 $B_R(O)$ 是一个包含 Ω 的球。那么，对于任意$g \in [L^2(\mathbb{S})]^2$, , 有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8\pi\omega}\,(\langle F_{c_1}g, g\rangle - \langle g, F_{c_2}g\rangle) - 2i\omega\langle F_{c_1}g, F_{c_2}g\rangle \\
=&\int_{\partial B_R(O)} (\overline{u}_{c_2,g} - \overline{u}_{c_1,g})(T_2 u_{c_2,g} - T_1 u_{c_1,g})\mathrm{d}s \\
&+ \int_{B_R(O)} \rho_2\omega^2|u_{c_2,g} - u_{c_1,g}|^2 - E_2(u_{c_1,g} - u_{c_2,g}, \overline{u}_{c_1,g} - \overline{u}_{c_2,g})\mathrm{d}y \\
&+ \int_{B_R(O)} E_2(\overline{u}_{c_1,g}, u_{c_1,g}) - E_1(\overline{u}_{c_1,g}, u_{c_1,g}) + (\rho_1-\rho_2)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

本手稿仅供审阅。

证明. 恒等式（3.1）和（3.2）（其中 $j=1$ 和 $l=2$ ）立即推出

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{8\pi\omega}\,(\langle F_{c_1}g,g\rangle-\langle g,F_{c_2}g\rangle)-2i\omega\langle F_{c_1}g,F_{c_2}g\rangle\\
=&\int_{\partial B_R(O)}\big(T_0\overline{v_g}\,u^{\mathrm{sc},+}_{c_1,g}-T_0u^{\mathrm{sc},+}_{c_1,g}\,\overline{v_g}\big)\mathrm{d}s-\int_{\partial B_R(O)}\big(T_0v_g\,\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_2,g}}-T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_2,g}}\,v_g\big)\mathrm{d}s\\
&+\int_{\partial B_R(O)}(u^{\mathrm{sc},+}_{c_1,g}\;T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_2,g}}-\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_2,g}}\;T_0u^{\mathrm{sc},+}_{c_1,g})\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial B_R(O)}(u^{\mathrm{sc},+}_{c_1,g}\;T_2\overline{u^-_{c_2,g}}-\overline{u^-_{c_2,g}}\;T_0u^{\mathrm{sc},+}_{c_1,g})\mathrm{d}s-\int_{\partial B_R(O)}\big(T_0v_g\,\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_2,g}}-T_0\overline{u^{\mathrm{sc},+}_{c_2,g}}\,v_g\big)\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial B_R(O)}(u^-_{c_1,g}\;T_2\overline{u^-_{c_2,g}}-\overline{u^-_{c_2,g}}\;T_1u^-_{c_1,g})\mathrm{d}s-\int_{\partial B_R(O)}(v_g\;T_2\overline{u^-_{c_2,g}}-\overline{u^-_{c_2,g}}\;T_0v_g)\mathrm{d}s\\
&-\int_{\partial B_R(O)}\big(T_0v_g\,\overline{u^-_{c_2,g}}-T_2\overline{u^-_{c_2,g}}\,v_g\big)\mathrm{d}s+\int_{\partial B_R(O)}\big(T_0v_g\,\overline{v_g}-T_0\overline{v_g}\,v_g\big)\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial B_R(O)}(u^-_{c_1,g}\;T_2\overline{u^-_{c_2,g}}-\overline{u^-_{c_2,g}}\;T_1u^-_{c_1,g})\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中我们使用了透射边界条件

$$
u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g}+v_g=u^-_{c_j,g},\quad T_0u^{\mathrm{sc},+}_{c_j,g}+T_0v_g=T_ju^-_{c_j,g}\quad\text{on}\quad\partial B_R(O).
$$

为简化记号，我们省略上标，即

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B_R(O)}(u^-_{c_1,g}\;T_2\overline{u^-_{c_2,g}}-\overline{u^-_{c_2,g}}\;T_1u^-_{c_1,g})\mathrm{d}s:=\int_{\partial B_R(O)}(u_{c_1,g}\;T_2\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_2,g}T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial B_R(O)}(\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g})(T_2u_{c_2,g}-T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\\
&+\int_{\partial B_R(O)}(u_{c_1,g}T_2\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_2,g}T_2u_{c_2,g}+\overline{u}_{c_1,g}T_2u_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g}\,T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

应用贝蒂公式可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B_R(O)}(u_{c_1,g}T_2\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_2,g}T_2u_{c_2,g}+\overline{u}_{c_1,g}T_2u_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g}\,T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\\
=&\int_{B_R(O)}E_2(u_{c_1,g}-u_{c_2,g},\overline{u}_{c_2,g})+E_2(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_2,g}-u_{c_1,g})+E_2(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})-E_1(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})\mathrm{d}y\\
&+\omega^2\int_{B_R(O)}\rho_2\,u_{c_2,g}\overline{u}_{c_2,g}-\rho_2\,u_{c_1,g}\overline{u}_{c_2,g}-\rho_2\,\overline{u}_{c_1,g}u_{c_2,g}+\rho_1\,\overline{u}_{c_1,g}u_{c_1,g}\mathrm{d}y\\
=&\int_{B_R(O)}\rho_2\omega^2|u_{c_2,g}-u_{c_1,g}|^2-E_2(u_{c_1,g}-u_{c_2,g},\overline{u}_{c_1,g}-\overline{u}_{c_2,g})\mathrm{d}y\\
&+\int_{B_R(O)}E_2(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})-E_1(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_1-\rho_2)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

本手稿仅供审阅。

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8\pi\omega}\left(\langle F_{c_1}g,g\rangle-\langle g,F_{c_2}g\rangle\right)-2i\omega\langle F_{c_1}g,F_{c_2}g\rangle\\
=&\int_{\partial B_R(O)}(\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g})(T_2u_{c_2,g}-T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\\
&+\int_{B_R(O)}\rho_2\omega^2|u_{c_2,g}-u_{c_1,g}|^2-E_2(u_{c_1,g}-u_{c_2,g},\overline{u}_{c_1,g}-\overline{u}_{c_2,g})\mathrm{d}y\\
&+\int_{B_R(O)}E_2(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})-E_1(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_1-\rho_2)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

■

引理 3.3（ [25]中的定理 2）。由 $S_c=I+i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}F_c$ 给出的散射矩阵是酉算子，即 $S_c^*S_c=S_cS_c^*=I$。

