arXiv:2602.04488v1 [cs.LO] 4 Feb 2026

用于潜在主义真值制造的意向语义

Paul Gorbow

1 谓词逻辑的完整意向语义

1.1 非假设逻辑

设 $\mathcal{L}$ 是一种纯关系语言。递归地，设 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$，并且对于每个 $i < \omega$，令 $\mathcal{L}_{i+1}$ 为加入常量符号 c_φ 后的 $\mathcal{L}_i$，其中每个 $\varphi(x) \in \mathcal{L}_i$ 的唯一自由变量是 x。令 $\mathcal{L}_\omega = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{L}_i$。本研究适用于经典一阶逻辑和直觉主义一阶逻辑，但为使阐述具体明确，我们在此选择经典逻辑。经典逻辑的演绎关系记作 $\vdash$。我们采用标准的自然演绎系统（例如见 [TS00，第 2.1] 章中的定义），并将排中律视为公理模式。通过从自然演绎中排除 $\to I$，并将下文的 $\vee E$ 和 $\exists E$ 替换为 $\exists E'$ 和 $\vee E'$ 所得到的逻辑称为 非假设逻辑，因为它不基于未解除的假设进行推理。其演绎关系记作 $\vdash_{\not H}$。

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \to \theta \quad \psi \to \theta}{\theta} \tag{$\vee E'$}$$

$$\frac{\exists x \varphi(x) \quad \varphi(c_\varphi) \to \theta}{\theta} \tag{$\exists E'$}$$

1.2 意向状态及其真值制造语义

For 任意有限公式集 d，我们将 $[d]$ 定义为 d 在 $\vdash_{\not H}$下的闭包。此外，对于 $\varphi \in \mathcal{L}$，$d + \varphi$ 是 $d \cup \{\varphi\}$的简写。

给定 $i < \omega$，基本意向状态 b *(在 $\mathcal{L}$ 阶 i上)* 是 $\mathcal{L}_i$的一个公式集合，使得$b = [d]$，对于某个有限子集 $d \subseteq b$。注意，由于 $\vdash_{\not H}$具有规则 $\wedge E$，对于任意基本意向状态 b，都存在一个唯一公式 σ_b（即上述 d 中的公式之合取），使得 $b = [\{\sigma_b\}]$。为方便记号，我们为每个基本意向状态 b固定这样一个 σ_b。

意向状态 u *(在 $\mathcal{L}$上)* 通过 $\in$-递归定义为一个有序对 $\langle b(u)\ H(u)\rangle$，其中$b(u)$是一个基本意向状态，$H(u)$是一个意向状态集合，并且对于每个 $s \in H(u)$，都存在 $\varphi \in \mathcal{L}_\omega$，使得：

$$b(u) + \varphi = b(s)$$

$b(u)$ 称为 u的基础状态。$H(u)$ 的元素称为 u的假设状态。

定义 1。设 u, v 是 $\mathcal{L}$ 上的意向状态。我们通过 $\in$-递归定义集合 $\mathrm{MT}(u)$，即 使之为真的公式集合：该集合是满足下述条件的 $\subseteq$-最小集合，对于任意 $\varphi, \theta \in \mathcal{L}_\omega$:

(i) $b(u) \subseteq \mathrm{MT}(u)$

(ii) 对于任意 $s \in H(u)$，如果 $b(u) + \varphi \vdash_{\not H} b(s)$ 且 $\theta \in \mathrm{MT}(s)$，那么 $(\varphi \to \theta) \in \mathrm{MT}(u)$。

