arXiv:2602.04527v1 [cs.GT] 4 Feb 2026

米克单记可转移投票选举的基于图的审计

Edouard Heitzmann[1]

摘要

在选举安全领域，风险限制审计（RLA）是一种统计框架，通过对选票进行最少量的部分重新计票，确保选举结果得到正确报告。对于单记可转移投票制（STV）等算法选举规则，由于这类规则取决于导致选举结果的淘汰和当选的时间顺序，通用的风险限制审计框架一直难以实现。本文提出一种新的基于图的方法来审计这类算法选举规则，即考察所有可能的当选和淘汰序列构成的空间。如果在审计开始前固定该普遍空间的一个子图，那么一种充分的策略就是通过统计验证真实的选举序列不会离开这个固定子图。由此可构建一个灵活的框架，以不依赖时间顺序的方式审计这类选举。

1 引言。

单记可转移投票制（STV）是一类用于举行多赢家选举的算法计票规则。目前，苏格兰、北爱尔兰、美国部分城市以及新西兰部分地区的市议会选举采用这一制度。此外，澳大利亚、马耳他和爱尔兰的州级或国家级选举也采用这一制度。

单记可转移投票制有许多变体，但它们都遵循同一基本原理。这些规则要求选民对竞选待填补 m 席位的所有候选人填写完整排名。在计票结果中，候选人被逐一淘汰或当选。在这一计票结果的每个阶段，每张选票都计给仍在角逐中排名最高的候选人（即所谓的“有希望候选人”）。候选人若获得超过预先确定的选票“配额”，即告当选；此时，使其达到配额的选票的部分权重会从选举中移除（或称“失效”）。如果没有候选人达到配额，我们就淘汰得票最少的候选人，并将其选票继续转移。

单记可转移投票制具有许多理想特性。它实现了比例代表制，也就是说，凝聚力强的选民集团往往会被授予与其集团在选民群体中的权重成比例的 m 席位数量。与其他比例选举规则不同，单记可转移投票制无需要求候选人带着党派归属参选即可实现这一点，因而适用于非党派选举。作为一种多获胜者选举方法，它对杰利蝾螈式划分选区也具有一定的天然抵御。最后，单记可让渡投票制选举的动荡降低了策略性投票的可行性，并激励选民表达其真实偏好。

单记可转移投票制还具有一些其缺点。大多数缺点源于其算法性质，这使得它

[1]数学系，科罗拉多大学博尔德分校
edouard.heitzmann@colorado.edu

比其他常见的投票方法更复杂。这增加了选民负担，也使选举结果难以传达，进而可能降低人们对选举结果的信任。算法复杂度还使单记可转移投票制容易出现一些悖论，例如所谓的单调性悖论、强化悖论或缺席悖论——例如参见 Graham-Squire 和 McCune（2024年）。这些悖论都表明，单记可转移投票制下的选举结果更加脆弱：只需对少量选票进行扰动，就可能对单记可转移投票制选举产生重大影响。这也使得单记可转移投票制比其他选举规则更难审计。

选举的风险限制审计（RLA）简单来说，是对纸质选票进行随机抽样并部分重新计票，以提供一定的统计保证，确认选举结果报告无误。这种方式可以在避免对整场选举进行全面人工重新计票所需的高昂成本的同时，提高选举的安全性。通常，审计会将抽取的选票与其电子投票记录（CVR）进行比对，并检查抽样选票中的差异程度是否足以推翻选举报告的票差。

普遍看法是，单记可转移投票制（STV）的审计难度更高，因为轮次越多，需要审计的差额也越多。如果我们希望确认选举的确切时间顺序——从头到尾的每一次淘汰和当选，以及它们发生的时间——那么决策可能取决于极其微小的差额的机会就会更多，导致选举无法审计。然而，如果我们只希望确认选举结果——谁赢谁输，而不关注导致这一结果的具体过程——就会发现，许多时间顺序上的细节可以忽略，因为它们不会影响最终结果。

为说明这一点，请看2024年波特兰市议会选举第1选区的情况。这是一场三席位单记可转移投票竞选[2]。在该选举的第6轮中，候选人 David Linn 和 Peggy Sue Owens 并列最后一名，各获得1,141张第一偏好票，占已投选票的3.36%。如果我们希望确认该选举的确切时间顺序，当然必须进行全面重新计票，以审计这0票的差额。然而，我们发现，先淘汰这两位候选人中的哪一位，对选举的整体结果并无影响，因为另一位候选人肯定会在下一轮被淘汰（或者，正如我们将看到的，最迟会在第9轮之前被淘汰——参见附录A）。不过，要将这一认识以数学形式加以严格表达并不容易。

对于这类不依赖选举顺序的审计，另一个复杂之处在于，在单记可转移投票制的大多数变体中，胜出者当选的时机都会影响选举后续轮次的进程。如果先淘汰候选人A还是候选人B无关紧要，那么通常仍然很重要的是，在候选人C当选时，A和B中谁已经被淘汰。这也解释了为何广义单记可转移投票制审计框架仍未成形，尽管RAIRE框架已成功实现对单席位单记可转移投票竞选进行不依赖选举顺序的审计——参见Blom、Stuckey等人（2019）。在构建这一推广框架的过程中，我们表明，并非所有单记可转移投票制变体都同样适用于这项任务。我们发现，按照定义不依赖选举顺序的Meek变体，比更常用的加权包容格雷戈里法（WIGM）更容易进行审计。尽管如此，我们为Meek 单票可转移制开发的基于图的方法，同样可以且应当应用于更传统的单记可转移投票制变体。

我们提出的基于图的方法，其整体思路是考虑选举可能经历的所有选举和淘汰序列所构成的空间 Ω。我们预先划定一个子图 $G \subseteq \Omega$，并通过统计学方法验证真实选举路径始终不会离开这个

[2]本次选举的计票结果可在此处查看。

子图 G。只要 G 的“最终结果”中包含的所有获胜者集合都与公布的获胜者集合相同，就能验证选举结果。我们将在论证为何要比较 Meek 与 WIGM 单票可转移制之后，于第2.1节正式阐述这一框架的实验设计。

1.1 一个有帮助的案例研究。

对于一组固定的选票，Meek 与 WIGM 单票可转移制通常会产生相同的获胜者集合——毕竟，它们是同一规则的不同变体。为了说明两者之间的差异，我们将聚焦于一个结果不同的例子，以了解它们产生分歧的根本原因。我们强调，对于这两种变体而言，这种分歧是例外，而非规则。

其中一个例子是苏格兰珀斯和金罗斯市议员选举中第9选区（Almond and Earn）的2012年选举。在这次选举中，$N = 3,689$ 选民投出选票，以选出 $m = 3$ 名市议员，采用的是单记可转移投票制（STV）的 WIGM 变体。在这一变体中，候选人当选所需的选票配额按德鲁普公式计算：

$$q = \left\lfloor \frac{N}{m+1} \right\rfloor + 1 = 923.$$

当候选人的计票总数 T 超过配额时，使其达到该票数的选票会根据分数转移值 τ重新赋予权重。该转移值的计算方式旨在确保从选举中移除相当于一个配额的选票，具体如下：

$$\tau = \frac{T - q}{T}.$$

例如，在我们的案例研究选举第1轮中，Alan Livingstone 收到 $T = 1,112$ 张第一偏好票，因此其转移值为 $\tau = 189/1,112 \approx 0.17$。在将 Livingstone 列为第一偏好的选票中，有 290 张将 Alan Jack 列为下一偏好，因此由于 Livingstone 当选，Jack 获得了权重约为 $290 \cdot 0.17 = 49.3$ 张选票的转移票。

至关重要的是，在 WIGM 单票可转移制中，这一转移过程只发生一次，且转移值在选举剩余过程中保持不变。在后续轮次中，如果某张选票本应从另一位候选人转移给 Livingstone，那么它会直接转移至下一偏好；如果没有指定下一偏好，则该选票失效，但 Livingstone 的转移值不会重新计算。这就是我们所说的 WIGM 单票可转移制依赖时间顺序：Livingstone 当选时哪些候选人仍在竞选中，这一点很重要。

本次选举其余部分的完整计票结果如下：

	第1轮	第2轮	第 3 轮	第 4 轮	第 5 轮	第6轮
Alan Livingstone	1112	当选	当选	当选	当选	当选
Henry Anderson	892	900.67	923.37	当选	当选	当选
Alan Jack	444	493.29	596.93	596.96	770.62	986.97
Wilma Lumsden	628	640.41	670.96	671.23	756.43	已淘汰
Andrew Dundas	369	381.24	450.7	450.73	已淘汰	已淘汰
George Hayton	244	284.28	已淘汰	已淘汰	已淘汰	已淘汰
配额	923	923	923	923	923	923

表 1：2012年珀斯和金罗斯第9选区选举实际发生的计票总数明细。

这场选举有两个特殊之处：首先，Henry Anderson 在第 3 轮以仅0.37 选票的微弱差额当选；其次，Wilma Lumsden 在第 5 轮以 14.19 选票之差惜败于 Alan Jack。事实证明，Anderson 和 Lumsden 都是苏格兰民族党（SNP）的候选人，这意味着许多将其中一位候选人列入名单的选民也列入了另一位候选人。在 Anderson 的 0.37 选票盈余中，有 0.27 张转移票转给了 Lumsden——约占 73%！

在第 4 轮，Andrew Dundas 被淘汰。他转出的选票中， 85.2 转给了 Lumsden， 173.65 转给了 Jack。在 Dundas 票堆中剩余的 191.87 选票权重里，另有 39.51 张本来会将 Anderson 列为下一偏好，但没有提及 Lumsden。根据单记可转移投票制的 WIGM规则，这些选票在本次选举中失效，因为 Anderson 已经当选，而且他的转移值不会改变。

这使得选举极不稳定——如果 Anderson 在第 3 轮的计票总数少了 0.37 张选票，那么这些 39.51 张选票就会在失效之前经由 Anderson 转移（此外还有 35.34 张先将 Anderson、再将 Lumsden 列为偏好的选票），使 Anderson 的转移值高到足以让 Lumsden 在选举第 5 轮中险胜 Jack。这可以通过多种方式实现：

1. 作为单调性悖论：通过替换一张选票

$$(\text{Henry Anderson}, \text{Alan Jack}) \to (\text{Alan Jack}, \text{Henry Anderson}),$$

   我们会以一种导致 Jack 落选的方式，增强偏好档案对 Jack 的支持。

2. 作为对无关选项独立性公理的违背：如果用一张单选票替换

$$(\text{Henry Anderson}) \to (\text{George Hayton}),$$

   我们不会改变偏好档案中 Lumsden 与 Jack 之间的任何比较，但结果中这两位候选人之间的比较会发生变化（Lumsden 现在会击败 Jack）。

3. 作为一种缺席悖论：如果一位选民

$$(\text{Henry Anderson}, \text{Wilma Lumsden})$$

   决定不在这场选举中投票，Lumsden（她偏好的候选人之一）就会当选。事实上，在仍能维持这一结果的情况下，最多有 18 位这样的选民（记录在案的 646 位选民中）可以弃权。

这三项扰动所造成的变化是相同的——尽管从Dundas转移到Anderson-Lumsden候选组合的选票少于转移到Jack的选票，但在这一新的淘汰顺序下， 39.51 的“损失”权重得以转入该候选组合；而且尽管这些选票只列出了Anderson而未列出Lumsden（表明这是一个非稳固联盟），这一差异仍足以克服Lumsden原本落后的 14.19选票差额。

说 Lumsden 在这场选举中比 Jack 更“应得”胜利，在规范层面上含义模糊。两位候选人都很有竞争力，而且这场选举的结果十分胶着——在多数会让 Lumsden 按照 WIGM 规则获胜的其他淘汰顺序中，她只以 ~ 9.5 票的差额险胜 Jack

。但公平地说，在此案例中，他当选的时机对 Anderson 来说很残酷： Anderson 并无过错，却以微乎其微的盈余当选，这剥夺了超过 39.51 名原本会将他排在较后偏好位置的选民的投票权，也削弱了那些使他达到配额的选票所表达的下一偏好。

Meek 单票可转移制的规则正是为处理这一情形而设计的。从总体上看，与 WIGM 相比，Meek 修改了两项规则：它允许获胜者在其当选的轮次之后继续接收选票；在这种情况下，获胜者会提高其转移值；此外，它会在每一轮重新计算配额，当选票因未列出选举中的更多偏好而失效时，就会降低配额。由于前一项差异，我们提到的 39.51 选票即使在 Anderson 达到配额后，仍会继续计入 Anderson 的票堆，而 Anderson 也可以提高其转移值。尽管新的 39.51 选票没有将 Lumsden 列为其下一偏好，但水涨船高，Anderson 票堆中的其余选票也会以更高的权重转移给 Lumsden。使用 Meek 规则对同一场选举重新计票的结果如表 2 所示。

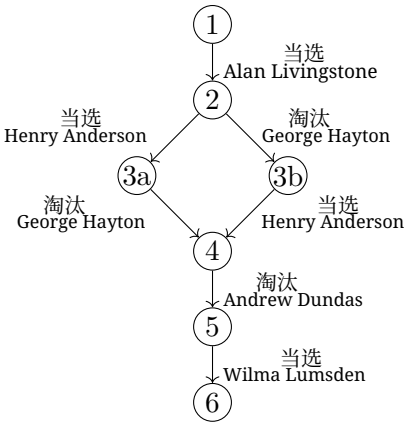
	第1轮	第 2 轮	第 3 轮	第 4 轮	第 5 轮
Alan Livingstone	**1112.00** ✓	**904.07** ✓	**885.12** ✓	**884.13** ✓	**833.50** ✓
Henry Anderson	892.00	901.54	**926.30** ✓	**884.13** ✓	**833.50** ✓
Alan Jack	444.00	498.23	608.11	612.87	810.07
Wilma Lumsden	628.00	641.65	674.34	705.24	**856.94** ✓
Andrew Dundas	369.00	382.46	446.60	450.16	已淘汰
George Hayton	244.00	288.32	已淘汰	已淘汰	已淘汰
配额	922.25	904.07	885.12	884.13	833.50

表 2：第9选区在 Meek 单票可转移制下的选举计票明细。

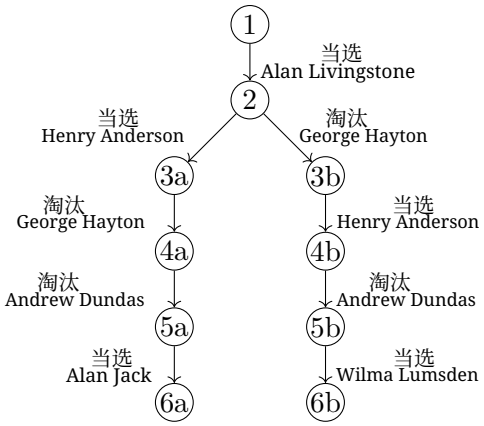
一个令人欣喜的附带效果是，Meek 选举对扰动的抵抗力强得多：如果允许的扰动权重低于相当于 40 张选票的权重，那么唯一真正不确定的是 Anderson 应该在第 2 轮还是第 3 轮当选 —— 但无论在哪一轮当选，另一轮都会导致 George Hayton 被淘汰，因此两个分支都会在第 4 轮之前汇合，回到相同的选举状态。我们通过在图 1 中构建“审计图”，开始将这种稳定性概念形式化。

从顶点 1 中的“选举状态”$(H, W) = (C, \varnothing)$开始，我们向下一轮选举中可能合理出现的每个选举状态 (H, W) 画一条边，前提是记录的计票数（即所谓的“投票记录”，或 CVR）误差至多为 40 张选票，并重复这一过程，直到到达获胜者集合完整的节点。如果所得图 G 最后一层的所有顶点都具有相同的获胜者集合，那么审计选举的一种有效策略就是拒绝全局原假设 $\mathcal{H}_\star =$ “真实的选举顺序会使图 G。”如果我们能拒绝 $\mathcal{H}_\star$，或许无法确切知道真实选举所经过的路径是从节点 1 通往图的最后一层的哪一条，但我们知道每一条这样的路径都会导向相同的获胜者集合，从而确认选举结果。

图 1 中的审计图表明，在此情形下，Meek 规则比 WIGM 更稳定。尽管节点 $④a$ 和 $④b$ 所代表的选举状态具有相同的当选者集合和待选候选人集合，但必须将它们视为不同状态，因为 Anderson 在前者中的转移值低于后者。相比之下，从节点$③a$ 和 $③b$出发的边