注 3.4。由于散射算子 S_{c_1} 的伴随算子由下式给出

$$S_{c_1}^*=I-i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}F_{c_1}^*,$$

我们得到

$$S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)=F_{c_2}-F_{c_1}-i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\left(F_{c_1}^*F_{c_2}-F_{c_1}^*F_{c_1}\right),$$

相应地

$$\Re\left(S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)\right)=\Re\left(F_{c_2}-F_{c_1}-i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}F_{c_1}^*F_{c_2}\right).$$

因此，左端前两项的实部满足3.5

$$\begin{aligned}
&\Re\left(\sqrt{8\pi\omega}\left(\langle F_{c_1}g,g\rangle-\langle g,F_{c_2}g\rangle\right)-2i\omega\left\langle F_{c_1}g,F_{c_2}g\right\rangle\right)\\
=&-\sqrt{8\pi\omega}\,\Re\left(\langle g,F_{c_2}g\rangle-\langle F_{c_1}g,g\rangle+i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\left\langle F_{c_1}g,F_{c_2}g\right\rangle\right)\\
=&-\sqrt{8\pi\omega}\,\Re\left(\langle F_{c_2}g,g\rangle-\langle F_{c_1}g,g\rangle-i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\left\langle F_{c_2}g,F_{c_1}g\right\rangle\right)\\
=&-\sqrt{8\pi\omega}\,\Re\left\langle S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)g,g\right\rangle.
\end{aligned}$$

也就是说，

(3.6)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8\pi\omega}\,\Re\left\langle S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)g,g\right\rangle+\int_{B_R(O)}E_{\lambda_2-\lambda_1,\mu_2-\mu_1}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_1-\rho_2)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y\\
=&\int_{B_R(O)}E_2(u_{c_1,g}-u_{c_2,g},\overline{u}_{c_1,g}-\overline{u}_{c_2,g})-\rho_2\omega^2|u_{c_2,g}-u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y\\
&-\Re\left(\int_{\partial B_R(O)}(\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g})(T_2u_{c_2,g}-T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}$$

此手稿仅供审阅。

接下来我们考虑 (3.6) 的右端，并证明若g 属于某个有限维子空间 $V \subseteq [L^2(\mathbb{S})]^2$的补集，则它是非负的。为此，对任意包含 Ω 的球 $B_R(O)$，我们用 $J: [H^1(B_R(O))]^2 \to [L^2(B_R(O))]^2$ 表示紧嵌入，并相应地对任意 $\rho \in L^\infty_+(\mathbb{R}^2)$，定义算子$K: [H^1(B_R(O))]^2 \to [H^1(B_R(O))]^2$ 为

$$Kv := J^*Jv,$$

以及 $K_\rho: [H^1(B_R(O))]^2 \to [H^1(B_R(O))]^2$ 定义为

$$K_\rho v := \rho J^*Jv.$$

特殊恒等算子 $I_{\lambda,\mu}: [H^1(B_R(O))]^2 \to [H^1(B_R(O))]^2$ 定义为

$$\langle I_{\lambda,\mu}v, w\rangle_{[H^1(B_R(O))]^2} = \int_{B_R(O)} E_{\lambda,\mu}(v,\overline{w}) + v\,\overline{w}\,\mathrm{d}y.$$

于是， K 和 K_ρ 是紧自伴线性算子，并且对于任意 $v \in [H^1(B_R(O))]^2$,

$$\langle (I_{\lambda,\mu} - K - \omega^2 K_\rho)v, v\rangle_{[H^1(B_R(O))]^2} = \int_{B_R(O)} E_{\lambda,\mu}(v,\overline{v}) - \rho\omega^2|v|^2\mathrm{d}y.$$

对于 $0 < \varepsilon < R$，我们用 $N_\varepsilon: [H^1(B_R(O))]^2 \to [L^2(\partial B_R(O))]^2$ 表示一个有界线性算子，它将 $v \in [H^1(B_R(O))]^2$ 映射为外部边值问题的辐射解在 $\partial B_R(O)$ 上的应力向量 $T_0 v_\varepsilon$

$$\Delta_0^* v_\varepsilon + \rho_0\omega^2 v_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\overline{B_{R-\varepsilon}(O)}, \quad v_\varepsilon = v \quad \text{on } \partial B_{R-\varepsilon}(O),$$

以及 $\Lambda: [L^2(\partial B_R(O))]^2 \to [L^2(\partial B_R(O))]^2$ 表示紧外部Neumann-Dirichlet算子，它将 $\psi \in [L^2(\partial B_R(O))]^2$ 映射为辐射解在(O) 上的迹 $w|_{\partial B_R}$，该辐射解满足

$$\Delta_0^* w + \rho_0\omega^2 w = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\overline{B_R(O)}, \quad T_0 w = \psi \quad \text{on } \partial B_R(O).$$

那么，

$$N_\varepsilon v = T_0 v|_{\partial B_R(O)} \quad \text{and} \quad \Lambda N_\varepsilon v = v|_{\partial B_R(O)},$$

因此

$$\langle N_\varepsilon^* \Lambda N_\varepsilon v, v\rangle_{[H^1(B_R(O))]^2} = \langle \Lambda N_\varepsilon v, N_\varepsilon v\rangle_{[L^2(\partial B_R(O))]^2} = \int_{\partial B_R(O)} v\ T_0\overline{v}\ \mathrm{d}s$$

对于任意 $v\in [H^1(B_R(O))]^2$ 可延拓为纳维方程的辐射解

$$\Delta_0^* v + \rho_0\omega^2 v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\overline{B_{R-\varepsilon}(O)}.$$

本手稿仅供审阅。

引理 3.5. 设 $\lambda_j,\ \mu_j,\ \rho_j \in L^\infty_+(\mathbb{R}^2)$ 并设 $B_R(O)$ 是一个包含 Ω的球。则存在一个有限维子空间 $V \subseteq [L^2(\mathbb{S})]^2$ 使得

$$\int_{B_R(O)} E_2(u_{c_1,g}-u_{c_2,g},\overline{u}_{c_1,g}-\overline{u}_{c_2,g})-\rho_2\omega^2|u_{c_2,g}-u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y$$
$$-\Re\left(\int_{\partial B_R(O)}(\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g})(T_2u_{c_2,g}-T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\right)\geq 0,\quad \textit{for all } g\in V^\perp.$$