(iii) MT(u) 在 $\vdash_{\not\mathcal{H}}$ 下是闭合的。

我们记作 $u \Vdash \varphi$，并称 u 是 的真值制造者，如果 $\varphi \in \mathrm{MT}(u)$。

利用上述真值制造概念，我们在意向状态上定义两个自然的偏序，以及一个句法上的 $\Vdash$-关系：

定义2。 设 u， v 是 $\mathcal{L}$ 上的意向状态。

(a) 如果 MT(u) $\subseteq$ MT(v)，我们称 v $\Vdash$-扩展 u，记作 $u \leq_{\Vdash} v$。(b) 通过 $\in$-递归，我们定义：如果 $b(u) = b(v)$，并且对于每个 $s \in H(u)$，都存在 $t \in H(v)$ 使得 $s \leq_F t$，则称 v 是 u 的精细扩展，记作 $u \leq_F v$。(c) 如果每个意向状态 u 满足 $u \Vdash \Gamma$，都有一个精细扩展 u' 满足 $u' \Vdash \varphi$，则记作 $\Gamma \Vdash \varphi$。

Le命题3。 设 u、 v、 w 是 $\mathcal{L}$ 上的意向状态。如果 $u \leq_F v$ 且 $v \leq_F w$，则 $u \leq_F w$。此外 ，*if* $u \leq_F v$，则 $u \leq_{\Vdash} v$。

证明。 传递性断言可由 $\leq_F$ 的定义以及 $=$-关系的传递性，通过 $\in$-归纳直接得出。

假设 $u \leq_F v$。要证明 $u \leq_{\Vdash} v$，只需验证对于任意 φ， $\theta \in \mathcal{L}_\omega$:

(i) $b(u) \subseteq$MT(v)

(ii) 对于任意 $s \in H(u)$，如果 $b(u) + \varphi \vdash_{\not\mathcal{H}} b(s)$ 且 $\theta \in$ MT(s)，那么 $(\varphi \to \theta) \in$ MT(v)。

(iii) MT(v) 在 $\vdash_{\not\mathcal{H}}$ 下封闭。

根据 $b(v) = b(u)$ 以及 MT(v) 定义中的 (i)，第一个成立。根据 MT(v) 定义中的 (iii)，第三个成立。

为证明第二个，我们对 u 的结构进行 $\in$-归纳。由于 $u \leq_F v$，对每个 $s \in H(u)$，都存在 $t_s \in H(v)$，使得 $s \leq_F t_s$。归纳假设是：对每个 $s \in H(s)$， $s \leq_{\Vdash} t_s$。令 $s \in H(u)$，并令 $\varphi \in \mathcal{L}_\omega$ 满足 $b(u) + \varphi \vdash_{\not\mathcal{H}} b(s)$。假设 $\theta \in$ MT(s)。根据 $b(u) = b(v)$ 和 $b(s) = b(t_s)$，我们有 $b(v) + \varphi \vdash_{\not\mathcal{H}} b(t_s)$。此外，根据 $s \leq_{\Vdash} t_s$，我们有 $\theta \in$ MT(t_s)。因此，根据 MT(v) 定义中的 (ii)，我们有 $(\varphi \to \theta) \in$ MT(v)，如所需。 □

设 $0 < n < \omega$。 u 中的路径（长度为 n）是一个 n 元组 $\langle u_0, \cdots, u_n\rangle$，满足 $u_0 = u$，且对于每个 $0 \leq i < n$，都有 $u_{i+1} \in H(u_i)$。 $\langle u_0, \cdots, u_n\rangle$ 若由公式序列$\langle\varphi_1, \cdots, \varphi_n\rangle$ 连接，则对于每个 $0 \leq i < n$， $b(u_i) + \varphi_{i+1} \vdash_{\not\mathcal{H}} b(u_{i+1})$。