（a）使用 Meek规则的审计图。



(b) 使用 WIGM规则的审计图。

图 1：第9选区中可审计差额为 40 票的审计图。

在图 1a 中确实可以认为会通向同一选举状态，因为无论沿哪条路径到达节点 4，都会得到相同的校准后的转移票值。 ◯

因此，这是一个在 WIGM规则下不可审计的选举案例（因为 0.37 票就能改变选举结果，所以必然需要全面重新计票），但在 Meek 规则下却可审计；在这种情况下，最难审计的差额是选举最后一轮中 Lumsden 与 Jack 之间的 46.87 票差额。当然，还有其他偏好档案，在这些档案中，Meek 会因其他原因而不可审计（而 WIGM 在其中一些档案中或许可以审计）；但这个案例说明，不确定的选举时间顺序会给 WIGM审计带来问题，而在 Meek 规则下则不会。

1.2 数学形式化。

单记可转移投票规则是一种算法过程，通过查阅包含一组选民 $[N] = \{0, 1, \ldots, N-1\}$的排序选择票（或简称**排序**）的**偏好档案** P，从一组$C = [M] = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ 候选人中选出由 m 名获胜者组成的委员会。我们将其数学定义如下：

定义 1.1.（排序、档案。）

- 给定 $L \in \mathbb{N}$ 以及一个“有希望候选人” $H \subseteq C$子集，候选人 H 的一个 ***L*-排序** 是一个单射

$$r \colon [L] \hookrightarrow H.$$

  我们允许 $L = 0$，此时 $[L] = \varnothing$，唯一的排序 r： $\varnothing \to H$ 是空排序$r = \varnothing$；这对应于一张在 H中未表示任何偏好的选票。

- 我们用 R_H表示候选人 $H \subseteq C$ 所有排序的集合：

$$R_H := \{r \colon [L] \hookrightarrow H \mid 0 \le L \le |H|\}.$$

- 对于 $H \subseteq C$，**长度映射**len: $R_H \to [|H|+1]$ 将每个 r 映射为整数 L，使得 r是一个 L–排序；形式化地，

$$\mathsf{len}(r) = |r|.$$

- 候选人 H 上的**偏好档案** P 可以视为一个排序的多重集、一种映射$P\colon R_H \to \mathbb{N}$，或一个 $|R_H|-$ 维单纯形中的点。在审计的语境下，我们需要对这些偏好档案进行排序，因此将候选人 $H \subseteq C$ 上的偏好档案形式化定义为一个映射

$$P\colon [N] \to R_H.$$

- 当选民人数 $N > 0$ 明确时，我们将候选人 H上的所有偏好档案组成的集合记作 $\mathscr{P}_H = \{P\colon [N] \to R_H\}$；若 H也明确，则简记为 $\mathscr{P}$。

给定一个排名 $r \in R_C$，我们将 r(0)视为 r最偏好的候选人，接着将 r(1)视为其第二偏好的候选人，依此类推。

在这一形式化框架中，单记可转移投票规则可以看作映射 $\mathscr{P}_C \to \{W \subseteq C\colon\ |W| = m\}$。这些规则都是算法式的：从完整的候选人集合 C开始，每次迭代当选或淘汰一名候选人，直到已有 m 名候选人当选。Meek 规则的一个优点是，只需通过淘汰轮次即可描述它，无须进行选举轮次。在此框架下，给定一个固定的偏好档案 P，我们可以将 Meek 规则视为一个单调递减映射

$$\mathcal{R}_P\colon \{H \subseteq C : |H| > m\} \to \mathcal{P}(C) \text{ such that } \mathcal{R}_P(H) \subseteq H \text{ and } |\mathcal{R}_P(H)| = |H| - 1,$$

其中 $\mathcal{P}(C)$是 C的幂集。于是，偏好档案 P 下、候选人 $C = [M]$上的获胜者集合定义为

$$W = \mathcal{R}_P^{M-m}(C).$$

在用数学方式描述单记可转移投票规则之前，我们需要说明如何将一个排序偏好档案投影到一组剩余的有希望候选人 $H \subseteq C$ 上。其操作方式正如预期：要将一个排序 $r \in R_H$ 投影到 H'，我们会“删除” r 中列有不属于 H'的候选人的位置，并将其余位置“移位”，以填补空缺位置。

定义 1.2。（投影到待选候选人，第一名得票映射。）
对于固定的有希望候选人集合 $H' \subseteq H \subseteq C$，给定一个 L-排序 $r \in R_H$，满足 $|r([L]) \cap H'| = L'$，我们将 r 的**移位映射**定义为唯一的递增单射

$$J_r\colon [L'] \hookrightarrow [L] \text{ such that } r \circ J_r([L']) \subseteq H'.$$

在相同的情形下，我们将**排序投影映射**$\pi_{H'}\colon R_H \to R_{H'}$ 定义为

$$\pi_{H'}(r) = r \circ J_r.$$

此外，**偏好档案** $P \in \mathscr{P}_H$ **在** H' **上的投影**定义为

$$\pi_{H'} \circ P \in \mathscr{P}_{H'}.$$

最后，定义**第一顺位选票映射** $\mathsf{fpv}_H\colon R_C \to H \cup \{-1\}$ 为将会很有用

$$\mathsf{fpv}_H(r) = \begin{cases} \big(\pi_H(r)\big)(0) & \text{if } \pi_H(r) \neq \varnothing \\ -1 & \text{if } \pi_H(r) = \varnothing. \end{cases}$$

我们现在已经可以描述单席可转移投票规则。

WIGM（再次说明，即加权包容格雷戈里法）规则的应用已十分广泛，堪称一种约定俗成的做法；其起源似乎可以追溯到 1880 年，不过最早的记录见于 Humphreys（1911），其中将其归功于“墨尔本的 J. B. Gregory 先生”。WIGM 因变体繁多而声名狼藉，使用该规则的政府有多少，变体就有多少——有些变体采用不同的方法计算转移值，或以不同方式处理同时选举，或采用不同的方法计算配额，等等。我们将形式化描述下文所称的 WIGM 版本。

算法 1.3.（WIGM 规则。）

给定一个由 N 名选民组成的偏好档案 $P \in \mathscr{P}_C$，并满足附加约束 $P(i) \neq \varnothing \; \forall \, 0 \leq i \leq N-1$（即每位选民都在初始候选人 C 中表达偏好），**用于 m 个席位的 WIGM 规则** 将依次执行以下步骤，以确定获胜者集合 $W \subseteq C$:

⓪计算本次选举的所谓**德鲁普配额** q，即

$$q = \left\lfloor \frac{N}{m+1} \right\rfloor + 1.$$

接着，将获胜者集合初始化为 $W = \varnothing$，将待选候选人集合初始化为 $H = C$，并将初始**选民权重映射** w_0定义为：$[N] \to [0,1]$为常值映射 $w_0(i) = 1 \; \forall \, i \in [N]$。然后，从 $j = 0$开始迭代执行以下步骤。

①如果 $|H \cup W| = m$，则算法结束，获胜者集合为 $H \cup W$.

②对每个 $c \in H$，定义 $S_c = \{i \in [N] \colon \mathrm{fpv}_H(P(i)) = c\}$。计算本轮的**计票数**$T_j$：$H \to \mathbb{R}^+$，即

$$T_j(c) = \sum_{i \in S_c} w_j(i).$$

③如果任何待选候选人的计票总数达到或超过配额，则这是一个选举轮次：转到步骤 3a。否则，这是一个淘汰轮次：转到步骤 3b。

3a 令 c 为计票总数超过配额且最高的候选人，即 c 满足

$$T_j(c) \geq T_j(i) \; \forall \, i \in H \;\text{ and }\; T_j(c) \geq q.$$

计算此获胜者的 **转移值** τ_c，即

$$\tau_c = \frac{T_j(c) - q}{T_j(c)}.$$

使用此转移值更新下一轮的选民权重映射：

$$w_{j+1}(i) = \begin{cases} \tau_c \cdot w_j(i) & \text{if } \; i \in S_c; \\ w_j(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

最终 地，将 c 从 H 中移除，并将她加入 W，然后递增 j 并返回步骤1 .

③b 令 ℓ 为[3] 计票总数最低的候选人，即 $\ell \in H$ 满足

$$T_j(\ell) \le T_j(i) \; \forall \, i \in H.$$

最后从 H中移除 ℓ，递增 j，然后使用相同的选民权重映射 $w_{j+1} = w_j$·返回步骤 1

在正式定义 Meek 规则之前，让我们先强调它与 WIGM 之间的主要差异，以便进行对比：

- Meek 使用所谓的“保留因子” k，而不是转移值 τ。如果 Meek 没有其他不同之处，我们可以将其视为转移值的补数：$k = 1 - \tau$。
- 在 Meek 中，即使获胜者已经在某一轮中当选，仍允许其接收转移票。当这种情况发生时，获胜者会从头重新计算其保留因子，将其调低，以调整其计票总数（包括新收到的选票），使其恰好等于当前配额。
- 在 Meek 中，我们还会在每一轮重新计算配额——不同于 WIGM，该数值不会在选举开始时固定。当选票从选举中耗尽时（即选票上的所有偏好要么已当选，要么已淘汰，但该选票仍携带权重），我们将该选票的剩余权重视为不计入用于计算德鲁普配额的总选票权重，因此配额会降低。
- 由于存在多名当选者相互转移选票的情况，或降低配额的数值导致新的选票失效的情况，第一轮保留因子计算往往无法使所有获胜者的计票数都校准到当前配额值——在从获胜者的计票数中扣除新失效的选票后，配额会降低；或者获胜者从其他获胜者处接收选票后，其计票数会增加到配额以上。因此，我们采用递归过程，迭代地重新计算保留因子，直到获胜者的计票数在明确定义的意义下“收敛”到配额。

算法 1.4。（Meek 规则。）
给定一个包含 $P \in \mathscr{P}_C$ N 名选民的偏好档案、**最小盈余** ε以及**容差** ω（通常二者都设为 $\varepsilon, \omega = 10^{-6}$），**Meek 规则适用于 m 个席位**，并通过以下步骤迭代来寻找获胜者集合 $W \subseteq C$：

⓪首先设置 $H = C$。

①令 $P_H = \pi_H \circ P$。

②将第一组**保留因子** k_0初始化为：$H \to (0, 1]$，其中 $k_0(c) = 1, \forall \, c \in H$为常值映射。然后，从 $j = 0$开始，依次执行以下步骤以校准保留因子：

②a 令 V为以 $\{\vec{e}_c\}_{c \in H}$为基的 $|H|$维实向量空间。定义本次迭代的**权重向量映射** w_j：$R_H \to V$为

$$w_j(r) = \sum_{i=0}^{\mathsf{len}(r)-1} k_j(r(i)) \left(\prod_{l=0}^{i-1} \big(1 - k_j(r(l))\big) \right) \vec{e}_{r(i)}.$$

[3]如果有多个符合条件的 ℓ，应以可复现的方式打破平局，例如选择其中索引最小的项（即所谓的“字典序”平局裁决）。

注意：根据保留因子 k_j 和排名 r，总权重 $\sum_{i\in H}\big(w(r)\big)(i)$ 可能小于 1！ r 的部分或全部权重可能会**失效**；例如，如果 $r=\varnothing$ 没有偏好，那么 $w(r)=\vec{0}$。

2b 将本次迭代的**计票数** $T_j\in V$ 定义为

$$T_j=\sum_{i=0}^{N-1} w_j\circ P(i).$$

2c 将本次迭代的配额 $q_j\in\mathbb{R}$ 计算为

$$q_j=\frac{\sum_{i\in H}T_j(i)}{m+1}+\varepsilon.$$

2d 如果 T_j 中的所有计票数都未超过配额容差 ω 以上，则跳出此循环，即

$$\max_{i\in H}(T_j(i)-q_j)<\omega.$$

在这种情况下，转到步骤3；否则，继续执行步骤 2e。

2e 计算下一次迭代的保留因子 $k_{j+1}\colon\ H\to(0,1]$ 如下：

$$k_{j+1}(i)=k_j(i)\cdot\min\left(1,\frac{q_j}{T_j(i)}\right).$$

然后，递增 j 并返回步骤 2a。

3 令 $\ell\in H$ 为 2 中循环最后一次迭代的计票数 T_j 里最低[4] 计票总数的索引；即 ℓ 满足

$$T_j(\ell)\le T_j(i)\ \forall\ i\in H.$$

定义 $H'=\mathcal{R}_P(H)=H\backslash\{\ell\}$。若 $|H'|=m$，则算法完成，且 $W=H'$ 为该选举的获胜者。否则，返回步骤 1，并设置 $H=H'$。

值得注意的是，当 Meek 用于实际选举时，它是一种典型做法：在候选人c 的保留因子 $k(c)$ 首次降至 1 以下时，便将其认定为获胜者，这与我们所描述的算法版本不同。在这样的选举轮次中，一旦检测到新的候选人高于配额，通常就会立即跳出步骤 2 中的循环。这会使计票数 $T(i)$ 看起来仿佛并未在配额处得到充分校准（因为我们在保留因子收敛之前就结束了该迭代）；但从数学角度而言，这始终会产生与我们的算法版本相同的效果，因为在选举的下一轮次中，我们会从 1 开始重新校准保留因子。

Meek 规则最初由 Meek（1969年）提出，其算法性质——尤其是步骤 2 的收敛性——后来由 Hill 等人（1987年）进一步研究。

[4]再次以一致的方式打破平局，例如按字典序。

我们需要形式化的最后一个概念是**选票比较风险限制审计（RLA）**。

在现实情况下，选举结果通常是通过将选举规则应用于纸质选票的数字**选票记录（CVR）**来统计的。我们认为，这份档案是真实偏好档案的含噪近似；真实偏好档案记录在选民于选举中投下的纸质选票上。噪声可能由扫描或转录错误、干扰或意图传达不清引入。通常，对这份真实档案进行全面重新计票的成本很高，因此，更可取的做法是针对它构建一系列统计断言，并通过查看少量纸质选票样本来验证这些断言，从而确认选举结果。

定义 1.5。（风险限制审计。）
我们将一次**选举**定义为候选人集合 C 上的两个档案组成的配对，这两个档案的选民人数相同，分别为 BAL,CVR $\in \mathscr{P}$。这次选举的**噪声水平**定义为

$$\eta = \frac{|\{0 \le i < N : \mathrm{BAL}(i) \neq \mathrm{CVR}(i)\}|}{N}.$$

给定一个 m 席位的投票规则 $\mathcal{R}\colon \mathscr{P} \to \{W \subseteq C\colon |W| = m\}$，该选举的**记录获胜者集合**定义为 $W_\star = \mathcal{R}$(CVR)。针对这次选举的**风险限制审计（RLA）**是一种统计框架，通过从 BAL 中尽可能少地抽取条目来验证 $\mathcal{R}$(BAL) $= W_\star$。这通常采用关于 BAL 的**全局原假设**$\mathcal{H}_\star$ 的形式；若该假设被拒绝，即可保证 $\mathcal{R}$(BAL) $= W_\star$。

给定固定样本量 $n \le N$，针对该全局零假设的一个**选票比较编译器**是一个拒绝规则 $R_\star$，用于 $\mathcal{H}_\star$，其输入为一组 n 排名对（可将其视为选票-CVR 配对的样本，我们通过相互‘比较’这些配对来寻找差异）：

$$R_\star \subseteq (R_C \times R_C)^n.$$

为了决定是否应拒绝零假设 $\mathcal{H}_\star$，我们不放回抽取 n 组选票-CVR 配对，并检查该样本是否落入我们的拒绝域 $R_\star$。具有全局零假设 $\mathcal{H}_\star$ 和拒绝规则 $R_\star$ 的风险限制审计的**风险水平**，是发生第一类错误的概率 α 的一个上界：

$$\alpha \ge \mathbb{P}(R_\star \mid \mathcal{H}_\star).$$

风险限制审计这一概念至少自2009年以来便已存在——标准参考文献可见 Lindeman 和 Stark（2012）。对算法选举规则进行审计则是较新的发展：有关当前最先进的方法，请参见 Blom、Ek 等人（2025）。我们借用了相关文献中的“编译器”一词，尽管我们对其定义略有不同；传统上，编译器并非被定义为拒绝规则，而是针对全局零假设 $\mathcal{H}_\star$（或者更确切地说，针对构成该全局零假设的每个局部零假设）的序贯 p-值。这些 p-值通常由下鞅给出；在我们的框架中，拒绝规则将源自通过德尔塔方法构造的 Wald 置信区间。