证明。 设 $\varepsilon>0$ 足够小，使得 $\Omega \subseteq B_{R-\varepsilon}(O)$。于是

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(O)} E_2(u_{c_1,g}-u_{c_2,g},\overline{u}_{c_1,g}-\overline{u}_{c_2,g})-\rho_2\omega^2|u_{c_2,g}-u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y\\&-\Re\left(\int_{\partial B_R(O)}(\overline{u}_{c_2,g}-\overline{u}_{c_1,g})(T_2u_{c_2,g}-T_1u_{c_1,g})\mathrm{d}s\right)\\=&\int_{B_R(O)} E_2(w,\overline{w})-\rho_2\omega^2|w|^2\mathrm{d}y-\Re\left(\int_{\partial B_R(O)}\overline{w}\ T_0w\,\mathrm{d}s\right)\\=&\langle(I_{\lambda_2,\mu_2}-K-\omega^2K_{\rho_2}-\Re(N_\varepsilon^*\Lambda N_\varepsilon))w,w\rangle_{[H^1(B_R(O))]^2}\end{aligned}$$

其中 $w|_{B_R(O)}:=u^{\mathrm{sc}}_{,\,c_2\,,\,g}-u^{\mathrm{sc}}_{,\,c_1\,,\,g}$ 以及 $w|_{\partial B_R(O)}:=u^{\mathrm{sc}}_{,\,c_2\,,\,g}-u^{\mathrm{sc}}_{,\,c_1\,,\,g}$。

令 W 为紧自伴算子 $K+\omega^2K_{\rho_2}+\mathrm{Re}(N_\varepsilon^*\Lambda N_\varepsilon)$ 对应于大于 1 的特征值的特征空间之和。于是 W 是有限维的，并且

$$\langle(I_{\lambda_2,\mu_2}-K-\omega^2K_{\rho_2}-\Re(N_\varepsilon^*\Lambda N_\varepsilon))w,w\rangle_{[H^1(B_R(O))]^2}\geq 0\quad \text{for all } w\in W^\perp.$$

对于 $j=1,\ 2$，我们将 $\mathcal{S}_j\colon [L^2(\mathbb{S})]^2\to[H^1(B_R(O))]^2$ 记为有界线性算子，它将 $g\in[L^2(\mathbb{S})]^2$ 映射为散射场 $u^{\mathrm{sc}}_{,\,c_j\,,\,g}$，在 $B_R(O)$ 上的限制。于是 $w|_{B_R(O)}=(\mathcal{S}_2-\mathcal{S}_1)g$。由于对于任意 $g\in[L^2(\mathbb{S})]^2$,

$$(\mathcal{S}_2-\mathcal{S}_1)g\in W^\perp\qquad\text{if and only if}\qquad g\in((\mathcal{S}_2-\mathcal{S}_1)^*W)^\perp,$$

当然，$\dim((\mathcal{S}_2-\mathcal{S}_1)^*W)\leq\dim(W)<\infty$，选择 $V:=(\mathcal{S}_2-\mathcal{S}_1)^*W$即可完成证明。 ■

应用上述引理3.5 于等式（3.6）可得我们将要使用的主要单调性不等式（3.7）-（3.8）。

定理 3.6。设 $\lambda_j,\ \mu_j,\ \rho_j\in L^\infty_+(\mathbb{R}^2)$。则存在一个有限维子空间$V\subseteq[L^2(\mathbb{S})]^2$ 使得

$$\sqrt{8\pi\omega}\ \Re\langle S_{c_1}^*(F_{c_2}-F_{c_1})g,g\rangle\geq\int_{\mathbb{R}^2}E_{\lambda_1-\lambda_2,\mu_1-\mu_2}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_2-\rho_1)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y,\tag{3.7}$$

对所有 $g\in V^\perp$ 均成立。特别地,

$$\lambda_1\geq\lambda_2,\ \mu_1\geq\mu_2,\ \rho_2\geq\rho_1\quad\text{implies}\quad\Re(S_{c_1}^*F_{c_2})\geq_{\mathrm{fin}}\Re(S_{c_1}^*F_{c_1}).\tag{3.8}$$

本手稿仅供审阅。

注 3.7. 由于散射算子 S_{c_1} 和 S_{c_2} 是酉的，我们得到

$$S_{c_1}^*(F_{c_2}-F_{c_1})=i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}S_{c_1}^*(S_{c_1}-S_{c_2})=i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}(I-S_{c_1}^*S_{c_2})$$
$$=\left(i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}(S_{c_2}^*S_{c_1}-I)\right)^*=\left(i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}S_{c_2}^*(S_{c_1}-S_{c_2})\right)^*=\left(S_{c_2}^*(F_{c_2}-F_{c_1})\right)^*.$$

回顾紧线性算子及其伴随算子的特征值互为复共轭，我们得到 $\Re(S_{c_1}^*(F_{c_2}-F_{c_1}))$ 和 $\Re(S_{c_2}^*(F_{c_2}-F_{c_1}))$ 的谱相同。因此，单调性关系（3.7）-（3.8）在这些公式中将$S_{c_1}^*$ 替换为 $S_{c_2}^*$ 后仍然成立。

注意，交换 λ_1、μ_1、ρ_1 和 λ_2、μ_2、ρ_2（除 $S_{c_1}^*$ 外（见注 3.7））后，我们可以将定理 3.6 重述如下。

推论 3.8。设 λ_j、μ_j、$\rho_j\in L_+^\infty(\mathbb{R}^2)$。则存在一个有限维子空间$V\subseteq[L^2(\mathbb{S})]^2$，使得

$$\sqrt{8\pi\omega}\,\Re\langle S_{c_1}^*(F_{c_2}-F_{c_1})g,g\rangle\le\int_{\mathbb{R}^2}E_{\lambda_1-\lambda_2,\mu_1-\mu_2}(\overline{u}_{c_2,g},u_{c_2,g})+(\rho_2-\rho_1)\omega^2|u_{c_2,g}|^2\mathrm{d}y,\tag{3.9}$$

对所有 $g\in V^\perp$。

4. 纳维方程的局部化势。本节将证明局部化波函数的存在性：这些波函数在某个指定区域 $B\subseteq\mathbb{R}^2$上的范数可以任意大，同时在另一个区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$上的范数可以任意小，$\mathbb{R}^2\backslash D$ 连通的条件下成立。这些结果将用于严格刻画区域 $\Omega=\mathrm{supp}(\lambda-\lambda_0)\cup\mathrm{supp}(\mu-\mu_0)\cup\mathrm{supp}(\rho-\rho_0)$，在该区域内材料参数与背景介质不同；这一刻画将基于远场算子，并采用下文第 5 节定理3.6 和推论3.8 中的单调性关系。

