arXiv:2602.04571v1 [math.CO] 4 Feb 2026

线性中山代数的戴克路径、构型空间与多面体

VERONICA CALVO CORTES 和 HADLEIGH FROST

Abstract. 我们提出一种组合模型，用于描述与 $\mathbb{C}A_n$（即线性定向 A_n 箭图的路代数，也就是上三角矩阵代数）的商代数相关联的构型空间和多面体。这些商代数称为线性中山代数。第二作者及其合作者最近为更一般的代数引入了这类构型空间。在这一特殊情形下，我们给出初等证明和显式的组合构造。我们从一条戴克路径定义三个相关对象：一个有限维代数、一个仿射代数簇和一个多胞体。此外，我们的构造具有自然性：戴克路径偏序集中的每个关系都会给出相应对象之间的一个态射。

1. Introduction

The n-维结合多面体 Assoc(n) 是组合学和拓扑学中的重要对象 [17]，也是正几何领域的重要对象 [1]。描述这个多胞体面格的一种模型，是将其每个面标记为一个 $n+3$ 边形中的一条弦；低维面则由两两不交叉的弦的子集所索引。多边形中的弦模型还可用于定义“二面体坐标”（见 [7]），以描述另一个重要对象：$\mathbb{P}^1$中 $n+3$ 个标记点的模空间 $\mathcal{M}_{0,\ n+3}$。事实上，我们可以将 $\iota : \mathcal{M}_{0,\ n+3} \to (\mathbb{C}^*)^{n(n+3)/2}$ 嵌入到一个代数环面中，其坐标为 u_{ij}，其中 ij 是我们的 $n+3$ 边形中的一条弦。每个 u_{ij} 都是 $\mathbb{P}^1$ 中点的一个特定交比。刻画 $U_n^\circ := \iota(\mathcal{M}_{0,\ n+3})$ 的方程称为 [7, 14]，的“u-方程”，它们是交比恒等式的一种实例（见 [15]）

$$u_{ij} + \prod_{\substack{kl \\ kl \text{ crosses } ij}} u_{kl} = 1. \tag{1}$$

$\mathbb{C}^{n(n+3)/2}$ 中 U_n°的仿射闭包，记作 U_n，是一个有趣的仿射簇。特别地，正部分 $U_n \cap \mathbb{R}_+^{n(n+3)/2}$ 中除子 $u_{ij} = 0$ 的相交偏序集，恰好是 Assoc(n) 的面偏序集。观察到 U_n 同构于某个适当实现的 Assoc(n) 所对应的射影环面簇中的一个开仿射子簇，即可得出这一结论，参见 [4]。

如今，结合多面体只是这一现象诸多已知例子中的第一个，而这一现象并不局限于经典交比恒等式。[3] 证明，类似的构造可与有限型丛代数的广义结合多面体相关联。此外，[2] 将这一结论推广到了任意有限表示型 代数 $\mathcal{A}$。对于这些代数中的每一个，$\mathcal{A}$，其构型空间这一仿射代数簇 $U_{\mathcal{A}}$由一组如下形式的多项式方程定义

$$u_X + \prod_{Y \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}} u_Y^{c(X,Y)} = 1, \qquad X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}, \tag{2}$$

对于一个具有指标集 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 的有限变量集，以及由代数决定的某种相容度 $c(X,\ Y) = c(Y,\ X) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。在物理学中，这些簇定义了弦积分，即对这些簇的正部分 $U_{\mathcal{A}}^{\geq 0}$ 上的积分。这些是亚纯函数，其性质源自 $U_{\mathcal{A}}$ 的性质，详见 [4]。

在本文中，我们给出一个组合模型，用以理解这些构形空间对一族代数的推广。我们关注线性定向 A_n 箭图的路代数的商代数，亦称线性中山代数。与结合多面体情形类似，我们可以完整地把方程（2）图示出来。

1.1. 线性商代数。 我们将 $\mathbb{C}A_n$ 记为线性定向A_n 箭图的路代数。这不过是以路的集合p_{ij}、$1 \le i \le j \le n$为 $\mathbb{C}$-基的代数，其中p_{ij} 是从节点 j 到节点 i的有向路径。乘法由路的拼接给出，从而当 $j \neq k$ 且$p_{ij}p_{jk} = p_{ik}$时有 $p_{ij}p_{kl} = 0$ 。该乘法法则与 $n \times n$ 单位矩阵 E_{ij} （$i \le j$）的矩阵乘法相同，而这些单位矩阵构成上三角矩阵代数的一组基。有些读者或许更愿意把 $\mathbb{C}A_n$ 看作这个矩阵代数。

本文研究的是商代数

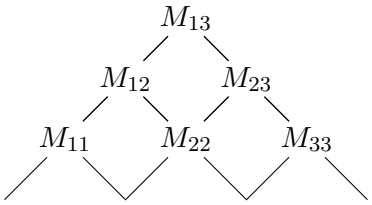
$$\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I$$

对应双边理想 I （见第2.1节）。对于每个商代数，我们都给出了“构型空间” $U_{\mathcal{A}}$的一个明确的组合定义。它是一个维数为 n的仿射簇，以及一个 n维多胞体 $P_{\mathcal{A}}$。我们的主要结果涉及 $U_{\mathcal{A}}$ 和 $P_{\mathcal{A}}$的性质。出发点是*Dyck* 路径图的组合学。