定义4. 我们为任意基本意向状态 c、任意意向状态 u， u'（定义于 $\mathcal{L}$ 上）、任意意向状态集合 U（定义于 $\mathcal{L}$ 上）、任意 $0 < n < \omega$，以及任意路径 $\langle u_0, \cdots, u_n\rangle$（属于 u）定义以下运算：

$$\mathrm{Rep}(\langle u_0, \cdots, u_n\rangle, u') =_{\mathrm{df}} \begin{cases} u' & \text{if } n = 0. \\ \big\langle b(u_0), (H(u_0) \setminus \{u_1\}) \cup \{\mathrm{Rep}(\langle u_1, \cdots, u_n\rangle, u')\}\big\rangle & \text{if } n > 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{App}(u, U) =_{\mathrm{df}} \big\langle b(u), H(u) \cup U\big\rangle$$

$$\mathrm{App}(\langle u_0, \cdots, u_n\rangle, U) =_{\mathrm{df}} \mathrm{Rep}\big(\langle u_0, \cdots, u_n\rangle, \mathrm{App}(u_n, U)\big)$$

$$\mathrm{Boost}(u, c) =_{\mathrm{df}} \big\langle b(u) \cup c, \{\mathrm{Boost}(v, c) \mid v \in H(u)\}\big\rangle$$

命题 5. 设 c 是定义于 $\mathcal{L}$ 上的基本意向状态， u、 u' 是定义于 $\mathcal{L}$ 上的意向状态， U 是定义于 $\mathcal{L}$ 上的意向状态集合， $0 < n < \omega$，并且 $\langle u_0$、 $\cdots$、 $u_n\rangle$ 是 u 中由 $\langle\varphi_1$、 $\cdots$、 $\varphi_n\rangle$ 连接的一条路径。

(a) 设 $v = \mathrm{Rep}(\langle u_0, \cdots, u_n\rangle, u')$。若 $u_n \leq_F u'$，则 v 是一个意向状态，使得 $u \leq_F v$.

(b) 设 $v = \mathrm{App}(\langle u_0, \cdots, u_n\rangle, U)$。若 $\forall s \in U\, \exists\varphi_s \in \mathcal{L}_\omega \left(b(u_n) + \varphi_s = b(s)\right)$，则 v 是一个意向状态，使得 $u \leq_F v$。

(c) $\mathrm{Boost}(u, c)$ 是一个意向状态。

证明。 (a) 通过对 n进行归纳即可证明这一点。对于 $n = 0$ ，结论显然成立。归纳假设是：该结论对 $n - 1$成立。设 $w = \mathrm{Rep}(\langle u_1, \cdots, u_n\rangle, u')$。根据归纳假设， w是一个意向状态，使得 $u_1 \leq_F w$ $b\ u\ + \varphi_1 \vdash_{\mathscr{H}} b\ w$ $v = \langle b\ u\ ,\ H\ u\ \setminus \{u_1\}\ \cup$。因此 () () 。注意到 () (()) 。 $\{w\}\rangle$ $u_1 \leq_F w\ v$ $u \leq_F v$ 既然， 是一个意向状态，使得 。

(b) 设 $s \in U$ 为任意的。由于 s 是一个意向状态，且 $b(u_n) + \varphi_s = b(s)$，我们有$v$是一个意向状态。由 (a)，只需证明 $u_n \leq_F \mathrm{App}(u_n, U)$。但这可由 $\leq_F$ 与 App 的定义直接得出。

(c) 设 $v \in H(u)$ 为任意的。由归纳，我们可以假设 $\mathrm{Boost}(v, c)$ 是一个意向状态。此外，由于 $b(v) = b(u) + \phi$，对某个 ϕ，我们有 $b\big(\mathrm{Boost}(u, c)\big) + \phi = b(u) + c + \phi = b(v) + c = b\big(\mathrm{Boost}(v, c)\big)$，即为所求。 □

1.3 可靠性与完备性

定理 6 （可靠性）**.** 设 Γ 为 $\mathcal{L}_\omega$ 的一个有限子集，且 $\varphi \in \mathcal{L}_\omega$:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$$