引理 4.1。设 λ，μ，$\rho\in L_+^\infty(\mathbb{R}^2)$ 并假设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 开且有界。定义

$$L_{c,D}:[L^2(\mathbb{S})]^2\to[H^1(D)]^2,\quad g\mapsto u_{c,g}|_D,$$

$$L_{c,D}^{(1)}:[L^2(\mathbb{S})]^2\to[L^2(D)]^2,\quad g\mapsto u_{c,g}|_D,$$

$$L_{c,D}^{(2)}:[L^2(\mathbb{S})]^2\to L^2(D),\quad g\mapsto\nabla\cdot u_{c,g}|_D,$$

$$L_{c,D}^{(3)}:[L^2(\mathbb{S})]^2\to[L^2(D)]^{2\times2},\quad g\mapsto\widehat{\nabla}u_{c,g}|_D,$$

其中 $u_{c,\,g}\in[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^2$ 由 (2.5) 给出，且 $\widehat{\nabla}u:=\frac{1}{2}\left(\nabla u+(\nabla u)^\top\right)$。于是 $L_{c,\,D}$，$L_{c\,D}^{(1)}$，$L_{c\,D}^{(2)}$，以及 $L_{c}^{(3)}{}_{,\,D}$ 均为线性算子，其对偶算子由下式给出

$$L_{c,D}^{'}:[H^1(D)']^2\to[L^2(\mathbb{S})]^2,\quad f_0\mapsto S_c^*w_0^\infty;$$

本手稿仅供审阅。

$$L_{c,D}^{(1)'}:[L^2(D)]^2\to[L^2(\mathbb{S})]^2,\quad f_1\mapsto S_c^*w_1^\infty;$$

$$L_{c,D}^{(2)'}:L^2(D)\to[L^2(\mathbb{S})]^2,\quad f_2\mapsto S_c^*w_2^\infty;$$

$$L_{c,D}^{(3)'}:[L^2(D)]^{2\times2}\to[L^2(\mathbb{S})]^2,\quad f_3\mapsto S_c^*w_3^\infty$$

其中 S_c 表示散射算子，且 $w_j^\infty\in[L^2(\mathbb{S})]^2$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 是辐射解 $w_j\in[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^2$ 的远场模式，对应于

$$\sqrt{8\pi\omega}(f_0,v)=\int_{B_R(O)}\left(E_{\lambda,\mu}(w_0,\overline{v})-\rho\omega^2w_0\overline{v}\right)\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R(O)}\overline{v}\,T_{\lambda,\mu}w_0\ \mathrm{d}s,$$

$$\sqrt{8\pi\omega}\int_{B_R(O)}f_1\,v\,\mathrm{d}x=\int_{B_R(O)}\left(E_{\lambda,\mu}(w_1,\overline{v})-\rho\omega^2w_1\overline{v}\right)\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R(O)}\overline{v}\,T_{\lambda,\mu}w_1\ \mathrm{d}s,$$

$$\sqrt{8\pi\omega}\int_{B_R(O)}f_2\,\nabla\cdot v\,\mathrm{d}x=\int_{B_R(O)}\left(E_{\lambda,\mu}(w_2,\overline{v})-\rho\omega^2w_2\overline{v}\right)\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R(O)}\overline{v}\,T_{\lambda,\mu}w_2\ \mathrm{d}s,$$

$$\sqrt{8\pi\omega}\int_{B_R(O)}f_3:\widehat{\nabla}v\,\mathrm{d}x=\int_{B_R(O)}\left(E_{\lambda,\mu}(w_3,\overline{v})-\rho\omega^2w_3\overline{v}\right)\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R(O)}\overline{v}\,T_{\lambda,\mu}w_3\ \mathrm{d}s,$$

对于所有 $v\in[H^1(B_R(O))]^2$，其中 $D\subseteq B_R(O)$ （圆括号表示$_2H^1(D)$ 与其对偶空间 $H^1(D)$′之间的对偶配对，且$\mathrm{A}:\mathrm{B}=\sum a_{ij}b_{ij}$ 表示矩阵$\mathrm{A}=(a_{ij})$ 和$_{i,j=1}\mathrm{B}=(b_{ij})$）。

证明。 (2.5)中的总场表示公式表明，$L_{c,D}$ 是一个核平方可积的弗雷德霍姆积分算子，因此是从 $[L^2(\mathbb{S})]^2$ 到 $[H^1(D)]^2$的线性算子。

应用贝蒂公式以及辐射解 w_0的远场模式表示公式 w_0^∞，我们发现，对于任意 $g\in[L^2(\mathbb{S})]^2$ 和 $f_0\in[H^1(D)']^2$,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8\pi\omega}(L_{c,D}g,f_0)=\int_{B_R(O)}\left(E_{\lambda,\mu}(\overline{w_0},u_{c,g})-\rho\omega^2\overline{w_0}u_{c,g}\right)\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R(O)}u_{c,g}\ T_{\lambda,\mu}\overline{w_0}\,\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial B_R(O)}\left(\overline{w_0}\ T_{\lambda,\mu}u_{c,g}-u_{c,g}\ T_{\lambda,\mu}\overline{w_0}\right)\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial B_R(O)}\left(\overline{w_0}\ T_{\lambda,\mu}v_g-v_g\ T_{\lambda,\mu}\overline{w_0}\right)\mathrm{d}s+\int_{\partial B_R(O)}\left(\overline{w_0}\ T_{\lambda,\mu}u_{c,g}^{\mathrm{sc}}-u_{c,g}^{\mathrm{sc}}\ T_{\lambda,\mu}\overline{w_0}\right)\mathrm{d}s\\
=&\sqrt{8\pi\omega}\langle g,w_0^\infty\rangle+2i\omega\langle F_cg,w_0^\infty\rangle=\sqrt{8\pi\omega}\left\langle\left(I+i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}F_c\right)g,w_0^\infty\right\rangle\\
=&\sqrt{8\pi\omega}\ \langle S_c\,g,w_0^\infty\rangle=\sqrt{8\pi\omega}\ \langle g,S_c^*\,w_0^\infty\rangle\,.
\end{aligned}$$

也就是说，$L_{c,\ D}^{'}f_0=S_c^*\,w_0^\infty$。关于 $L_{c\ D}^{(1)'}$、 $L_{c\ D}^{(2)'}$ 和 $L_{c\ D}^{(3)'}$ 的计算相同，为简洁起见，此处省略。证明完毕。 ■