2 实验设计。

2.1 基于图的审计。

在陈述我们的主要结果之前，我们需要借用一个算法图论领域的定义——例如参见 Fiat 等（1991）：

定义 2.1.（分层图。）

一个 **有向分层图** $G=(V,\vec{E})$ 是一个有向、以根节点为根且连通的图，其顶点V被划分为若干层 $L_0 \sqcup L_1 \sqcup \ldots \sqcup L_M$，其中 $L_0=\{C\}$ 仅包含 G的根节点，且 E 中的所有边只连接相邻两层的顶点：

$$\vec{E} \subseteq \bigcup_{i=0}^{M-1} L_i \times L_{i+1}.$$

以下结果在假设检验领域并非新事物——它是**交并**检验的一个特例，例如可见于 Berger（1982年）的定理 1。尽管如此，这一结果仍值得强调，因为它看似颇为神奇：当全局原假设 $\mathcal{H}_\star$ 蕴含局部零假设 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$的析取时，一个充分的 α水平检验是在水平 α上拒绝每一个 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$ 。对我们的基于图的审计方法而言，这是幸运的，因为其中往往有数百个局部零假设，而无需在每个局部零假设上分配风险水平。

命题 2.2。 **（针对$\mathcal{H}_\star$的α水平检验）**

设 Ω 为以 C为根节点的有向分层图，设 $G \subseteq \Omega$ 为包含 C的连通子图，并定义 ∂G : $= G \times G^{\mathsf{c}} \cap \vec{E}_\Omega$。考虑一个过程，它按照由取自参数空间 $\mathscr{P}$的参数 P 所确定的规则 $\mathcal{R}_P$: $\Omega \to \Omega$，沿边从 C 移动到 Ω 的最后一层。一旦 P 固定，该过程便确定性地从每个顶点 $u \in \Omega$ 移动到 $\mathcal{R}_P(u) \in N(u)$，从而画出一条从 C 到 Ω 最后一层的路径。

令 $\mathcal{H}_\star$ 为原假设“过程离开子图 G”。对于每个 $\vec{e}=(u,v) \in \partial G$，令 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$ 为原假设“$\mathcal{R}_P(u)=v$”。给定一组针对 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$ 的 α 级拒绝规则 $\{R_{\vec{e}} \subseteq \mathscr{P}\}_{\vec{e} \in \partial G}$，一个针对 $\mathcal{H}_\star$ 的有效 α 级规则为

$$R_\star := \bigcap_{\vec{e} \in \partial G} R_{\vec{e}}.$$

换言之，当且仅当我们以 α 的显著性水平拒绝每个 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$ 时，才以 α 的显著性水平拒绝 $\mathcal{H}_\star$。

证明。令 $\mathscr{P}_\star \subseteq \mathscr{P}$ 为参数空间中 $H_\star$ 为真的子集。对于每个 $\vec{e} \in \partial G$，令 $\mathscr{P}_{\vec{e}} \subseteq \mathscr{P}$ 为参数空间中 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$ 为真的子集。

假设 $P_0 \in \mathscr{P}_\star$，即由 P_0 定义的过程离开 G。那么它必定会在某个时刻到达一个顶点 $u_0 \in G$，满足 $u_0 := \mathcal{R}_{P_0}(v_0) \notin G$，因此特别是 $H_{(v_0,u_0)}$ 为真，且 $P_0 \in \mathscr{P}_{(u_0,v_0)}$。因此，对于这样的 P_0，我们有

$$\mathbb{P}_{P_0}(R_\star) \le \sup_{P \in \mathscr{P}_{(u_0,v_0)}} \mathbb{P}_P(R_{(u_0,v_0)}) \le \alpha.$$

由于这对任意 $P_0 \in \mathscr{P}_\star$ 都成立，因此我们得到

$$\sup_{P \in \mathscr{P}_\star} \mathbb{P}_P(R_\star) \le \alpha.$$ □

例 2.3. 设 $\mathscr{P}=(\{0,1\}^6)^{1000}$ 为由六维超立方体中所有大小为 1000 的样本构成的空间，并考虑下方给出的图 Ω。

设子图 G 由节点 1a、2a、3a 和 4a 构成。则 ∂G 中的边以虚线绘制。为遍历图 Ω，令 P_i 表示 P中各元素的 i^{th} 分量中 1 的个数。我们定义

$$\mathcal{R}_P(\text{1a}) = \begin{cases} \text{2b} & \text{if } P_1 \geq 200; \\ \text{2c} & \text{if } P_1 < 200 \text{ and } P_2 \geq 200; \\ \text{2a} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其他节点（i）a 的规则类似——如果满足 $P_i \geq 200$ 和 $P_{i-1} < 200$，我们就沿着标记为 i 的边前进；否则转到节点（$i+1$）a。

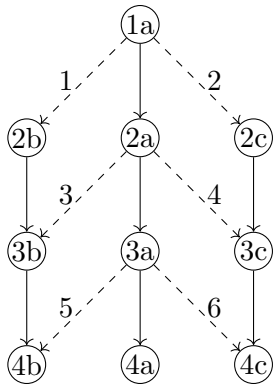


图 2：例 2.3 中的全图 Ω。

这里，我们的全局原假设是 $\mathcal{H}_\star$ =“过程离开 G”，这等价于“过程不会在顶点 4a 结束”。该全局原假设蕴含局部零假设的析取 H_i=“过程沿着标记为 i 的边前进”。

为了检验关于 $1 \leq i \leq 6$ 的假设 $\mathcal{H}_i$，我们可以查看 P 中前 100 个样本，统计每个分量中 1 的数量，然后用这些数据构造 P_i 的单侧置信区间。要拒绝 $\mathcal{H}_i$，只需要求 $\mathbb{P}(P_i \geq 200) < \alpha$。

因此，令 π_i 表示 P 中前 100 个样本的 i^{th} 分量中 1 的数量。取 $\alpha = 0.05$，从总体大小为 $N = 1000$、总成功次数为 $K = P_i$ 的总体中抽取 $n = 100$ 次，得到 $k = \pi_i$ 次成功的超几何分布告诉我们，充分规则是当 $\pi_i < 14$ 时拒绝 H_i：

$$R_i = \{P \in \mathscr{P} \colon \pi_i(P) < 14\}, \text{ because } \mathbb{P}(\pi_i < 14 \colon P_i = 200) \approx 0.039 < \alpha.$$

因此，我们的全局规则是拒绝 $H_\star$（并得出过程在顶点 4a 处终止），当 P 前 100 个元素中 i^{th} 分量 1 的总数对每个 $1 \leq i \leq 6$ 都低于 14 时。表 3 的第一行显示，该规则非常保守：当 P 满足对所有 i 而言 $P_i = 200$ 时——恰好处于 $\mathcal{H}_\star$ 为真或为假的边界上——在 $50,000$ 次模拟试验中，该规则从不拒绝 $\mathcal{H}_\star$。

或许，阐明命题 2.2 的更好方式之一，是展示它没有做什么。下面给出一个例子，其中风险水平 α 确实必须分配给多个局部假设。

例 2.4。与例 2.3 类似，令 $\mathscr{P} = (\{0,1\}^9)^{1000}$, ，并考虑下面的全图 Ω。

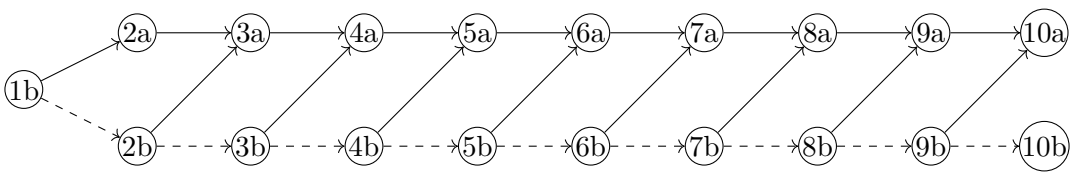


图 3：例 2.4 中的全图 Ω

这里没有固定的子图 G 或边界 ∂G ——事实上，我们将看到这正是问题所在——

但我们希望拒绝的原假设是 $H_\star =$ “过程在 10b 结束。”如果我们将 P_i 定义为从 $P \in \mathscr{P}$中抽取的结果里 i^{th} 分量 1 的数量，那么我们用来遍历该图的规则是

$$\mathcal{R}_P((i)\text{b}) = \begin{cases} (i+1)\text{b} & \text{if } P_i \geq 200; \\ (i+1)\text{a} & \text{if } P_i < 200. \end{cases}$$

从节点 1b 到 10b 只有一条路径，它必定经过节点 (i)b 和 $(i+1)$b 之间的所有虚线边。若我们为 $1 \leq i \leq 9$ 定义 $H_i =$“$P_i \geq 200$”，便可将 $H_\star$ 表示为 H_i 的合取：

$$H_\star = \bigwedge_{1 \leq i \leq 9} H_i.$$

如果我们天真地采用命题 2.2 的逆向做法，可能会想要当且仅当能够拒绝某一个 H_i 时，才拒绝 $H_\star$：

$$R_\star = \bigcup_{1 \leq i \leq 9} R_i, \quad \text{where } \mathbb{P}(R_i \mid H_i) \leq \alpha.$$

然而，在这种情况下，我们会发现 $R_\star$ 的大小可能高达 9α：因为有 9 次机会使 R_i 错误地拒绝 H_i，而一次错误拒绝就足以使 $R_\star$ 错误地拒绝 $H_\star$，所以所有 R_i 的风险水平在最坏情况下可能累积起来。

我们在表 3 中通过计算验证了这一点。采用上述状态空间 $\mathscr{P}$ 和转移规则 $\mathcal{R}$，我们使用与例 2.3 相同的实验方法：从 P 中不放回抽样，随机抽取 100 个点，并令 π_i 表示这些点中 i^{th} 个分量里的 1 的数量。于是，针对 H_i 的有效 $\alpha = 0.05$ 拒绝规则为

$$R_i = \{P \in \mathscr{P} \colon \pi_i < 14\}.$$

使用超几何分布的累积分布函数，我们再次发现该规则的大小实际上为$\alpha \approx 0.039$，也就是说 $\mathbb{P}(P \in R_i \colon P_i = 200) \approx 0.039$。在最坏情况下，如果我们从 $\mathscr{P}_0 = \{P \in \mathscr{P}$ 中合成地选取 P 作为一个元素：$P_i = 200\ \forall i\}$，那么真实的过程应当以顶点 10b 结束（即 $H_\star$ 应为真），但通往 10b 的路径上的每条虚线边都以概率 0.039被风险限制审计拒绝。因此

$$\mathbb{P}(R_\star \mid P \in \mathscr{P}_0) \approx 1 - (1 - 0.039)^9 \approx 0.3 \leq 9\alpha = 0.351.$$

表 3 中“朴素设计”条目下的第二行通过计算验证了这一点。我们可以通过几种方式修改此实验设计，以在水平 α 下检验 $H_\star$：

1. 我们可以为每个 H_i 设定较低的风险水平 α_i，使得 $\sum_{1 \leq i \leq 9} \alpha_i = \alpha$。

   在上述设定中，只要 $\pi_i \leq 10$，我们或许可以提高拒绝 H_i 的门槛；这种情况发生的概率为 0.004，当 $P_i = 200$ 时。这样做的代价是检验会更加保守：即使 $H_\star$ 为假，我们也会更频繁地无法拒绝它。当 P 取自 $\mathscr{P}_0$ 时，该检验的结果也列于表 3 的“风险预算设计”项下。

2. 我们也可以选择审计从节点 1b 到 10b、位于 α 层级的路径上的 9 条边中的一条。这与解 1. 的思路相同，即将除一个 α_i 之外的所有值都设为 0；如果我们不审计某条边，也就不会引入犯第一类错误的风险

。
例如，如果我们选择审计的唯一一条边是连接 1b 和 2b 的边，那么我们就回到了可以应用命题 2.2 的情形，其中子图 G 由节点 1b、2a、 . . .、10a 和 $\partial G = \{(1b, 2b)\}$组成。我们在表 3 的最后一行展示了这种方法的结果。

3. 或者，我们可以反过来，将 $H_\star$ 定义为“过程在顶点 10a 结束”这一陈述。在这种情形下，我们可以应用命题 2.2，其中子图 G由节点 1b、 . . .、10b 组成；我们要拒绝的局部零假设集合则包含针对图 3 中所有未以虚线标示的边各一条断言。对于这个例子，从统计学上看，这与方法 2 等价。

示例	所用设计	试验	第一类错误数量	经验风险水平
2.3	命题 2.2	50000	0	0.000000
2.4	朴素设计	50000	15035	0.300700
2.4	风险预算设计	50000	1757	0.035140
2.4	命题 2.2	50000	1959	0.039180

表 3：例 2.3 和 2.4 的风险水平计算验证

例 2.3 和 2.4 提示了以下经验法则，可用于判断拒绝规则 $R_\star$for $H_\star$ 是否设计正确。如果 $H_\star$ 为真，但 $R_\star$ 拒绝了它，那么与 P 对应的真实过程必定遵循了一条离开 G 的确定性路径。如果我们能指出这条路径上至少有一条边 $\vec{e}$，其局部假设 $H_{\vec{e}}$ 确实在作为 $R_\star$ 一部分的情况下，于水平 α 被拒绝，那么该审计的构造就是正确的，我们只是犯了一个合理的第一类错误。反之，如果路径上有多条这样的边，且无法确定其中哪个局部假设是在作为 $R_\star$ 一部分的情况下，于水平 α 被拒绝，那么我们就未能恰当地分配风险水平 α。

2.2 稀疏样本的方差界。

我们最终为审计抽样的实际参数，在将其投影到局部零假设上时，看起来与前面的例子很相似；它们是（近似）抛硬币的均值的函数，且成功率较低 p。当样本量 n 和成功率 p 都很小时，我们会看到稀疏样本，此时样本方差可能无法准确近似真实方差。针对这种情况，常见的经验法则是要求 $np(1-p) \gg 1$；在我们的实现中，我们会采取更稳妥的做法，只有当样本中非零项超过 20 个时才使用样本方差（这种情况很少发生）。

遇到稀疏样本时，我们将改用超几何界来估计方差。在超几何情形下，总体中有 N 个项目，其中 K 个记录了一个“成功事件”——在我们的情形中，即选票比较差异。我们不放回抽取其中的 n 个项目，并令 X 表示样本中的成功次数。超几何分布告诉我们

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \tag{1}$$

当 K 未知，但我们已记录一个大小为 n 、包含 k 次成功的样本时，可以利用这个分布函数为 K 构造单侧置信区间；我们将采用一种称为 “ 枢轴化累积分布函数 ” 的方法，该方法在 Casella 和 Berger（2002）的定理 9.2.2 中作了一般性阐述。Bartroff 等人（2022年）也探讨了这种方法在超几何变量上的具体应用；我们采用的确切方法概述于该文第 6 节开头。下面我们重述定理 9.2.2 的一个版本，然后将其应用于前文的情境：

定理 2.5。 **（Casella 和 Berger。）**

对于每个 $\theta_0 \in \Theta$，令 $A(\theta_0)$ 为检验 $\mathcal{H}_0\colon\ \theta = \theta_0$ 的显著性水平为 α 的接受域。对于每个 $x \in \mathcal{X}$，在参数空间中定义集合 $C(x)$ 如下：

$$C(x) = \{\theta_0 \colon x \in A(\theta_0)\}.$$

那么随机集合 $C(x)$ 是一个置信集。

在我们的例子中，参数空间 $\Theta = [N+1]$ 对应于 $\theta = K$ 的可能取值，样本空间 $\mathcal{X} = [n+1]$ 对应于大小为 n 的样本中记录的成功次数 X，我们的原假设为 $\mathcal{H}_0\colon\ K = K_0$，备择假设为 $\mathcal{H}_1\colon\ K < K_0$，因此较大的 X 是接受 $\mathcal{H}_0$ 的证据，所以我们按如下方式构造接受域：

$$A(K_0) = \{k_0 \in [n+1] \colon \mathbb{P}_{K_0}(X \le k_0) \ge \alpha\}. \tag{2}$$

这些概率就是超几何分布的累积分布函数：

$$\mathbb{P}_{K_0}(X \le k_0) = \sum_{i=0}^{k_0} \frac{\binom{K_0}{i}\binom{N-K_0}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