证明。 假设 $\Gamma \vdash \varphi$。设 u 为一个意向状态，使得 $u \Vdash \Gamma$。我们需要构造 u的一个精细扩展 v ，使得 $v \Vdash \varphi$。这通过对 $\vdash$的自然归纳证明的复杂度进行归纳来证明。因此，设 p 为见证 $\Gamma \vdash \varphi$的一个证明。设 P 为在 p中所应用的最后一条规则（记为 R）的诸假设的证明之集。每个 $q \in P$ 见证一个演绎关系$\Gamma_q \vdash \varphi_q$。由归纳，我们可以假设对每个 $q \in P$都有 $\Gamma_q \Vdash \varphi_q$。我们按规则 R 是哪一条来分情形进行。

假设 R 是 $\to I$，结论 φ 为（$\psi \to \theta$）。那么，唯一的证明 $q \in P$见证了 Γ， $\psi \vdash \theta$。根据归纳假设， $\langle b\ (u)\ + \psi,\ \varnothing\rangle$ 具有一个精细扩展 v_1，使得$v_1 \Vdash \theta$。由命题 5(b)可知， $v = \mathrm{App}$（u, $\{v_1\}$）是 u的精细扩展；根据 MT(v)定义中的 (ii)，可得 $v \Vdash$（$\psi \to \theta$），如 desideratum。

假设 R 是 $\vee E$。于是我们有公式 ψ、 θ，一个见证 $\Gamma \vdash \psi \vee \theta$的证明 $q_1 \in P$，一个见证 Γ、 $\psi \vdash \varphi$ 的证明 $q_2 \in P$，以及一个见证 Γ、 $\theta \vdash \varphi$的证明 $q_3 \in P$。根据归纳假设， u 具有一个精细扩展 v_1，使得 $v_1 \Vdash \psi \vee \theta$； $\langle b\ (u)\ + \psi$、 $\varnothing\rangle$ 具有一个精细扩展v_2，使得 $v_2 \Vdash \varphi$；而且 $\langle b\ (u)\ + \theta$、 $\varnothing\rangle$ 具有一个精细扩展 v_3，使得 $v_3 \Vdash \varphi$。现在令$v = \mathrm{App}\big(v_1$、 $\{v_2, v_3\}\big)$。根据命题 5(b)，我们有 $v_1 \leq_F v$。因此，根据引理 3， $u \leq_F v$，并且$v \Vdash \psi \vee \theta$。此外，根据 MT($v$)定义中的 (ii)，我们有 $v \Vdash \psi \to \varphi$，以及 $v \Vdash \theta \to \varphi$。因此，根据 MT($v$)定义中的 (iii)以及 $\vee E$ 在 $\vdash_{\mathscr{H}}$中的规则，我们有 $v \Vdash \varphi$。

假设 R 是 $\exists E$。于是我们有一个公式 $\psi(x)$， 一个证明 $q_1 \in P$ 见证 $\Gamma \vdash \exists x\psi(x)$，以及一个证明 $q_2' \in P$ 见证 $\Gamma, \psi(a) \vdash \varphi$，其中 a 是一个新变量，在φ中没有自由出现。令 q_2 为这样一个证明：由 q_2' 将每个 a替换为常量 c_ψ 而得到，且该常量不出现在 p 中，也不出现在 $b(u)$中。注意， q_2 见证 $\Gamma, \psi(c_\varphi)$ $\vdash \varphi$。根据归纳假设，u 有一个精细扩展 v_1，使得 $v_1 \Vdash \exists x\psi(x)$；而 $\langle b(u)\ + \psi(c_\psi)\ \varnothing\rangle$ 有一个精细扩展 v_2，使得 $v_2 \Vdash \varphi$。现在令 $v = \mathrm{App}\big(v_1, \{v_2\}\big)$。根据命题 5(b)，我们有 $v_1 \leq_F v$，并且

根据引理 3，$u \leq_F v$。此外，根据 MT(v) 定义中的 (ii)，我们有 $v \Vdash \exists x \varphi(x)$，并且$v \Vdash \psi(c_\psi) \to \varphi$。因此，根据 MT($v$) 定义中的 (iii)，以及 $\vdash_{\not H}$中的规则 $\exists E$，我们有 $v \Vdash \varphi$。