本手稿仅供审阅。

引理4.2。 设 λ， μ， $\rho \in L_+^\infty(\mathbb{R}^2)$ 并设 B， $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开且有界的集合，满足 $\mathbb{R}^2\backslash(\overline{B \cup D})$ 连通，且 $B \cap D = \emptyset$。那么，

$$\mathcal{R}(L_{c,B}^{(\ell)'}) \cap \mathcal{R}(L_{c,D}^{'}) = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}(L_{c,B}^{'}) \cap \mathcal{R}(L_{c,D}^{'}) = \{0\} \quad (\ell = 1, 2, 3).$$

证明。为简单起见，我们只讨论 $\ell = 1$ 的情形，因为证明类似。假设 $h \in \mathcal{R}(L_{c\,B}^{(1)'},) \cap \mathcal{R}(L_{c,D}^{'})$。那么引理 4.1 表明，存在 $f_B \in [L^2(B)]^2$, $f_D \in [H^1(D)']^2$，以及 w_B, $w_D \in [H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)]^2$ ，使得辐射解的远场模式 w_B^∞ 和 w_D^∞ 满足

$$\Delta_{\lambda,\mu}^* w_B + \rho\omega^2 w_B = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\overline{B} \quad \text{and} \quad \Delta_{\lambda,\mu}^* w_D + \rho\omega^2 w_D = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\overline{D}$$

满足

$$w_B^\infty = w_D^\infty = S_c h.$$

Rellich引理和唯一延拓保证 $w_B = w_D$ 属于 $\mathbb{R}^2\backslash(\overline{B \cup D})$。因此，我们可以定义 $w \in [H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)]^2$ 为

$$w := \begin{cases} w_B = w_D & \text{in } \mathbb{R}^2\backslash(\overline{B} \cup \overline{D}), \\ w_B & \text{in } D, \\ w_D & \text{in } B, \end{cases}$$

且 w 是下列问题的唯一辐射解

$$\Delta_{\lambda,\mu}^* w + \rho\omega^2 w = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

因此 $w = 0$ 属于 $\mathbb{R}^2$，又由于散射算子是酉的，这表明 $h = S_c^* w^\infty = 0$。

定理4.3。 设 λ， μ， $\rho \in L_+^\infty(\mathbb{R}^2)$ 并令 B， $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开且有界的集合，且 $\mathbb{R}^2\backslash D$ 是连通的。若 $B \not\subseteq D$，则对于任意有限维子空间 $V \subseteq [L^2(\mathbb{S})]^2$存在一个序列 $(g_m^{(j)})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq V^\perp$ 使得

$$\|u_{c,g_m^{(0)}}\|_{[H^1(B)]^2} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c,g_m^{(0)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty;$$

$$\|u_{c,g_m^{(1)}}\|_{[L^2(B)]^2} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c,g_m^{(1)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty;$$

$$\|\nabla \cdot u_{c,g_m^{(2)}}\|_{L^2(B)} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c,g_m^{(2)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty;$$

$$\|\widehat{\nabla} u_{c,g_m^{(3)}}\|_{[L^2(B)]^{2\times 2}} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c,g_m^{(3)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty$$

其中 $u_{c,\ g_m^{(j)}} \in [H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)]^2$ 由以下公式给出 (2.5) 其中 $g = g_m^{(j)} (j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$。

本手稿仅供审阅之用。

证明。 不失一般性，假设 $B\cap D=\emptyset$ 且 $\mathbb{R}^2\backslash(B\cup\overline{D})$ 连通 ~(否则，我们将 $\overline{B}$ 替换为一个足够小的球 $B\subseteq B\backslash D_\varepsilon$，其中 D_ε 表示 D的一个足够小的邻域）。

我们用 $P_V\colon [L^2(\mathbb{S})]^2\to[L^2(\mathbb{S})]^2$ 表示在 V 上的正交投影。引理4.2表明， $\mathcal{R}(L'_{c,B})\cap\mathcal{R}(L'_{c,D})=\mathcal{R}(L_{c\ B}^{(j)'},)\cap\mathcal{R}(L'_{c,D})=\{0\}\,(j=1,2,3)$，且 $\mathcal{R}(L'_{c,B})$、 $\mathcal{R}(L_{c\ B}^{(j)'},)$ 是无穷维的。利用一个简单的维数论证（ [16] 中的引理4.7），可得（为简洁起见，我们仅展示 $j=1$ 的情形）

$$\mathcal{R}(L_{c,B}^{(1)'})\nsubseteq\mathcal{R}(L'_{c,D})+V=\mathcal{R}\left(\begin{pmatrix} L'_{c,D} & P'_V \end{pmatrix}\right)=\mathcal{R}\left(\begin{pmatrix} L_{c,D}\\ P_V\end{pmatrix}'\right).$$

由此，根据 [16] 中的引理4.6，不存在常数 $C>0$ 使得

$$\left\|L_{c,B}^{(1)}g\right\|^2_{[L^2(B)]^2}\le C^2\left\|\begin{pmatrix} L_{c,D}\\ P_V\end{pmatrix}g\right\|^2_{[H^1(D)]^2\times[L^2(\mathbb{S})]^2}=C^2\left(\|L_{c,D}g\|^2_{[H^1(D)]^2}+\|P_Vg\|^2_{[L^2(\mathbb{S})]^2}\right)$$

对所有 $g\in[L^2(\mathbb{S})]^2$ 均成立。因此，存在一个序列 $(\widetilde{g}_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}\subseteq[L^2(\mathbb{S})]^2$，使得

$$\left\|L_{c,B}^{(1)}\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[L^2(B)]^2}\to\infty\quad\text{and}\quad\left\|L_{c,D}\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[H^1(D)]^2}+\left\|P_V\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[L^2(\mathbb{S})]^2}\to0\quad\text{as } m\to\infty.$$

令 $g_m^{(1)}:=\widetilde{g}_m^{(1)}-P_V\widetilde{g}_m^{(1)}\in V^\perp\subseteq[L^2(\mathbb{S})]^2$ 对任意 $m\in\mathbb{N}$，最终得到

$$\begin{aligned}\left\|L_{c,B}^{(1)}g_m^{(1)}\right\|_{[L^2(B)]^2}&\ge\left\|L_{c,B}^{(1)}\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[L^2(B)]^2}-\left\|L_{c,B}^{(j)}\right\|\left\|P_V\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[L^2(\mathbb{S})]^2}\to\infty\quad\text{as } m\to\infty,\\ \left\|L_{c,D}g_m^{(1)}\right\|_{[H^1(D)]^2}&\le\left\|L_{c,D}\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[H^1(D)]^2}+\|L_{c,D}\|\left\|P_V\widetilde{g}_m^{(1)}\right\|_{[L^2(\mathbb{S})]^2}\to0\quad\text{as } m\to\infty.\end{aligned}$$