这些概率关于 K 随机递减——当 K_0 增大而 k_0 固定时，出现 $X \le k_0$ 的可能性会降低——因此我们的接受域是嵌套的：

$$A(N) \subseteq A(N-1) \subseteq \ldots \subseteq A(1) \subseteq A(0) = [n+1].$$

因此，我们的置信集 $C(x)$ 总是一个从 0 开始的区间：

$$C(x) = \{K_0 \colon x \in A(K_0)\} = \{0, \ldots, K_u\}.$$

因此， K_u 是 K 的随机上界。实际上，它是满足 $x \in A(K_0)$ 的最大 K_0；参见公式 (2)，按定义，这意味着

$$K_u(x) = \max\{K \in [0, N] \colon \mathbb{P}_K(X \le x) \ge \alpha\}. \tag{3}$$

现在我们可以 利用这个界，得到 X 方差的一个直接随机界：

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \le \mathbb{E}(X^2) = \frac{K}{N}, \ \text{ hence } \ \mathbb{P}(\mathrm{Var}(X) \le \frac{K_u}{N}) \ge 1 - \alpha.$$

当稀疏变量 X 不是抛硬币时，只要 X 被某个 B从上界约束，我们仍然可以使用该方差上界；在这种情况下，该界被替换为$(B^2 K_u)/N$。

当然，由于这只是一个随机界，这意味着我们必须将全局风险水平 α 的一部分分配给为稀疏样本寻找方差上界的过程。对应于每条边 $\vec{e} \in \partial G$的局部零假设，此前仅依赖于某个差额 $\mathcal{M}$，并且可能表述为"$\mathcal{H}_{\vec{e}}$： $L \leq \mathcal{M} \leq U$"，现在已变为复合的——类似于

$$\mathcal{H}_{\vec{e}}\text{: “}\forall\, i\text{: } \mathrm{Var}(X_i) \leq K_i/N \;\; \textbf{and} \text{ in such a case } \;\; L \leq \mathcal{M} \leq U.\text{”}$$

其中， X_i 是用于构建 $\mathcal{M}$置信区间的（通常数量很多的）超几何变量。对于一场3席位的Meek竞选，这类局部零假设中最糟糕的一类将使用17个这样的"分类器"变量 X_i！因此，我们必须谨慎地分配风险。一般来说，我们会将总体风险水平划分为 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_K$，并使用分配的风险 α_K 来确定所采用的方差界。我们可以通过几种方式将风险 α_K 分配给多个 X_i:

1. 将 α_K 拆分为与 X_i数量相等的部分，并使用相应的风险水平对每个 X_i 进行界定；2. 构造一个全局变量$Y = \sum_i |X_i|$，将其视为超几何变量，其中"$Y > 0$"算作一次成功，然后使用分配的全部风险 α_K，为 Y中的成功次数求得一个超几何界 K 。接着，对每个 X_i使用该界所诱导的相同方差界。也就是说，在最坏情况下，对于每个单独的X_i ，总体中的成功次数都不超过所有编译器中任意一个的总体成功次数上界，因而方差界也随之确定。3. 我们还可以采用与第2种方法类似的做法，但令 Y 对应于"存在选票比较差异（不一定会被分类器 X_i检测到）"这一事件。这样得到的方差界会更差，但其优势在于，可以在我们必须拒绝的每个局部零假设之间重复使用。

在实践中，我们最终在实现中采用选项 2。这避免了进一步将 α_K拆分成小块，但代价是所得界限的精确性有所降低。在某些情况下，抽取的X_i 可能为 0，而 Y 可能大于 20。很有可能从长远来看，选项 1 会更具竞争力，但如何在所有 X_i 之间分配风险 α_K 将是一个相当复杂的问题。要达到最优，解必须考察 X_i 的预期尺度及其对总体幅度的影响。Ek等人（2023）是一个很好的参考，介绍了如何根据预期结果来分配风险。

2.3 审计图。

鉴于我们在第2.1节概述的审计算法选举规则的方法，我们最好将图 Ω 以及用于遍历该图的 Meek 规则 $\mathcal{R}_P$ 形式化。固定候选人集合$C = [M]$ 和待填补的席位数 $m \in \mathbb{N}$ 。

定义 2.6. 一个**深度-*t* 选举状态** 是由子集组成的有序对 $(H, W) \in \mathcal{P}(C)^2$，满足 $H \cap W = \varnothing$、$|W| \leq m$ 和 $|C - H| = t$。我们称 H 为该状态下的**有希望候选人**集合，并称 W 为**当选者**集合。

选举状态的**度**为$\deg(H, W) = |W|$。

在**选举状态** $S = (H, W)$ **上的投影映射**是 π_S： $R_C \to R_{H \cup W}$定义为

$\pi_S = \pi_{H \cup W}$。

通用审计图 Ω 是一个有向分层图，其顶点集为所有深度为 t 的选举状态的集合，其中 $0 \le t \le M - m$。Ω 的根节点是选举状态（$C, \varnothing$）。Ω 的第 t 层包含所有可能的深度为 t 的选举状态。当满足以下条件时，我们从顶点 $S =$（H, W）向 $S' =$（H', W'）画一条边：

- $H' \subseteq H$，
- $W \subseteq W' \subseteq W \cup H$，且
- $|$（$W' - W$） $\cup$（$H - H'$）$| = 1$。当该集合中的唯一元素 c 属于 $W' - W$ 时，我们称边（S, S'）为**胜者边**；注意在这种情况下，根据选举状态的定义，$c \notin H'$。否则，当 $c \notin W'$ 时，因此必有 $c \in H - H'$，我们称边（S, S'）为**失败者边**。

  当已知边 $\vec{e} = (S, S')$ 是胜者边还是失败者边时，我们有时会使用记号 $\vec{e} = (S, c)$，以强调在这条边中当选/被淘汰的候选人 c。

最后，我们将 **审计图** 定义为任何包含 Ω 的根节点以及至少一个深度为 $M - m$ 的选举状态 S 的连通子图 $G \subseteq \Omega$。如果来自 G 该层的任意两个选举状态具有相同的获胜者集合，我们就称该图为**相干的**。

鉴于算法 1.4 下方的讨论，我们可能会质疑在构造审计图时是否有必要纳入胜者边。这样做有一个方便的理由，还有一个更为必要的理由。首先，纳入胜者边能使这种构造更加通用——要将这一框架应用于 WIGM 规则时，我们需要进行的修改会更少，因为在 WIGM 规则中，选举轮次确实不可或缺。

追踪获胜者并将其纳入选举状态的第二个、更重要的理由是，我们需要将 Meek 规则推广到 Ω 中的每个顶点，使得保留因子 $k(i)$ 在每一轮都可审计。为了计算候选人之间差距的方差，我们需要迭代过程收敛到的极限保留因子的精确数学公式，该过程见算法 1.4 第 2 步。这是可行的，但前提是当前获胜者集合已知。因此，我们将定义一种广义 Meek 规则，将指定的获胜者集合 $W \subseteq C$ 作为输入的一部分，并使用精确公式仅计算这些候选人的保留因子。

这种方法有一个不太理想的结果：审计图偶尔会包含选举状态 $S = (H, W)$，其中 W 的部分获胜者实际上并未达到状态 S 中按照选票记录计算的配额。例如，我们案例研究中图 1a 的审计图顶点 3a 表示一种选举状态：尽管选票记录显示 Henry Anderson 在该轮的最终计票总数为 901.54，而配额为 904.07，他仍属于获胜者集合 W。

在这种情况下，1.4 节所定义的 Meek 规则规定，只需将 Anderson 的保留因子截断为 1。但这仍不是统计学上可行的选择，因为我们使用精确保留因子公式得到的方差，只适用于这些多项式的实际解。因此，我们选择使用“扩展 Meek 规则”：无论情况如何——即使求得的保留因子最终大于 1（这会发生在所谓的“非正规”选举状态中）——都使用精确公式计算保留因子。

这看起来确实相当非正规！当一名获胜者的保留因子大于 1 时，他们实际上

会从其 fpv（“第一顺位选票”）选票上排在其后的候选人计票数中“窃取”选票。如果这些 fpv 选票在对获胜者进行排名之后耗尽，它们会以负权重耗尽，从而人为抬高选举中的选票数量，并进而抬高配额。在某些特别病态、存在多个“虚假胜者”的选举状态中，保留因子可能会暴增至 $+\infty$！不过在实践中，我们的审计图通常会远离 Ω 中可能发生这种情况的区域。我们会遇到的保留因子只是偶尔超过 1.05，很少超过 1.1。

我们在此情况下的数学论证如下：根据选票记录，这种状态属于非正规状态；而根据真实选票概况 BAL，它可能属于，也可能不属于非正规状态。如果根据 BAL，它也属于非正规状态，那么我们可以确定，真实的 Meek 过程绝不会在审计图中访问该状态。因此，无论我们的审计过程允许从该非正规状态离开的哪些边，都只会让审计更加保守；考虑这个非正规状态只会增加我们的工作，而不会减少工作。如果根据 BAL，该状态并非非正规状态，那么精确保留因子方程的解应在 BAL 邻域内非奇异，而抽样参数会使我们进入该邻域，因此我们对票差方差的估计应该成立。

我们也应该简要说明如何构造最终用于审计的审计图 G；即使这个过程对于我们应用的实际统计框架并不重要（我们也完全可以把 G 视为由第三方提供），它作为一种通用构造方法仍可能值得关注。

我们会设定一个“最小可审计票差”LAM $\in \mathbb{N}$，并将其视为我们认为有把握凭计划采用的样本量进行审计的最小差额。然后，从 Ω 的根节点开始，我们计算每种选举状态下的计票数，并纳入所有可能的结果，条件是允许将少于 LAM 选票的差额翻转。这就好比给对手 LAM$/2$ 选票的翻转额度，让他们随意选择翻转方向，并要求他们尽可能为所欲为；他们可能达成的任何结果都会纳入我们的图 G。至关重要的是，每当进入新的选举状态，我们都会重置对手的额度。他们可能会翻转一组 LAM$/2$ 选票，从根节点到达 G 第一层中的某个状态；此时，我们会重置选票记录，他们便可以重新选择一组（可能不同的）LAM$/2$ 选票进行翻转。

2.4 即时保留因子。

为了写出即时保留因子的公式，我们需要追踪每个投影选票概况 $P_H = \pi_H \circ P$ 中一些感兴趣的量。

定义 2.7.（偏好档案投影。）
给定候选人 $H \subseteq C$ 上的偏好档案 P、一个指定的 L-排名 $s \in R_C$，以及一名指定的候选人 $c \in H$：

- 我们将**首位-L** 限制映射 first_L：$R_H \to R_H$ 定义为将每个排名截断至其前 L 个位置的映射：

$$\mathsf{first}_L(r) = \begin{cases} r\big|_{[L]} & \text{if } \mathsf{len}(r) > L; \\ r & \text{if } \mathsf{len}(r) \le L. \end{cases}$$

- 我们将**类似初始-s** 计票总数 $T_s(P)$ 定义为 P "内部"的排名数量，其首位-L 限制为 s：

$$T_s(P) = |(\mathsf{first}_L \circ P)^{-1}[s]|.$$

注意：如果 s 对不在 H中的候选人进行排名，则此项自动为0。

- 我们定 义**恰好相同-s** 计票总数 $t_s(P)$为排名 r 在 P 中为 s的次数 ：

$$t_s(P) = |P^{-1}[s]|.$$

- 我们通过赋予其记号 $g(P)$（或在 P 明确时仅记为 g）来区分 $t_\varnothing(P)$，并将其称为 P的**幽灵数**：这是 P 中表明在 H中没有偏好的排序数量。

- 我们使用以下简写来表示这些计票数下标中的排序 r： 当$\mathsf{len}(r) = L$，且 r 中的位置为 $r(0) = r_0, \ldots, r(L-1) = r_{L-1}$时，我们使用记号

$$T_{r_0,\ldots,r_{L-1}} \text{ and } t_{r_0,\ldots,r_{L-1}} \text{ to represent } T_r \text{ and } t_r.$$

例如，$T_{5,3,12}$ 表示选票 $r = P(i)$具有 $r(0) = 5$、 $r(1) = 3$以及$r(2) = 12$的次数。如果涉及的数字都很小，我们有时会省略逗号。

- Fi最后，区分**以……结尾的c 排序** $R_{H;c} \subseteq R_H$ 将会很有帮助，具体如下

$$R_{H,c} = \{r \in R_H : r(\mathsf{len}(r) - 1) = c\}.$$

请注意， $R_{H;c}$ 包含单元素排序 $r = \{(0, c)\}$，以及其他内容；仅列出 c 的选票仍然是以 c结尾的选票。

给定候选人 C上的偏好档案 P: $[N] \to R_C$以及选举状态 (H, W)，我们设定 $P_S = \pi_S(P)$，并定义选举状态中的**有效选票** N' 数量如下：

$$N' = N - \sum_{r \in R_W} \left(\prod_{i=0}^{\mathsf{len}(r)-1} \Big(1 - k(r(i))\Big) \right) t_r(P_S), \tag{4}$$

其中**保留因子** k: $W \to (0, +\infty]$是方程组的最小正解 ：

$$\forall\, w \in W : \frac{N'}{m+1} + \varepsilon = k(w) \sum_{r \in R_{W;w}} \left(\prod_{i=0}^{\mathsf{len}(r)-2} \Big(1 - k\big(r(i)\big)\Big) \right) T_r(P_S). \tag{5}$$

这个方程组一般可能不存在这样的解；设计扩展 Meek 规则时，我们必须考虑这一点。这也不是第一次有人直接求出保留因子的收敛值——Meek 本人就在其原始论文（Meek 1969）的第 7 节中，对度为 ≤ 4 的选举状态这样做过。目前，我们确认，只要解存在，它就与算法 1.4 得到的解一致：

命题 2.8。

对于固定的偏好档案 $P \in \mathscr{P}_H$，设 $k\colon H \to (0,1]$ 是通过以容差 ω 应用算法 1.4 的第 2 步所得到的收敛保留因子，并定义 $W := \{c \in H : k(c) < 1\}$。如果方程组 (4) 和 (5) 应用于方程状态 $S = (H \backslash W, W)$ 时存在一个解 k'，那么该解是唯一的，并且除以因子 ω 外与 k 一致，也就是说，对于所有 $c \in W$，

$$|k(c) - k'(c)| < \frac{\omega}{q} < \omega.$$

证明。

只需注意到，这样的解 k 按设计是不动点，即 Meek 算法的不动点；在这种情况下，Hill 等人（1987）的定理 1 已经证明了它的唯一性，而同一篇论文中的定理 2 证明了它与该算法的迭代解"处于容差范围内"。

□

定义了即时保留因子后，我们在第 2.3 节描述的"扩展 Meek 规则"实际上就是：使用即时公式（在可能的情况下），而不是算法 1.4 第 2 步中描述的迭代过程，来校准保留因子。鉴于算法的其余部分——包括如何使用保留因子来使候选人当选或淘汰——保持不变，对于任何固定的偏好档案，该扩展 Meek 规则都保证产生与原规则相同的获胜者集合。

然而，当我们将这一即时保留因子公式应用于 Meek 规则通常不会访问的选举状态时，可能会看到大于 1 的保留因子——我们将此类状态称为"非正规"状态，具体如下：

定义 2.9。 如果式 (5) 中的方程组存在一个解k：$W \to [0,1]$，且所有保留因子都介于 0 和 1 之间，我们就称选举状态 $S = (H, W)$ 是**正则**的。如果不存在有限的正解 k：$W \to [0, +\infty)$，则称其为**退化**的。

我们有理由担心：当我们为审计图中真实 Meek 规则未经过的选举状态求解保留因子时，该状态的即时保留因子解可能会随着用于求解它们的偏好档案投影 T_r 和 t_r 而发生不连续变化。在这种情况下，我们为该选举状态中候选人之间的得票差构建的置信区间将无效，因为它们取决于保留因子相对于这些投影的变化。不过，我们至少可以稍感宽慰：只要选举状态是正则的，这种情况就不会发生。

定理 2.10。

正则选举状态的（唯一）解 k：$W \to [0,1]$ 对于用于构造它的偏好档案投影 T_r 和 t_r 是连续的。

证明。

固定一个度为j的选举状态 $S = (H, W)$，记为 $C = H \cup W$，并考虑候选人 C上的档案 $P \in \mathscr{P}$。令 $d = |R_C|$ 并定义 $\mathcal{T} = \mathbb{R}^d$，从而可将(5)中的方程视为$\vec{}$所描述的多项式方程组 F：

$$\vec{F}\left(\vec{k}, \vec{t}\right) = \vec{0} \text{ for } \vec{t} \in \mathcal{T} \text{ and } \vec{k} \in \mathbb{R}^j. \tag{6}$$