假设 R 是自然演绎的任意其他规则。那么没有需要处理的未解除假设。因此，对于每个 $q \in P$，都存在 ψ_q，使得 q 见证了 $\Gamma \vdash \psi_q$。于是，根据归纳假设，对于每个 $q \in P$，都存在 u的一个精细扩展 v_q，使得 $v_q \Vdash \psi_q$。令$v = \mathsf{App}\big(u, \bigcup_{r \in P} H(v_r)\big)$。注意，对于每个 $q \in P$，我们都有 $v = \mathsf{App}\big(v_q, H(u) \cup \bigcup_{r \in P} H(v_r)\big)$。因此，根据命题 5(b)，对于每个 $q \in P$，v 既是 u 的精细扩展，也是 v_q 的精细扩展。于是，根据引理 3，对于每个 $q \in P$，都有 $v \Vdash \psi_q$。现在，由于 R被 $\vdash_{\not H}$接纳，根据 MT(v) 定义中的 (iii)，我们有 $v \Vdash \varphi$。 □

引理 7. 设 u 是 $\mathcal{L}$ 上的一个意向状态。那么 $b(u) \vdash \mathrm{MT}(u)$。

证明。设 $\varphi \in$ MT(u)。我们需要证明 $b(u) \vdash \varphi$。我们对 u 的复杂度进行归纳。归纳假设是：对于每个 $s \in H(u)$、每个满足 $b(s) = b(u) + \theta$ 的 θ，以及每个满足 $s \Vdash \psi$ 的 ψ，都存在一个证明 $p_{s,\ \theta,\ \psi}$，以证明 $b(u),\ \theta \vdash \psi$。

由于 MT(u) 是其定义中在条件 (i)–(iii) 下封闭的最小集合，并且 $\varphi \in$MT(u)，因此存在一个证明 $p_{u,\ \Delta,\ \varphi}$，以证明 $\Delta \vdash_{\not H} \varphi$；其中某个有限公式集Δ满足：对于每个 $\chi \in \Delta$，以下情况之一成立：

- $\chi \in b(u)$，或
- χ 是公式（$\theta \to \chi'$），其中存在某个 θ，χ'，使得存在 $s \in H$（u），满足 b（u）$+\theta = b$（s）且 $s \Vdash \chi'$。

在前一种情况下，令 $p_{u,\ \chi}$ 为见证 b（u）$\vdash_{\not H} \chi$ 的平凡证明。在后一种情况下，见证 b（u）$\theta \vdash \chi'$ 的证明 $p_{s,\ \theta,\ \chi'}$ 后接一次 $\to I$ 的应用，即可得到见证 b（u）$\vdash \chi$ 的证明 $p_{u,\ \chi}$。因此，证明 $p_{u,\ \Delta,\ \varphi}$ 中的每个假设 $\chi \in \Delta$ 都可以替换为证明 $p_{u,\ \chi}$，从而得到见证 b（u）$\vdash \varphi$ 的证明 $p_{u,\ \varphi}$，如所求。 □

推论 8. 设 u 是 $\mathcal{L}$ 上的一个意向状态。若 b（u）是 $\vdash$-一致的，则 $\mathrm{MT}(u)$ 是 $\vdash$-一致的。

定理 9 (完备性)。设 Γ 是 $\mathcal{L}_\omega$ 和 $\varphi \in \mathcal{L}_\omega$的有限子集：

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftarrow \Gamma \Vdash \varphi$$

证明。假设 $\Gamma \Vdash \varphi$。那么存在意向状态 $\langle \mathrm{Th}^{\vdash \not H}(\Gamma)\ \varnothing \rangle$的精细扩展 u，使得 $u \Vdash \varphi$。由于 $b(u) = \mathrm{Th}^{\vdash \not H}(\Gamma)$，根据引理 7，我们有 $\mathrm{Th}^{\vdash \not H}(\Gamma) \vdash \varphi$。因此 $\Gamma \vdash \varphi$，证毕。