代入算子 $L_{c\ B}^{(1)}$、和 $L_{c、D}$的定义，即完成证明。 ■

作为定理4.3的一个应用，我们在定理（3.8）中证明（3.6）的逆命题。

定理4.4。 设 λ_j， μ_j， $\rho_j\in L^\infty_+(\mathbb{R}^2)\,(j=1,\ 2)$ 且 $\Omega\subseteq B_R(O)$。若 $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是满足下列条件的无界区域

$$\lambda_1\ge\lambda_2,\,\mu_1\ge\mu_2,\,\rho_2\ge\rho_1\quad a.e.\ in\ \mathcal{D},$$

并且若 $B\subseteq B_R(O)\cap\mathcal{D}$ 是开集，且满足

$$\lambda_1-\delta_1\ge\lambda_2,\,\mu_1-\delta_2\ge\mu_2,\,\rho_2-\delta_3\ge\rho_1\quad a.e.\ in\ B\ for\ some\ \delta_j>0,\tag{4.1}$$

then

$$\Re\left(S_{c_1}^*F_{c_2}\right)\not\lesssim_{fin}\Re\left(S_{c_1}^*F_{c_1}\right),$$

即，算子 $\Re\left(S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)\right)$ 有无穷多个正特征值。特别地，这意味着 $F_{c_1}\ne F_{c_2}$。

本手稿仅供审阅。

证明。我们通过反证法证明该结论，并假设

$$\Re\left(S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)\right)\leq_{\text{fin}}\ 0. \tag{4.2}$$

利用定理 3.6中的单调性关系 (3.7)，我们发现存在一个有限维子空间 $V\subseteq[L^2(\mathbb{S})]^2$ 使得

$$\sqrt{8\pi\omega}\ \Re\langle S_{c_1}^*(F_{c_2}-F_{c_1})g,g\rangle\geq\int_{B_R(O)}E_{\lambda_1-\lambda_2,\mu_1-\mu_2}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_2-\rho_1)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y, \tag{4.3}$$

对所有 $g\in V^\perp$。结合 (4.1)、(4.2) 和 (4.3)，我们得到存在一个有限维子空间 $\widetilde{V}\subseteq[L^2(\mathbb{S})]^2$ 使得，对任意 $g\in\widetilde{V}^\perp$，

$$\begin{aligned}
0\geq&\sqrt{8\pi\omega}\ \Re\langle S_{c_1}^*(F_{c_2}-F_{c_1})g,g\rangle\geq\int_{B_R(O)}E_{\lambda_1-\lambda_2,\mu_1-\mu_2}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_2-\rho_1)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y\\
=&\left(\int_{\mathcal{D}\cap B_R(O)}+\int_{B_R(O)\setminus\overline{\mathcal{D}}}\right)\left(E_{\lambda_1-\lambda_2,\mu_1-\mu_2}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_2-\rho_1)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\right)\mathrm{d}y\\
\geq&\int_B E_{\delta_1,\delta_2}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+\delta_3\,\omega^2|u_{c_1,g}|^2\ \mathrm{d}x\\
&+\int_{B_R(O)\setminus\overline{\mathcal{D}}}E_{\lambda_1-\lambda_2,\mu_1-\mu_2}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+(\rho_2-\rho_1)\omega^2|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y\\
\geq&\,\delta_{\min}C_1\left\|u_{c_1,g}\right\|_{[H^1(B)]^2}^2-\int_{B_R(O)\setminus\overline{\mathcal{D}}}E_{\hat{\lambda},\hat{\mu}}(\overline{u}_{c_1,g},u_{c_1,g})+\hat{\rho}\,\omega^2\,|u_{c_1,g}|^2\mathrm{d}y\\
\geq&\,\delta_{\min}C_1\left\|u_{c_1,g}\right\|_{[H^1(B)]^2}^2-C_2\left\|u_{c_1,g}\right\|_{[H^1(B_R(O)\setminus\overline{\mathcal{D}})]^2}^2
\end{aligned}$$

其中 C_1、C_2 是正常数，$\delta_{\min}:=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\omega^2\}$，$\hat{}\lambda=\|\lambda_1\|_{L^\infty_+(\mathbb{R}^2)}+\|\lambda_2\|_{L^\infty_+(\mathbb{R}^2)}$，$\hat{}\mu=\|\mu_1\|_{L^\infty_+(\mathbb{R}^2)}+\|\mu_2\|_{L^\infty_+(\mathbb{R}^2)}$，$\hat{}\rho=\|\rho_2\|_{L^\infty_+(\mathbb{R}^2)}+\|\rho_1\|_{L^\infty_+(\mathbb{R}^2)}$。然而，这与定理 4.3 矛盾，其中 $D=B_R(O)\setminus\mathcal{D}$ 和 $c=\overline{c}_1$ 保证了 $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}\subseteq\widetilde{V}^\perp$ 的存在，且满足

$$\|u_{c_1,g_m}\|_{[H^1(B)]^2}\to\infty\quad\text{and}\quad\|u_{c_1,g_m}\|_{[H^1(B_R(O)\setminus\overline{\mathcal{D}})]^2}\to0\quad\text{as }m\to\infty.$$

因此，$\Re\left(S_{c_1}^*\left(F_{c_2}-F_{c_1}\right)\right)\not\leq_{\text{fin}}\ 0$。

5. 基于单调性的形状重构。 我们将考虑以下类型的材料参数非均匀性。设 D_1，D_2，$D_3\subseteq\Omega$ 和 $D:=D_1\cup D_2\cup D_3$。现在我们假设 λ，μ，$\rho\in L^\infty_+(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$\begin{aligned}
\lambda(x)&=\lambda_0+\chi_{D_1}(x)\psi_\lambda(x),\quad\psi_\lambda\in L^\infty(\Omega),\quad\psi_\lambda(x)>m_1,\\
\mu(x)&=\mu_0+\chi_{D_2}(x)\psi_\mu(x),\quad\psi_\mu\in L^\infty(\Omega),\quad\psi_\mu(x)>m_2,\\
\rho(x)&=\rho_0-\chi_{D_3}(x)\psi_\rho(x),\quad\psi_\rho\in L^\infty(\Omega),\quad m_3<\psi_\rho(x)<M_3,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中常数 λ_0、μ_0、$\rho_0>0$ 以及界 m_1，m_2，$m_3>0$ 和 $\rho_0>M_3$。系数 λ、μ 和 ρ 刻画了原本均匀背景介质中的非均匀性