最后，令 $\mathcal{T}_{\text{reg}} \subseteq \mathcal{T}$ 对应于使 S 正则的偏好档案投影集合；根据定义，对每一个 $\vec{t} \in \mathcal{T}_{\text{reg}}$，都存在唯一解 $\vec{k} \in [0,1]^j$ 使得(6)成立。这意味着我们可以定义一个函数 $\vec{k}\colon\ \mathcal{T}_{\text{reg}} \to [0,1]^j$，它将每个正则的 $\vec{t}$ 映射到满足(6)的唯一 $\vec{k}$。我们将证明该函数是连续的。

为此，令 $\vec{t}_n \to \vec{t}$ 属于 $\mathcal{T}_{\text{reg}}$，并定义序列 $\vec{k}_n := \vec{k}\left(\vec{t}_n\right)$。该序列位于紧集 $[0,1]^j$ 中，因此它有一个收敛子序列 $\vec{k}_{n_i} \to \vec{k}_\infty$。由 F 的连续性可知

$$0 = \vec{F}\left(\vec{k}_{n_i}, \vec{t}_{n_i}\right) \to \vec{F}\left(\vec{k}_\infty, \vec{t}\right).$$

根据 $\vec{k}$ 的定义，这意味着 $\vec{k}_\infty = \vec{k}(t)$。用同样的推理，$k_n$ 的任何其他收敛子序列都有相同的极限。因此，函数 k 是连续的。 □

另一方面，有一些证据表明这些担忧并非毫无根据。我们有时需要在审计图中纳入非正规状态（例如，案例研究的审计图中的顶点 3a）。定理 2.10 并不能保证这些选举状态的保留因子解具有良好的性质；事实上，我们发现，一般来说，存在一些任意接近正则状态的状态，在这些状态下，这些解的性质并不好。

定理 2.11。

对于任意的 $m \geq 3$ 以及任意大的 N，存在一个候选人集合 C，其中包含一个子集$W = \{w_0, w_1\}$，以及一个偏好档案 $P\colon\ [N] \to R_C$，使得选举状态 $S = (W, C \backslash W)$ 是正则的，但在 P 中交换两张选票会使 S 退化。

证明。

我们构造一个偏好档案 P，其候选人为 m 个。将候选人标记为 $w_0 = 0, w_1 = 1, 2, \ldots, m-1$. 定义

$$x = \left\lceil \frac{N}{m+1} + \varepsilon \right\rceil \quad \text{and} \quad y = \left\lfloor \frac{N}{m+1} - \varepsilon \right\rfloor.$$

定义排序 $r_0 = \{(0,0), (1,1)\}$ 和 $r_1 = \{(0,1), (1,0)\}$ ——这些排序将一位获胜者列为第一偏好，另一位列为第二偏好，之后不再列出其他候选人。对于 $2 \leq j \leq m-1$，定义 $r_j = \{(0,j)\}$。

构造偏好档案 P：将 r_0 分配给前 x 个排序，将 r_1 分配给接下来的 x 个排序，然后对每个 r_j 分配 y个排序（ $2 \leq j < m-1$），最后将剩余的 $N - 2x - (m-3)y$个排序分配给 $m-1$。显然， S是 P的正则选举状态，因为按构造，0 和 1 一开始就各自拥有相当于一个配额的选票。

然而，如果我们“拿走”一个 r_0 排序和一个 r_1 排序（例如用排序 r_{m-1}替换它们），使得新的偏好档案 P'中现在有 $x' = x - 1$ 个排序 r_0 和 r_1，就会发现该选举状态是退化的。根据对称性，候选人 0 和 1 的保留因子（如果存在）必定相等；因此将它们记为 k。给定 P'，式 (5) 中的即时保留因子将是多项式 $Ak^2 + Bk + C$的解，其中

$$A = mx' \qquad B = -2mx' \qquad C = N + (m+1)\varepsilon - x'.$$

该多项式的判别式为 $\Delta = 4mx'(mx' - (N + (m+1)\varepsilon - x'))$。当且仅当 $(m+1)x' > N + (m+1)\varepsilon$ 时，该式非负；也就是说，当且仅当 $x' > N/(m+1) + \varepsilon = q$。但是，根据

构造， x' 小于配额，因此对于 P'， S 是退化的。 □

鉴于这一结果，我们所能做的最好尝试，就是提供一些轶闻证据，说明为什么我们或许不会在现实世界的选民档案中看到这类动荡的选举状态。首先，这种现象只会出现在度为 2 或更高的选举状态中——当有 < 2 位获胜者时，不会出现这种病态情况。

其次，这种病态情况依赖于许多选民将两位“不稳固的获胜者”连续排在一起；如果足够多的选民在一位不稳固的获胜者之后，将另一位有希望候选人或一位稳固获胜者排在后面，或者不再给任何候选人排名，那么该选举状态就不再退化。例如，在澳大利亚，线上投票意味着，当选民将多位获胜者连续排名时，该排名中排在前面的（若干位）获胜者都非常稳固，只有最后一位获胜者可能不稳固。

具体而言，这两点意味着，只要每个度为 2 的审计图顶点中的两位获胜者至少有一位是稳固获胜者，那么在审计一场有 $m = 3$ 个席位的选举时，我们就可以高枕无忧；我们在第4.2节和第4.3节中使用的所有图显然都符合这一条件。

最后，我们将在第5节中概述对 Meek 规则的一些修改，这些修改或许能够解决这些病态问题，同时仍可通过我们基于图的方法自然地进行审计。

3 局部零假设审计。

我们不会笼统地讨论用于审计局部零假设的统计方法，而是通过案例研究在实践中展示这些细节。明确这些细节后，我们最终将能够在第3.5节给出我们方法的**平均抽样数（ASN）**估计值。

3.1 一般设置。

如第2.1节所述，我们的策略是针对一个特定集合 $\vec{}$ 中的每条边，拒绝一个原假设。在此，我们定义这些局部零假设，并概述如何将我们的选票-CVR 配对样本映射到每个局部零假设所对应的拒绝规则上。

在接下来的各小节中，我们将在选举状态 S 的度较小这一背景下，明确地重新表述相关的局部零假设及其拒绝规则；不过，我们也可以对这些拒绝规则进行一般性表述。为此，我们借用风险限制审计文献中的**分类器**概念——参见 Stark（2020），第2节。

定义 3.1。（分类器。）

当 BAL, CVR $\in \mathscr{P}$ 是候选人 $H \subseteq C$ 上的固定 N 选民偏好档案，且 $r \in R_H$ 是一个特别指定的 L 排名时，我们定义两个**差异分类器**映射

$$\delta_r, \lambda_r \colon [N] \to \{-1, 0, +1\},$$

如下：

$$\delta_r(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } \mathsf{first}_L \circ \mathrm{CVR}(i) = r \text{ and } \mathsf{first}_L \circ \mathrm{BAL}(i) \neq r; \\ 1 & \text{if } \mathsf{first}_L \circ \mathrm{CVR}(i) \neq r \text{ and } \mathsf{first}_L \circ \mathrm{BAL}(i) = r; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\lambda_r(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } \mathrm{CVR}(i) = r \text{ and } \mathrm{BAL}(i) \neq r; \\ 1 & \text{if } \mathrm{CVR}(i) \neq r \text{ and } \mathrm{BAL}(i) = r; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这些分类器衡量偏好档案投影 T_r(选票记录) 和 t_r(选票记录) 与其真实值 T_r(BAL) 和 t_r(BAL) 相差多远（定义见 2.7），具体如下：

$$T_r(\mathrm{BAL}) = T_r(\mathrm{CVR}) + \sum_{i=0}^{N-1} \delta(i) \text{ and } t_r(\mathrm{BAL}) = t_r(\mathrm{CVR}) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda(i)$$

由于真实选票概况 BAL 的投影决定了扩展 Meek 规则在全图 Ω 中经过的路径，我们的策略是将选票记录的投影作为对这些值的“有根据的猜测”，再利用随机样本通过估计以下量来修正这些猜测

$$\mu_r = \overline{\delta_r} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(i) \text{ and } \nu_r = \overline{\lambda_r} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda(i).$$

为将这些“有根据的猜测”与真实档案的投影区分开来，我们用 ˇ 重音符号标记它们：

$$\begin{aligned} \check{T}_r &:= T_r(\mathrm{CVR}) \text{ and } \check{t}_r := t_r(\mathrm{CVR}), \text{ whereas} \\ T_r &:= T_r(\mathrm{BAL}) \text{ and } t_r := t_r(\mathrm{BAL}). \end{aligned}$$

对于选举状态 (H, W) 的局部零假设 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$，我们最终要审计的量是候选人对 $i, j \in H$ 的计票数 $\mathcal{T}_i$ 和 $\mathcal{T}_j$ 之间的差额 $\mathcal{M}_{i,\ j}$，以及候选人 $i \in H$ 与配额 q 之间的差额 $\mathcal{M}_{i,\ q}$。这些量最初定义于算法 1.4 的第 2 步，现在可以根据方程 (4) 和 (5) 中的偏好档案投影及即时保留因子解 k: $W \to [0, 1]$ 作出更具体的定义：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &:= \sum_{r \in R_{H \cup W;\, i}} k(i) \left(\prod_{j=0}^{\mathsf{len}(r)-2} \Big(1 - k\big(r(j)\big)\Big) \right) T_r; \\ \mathcal{M}_{i,j} &:= \mathcal{T}(i) - \mathcal{T}(j); \\ q &:= \frac{N - \sum_{r \in R_W} \left(\prod_{i=0}^{\mathsf{len}(r)-1} \Big(1 - k(r(i))\Big) \right) t_r}{m+1} + \varepsilon; \\ \mathcal{M}_{i,q} &:= \mathcal{T}_i - q. \end{aligned}$$

定义了这些量之后，我们就可以定义与边 $\vec{e} \in \partial G$ 对应的局部零假设 $\mathcal{H}_{\vec{e}}$：

- 如果 $\vec{e} = (S, c)$ 是一条失败者边，那么局部零假设是："候选人 c 输给其他所有有希望候选人 $\ell \in H$，并且本轮没有新的候选人获得配额。"我们可以通过以下任一方式拒绝该假设：1）检查$\mathbb{P}(\mathcal{M}_{c\ell} < 0) < \alpha$，其中 ℓ 是 H 中记录的失败者；或 2）检查是否有其他候选人 $h \in H$ 在本轮达到配额，即 $\mathbb{P}(\mathcal{M}_{hq} < 0) < \alpha$。根据选票记录，我们决定检查这两种情况中的哪一种；但对于每条失败者边，我们只会检查其中一个假设。

- 同样，对于胜者边 $\vec{e} = (S, c)$，其零假设为"候选人 c 在 S达到配额，且在该轮次的有希望候选人中计票总数最高。"我们通过以下任一方式拒绝该假设：1）检查$\mathbb{P}(\mathcal{M}_{cq} > 0) \leq \alpha$；或 2）检查是否存在另一位有希望候选人 $h \in H$，使得 $\mathbb{P}(\mathcal{M}_{ch} > 0) < \alpha$。

本节余下部分将概述度为 0、1 和 2 的选举状态所对应的这些拒绝规则的具体内容，并说明如何将它们用于成功审计案例研究中第1.1节的珀斯—金罗斯偏好档案（将其重新设定为一场 Meek 选举）。在此过程中，参考该档案的审计图会很有帮助；我们在图4中重新绘制了该图。

这场选举的原始偏好档案包含$N = 3689$ 张选票；我们另外添加了 150 张"幽灵"选票，以模拟选举开始前被判定无效、但若经抽样并最终确认有效，可能会被重新计入的选票。

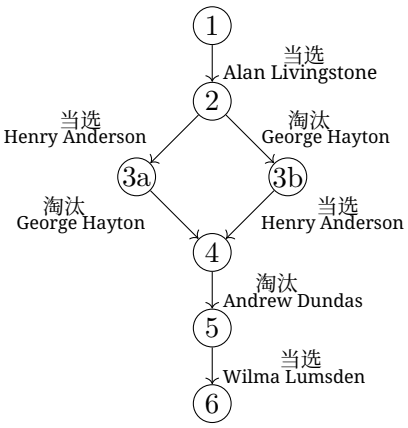


图4：可审计差额为40张选票时的审计树。

我们选取 $n = 767$ 张选票作为样本量，约占选票纸总数的20%；对于**平均抽样数（ASN）**而言，这一数值偏高，这是为了考虑选举最后一轮中必须审计的47张选票这一紧密差额。为进行这项合成审计，我们通过扰动 $\eta = 0.05$ 部分排序（包括人为生成的幽灵选票），以4种方式之一对选票记录添加噪声，遵循Blom、Stuckey等人（2019）附录中确立的标准流程：

1. 将排序中的一个随机候选人替换为未列入该排序的另一名候选人；2. 将一名未出现在排序中的随机候选人插入排序中的一个随机位置；3. 随机交换排序中两名候选人的位置；或4. 从排序中移除一名随机候选人。

最后，我们将使用 $\alpha = 0.05$ 作为此次合成审计的风险水平。

3.2 零度审计。

当选举状态 $S = (H, \varnothing)$ 的获胜者集合为空时，没有需要校准的保留因子，差额也可以直接手工计算。我们只需考虑降低配额

在耗尽仅列出 H^{c} 中候选人的选票之后。这个新配额可简化为

$$q = \frac{N-g}{m+1} + \varepsilon,$$

在这里，我们只关注两个差异判定器 δ_c 和 $\lambda_g =: \lambda_{\varnothing}$。我们在此重新列出它们的正式定义：

$$\delta_c(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } \mathsf{fpv}_S(\mathrm{CVR}(i)) = c \text{ and } \mathsf{fpv}_S(\mathrm{BAL}(i)) \neq c; \\ 1 & \text{if } \mathsf{fpv}_S(\mathrm{CVR}(i)) \neq c \text{ and } \mathsf{fpv}_S(\mathrm{BAL}(i)) = c; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\lambda_g(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } \pi_S \circ \mathrm{CVR}(i) = \varnothing \text{ and } \pi_S \circ \mathrm{BAL}(i) \neq \varnothing; \\ 1 & \text{if } \pi_S \circ \mathrm{CVR}(i) \neq \varnothing \text{ and } \pi_S \circ \mathrm{BAL}(i) = \varnothing; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用这些分类器，我们可以修正根据选票记录作出的猜测，并写出真实的弃权总数 g 和真实计票数 $\mathcal{T}_c$ 关于 $c \in H$的公式：

$$\mathcal{T}_c = T_c = \check{T}_c + \sum_{i=0}^{N-1} \delta_c(i) = \check{T}_c + N\mu_c, \text{ where } \mu_c = \overline{\delta_c} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \delta_c(i);$$

$$g = \check{g} + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_g(i) = \check{g} + N\mu_g, \text{ where } \nu_g = \overline{\lambda_g} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_g(i).$$

如果我们有 μ_c 和 ν_g的估计量 $\hat{}\mu_c$ 和 $\hat{}\nu_g$ ，就可以用它们构造我们关注的差额的估计量：对于固定的 $c, \ell \in H$，有

$$\hat{\mathcal{M}}_{c\ell} = (\check{T}_c - \check{T}_\ell) + N(\hat{\mu}_c - \hat{\mu}_\ell);$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{cq} = \left(\check{T}_c - \frac{N-\check{g}}{m+1} - \varepsilon\right) + N\left(\hat{\mu}_c + \frac{\hat{\nu}_g}{m+1}\right).$$

在度为 0 的情形下，我们可以将两个估计量 $\hat{}\mu_c, \hat{}\mu_\ell$合并为单个估计量 $\hat{}\mu_0 = \hat{}\mu_c - \hat{}\mu_{\ell\circ}$ 这样一来，Stark（2020）的 SHANGRLA 编译器就适用于这个差额。同样，$\hat{}$也适用于 $M_{cq\circ}$ 我们选择不这样做，以确保整个审计框架在使用德尔塔方法时保持一致。

相反，对于 $\mathcal{M}_{cq}$，我们选取 $\vec{\theta} = (\mu_c, \nu_g)$，并计算 $\mathcal{M}_{cq}$ 的梯度：

$$\nabla_{\vec{\theta}} \mathcal{M}_{cq} = [\partial_{\mu_c}\mathcal{M}_{cq}, \partial_{\nu_g}\mathcal{M}_{cq}]^{\mathsf{T}} = \left[N, \frac{N}{m+1}\right]^{\mathsf{T}}$$