□

2 非假设逻辑的复杂度

本节通过为判定前一个猜想起草一个算法，来论证以下猜想：

猜想 10. 非假设逻辑相对于皮亚诺算术的公理是可判定的，[1] 并且更进一步，在将皮亚诺算术的任一固定定理作为附加公理时也是可判定的。

[1]为方便起见，我们将 PA 视为采用纯关系语言表述的皮亚诺算术，其公理化见下文图 12。

下文所拟证明搜索过程的一个反复出现的特征，是限制为有限多个常元。在此处采用的皮亚诺算术的纯关系化公理化中，没有函数符号，因而也没有非平凡的闭项；特别地，语言本身除明确引入的常元外不含其他常元。因此，相对于关系型皮亚诺算术公理的证明搜索不会产生无界的新项供给。这种有限性对于确保搜索空间保持受控起着关键作用。将该猜想更进一步推广到皮亚诺算术的任意固定定理，促使我们允许有限多个附加常元，因为从意向语义的角度看，这些常元指称所考虑的被假设对象。因此，下面的算法被表述为明确指出在何处依赖常元的有限性，以预先适应这一更强的设定。

在非假设情境中，证明搜索通常会在遇到蕴含时停止。除了蕴含引入（$\rightarrow I$）之外，很难看出蕴含的推导如何对闭证明作出实质性贡献，因为蕴含消去预设了一个前件可用，而该前件本身不能通过假设来确立。因此，证明搜索不会越过蕴含继续分支，从而产生真正的新信息。这还会导致归纳推理尝试实际上被中断：归纳步预设了如下形式的蕴含推导$\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))$，但该蕴含无法在非假设情境中消去，因此不能推动无界证明搜索。尽管存在归纳公理，但非假设限制阻碍了它们在证明搜索中的有效运用。

同样，在这种情境中，合取消去似乎并不能在证明论上产生有效进展。由于消去规则无法引入公理或先前推导出的闭公式中尚未包含的信息，继续进行这类步骤并不会拓展可得结论的范围，因此在终止搜索过程中可以放心地忽略它们。

综合这些观察可知，正规非假设证明应体现出强形式的子公式约束：证明搜索仅限于公理或目标公式中已经（以正面形式）出现的公式。要严格确立这一点，需要采用结构证明论方法，尤其是针对非假设情境调整的正规化结果；预计这些结果将为上文提出的可判定性猜想奠定基础。

以下算法旨在说明该猜想所依据的有限性来源，而非构成一个完整明确或可实现的判定过程。应将其视为一种示意性的证明搜索规范，而非完整算法。

算法 1：假定可用的辅助函数

```
函数公理(φ):
    /* 判定 φ 是否为公理（允许变量替换，并且
       在全称量化下闭包。                          */
函数PosSubAxiom(φ):
    /* 判断 φ 是否以语法上的正向子公式形式出现
       于某个公理中（允许进行变量替换）。          */
函数Axiomatic(p):
    /* 接受一个证明作为输入，并判断其所有假设是否都是
       公理。                                      */
```

算法2：针对公式 φ 的递归证明搜索 1 函数 Prove(φ)：/* 如果存在，则返回从固定的可判定公理集 $\vdash_{\mathcal{H}}$ 中推出 φ 的正规自然演绎证明；否则返回 $\perp$。*/ 2 如果 Axiom(φ)，则 3 返回 φ4 结束 5 否则，如果 Axiomatic(ProveIntro(φ))，则 6 返回 ProveIntro(φ) 7 结束 8 否则，如果 Axiomatic(ProveElim(φ))，则 9 返回 ProveElim(φ) 10 结束 11 否则 12 返回 $\perp$13 结束