本手稿仅供审阅使用。

由系数 λ_0， μ_0 和 ρ_0给出。在本节中，我们将给出一种方法来恢复osupp(D)：=osupp(χ_D)（见[11]中的第6节），并依据远场算子，从而得到系数不同于背景系数 λ_0， μ_0 和 ρ_0的区域形状。

设 $B \subseteq\Omega$ 为一个球，测试系数 $\lambda^\flat$、 $\mu^\flat$ 和 $\rho^\flat$ 定义为

$$\begin{aligned} \lambda^\flat(x) &= \lambda_0 + \chi_B(x)\alpha_1, \\ \mu^\flat(x) &= \mu_0 + \chi_B(x)\alpha_2, \\ \rho^\flat(x) &= \rho_0 - \chi_B(x)\alpha_3, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $\alpha_j \geq 0$ ($j = 1,2,3$) 为常数。

定理5.1. 设 $B \subseteq \Omega$ 与 $\alpha_j \geq 0$ 如 (5.2) 中所述，并令 $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$。下述结论成立：

(i) 假设 $B \subseteq D_j$，对某个 $\mathbb{I} \subset \{1,2,3\}$ 有 $j \in \mathbb{I}$。则对所有满足 $\alpha_j \leqslant m_j$、$j \in \mathbb{I}$ 以及 $\alpha_j = 0$、$j \notin \mathbb{I}$ 的 α_j，算子 $\Re(S_c^*(F_{c^\flat} - F_c))$ 具有有限多个负特征值。

(ii) 若 $B \not\subseteq$ o支集(D)，则对所有 α、$|\alpha| \neq 0$，算子 $\Re(S_c^*(F_{c^\flat} - F_c))$ 具有无穷多个负特征值。

其中 F_c 是系数 (5.1) 对应的远场算子，而 $F_{c^\flat}$ 是系数 (5.2)对应的远场算子。

证明。 首先注意到 $\Re(S_c^*(F_{c^\flat} - F_c))$ 是一个紧自伴算子。

(i) 假设 $B \subseteq D_j$ 对 $j \in \mathbb{I}$成立。取 $0 \leqslant \alpha_j \leqslant m_j$ 作为 $j \in \mathbb{I}$，并取 $\alpha_j = 0$ 作为 $j \notin \mathbb{I}$。此外，在定理 3.6中取 $F_{c_1} = F_c$ 和 $F_{c_2} = F_{c^\flat}$。根据定理 3.6，存在一个有限维子空间 $V \subseteq [L^2(\mathbb{S})]^2,$，使得若 $g \in V^\perp$，则

$$\begin{aligned} &\sqrt{8\pi\omega}\, \Re\langle S_c^*(F_{c^\flat} - F_c)g, g\rangle \geq \int_{\mathbb{R}^2} E_{\lambda-\lambda^\flat,\mu-\mu^\flat}(\overline{u}_{c,g}, u_{c,g}) + (\rho^\flat - \rho)\omega^2 |u_{c,g}|^2 \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 2(\mu - \mu^\flat)|\widehat{\nabla} u_{c,g}|^2 + (\lambda - \lambda^\flat)|\nabla \cdot u_{c,g}|^2 + (\rho^\flat - \rho)\omega^2 |u_{c,g}|^2 \mathrm{d}y \\ &\geq \int_{D_2} 2(m_2 - \alpha_2\chi_B)|\widehat{\nabla} u_{c,g}|^2 \, \mathrm{d}y + \int_{D_1} (m_1 - \alpha_1\chi_B)|\nabla \cdot u_{c,g}|^2 \, \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{D_3} \omega^2(m_3 - \alpha_3\chi_B)|u_{c,g}|^2 \, \mathrm{d}y \geq 0 \end{aligned}$$

其中我们用到了（5.1）中的性质以及

$$E_{\lambda,\mu}(u,v) = 2\mu\widehat{\nabla} u : \widehat{\nabla} v + \lambda\nabla \cdot u \, \nabla \cdot v \quad \text{with} \quad \widehat{\nabla} u := \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^\top\right).$$

也就是说，

$$\Re\langle S_c^*(F_{c^\flat} - F_c)g, g\rangle \geq 0, \quad \forall g \in V^\perp.$$

因此， $\Re(S_c^*(F_{c^\flat} - F_c))$ 只有有限个负特征值。

(ii) 我们反过来假设 $\Re(S_c^*(F_{c^\flat} - F_c))$ 只有有限个负特征值，那么存在一个有限维子空间 $\widetilde{V} \subseteq [L^2(\mathbb{S})]^2,$，使得

$$\Re\langle S_c^*(F_{c^\flat} - F_c)g, g\rangle \geq 0, \quad \forall g \in \widetilde{V}^\perp. \tag{5.3}$$

本手稿仅供审阅之用。

为导出矛盾，我们考虑定理 3.6，其中 $F_{c_1} = F_{c^\flat}$ 和 $F_{c_2} = F_c$，并将其重新排列得到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8\pi\omega}\ \Re\langle S^*_{c^\flat}(F_{c^\flat} - F_c)g, g\rangle \le \int_{\mathbb{R}^2} E_{\lambda-\lambda^\flat,\mu-\mu^\flat}(\overline{u}_{c^\flat,g}, u_{c^\flat,g}) + (\rho^\flat - \rho)\omega^2|u_{c^\flat,g}|^2 \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 2(\mu-\mu^\flat)|\widehat{\nabla} u_{c^\flat,g}|^2 + (\lambda-\lambda^\flat)|\nabla\cdot u_{c^\flat,g}|^2 + \omega^2(\rho^\flat-\rho)|u_{c^\flat,g}|^2 \ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\Omega} 2(\psi_\mu\chi_{D_2} - \alpha_2\chi_B)|\widehat{\nabla} u_{c^\flat,g}|^2 + (\psi_\lambda\chi_{D_1} - \alpha_1\chi_B)|\nabla\cdot u_{c^\flat,g}|^2 \\
&\quad + \omega^2(\psi_\rho\chi_{D_3} - \alpha_3\chi_B)|u_{c^\flat,g}|^2 \ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由定理 4.3 可选取一些序列 $(g_m^{(j)})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq V^\perp$ $(j = 1,2,3)$，使得

$$\|u_{c^\flat,g_m^{(1)}}\|_{[L^2(B)]^2} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c^\flat,g_m^{(1)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as} \quad m\to\infty;$$

$$\|\nabla\cdot u_{c^\flat,g_m^{(2)}}\|_{L^2(B)} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c^\flat,g_m^{(2)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as} \quad m\to\infty;$$

$$\|\widehat{\nabla} u_{c^\flat,g_m^{(3)}}\|_{[L^2(B)]^{2\times 2}} \to \infty \quad \text{and} \quad \|u_{c^\flat,g_m^{(3)}}\|_{[H^1(D)]^2} \to 0 \quad \text{as } m\to\infty.$$