然后，如果 $\Sigma_{\vec{\theta}}$ 是与 $\vec{\theta}$ 对应的协方差矩阵（对角线上的超几何方差界如第2.2节所述），根据德尔塔方法，渐近地有：

$$\mathrm{Var}(\hat{\mathcal{M}}_{cq}) \approx \nabla_{\vec{\theta}} \mathcal{M}_{cq}^{\mathsf{T}} \Sigma_{\vec{\theta}} \nabla_{\vec{\theta}} \mathcal{M}_{cq}\Big|_{\vec{\theta}=(\hat{\mu}_c, \hat{\nu}_g)}. \tag{7}$$

最后，我们乘以简单不放回随机抽样 (SRSWOR) 校正因子 $\frac{N-n}{N-1}$ ，再开平方，得到差额的标准误，并据此构建单侧置信区间。

$\mathcal{M}_{c\ell}$ 的差额与此类似，只是使用了 $\vec{\theta} =$ （μ_c, μ_ℓ）。

示例 3.2. 在案例研究中审计顶点 1 时，我们必须拒绝的主要局部零假设之一是：“Livingstone 在选举开始时没有达到配额。”如果将 Livingstone 称为候选人 c，那么我们的分类器会记录如下内容：

- δ_c包含 5 个带有 -1 的条目，以及 4 个带有 $+1$ 的条目；其余 758 个条目均为 0 .
- λ_g包含 2 个带有 -1 的条目，以及 4 个带有 $+1$ 的条目；其余 761 个条目均为 0.
- λ_g 中的一个非零项与 δ_c 中的一个非零项重叠，因此总共有 15 个与该差额相关的选票差异；由此产生的方差上界为 K/N =0.0328，我们将其除以 n ，以界定样本均值的方差。
- 由 7 得到的德尔塔方法矩阵乘法结果为

$$\begin{bmatrix} 3839 \\ 959.75 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 0.000043 & -0.000002 \\ -0.000002 & 0.000043 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3839 \\ 959.75 \end{bmatrix} \approx 657.56$$

- 最后，我们乘以简单随机不放回抽样因子（$N-n$）/（$N-1$）$\approx .8$ 并开平方，得到一个标准误 ≈ 22.94。乘以适当的 z-分数并加上抽样差额后，我们得到 149.51 关于 $\mathcal{M}_{cq}$的下界。该下界为正，确认 Livingstone 以超过 95% 置信度达到配额。

在顶点 1 中，我们唯一需要检查的其他零假设是：Livingstone 在该轮次中击败每一位其他候选人（即没有其他候选人会在他之前当选）。

3.3 一阶审计。

在选举状态中只有一名候选人 w 当选的情况下，候选人至候选人差额的形式为

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}_{c\ell} &= (\check{T}_c - \check{T}_\ell) + N(\hat{\mu}_c - \hat{\mu}_\ell) + \left(1 - \underbrace{\frac{\check{C}_u - N\hat{\mu}_u}{\check{C}_v + N\hat{\mu}_v}}_{\hat{k}}\right)(\check{T}_{wc} - \check{T}_{w\ell} + N(\hat{\mu}_{wc} - \hat{\mu}_{w\ell})) \\ &= (\check{T}_c - \check{T}_\ell + \check{T}_{wc} - \check{T}_{w\ell}) + N(\hat{\mu}_c - \hat{\mu}_\ell + \hat{\mu}_{wc} - \hat{\mu}_{w\ell}) - \frac{\check{C}_u - N\hat{\mu}_u}{\check{C}_v + N\hat{\mu}_v}(\check{T}_{wc} - \check{T}_{w\ell} + N(\hat{\mu}_{wc} - \hat{\mu}_{w\ell})).\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}\check{C}_u &= N - \check{g} - \check{t}_w + (m+1)\varepsilon, & \hat{\mu}_u &= \hat{\nu}_g + \hat{\nu}_w, \\ \check{C}_v &= (m+1)\check{T}_w - \check{t}_w, & \hat{\mu}_v &= (m+1)\hat{\mu}_w - \hat{\nu}_w.\end{aligned}$$

候选人至配额差额同样可以简化为：

$$\hat{\mathcal{M}}_{cq} = (\check{T}_c + \check{T}_{wc}) + N(\hat{\mu}_c - \hat{\mu}_{wc}) - \frac{\check{C}_u - \hat{\mu}_u}{\check{C}_v + \hat{\mu}_v}(\check{T}_{wc} + \check{T}_w + N(\hat{\mu}_{wc} + \hat{\mu}_w))$$

我们使用相同的德尔塔方法，为这些差额给出单侧置信区间。对于 $\hat{\mathcal{M}}_{c\ell}$ ，参数为 $\theta = (\mu_c, \mu_\ell, \mu_{wc}, \mu_{w\ell}, \nu_g, \nu_w, \mu_w)$。对于 $\mathcal{M}_{cq}$ ，参数为 $\theta = (\mu_c, \mu_{wc}, \nu_g, \nu_w, \mu_w)$。差额对这些参数的非线性依赖凸显了德尔塔方法的必要性。

示例 3.3。 在选举状态 2 中，其中一条失败者边 $\vec{e} \in \partial G$ 是与 Dundas 对应的边，我们在此将其称为 c 。该选举状态中记录的失败者是 Hayton，我们在此将其称为 ℓ 。与这条失败者边相对应的原假设是“$\mathcal{M}_{c\ell} < 0$”。

˘ 在此选举状态下，这些候选人之间的原始选民核查记录差额为 $\mathcal{M}_{c\ell} = 94.1464$。在使用我们的抽样参数校正该差额后，差额降至估计值 $\mathcal{M}_{c\ell} = 81.2074$。
在抽取的样本中有 24 张不一致选票，得出的个体方差上界为$K/N < 0.000064$。公式（7）中的德尔塔方法计算结果过大，无法打印，但其给出的方差上界为 Var($\mathcal{M}_{c\ell}$) < 1959.4421。乘以我们的简单不放回随机抽样因子后，我们得到差额的⌒ ˆ标准误 SE ≈ 39.6026, 从而得到 95% 置信区间的下界 $\mathcal{M}_{c\ell} > 16.0668 > 0$ ，这使我们能够拒绝这个局部零假设。

在此顶点处，我们还需要检验的其他零假设是：在此选举状态下，除 Anderson 外没有其他候选人达到配额，并且没有任何候选人在与 Hayton 的一对一竞争中落败。

3.4 二度审计。

不失一般性，将二度选举状态中的两位获胜者标记为 $1, 2$。在这种情况下，可以求解式 (5) 中的即时保留因子方程，从而分别求出 $k_1 = k$(1) 和 $k_2 = k$(2)。我们发现，保留因子 k_2 是多项式 $P_2(\vec{\theta}, k) = A_2(\vec{\theta})k^2 + B_2(\vec{\theta})k + C_2(\vec{\theta})$ 的根节点，其中

$$
\begin{aligned}
A_2 &= T_2t_{12} - T_{12}t_2 + T_2t_{21} + T_{21}t_{12} + T_{21}t_2 + T_{21}t_{21} - (m+1)\Big(T_{12}T_{21} + T_2T_{21}\Big) && (9)\\
B_2 &= -T_1t_{12} - T_1t_2 + T_{12}t_2 - T_2t_1 - T_2t_{12} - T_1t_{21} - T_2t_{21} + (N-g)(T_{21} - T_{12}) - T_{21}t_1 \\
&\qquad - 2(T_{21}t_{12} + T_{21}t_2 + T_{21}t_{21}) && (10)\\
&\qquad + (m+1)\Big(T_1T_{12} + T_1T_2 + T_{12}T_{21} + T_2T_{21} - T_{12}\varepsilon + T_{21}\varepsilon\Big) \\
C_2 &= -(T_1 + T_{21})\Big(N - g - t_1 - t_{12} - t_2 - t_{21} + (m+1)\varepsilon\Big) && (11)
\end{aligned}
$$

类似地，保留因子 k_1 是 $P_1(\vec{\theta}, k) = A_1(\vec{\theta})k^2 + B_1(\vec{\theta})k + C_1(\vec{\theta})$ 的根节点，其系数仅将索引 1 和 2 对调。我们使用采样得到的⌐ ˆˆ参数 θ 对这些方程进行数值求解，得到 k_1 和 k_2。

对于候选人间差额 $\mathcal{M}_{c\ell}$，我们的参数为

$$
\vec{\theta} = \big[\nu_g, \mu_1, \mu_2, \mu_{12}, \mu_{21}, \nu_1, \nu_2, \nu_{12}, \nu_{21}, \mu_c, \mu_\ell, \mu_{1c}, \mu_{1\ell}, \mu_{2c}, \mu_{2\ell}, \mu_{12c} + \mu_{21c}, \mu_{12\ell} + \mu_{21\ell}\big] \qquad (12)
$$

注意，总和 $\delta_{12c} + \delta_{21c}$ 的上界仍为 1，因为这些分类器不可能同时为 $+1$ 或 -1。对 $\delta_{12\ell} + \delta_{21\ell}$ 亦然。

在求解 $\nabla_{\vec{\theta}}\mathcal{M}_{c\ell}$ 时，我们需要计算一些偏导数 $\partial_{\theta_i}k$。为此，我们使用隐函数定理：

$$
\frac{\partial k}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial_{\theta_i}P(k, \vec{\theta})}{\partial_k P(k, \vec{\theta})} = -\left.\frac{(\partial_{\theta_i}A)k^2 + (\partial_{\theta_i}B)k + (\partial_{\theta_i}C)}{2Ak + B}\right|_{\vec{\theta}, k=\hat{\theta}, \hat{k}}
$$

最后，候选人间差额的形式如下：

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}_{c\ell} = (\check{T}_c - \check{T}_\ell) + N(\hat{\mu}_c - \hat{\mu}_\ell) \\ + (1-\hat{k}_1)\left(\check{T}_{1c} - \check{T}_{1\ell} + N(\hat{\mu}_{1c} - \hat{\mu}_{1\ell})\right) \\ + (1-\hat{k}_2)\left(\check{T}_{2c} - \check{T}_{2\ell} + N(\hat{\mu}_{2c} - \hat{\mu}_{2\ell})\right) \\ + (1-\hat{k}_1)(1-\hat{k}_2)\left(\check{T}_{12c} + \check{T}_{21c} - \check{T}_{12\ell} - \check{T}_{21\ell} + N(\hat{\mu}_{12c} + \hat{\mu}_{21c} - \hat{\mu}_{12\ell} - \hat{\mu}_{21\ell})\right)\end{aligned}$$

ˆ 我们也可以类似地写出 $\mathcal{M}_{cq}$ 的符号形式，但当 $m = 3$ 时，并不需要度为 2 的候选人至配额差额；只需检查在每个度为 2 的顶点中，选举记录中的最后一位获胜者是否击败所有其余有希望候选人。

示例 3.4. 顶点 3A 是我们图中唯一的非规则选举状态；根据选票记录，记录的获胜者 Livingstone 和 Anderson 的保留因子分别为 $k_1 = 0.8130$ 和 $k_2 = 1.0029$ 。将抽样参数代入系数方程 (9) - (11) 后，这些状态 ˆ ˆ 又变为正则；我们得到 $k_1 = 0.814$ 和 $k_2 = 0.9887$。

在这个选举状态中，我们需要审计的最紧差额仍然是检查 Dundas 是否不会输给 Hayton；他们之间记录的差额（使用非规则保留因子）为 94.0624；应用抽样参数后，该差额降至 81.6326 ，根据德尔塔方法，其下界为 $14.4745 > 0$ ，因此我们可以拒绝这个局部零假设。在我们的示例中，每个隐函数定理导数 $\partial_{\theta_i} k$ 的上界均为 10^{-1} ，相关的选票比较差异数量为 26，因此方差上界为 $K/N < 0.0520$。

3.5 平均抽样数。

既然已经建立了局部零假设审计的机制，我们便可以讨论成功审计某场给定选举所需的预期最小样本量 n ，并将其称为该选举的**平均抽样数（ASN）**。这个数主要取决于所选审计图中拒绝规则的差额最小的那条边 $\vec{e} \in \partial G$ 。本节将把 ASN 视为**最小可审计票差（LAM）** m的函数，并且只考虑噪声水平为 $\eta = 0$的情形。这样简化后，我们便能了解 ASN 随选举中最小差额变化的规模。

在 $\eta = 0$的情形下，我们发现，第2.2节中的方差上界 K/N 在 $n \ll N$的情况下与 $\frac{1}{n}$ 渐近成正比。这进而意味着，成功进行风险限制审计所需的相对 ASN n/N仅取决于 m，而不取决于它相对于 N的规模。也就是说，审计相差 $\mathfrak{m} = 100$ 张选票的选举所需成本占选票总数的比例，无论 $N = 5000$ 还是 $N = 1,000,000$，都相同；换言之，在规模更大的偏好档案中，审计 1% 的差额相对成本更低。图5进一步印证了这些结果。

这似乎是个好消息：我们有理由认为，规模较大的偏好档案会有数值更大的 LAM；在这种情况下，成功的风险限制审计只需抽取该档案中较小比例的样本 n/N 。本节余下部分将从数学上论证图5。

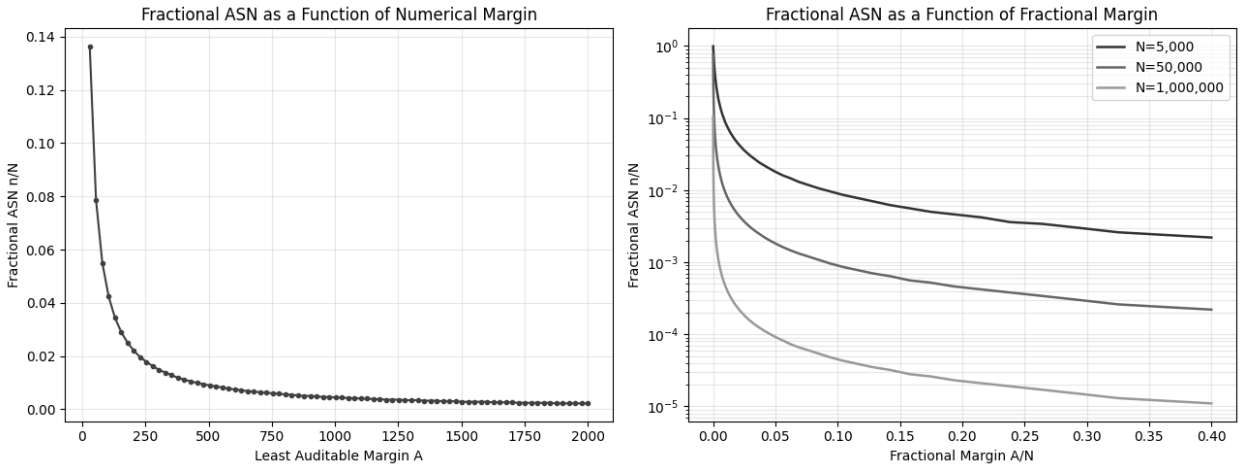


图5：ASN 随最小可审计票差的变化 A 当 $\alpha = .05$时。

命题 3.5。

在 $\eta = 0$，且我们将风险上限设为 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_K$，以审计某个偏好档案中 N 选票的数值型$\vec{}$最小可审计票差 $\mathfrak{m}$，并且有 d 个用于构建相关差额的分类器参数 θ 时，平均抽样数 n 与 A 之间的渐近关系为

$$\frac{n}{N} \approx \frac{z_{1-\alpha_0}\sqrt{d\log(1/\alpha_K)}}{\mathfrak{m}}$$

证明。

当我们从包含 N 张选票的总体中不放回抽取 n 张，以找出 $X = 0$ 个选票差异，且 K 先验地未知时，公式（1）中的超几何概率可简化为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_K(X=0) &= \frac{\binom{K}{0}\binom{N-K}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-K)!}{n!(N-K-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\ &= \frac{(N-K)(N-K-1)\cdots(N-K-n+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{K}{N-j}\right)\end{aligned}$$

取对数，并在满足以下条件的范围内使用近似式 $\ln(1+u) = u + O(u^2) \approx u$

$u \ll 1$，即 $K \ll N-n$，可得

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_K(X=0) &= -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{K}{N-j} \\ &= -K \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{N(N-j)} + \frac{1}{N} \right) \\ \ln \mathbb{P}_K(X=0) &= -K \left(\frac{n}{N} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{N(N-j)} \right) \end{aligned} \tag{13}$$