算法 3： 基于引入规则的证明搜索步骤

函数ProveIntro(φ)**：**
- **如果** $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$ **则**
  - **返回**
    $$\frac{\text{Prove}(\psi) \qquad \text{Prove}(\theta)}{\psi \wedge \theta}$$
- **end**
- **否则如果** $\varphi \equiv \psi \vee \theta$ **则**
  - **如果** 证明(ψ) $\neq \bot$ **则**
    - **返回**
      $$\frac{\text{证明}(\psi)}{\psi \vee \theta}$$
  - **end**
  - **否则如果** 证明(θ) $\neq \bot$ **则**
    - **返回**
      $$\frac{\text{证明}(\theta)}{\psi \vee \theta}$$
  - **end**
  - **else**
    - **返回** $\bot$
  - **end**
- **end**
- **否则如果** $\varphi \equiv \forall x \psi(x)$ **则**
  - **返回**
    $$\frac{\text{证明}(\psi(x))}{\forall x \psi(x)}$$
- **end**
- **否则如果** $\varphi \equiv \exists x \psi(x)$ **则**
  - /* 证明搜索仅限于有限多个常元
    出现在公理中或此前在搜索过程中引入的那些。
    */
  - **对于**每个这样的常量 c_ψ **执行**
    - **如果** Prove($\psi(c_\psi)$) $\neq \bot$ **则**
      - **返回**
        $$\frac{\text{证明}(\psi(c_\psi))}{\exists x \psi(x)}$$
    - **end**
  - **end**
- **end**

算法 4： 基于消去规则的证明搜索步骤

函数ProveElim(φ)**：**
  如果不是 PosSubAxiom(φ)**则**
    返回 $\bot$
  end
  否则如果 公理(Uni(φ))**则**
    返回

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{Uni}(\varphi)}}{\vdots}\,\varphi$$

  end
  else
    对于“由有限个公理和有限个常元所给出的每一种消去可能性，以及有限个常元”**进行**
      “针对该消去可能性的证明搜索”
    end
  end

经典性公理：

$$\varphi \vee \neg\varphi \tag{排中律}$$

等同公理：

$$\forall x(x = x) \tag{E1}$$
$$\forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x) \tag{E2}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \wedge y = z \to x = z) \tag{E3}$$
$$\forall x\,\forall x'\,\forall y\,\forall y'\,\forall z\,\forall z'\,(x = x' \wedge y = y' \wedge z = z' \wedge \text{加法}(x,\ y,\ z) \to \text{加法}(x',\ y',\ z')) \tag{E4}$$
$$\forall x\,\forall x'\,\forall y\,\forall y'\,\forall z\,\forall z'\,(x = x' \wedge y = y' \wedge z = z' \wedge \text{乘法}(x,\ y,\ z) \to \text{乘法}(x',\ y',\ z')) \tag{E5}$$
$$\forall x\,\forall x'\,\forall y\,\forall y'\,(x = x' \wedge y = y' \wedge S(x,\ y) \to S(x',\ y')) \tag{E6}$$

函数性与全定义性公理：

$$\forall x\,\exists y\,S(x,\ y) \tag{SF1}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(S(x, y) \wedge S(x, z) \to y = z) \tag{SF2}$$
$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,\text{加法}(x,\ y,\ z) \tag{AF1}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,\forall z'\,(\text{加法}(x,\ y,\ z) \wedge \text{加法}(x,\ y,\ z') \to z = z') \tag{AF2}$$
$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,\text{乘法}(x,\ y,\ z) \tag{MF1}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,\forall z'\,(\text{乘法}(x,\ y,\ z) \wedge \text{乘法}(x,\ y,\ z') \to z = z') \tag{MF2}$$