将这些解代入前一个不等式，得到

$$\begin{aligned}
\sqrt{8\pi\omega}\ \Re\langle S^*_{c^\flat}(F_{c^\flat} - F_c)g_m^{(j)}, g_m^{(j)}\rangle \le C\int_D |\widehat{\nabla} u_{c^\flat,g_m^{(j)}}|^2 + |\nabla\cdot u_{c^\flat,g_m^{(j)}}|^2 + |u_{c^\flat,g_m^{(j)}}|^2 \ \mathrm{d}y \\
- \int_B \alpha_1|\nabla\cdot u_{c^\flat,g_m^{(j)}}|^2 + 2\alpha_2|\widehat{\nabla} u_{c^\flat,g_m^{(j)}}|^2 + \alpha_3|u_{c^\flat,g_m^{(j)}}|^2 \ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由于 $|\alpha| \neq 0$和 $\alpha_j \geqslant 0$，我们看到，随着 m 增大，最后一个积分变得越来越大且越来越负，而第一个积分趋于零，因此

$$\Re\langle S_c^*(F_{c^\flat} - F_c)g_m^{(j)}, g_m^{(j)}\rangle = \Re\langle S^*_{c^\flat}(F_{c^\flat} - F_c)g_m^{(j)}, g_m^{(j)}\rangle < 0,$$

当 m足够大时。这与 (5.3) 矛盾，从而完成证明 . ■

致谢。
J.L. Xiang 的工作得到国家自然科学基金（编号：12301542）、湖北省数学科学重点实验室（华中师范大学）开放研究基金（MPL2025ORG017）以及国家留学基金管理委员会的资助。

参考文献

[1] Albicker A, Griesmaier R. 无界区域中障碍物逆散射的单调性. Inverse Probl., 2020, 36 8 085014 ( ): Albicker A, Griesmaier R. 麦克斯韦方程反散射中的单调性. Inverse

[2] Probl. Imag., 2023年, 17: 68-105

本手稿仅供审阅。

[3] Arens T, Griesmaier R, Zhang R. 波导中逆散射问题的基于单调性的形状重建. Inverse Probl., 2023, 39 7 075009 ( ): Colton D, Kirsch A. 一种求解共振区域内逆散射问题的简单方法. Inverse Probl., 1996, 12 383 393 : - Colton D, Kress R. 《逆声学与电磁散射理论》. 第4版. Springer Nature Switzerland AG, 2019年[6] Daimon T, Furuya T, Saiin R. 裂纹逆散射问题的单调性方法. Inverse Probl. Sc. En., 2020, 28 11 1570 1581 ( ): - Eberle S, Harrach B. 线性弹性形状重建的基于单调性的正则化. Computational Mechanics, 2022, 69 1069 1086 : - Eberle S, Harrach, B. 线性弹性中的形状重建：标准单调性方法与线性化单调性方法. Inverse Probl., 2021, 37 4 045006 ( ): Eberle S, Harrach, B. 基于单调性方法的线性弹性夹杂物重建分辨率保证. Inverse Probl., 2023, 39 7 075006 ( ): Eberle S, Harrach B, Meftahi H, Rezgui T. 线性弹性中 Lam´é 参数的 Lipschitz稳定性估计与重建. Inverse Prob. Sci. Eng., 2020, 29 2 1 22 ( ): - Eberle S, Pohjola V. 夹杂物检测的单调性方法与时谐弹性波方程. Inverse Probl., 2024, 40 4 045018 ( ): Eberle S, Moll J. 通过单调性方法实验检测和重建弹性体中的夹杂物形状. Int. J. Solids Struct., 2021, 233 111169 : Furuya T. 开放周期波导中缺陷的因子分解法与单调性方法. J. Inve. Ill-posed Prob., 2020, 28 6 783 796 ( ): - Furuya T. 关于声学逆散射的因子分解法与单调性方法的评述. Inverse Probl., 2021, 37 6 065006 ( ): Griesmaier R, Harrach B. 无界区域中介质逆散射的单调性. SIAM J. Appl. Math., 2018, 78 5 2533 2557 ( ): - Harrach B, Pohjola V, Salo M. 亥姆霍兹方程的单调性与局部唯一性. Anal. PDE, 2019, 12 7 1741 1771 ( ): - Harrach B, Pohjola V, Salo M. 亥姆霍兹方程单调性方法的维数界. SIAM J. Math. Anal., 2019, 51 4 2995 3019 ( ): - Harrach B, Ullrich M. 电阻抗层析成像中基于单调性的形状重建. SIAM J. Math. Anal., 2013, 45 6 3382 3403 ( ): - Harrach B, Lin Y H. 半线性椭圆方程中分段解析系数的同时恢复. Nonlinear Analysis, 2023, 228 113188 : Ikehata M. 根据固定频率下的散射振幅重建障碍物. Inverse Probl., 1998, 14 949 954 : - Kirsch A, Grinberg N. 《逆问题的因子分解法》. 牛津: 牛津大学出版社，2008年[22] Lakshtanov E, Lechleiter A. 边界上具有固定符号对比度的介质逆散射中的差分因子分解与单调性. SIAM J. Math. Anal., 2016, 48 3688 3707 : 2001 - Potthast R. 《逆散射理论中的点源与多极子》. 美国佛罗里达州博卡拉顿：Chapman, Hall/CRC, [24] Potthast R. 使用奇异源进行声学逆散射的稳定性估计与重建. J. Comput. Appl. Math. 2000, 114 247 274 : - Sevroglou V. 可穿透和吸收障碍物的远场算子：二维弹性逆散射. [25] Inverse Probl., 2005年, 21(2): 717-738

本手稿仅供审阅之用。