现在我们注意到，在 $n \ll N$ 情形下，该和为 $O(n^2/N^2)$，因为 $N-j \geq N-n$，因此

$$0 \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{N(N-j)} \leq \frac{1}{N(N-n)} \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{N(N-n)} = O\left(\frac{n^2}{N^2} \right). \qquad (\text{as } n \ll N)$$

回顾方程（3），K_u 是满足 $\mathbb{P}_K(X=0) \geq \alpha_K$ 的 K 的最大值。我们令方程（13）左侧等于 $\ln(\alpha_k)$，并将 $K = K_u$ 代入右侧，得到

$$\ln(\alpha_K) = -K_u \left(\frac{n}{N} + O\left(\frac{n^2}{N^2} \right) \right) \approx -K_u \frac{n}{N}. \qquad (\text{as } n \ll N)$$

换言之，我们的选票级随机方差界为 $K_u/N \approx \ln(1/\alpha_K)/n$。再次除以 n，将其转化为样本的方差，并在 $n \ll N$ 情形下忽略有限总体校正因子，我们发现，将这些方差界中的 d 项相加所得的单侧 $(1-\alpha_0)$ 置信区间宽度为

$$w = N \cdot z_{1-\alpha_0} \sqrt{\frac{d \ln(1/\alpha_K)}{n^2}}.$$

令 $w = \mathfrak{m}$ 并求解 n，即可得到该结果。 □

4 实验结果。

我们可以在若干个以往采用排序选择投票的选举的投票记录（CVR）数据库上运行此审计框架，以衡量成功率和可行性[5]。我们采用与案例研究相同的方法得出这些结果：从CVR开始，通过扰动相应比例的选票，引入噪声水平 η，以合成模拟纸质选票记录，而CVR正是对其带有噪声的近似。我们按照第3.1节末尾所述的相同步骤为这些选票添加噪声。

这些选举原本都不是按照 Meek 规则进行的——此处纳入的所有选举均使用 WIGM 规则，获胜者数量为 $m = 2, 3, 4,$，或在极少数情况下为 $m = 5$。我们使用相同的投票记录，将它们全部重新设想为 2 席或 3 席的 Meek选举。我们还向每个偏好档案引入一些“幽灵选票”——即未列出任何初始候选人的空排序——以模拟那些在

[5]复现代码可在此处获取。

选举开始前即已作废的选票。这些选票对选举本身没有任何影响（在 Meek 中，它们甚至不会改变配额），但我们的噪声有可能将其中一张幽灵选票变成有效选票。我们在偏好档案中每 100 张选票引入一张此类选票。

在两份偏好档案之间的噪声水平 η 非零的情况下，我们将**平均抽样数（ASN）**定义为能使审计成功率超过 90% 所需的最小档案样本量。

鉴于我们在第3.5节中的讨论，我们预计随着选票总数增加，ASN 会降低。为证实这一点，我们将在三种“规模”的选举中计算 ASN： $N \approx 5,000$、 $N \approx 50,000$ 和 $N \approx 1,000,000$。

4.1 小型选举：苏格兰。

自 2007 年起，苏格兰的市议会一直采用 WIGM 单票可转移制。这产生了一个丰富的数据库，其中包含 1068 份适用于中小型选举的排序选择投票档案（其中一份是我们针对 Perth-Kinross 的案例研究所用的偏好档案）。

我们对该数据库中所有有 $|C| = 6, 7, 8, 9,$ 名或 10 名候选人参选的偏好档案应用了审计方法。这包括 881 份档案，其中 1 份对应 $m = 2$ 个席位的竞选，439 份对应 $m = 3$ 个席位的竞选，另有 439 份对应 $m = 4$ 个席位的竞选，还有 1 份对应 5 个席位的竞选。这些选举的选民群体规模相对较小：所有接受审计的档案中，选民人数的平均值约为 $5,248$。

在这些审计中，我们采用了 $\eta = 2\%$ 的噪声水平；这仍远高于现实世界记录的噪声水平，政治选举中的噪声通常仅为百分之几分之一。我们首先以 $\alpha = .05$ 的风险水平审计这些档案，并将其中的 $\alpha_K = .005$ 分配给第2.2节讨论的方差界构造。我们在图6中绘制了由此得到的 ASN，并在图 7 中展示了可审计档案数量随样本量变化的情况。

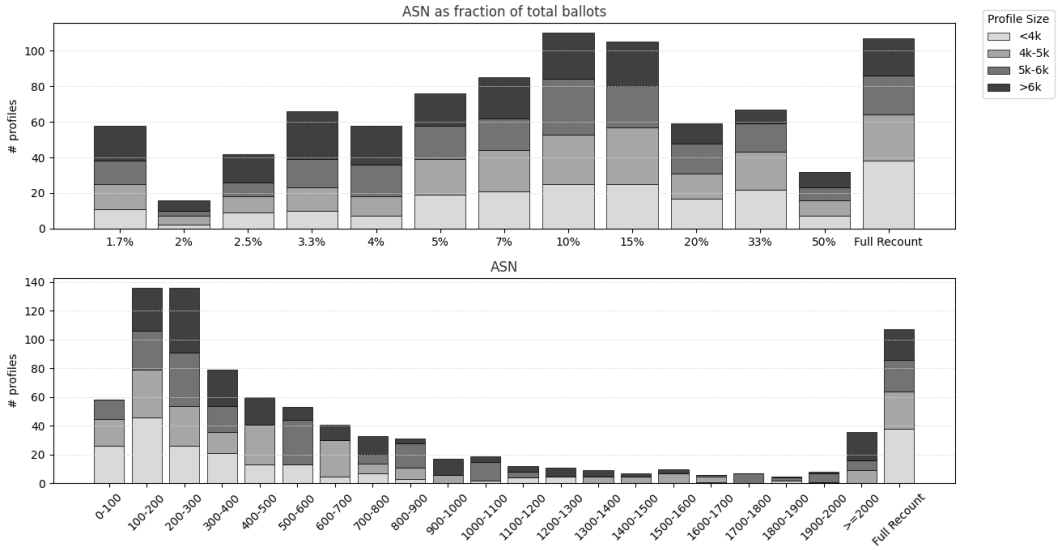


图6：881场苏格兰单记可让渡投票选举的平均抽样数， $\alpha = .05$

为了对这个大型数据集运行批量审计并找出 ASN，我们采用了两步贪心搜索过程。首先，我们构建审计图，并逐步增大最小可审计差额 M，只要图中度为 3 的顶点的获胜者集合均与选票记录中记录的一致，就继续增大。其次，我们找出最小样本量 n，使得针对给定审计图的风险限制审计在超过 90% 的情况下能够成功。值得注意的是，这一贪心过程往往并非最优；搜索过程只检查了少数几个可审计差额和样本量，而针对每个具体档案进行个性化调整时，这两者都可以进一步扩大搜索范围。

以下是这些结果的文字总结： 76.6% 的档案（即 $675/881$ 个）可审计，平均抽样数为该档案选票数的 $\leq 30\%$。在 107 个无法以不超过档案 50% 的任何平均抽样数进行审计的档案中，有 62.1% 的档案记录显示，选举中最后一位获胜者与其最强对手之间的差额不到档案的 0.5%。在美国市议会选举中，这种差额通常会触发自动全面重新计票。

我们以提高后的风险水平 $\alpha = .1$ 重复了这些审计，其中将 $\alpha_K = .02$ 分配给第2.2节中的方差界。累计结果如图 8 所示：仅有另外 12 个档案变得可审计，但成功审计每个档案所需的 ASN 略有减少。

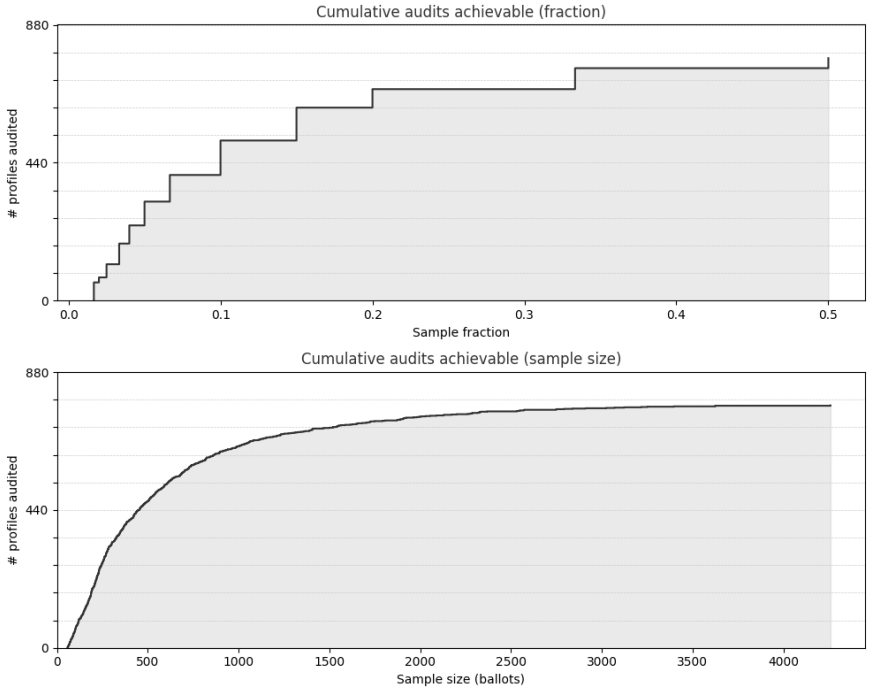


图 7：在给定阈值 $\alpha = .05$ 下可审计的苏格兰选举数量（平均抽样数不超过该阈值）。

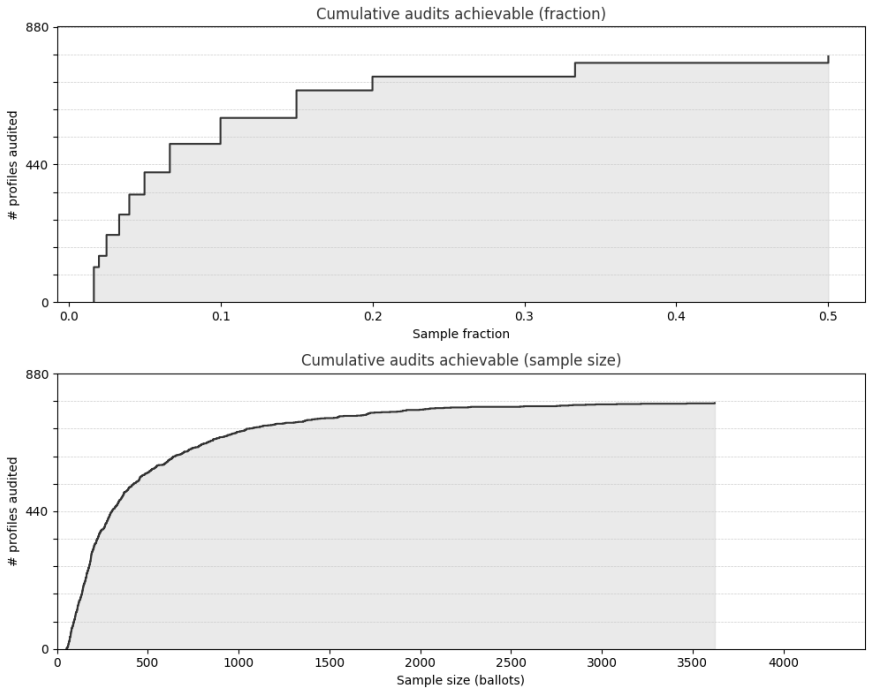


图 8：在给定阈值及以下 ASN 下可审计的苏格兰选举数量， $\alpha = .1$。

4.2 中等规模选举：波特兰。

波特兰市在 2024年 首次将其市议会选举改为采用 WIGM 单票可转移制。此次选举分为 4 个选区，每个选区选出 3 名议员，共计 12 名。这些选区的投票率分别为 $42,678$, $77,024$, $84,356$, 和 $76,566$ 名选民[6],，平均选区规模为 $70,156$。为便于分析，我们将这些选举重新设想为 Meek 选举，并对选票记录人为添加噪声，噪声水平为 $\eta = 2\%$，审计所采用的风险水平为 $\alpha = 5\%$。值得庆幸的是，无论采用 WIGM 还是 Meek，各选区的选举结果都相同（苏格兰数据库的案例研究表明，情况并非总是如此）。

在这些选举中，最脆弱的是第1选区；对于该选区，能够产生连贯审计图的最大 LAM 为 $A = 532$, 即偏好档案的 1.2%。我们在附录A中展示了这张审计图——研究它很有启发性，因为其结构是审计图的典型特征：首先是一片由低风险淘汰构成的动荡云团（即所谓的“淘汰云”），随后该图重新收敛到选举状态$\textcircled{8A}$中的单个顶点，此时，更具可行性的候选人的高风险淘汰和当选过程开始。淘汰云的规模往往会随着选举中候选人数量的增加而呈组合爆炸式增长；正如我们稍后将看到的，这在规模更大的选举中会反复成为基于图的风险限制审计面临的计算障碍。

我们发现，波特兰第1选区的这张审计图始终可审计，平均抽样数为$n = 1,077$ 次选票比对，约占偏好档案的 2.5%。

[6]请注意，我们人为地为每个偏好档案添加了与其权重的 1% 成正比的“幽灵”选票，因此，我们用于审计的实际投票率被放大了 1.01 倍。

我们唯一能以接近最优的方式完成审计的其他波特兰偏好档案是第4选区，其 LAM 约为 $A = 2,000$ 张选票，即偏好档案的 2.6%。第4选区有 30 名候选人（而第1选区有 16 名），因此与此 LAM 对应的审计图大得不适宜使用——它包含 8,455,380 个顶点，其中超过 95% 位于该图 31 层中的前 16 层。对于这张审计图，最小平均抽样数为 $n = 386$ 张选票，即偏好档案的 0.5%。

第2和第3选区比其他选区稳定得多；前者的LAM约为 $3,500$张选票，即偏好档案的 4.5%，后者的LAM为 $9,000$ 张选票，即 11.6%。与这些差额对应的审计图过大而无法计算，这给我们留下两种选择：要么使用更保守的LAM，以获得一次（效率较低的）成功风险限制审计，要么预先从每个偏好档案中移除一些可行性较低的候选人，从而跳过审计图的淘汰云阶段。后一种做法似乎应当是合理的——我们从每个偏好档案中移除的候选人，在规范梅克路径穿过该图时被淘汰之际，其得票均不足配额的5%——但目前尚无数学上的证明。即便是所谓的“不可行候选人”——提及次数少于（初始）配额的候选人——如果他们在某一轮次中合计存在，使某位获胜者失去足够多的选票并因此被淘汰，仍可能影响选举。从数学上证明这种对不可行候选人的预先移除，将大大简化并优化基于图的风险限制审计框架。我们在表4中展示了两种方法对应的ASN。

	严格方法		**最优方法**	
偏好档案	LAM	ASN	LAM	ASN
第1选区	532 (1.23%)	1077 (2.5%)	532 (1.23%)	1077 (2.5%)
第二区	2,000 (2.4%)	311 (0.4%)	3,500 (4.1%)	253 (0.33%)
第三区	400 (0.47%)	2839 (3.3%)	9,000 (11.6%)	102 (0.13%)
第4选区	2,000 (2.6%)	421 (0.55%)	2,000 (2.6%)	421 (0.55%)

表4：波特兰第1至4选区审计的 LAM 和 ASN。

有必要再花一点时间详细讨论这些“淘汰云”所带来的计算挑战。我们使用 LAM 分别为 2,000 和 400 的图，对第2和第3选区进行审计；这些图分别由 8,244 个和 14,955 个顶点组成。其中，分别有 8,113 个（98.4%）和 14,822 个（99.1%）顶点出现在图的前半部分，对应于我们所描述的淘汰云。在第4选区，第11层规模最大，包含 1,373,001 个顶点，占总数的 16%；但到第23层时，图已缩减回仅含一个顶点的层，表明淘汰云已经结束。这些淘汰云对选举结果几乎没有影响，但目前却占据了审计计算工作的大部分。