关系型皮亚诺算术的适当公理：

$$\forall x\,\neg S(x,\ 0) \tag{S1}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(S(x,\ z) \wedge S(y,\ z) \to x = y) \tag{S2}$$
$$\forall x\,\text{加法}(x, 0, x) \tag{A1}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall y'\,\forall z\,\forall z'\,(S(y, y') \wedge \text{加法}(x, y, z) \wedge S(z, z') \to \text{加法}(x, y', z')) \tag{A2}$$
$$\forall x\,\text{Mul}(x,\ 0,\ 0) \tag{M1}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall y'\,\forall z\,\forall u\,(S(y, y') \wedge \text{乘法}(x, y, z) \wedge \text{加法}(z, x, u) \to \text{乘法}(x, y', u)) \tag{M2}$$
$$\varphi(0) \wedge \forall y\,\forall y'\,(S(y, y') \wedge \varphi(y) \to \varphi(y')) \to \forall x\,\varphi(x) \tag{归纳公理}$$

图 2.1： 关系签名下皮亚诺算术的公理

3 比较与讨论

3.1 与 Linnebo 的潜在主义的关系

问题 1. 赋予关系$\leq_{\Vdash}$ 和 $\leq_F$的、 $\mathcal{L}$上所有意向状态的结构，与 Linnebo 的双模态潜在主义有何关系?

我们证明，意向状态上的这一结构满足 Linnebo 的双模态潜在主义对其可能世界框架的两种可及关系所要求的相同公理:

定理 11. 令 $\mathcal{S}$ 为赋予关系$\leq_{\Vdash}$ 和 $\leq_F$的、 $\mathcal{L}$上所有意向状态的结构。我们有:

(a) $\leq_{\Vdash}$ 是一个预序。

(b) $\leq_F$ 是一个局部有向预序，也就是说，它是一个满足以下条件的预序:

$$\forall u, v, w \in \mathcal{S}\left((u \leq_F v \wedge u \leq_F w) \rightarrow \exists s \in \mathcal{S}\left(v \leq_F s \wedge w \leq_F s\right)\right).$$

(c) 这些预序之间的关系如下:

$$\forall u, v, w \in \mathcal{S}\left((u \leq_{\Vdash} v \wedge u \leq_F w) \rightarrow \exists s \in \mathcal{S}\left(v \leq_F s \wedge w \leq_{\Vdash} s\right)\right).$$

证明。 (a) 由 $\leq_{\Vdash}$的定义立即可得。

(b): 由引理 3 可立即得出 $\leq_{\Vdash}$是一个预序。假设 $u, v, w \in \mathcal{S}$和$u \leq_F v \wedge u \leq_F w$。令 $s = \langle b(u)\ H(v) \cup H(w)\rangle$。由 $\leq_F$的定义可立即得出$v \leq_F s \wedge w \leq_F s$。

(c): 假设 $u, v, w \in \mathcal{S}$和 $u \leq_{\Vdash} v \wedge u \leq_F w$。令 $s = \mathrm{App}\big(v, \{\mathrm{Boost}(w, b(v))\}\big)$。根据命题 5(c)， s是 v的一个精细扩展。现在，假设 $\phi \in \mathrm{MT}(w)$。那么 $\phi \in \mathrm{MT}\big(\mathrm{Boost}(w, b(v))\big)$。因此， $\sigma_{b(w)} \rightarrow \phi \in \mathrm{MT}(s)$。但是 $b(w) = b(u)$，所以由于 $u \leq_{\Vdash} v$，我们有$\sigma_{b(w)} \in \mathrm{MT}(v) \subseteq \mathrm{MT}(s)$。因此， $\phi \in \mathrm{MT}(s)$，证毕。 □

参考文献

[Lin22] Ø. Linnebo.《一般性释义》。《哲学杂志》，第119卷，第7期，2022年，第349–379页。

[TvD88] A. S. Troelstra 和 D. van Dalen。《数学中的构造主义》，爱思唯尔，1988年。

[TS00] A. S. Troelstra 和 H. Schwichtenberg。《基础证明论》，第2版。剑桥大学出版社，2000年。