更糟的是，淘汰云的规模主要取决于选举中的候选人人数：第三区的选举竞争远比第二区激烈，但其在计算上可行的 LAM 数值却低得多，因为前者有 30 名候选人，而后者有 22 名。这凸显了我们需要通过数学上严谨的论证来跨越这片淘汰云；否则，为了确保单记可让渡投票制选举的安全，我们能提出的最佳建议就只能是在选举前限制候选人人数（而这可以说有悖于单记可让渡投票制选举的精神）。

4.3 大型选举：澳大利亚。

澳大利亚自 1949年 起便在参议院选举中采用单记可转移投票制；到 1998年 时，已采用数字化计票的 WIGM 单票可转移制，并公布了其 2016[7], 2019, 2022, 和 2025年 的完整选票记录。

自1985年以来，澳大利亚参议院一直由76个席位组成，其中72个席位来自6个联邦州，每州选举12名参议员，任期交错、为期六年；另外4个席位来自2个领地，每个领地选举2名参议员，任期三年。各州和领地层级的参议员选举均采用（一种版本的）WIGM 单票可转移制。这是全球政治选举中规模最大的单记可转移投票制应用：在这些州中规模最大的州——新南威尔士州，2025年的投票率为5,219,341名选民。

澳大利亚的另一独特之处在于采用“线以上投票（ATL）”，选民可以选择对政党而非候选人进行排序。选民投出线以上投票（ATL）选票时，该选票会被视为按照选举前预先确定的顺序，为其所列出的每个政党的所有候选人排序。据统计，通常有 $> 90\%$的选民群体投出线以上投票（ATL）选票，因此澳大利亚的单记可转移投票制选举中，候选人往往更早达到配额，且盈余也比其他地方大。

这两个每个选举周期各选出 2 名参议员的领地——北领地（NT）和澳大利亚首都领地（ACT）——规模较小（更重要的是，参选人数也足够少），因此我们基于图的方法通常能够为它们完成一次成功的风险限制审计。为了让审计在计算上可行，有时我们必须采用比原本可行范围更小的 LAM；在这种情况下，得出的 ASN 会略小一些，但实际上，只要 LAM 在数千左右，差异就很小。

我们将这些选举作为 $m = 2$ 席位的 Meek 选举进行审计，采用常用的 $\eta = 2\%$ 噪声水平和 $\alpha = 0.05$ 风险水平。表 5 展示了各次选举的结果，以及候选人数量（ $M = |C|$ ）和选民人数（ N ，包括加入选举的 1% 幽灵选票）。

领土	年份	$\|C\|$	N	最优 LAM	可行 LAM	ASN
澳大利亚的首都领土	2016	22	256,906	38,000 (14.7%)	2,000 (0.8%)	1,027 (0.4%)
	2019	17	272,933	35,000（12.8%）	2,000（0.7%）	1,364（0.5%）
	2022	23	288,069	17,000（5.9%）	500（0.2%）	∞
	2025	14	296,408	40,000 (13.5%)	40,000 (13.5%)	296 (0.1%)
北部领土	2016	19	102,516	18,000 (17.6%)	4,000 (4%)	146 (0.14%)
	2019	18	106,077	19,000 (17.9%)	3,700（3.5%）	151（0.14%）
	2022	17	104,653	14,000（13.4%）	4,400（4.2%）	139（0.13%）
	2025	17	107,875	19,000 (17.6%)	4,800 (4.45%)	134 (0.12%)

表 5：澳大利亚较小的领地的风险限制审计结果。

这些领地选举中，我们唯一未能严格审计的是2022年澳大利亚首都领地选举。如果我们使用非正式捷径，在审计开始前从选举中移除14名最不具竞争力的候选人（这些候选人均为所得选票不足4,000张、截至

[7]2016年选举较为特殊，因为它是议会“双重解散”的结果，这意味着澳大利亚六个联邦州各自选出 12 名新参议员，而不是通常的 6 名。这也解释了为什么这些州当年参选的候选人数量异常之多。

其在原始选举顺序中被淘汰之时），该选举便变得可审计，平均抽样数为$n = 146$ 张选票，或偏好档案的 0.05%。
澳大利亚的六个联邦州往往投票率高得多，参选的候选人也更多（通常超过50名候选人）。我们目前也没有技术将其作为六席选举进行审计（尽管这一步似乎是可以做到的）。相反，我们把它们当作三席选举来审计，并采用与在波特兰相同的方法，在图中"跳过"淘汰云部分——同样没有严格的数学依据，尽管我们预先淘汰的候选人在偏好档案中被提及的次数往往少于他们赢得一个席位所需的配额。

我们在表6中展示了将我们的审计方法应用于澳大利亚联邦州的结果。这些结果包括我们用于审计的LAM、由此得到的平均抽样数，以及原始候选人数量 $|C|$ 和我们"跳过"淘汰云之后剩余的候选人数量 $|C'|$ 。

这些澳大利亚审计的结果尤其令人鼓舞：对于这些选民人数通常超过一百万的选举，抽取几百张选票进行抽样，往往就足以完成一次成功审计。

州	Year	|C|	|C'|	N	LAM	ASN
New 南威尔士	2016	151	16	4,274,747	172,000（4%）	427（0.01%）
	2019	105	13	4,668,386	240,000（5.14%）	194（0.004%）
	2022	75	11	4,822,863	113,000（2.34%）	401（0.008%）
	2025	56	12	5,014,481	61,000（1.22%）	1,337（0.03%）
维多利亚	2016	116	14	3,477,543	13,000 (0.37%)	11,591 (0.33%)
	2019	82	12	3,744,918	44,000 (1.17%)	936 (0.02%)
	2022	79	12	3,834,047	211,000 (5.5%)	159 (0.004%)
	2025	65	13	4,129,837	33,000 (0.7%)	2,359 (0.06%)
昆士兰	2016	122	17	2,731,865	95,000 (3.48%)	270 (0.01%)
	2019	83	12	2,921,107	144,000 (4.93%)	208 (0.007%)
	2022	79	11	3,036,380	26,000 (0.85%)	2,450 (0.08%)
	2025	56	12	3,252,922	46,000 (1.41%)	896（0.03%）
西澳大利亚州 澳大利亚	2016	79	13	1,371,310	37,000（2.7%）	390（0.03%）
	2019	67	13	1,459,142	85,000 (5.82%)	181 (0.01%)
	2022	58	12	1,539,357	7,000 (0.45%)	5,118 (0.33%)
	2025	49	12	1,636,041	11,000 (0.67%)	3,265 (0.2%)
南澳大利亚	2016	64	9	1,064,808	200,000 (18.78%)	177 (0.01%)
	2019	42	12	1,104,303	3,000 (0.27%)	11,022 (1%)
	2022	51	12	1,137,357	47,000 (4.13%)	206 (0.02%)
	2025	40	12	1,174,613	36,000 (3.06%)	335 (0.03%)
塔斯马尼亚	2016	58	14	341,487	7,000 (2.04%)	485 (0.14%)
	2019	44	12	355,217	12,000 (3.38%)	315 (0.09%)
	2022	39	14	364,547	227 (0.06%)	91,136 (25%)
	2025	33	12	375,463	6,000 (1.6%)	625 (0.17%)

表6：澳大利亚联邦州的风险限制审计结果。

5 未来工作。

将基于图的方法应用于算法选举风险限制审计是一种新方法，在数学、算法和计算方面仍有广阔的探索空间。
一个直接的下一步是将局部零构造扩展到更高度的选举状态。就Meek选举而言，这将需要一个广义框架，用以求取更高度保留因子的偏导数 $\partial_{\theta_i} k$ 。当前的隐函数定理框架在不超过 $m = 5$时或许仍然可行，但一般而言，更好的做法可能是对（5）中的方程进行隐式微分，并以数值方法求解这些偏导数。这些更高度解的剧烈波动，可能使审计图更常包含非正则选举状态；而这些状态又可能在审计过程中被进一步扰动而变为退化，从而减少这些选举中可行的LAM。这已是我们在波特兰第3选区观察到的问题——较高的最优LAM有时会导致这样的选举状态：其中的抽样参数无法解出有限且为正的保留因子。在这种情况下，唯一可行的选择是降低LAM，直到所有顶点都足够接近正则。

另一个值得探索的方向，是将这种基于图的方法用于 WIGM 选举。这需要重新思考审计图的定义：由于在 WIGM 中，选举的时间顺序很重要，因此选举状态的获胜者集合必须包含每位获胜者当选时的有希望候选人集合信息。这样一来，图中的不同分支就较少会重新汇合到相同的顶点，因此审计图会变得更加繁茂。在每个有获胜者当选的选举状态中，都必须从审计图中开辟一个新分支，而且这个分支永远不会与其他分支重新汇合。

对精确时间顺序的这种依赖，或许会使 WIGM 选举总体上更不稳定——这正是我们在第1.1节的案例研究中观察到的情况——但 WIGM 在计算上的相对简便性或许能抵消这一点，因此长期来看，究竟哪种选举规则更可审计尚不明确。尤其是在多个获胜者当选时间非常确定的情况下，WIGM 可能比 Meek 更可审计。例如，在波特兰第1、2和3选区，首位获胜者当选时相对较晚，且是在获得大量转移票之后，这意味着其配额相当稳固。然而，在第4选区，Olivia Clark 的初始配额只略有盈余，因此很难在审计图中确定她当选的确切时间——在我们计算出的完整审计图中，有 4,097,797 个顶点对应她的当选；如果使用 WIGM 单票可转移制，每个顶点都必须开辟一个独立分支。

另一项算法挑战是找到一种统计严谨的过程，让我们能够同时淘汰多名候选人，从而“跳过”我们在第4.2节和第4.3节较大的审计图中遇到的淘汰云。同样，Meek 在结构上可能更适合这项任务：当获胜者有可能在淘汰云中途当选（波特兰第 4 选区就是如此）时，WIGM 似乎无法实现这样的捷径。

Meek选举中这种捷径的一种概述如下：将候选人集合划分为“典范获胜者”、“强候选人”和“弱候选人”。然后，只要有希望候选人集合包含所有典范获胜者，就通过统计学验证每个典范获胜者都击败每个弱候选人。这看起来很像 Blom、Ek 等人（2025年）所说的“永不落败（NL）”断言；或者，我们也可以比较获胜者的第一名选票与弱

候选人提及。如果我们能证明这一点，那么就可以确定，所有弱候选人都必定在所有典范获胜者之前被淘汰；并且我们知道，淘汰云之后唯一可能出现的顶点包括所有典范获胜者以及强候选人的某个子集；通过考察每一个这样的子集，我们可以将图初始化为“淘汰后云”状态。

对我们框架的一项数学简化，是设法同时界定所有高阶转移票的影响，从而应对我们预期在更高阶局部零假设中出现的参数数量激增。如公式（12）所示，构建二阶局部零值审计时已经涉及 17 个参数。尽管命题 3.5 表明，我们的审计所需的 ASN 仅与参数数量的平方根成正比 d，但我们预计参数数量会随度数呈组合式增长。因此，若要使 ASN 保持在合理范围内，就必须采取以下任一办法：1）改进第2.2节概述的超几何方差界定策略（这很有可能做到）；或 2）设法将所有高阶转移票的影响合并为一个最坏情况参数，避免逐一追踪所有高阶影响。先验地，我们有理由相信这件事可以做到——直观而言，高阶转移票对票差不确定性的影响最小，因为经由更多获胜者转移的选票会损失更多权重。不过，要找到合适的数学表述来证明这一点，可能颇具挑战。

仍然谈到数学方面的工作，我们最好能更准确地描述偏好档案投影需要具备哪些性质，才能使选举状态与退化状态「足够远」。只要方程组 $\vec{F}$（见式 (6)）的即时保留因子解位于解空间的某个连通分支中，且该分支上 $\vec{F}$ 的雅可比矩阵非奇异，我们的 Meek 审计统计框架才有依据。描述（并测试）满足这一标准所需的条件，将使这一审计框架更加严密。目前，我们能做的最好是核实：纳入审计图的所有二度选举状态中，至少有一位获胜者是稳固的；在这种情况下，选举状态不可能退化。但要审计席位更多的选举，显然需要更好的方法。

最后，一个值得探讨的思路是考虑其他选举规则集，将 Meek 和 WIGM 单票可转移制各自的优势结合起来。Meek 的优点是不受时间顺序影响，而 WIGM 规则的优点是计算简单。或许可以将这两项特点合理地结合为一种「混合」选举规则：例如，像 Meek 那样在每一轮重新计算转移值／保留因子，但校准过程只运行一次迭代，从而不必考虑其收敛性。这样的修改肯定仍需在一定程度上考虑时间顺序——为了处理第二位获胜者只有在获得第一位获胜者的转移票后才达到配额的情形，至少需要按照获胜者当选的顺序校准其转移值，也就是说，选举状态必须记录这一选举顺序。与 WIGM 相比，这样做仍有一项优势：无需记录每位获胜者当选时的待选候选人集合。在波特兰第 4 选区的例子中，这意味着导致 Olivia Clark 当选的全部 4,097,797 条边，最终仍可按时间顺序合并为同一个选举状态。

尽管每一轮次重新计算配额虽显优雅，但为保持混合规则简洁，最好也加以避免。经此修改的单记可转移投票规则仍将足够灵活，使审计图在如我们的案例研究这类情形中不致发散，同时避免我们在第2.4节中指出的计算挑战——转移值对偏好档案投影的依赖将更为清晰，并且必将消除出现退化选举状态的可能性。

参考文献

Bartroff, Jay、Gary Lorden与Lijia Wang（2022年4月28日）。超几何成功次数的最优快速置信区间。数字对象标识符：10.48550/arXiv.2109.05624。arXiv：2109.05624[stat]。Berger, Roger L.（1982年）。“多参数假设检验与验收抽样”。载于：技术计量学第24卷第4期。出版者：[Taylor & Francis, Ltd.、美国统计协会、美国质量学会], 第295–300页。国际标准连续出版物号：0040-1706。数字对象标识符：10.2307/1267823。Blom, Michelle、Alexander Ek、Peter J. Stuckey、Vanessa Teague与Damjan Vukcevic（2025年3月19日）。 *3+*单记可转移投票选举的席位风险限制审计。数字对象标识符：10.48550/arXiv.2503.14803。arXiv：2503.14803[cs]。Blom, Michelle、Peter J. Stuckey与Vanessa Teague（2019年10月29日）。*RAIRE*：即时决选投票选举的风险限制审计。数字对象标识符：10.48550/arXiv.1903.08804。arXiv：1903.08804[cs]。Casella, George与Roger L. Berger（2002年）。统计推断。Thomson Learning。共692页。国际标准书号：978-0-534-24312-8。Ek, Alexander、Philip B. Stark、Peter J. Stuckey与Damjan Vukcevic（2023年）。“即时决选投票选举的自适应加权审计：AWAIRE”。载于：第14230卷，第35–51页。数字对象标识符：10.1007/978-3-031-43756-4_3。arXiv：2307.10972[stat]。Fiat, A.、D.P. Foster、H. Karloff、Y. Rabani、Y. Ravid与S. Viswanathan（1991年10月）。“分层图遍历的竞争算法”。载于：*[1991]* 第*32*届计算机科学基础年度研讨会论文集。[1991] 32届计算机科学基础年度研讨会，第288–297页。数字对象标识符：10.1109/SFCS.1991.185381。Graham-Squire, Adam与David McCune（2024年11月）。“苏格兰两场多席位选举中的悖论奇事”。载于：《数学公报》第108卷第573期，第492–506页。国际标准连续出版物号：0025-5572、2056-6328。数字对象标识符：10.1017/mag.2024.118。arXiv：2305.20078[econ]。Hill, I.、B. Wichmann与Douglas Woodall（1987年6月1日）。“算法123：Meek方法的单记可转移投票”。载于：《计算机杂志》第30卷，第277–281页。数字对象标识符：10.1093/comjnl/30.3.277。Humphreys, John H.（1911年）。比例代表制：选举方法研究。Lindeman, Mark与Philip B. Stark（2012年9月）。“风险限制审计简明导论”。载于：*IEEE*《安全与隐私》第10卷第5期，第42–49页。国际标准连续出版物号：1540-7993。数字对象标识符：10.1109/MSP.2012.56。Meek, B. L.（1969年）。“可转移投票的新方法”。载于：《数学与人文科学》第25卷，第13–23页。国际标准连续出版物号：2970-4472。Stark, Philip B.（2020年3月24日）。半平均零假设集合生成风险限制审计：*SHANGR*

LA.

数字对象标识符：10.48550/arXiv.1911.10035。arXiv：1911.10035[stat]。

波特兰 D1 审计图