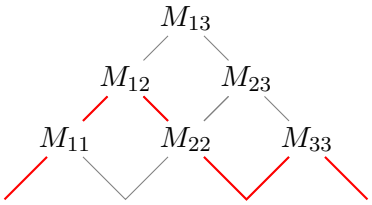
事实上，双边理想 $I \trianglelefteq \mathbb{C}A_n$以及由此得到的商代数 $\mathcal{A}$与步数为 $2n$ 的戴克路径集合一一对应（命题2.3）。这种组合双射自然源于这些代数的模的一幅简单图示。考虑线性定向的A_3 箭图，其方向从右向左，

$$1 \xleftarrow{\alpha_1} 2 \xleftarrow{\alpha_2} 3.$$

不可分解的 $\mathbb{C}A_3$-模可以按其支撑来标记，例如 $M_{12} = \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$，我们将这些模排列在一个三角网格中（Auslander-Reiten 箭图）：



理想 $I \trianglelefteq \mathbb{C}A_3$ 的选取由画在同一网格中的一条 Dyck 路径编码。例如，下方红色的 Dyck 路径



对应于理想 $I = \langle \alpha_2 \rangle$：位于 Dyck 路径上方的模 M_{13} 与 M_{23}，恰好是那些并非商代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_3/I$ 的不可分解模的模。

1.2. 结果概要。 固定一条 Dyck 路径 D 及其对应的商代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I$。从 Dyck 路径图出发，我们定义：

（1） 一个多胞体 $P_{\mathcal{A}}$ （方程（8）），（2） 一个指标集 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ （定义 3.1），以及

（3） 相容性与不相容性的概念 关于对 X，$Y \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ （定义 3.2）。

我们强调，这些定义具有组合学色彩。例如，$\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 是 Dyck 路径 D 的各步所成的集合，连同网格图中位于其下方的方格。

指标集 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 标记仿射坐标 u_X ($X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$)，这些坐标位于我们定义构型空间 $U_{\mathcal{A}}$的仿射空间中。刻画 $U_{\mathcal{A}}$ 的方程由配对 X上的相容规则给出 $Y \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ （定义 3.3）。我们证明，非负部分（$U_{\mathcal{A}}$）$_{\ge 0}$ 的分层由 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$的两两相容子集给出，并按包含关系排序（命题3.8）。

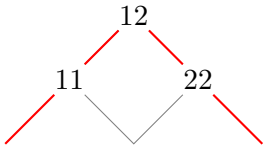
多胞体 $P_{\mathcal{A}}$ 被定义为与网格中位于 *Dyck* 路径之上或之下 的点 D 相关联的单形的闵可夫斯基和（见下文 1.1 中的例子）。将其视为 $P_{\mathcal{A}}$的环面簇的动量多面体，$X_{P_{\mathcal{A}}}$，会很有帮助；我们证明 $U_{\mathcal{A}}$ 是其中的一个仿射开集

环面簇（定理 4.6）。特别地，我们通过将 $(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$识别为 $(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$ 的正部分，证明 $P_{\mathcal{A}}$ 的面格与 $(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$的分层偏序集相同（推论 4.7）。然而，我们在第 $P_{\mathcal{A}}$ 5节以纯粹组合的方式研究这些多面体。按照 Postnikov 的定义，它们并不是广义置换多面体 [16]，，但我们可以用类似的方法研究它们。特别地，我们证明 $P_{\mathcal{A}}$ 是一个单纯多面体（命题 5.5）。

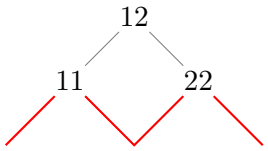
例 1.1. 我们以线性定向的 A_2 箭图为例，说明这些定义。

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2.$$

长度为 2 的戴克路径有两条： D （一个峰）和 D （一个谷点）。 D 对应于平凡理想 $I = \emptyset$ 和完全路径代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_2$。而 D 对应于理想 $I = \langle\alpha\rangle$ 和商代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_2/\langle\alpha\rangle$。我们在下面的网格图中绘出这些戴克路径：



(A) 代数 $I = \emptyset$的 Dyck 路径 D。



(B) 代数 $I = \langle\alpha\rangle$的 Dyck 路径 D。

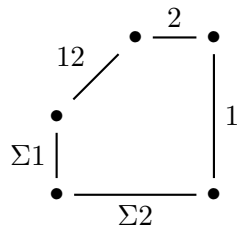
相应的动量多面体 $P_{\mathcal{A}}$ 和 $P_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 可以利用这些图定义为闵可夫斯基和。网格图中的每个节点都标记为一个不可分解的 $\mathcal{A}$-模， M_{11}、 M_{22}和 M_{12}。我们为其中每一个关联一个多项式，

$$F_{11} = 1 + y_1, \qquad F_{22} = 1 + y_2, \qquad F_{12} = 1 + y_1 + y_1y_2,$$

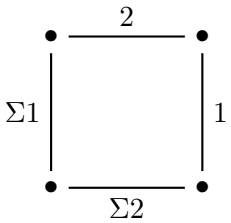
称为 F-多项式 （例如参见 [2]）。多胞体 $P_{\mathcal{A}}$ 和 $P_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 通过对每个 M_{ij} 满足 位于相应 *Dyck* 路径上方或路径上的 Newt(F_{ij}) 取闵可夫斯基和得到：

$$P_{\mathcal{A}} = \mathrm{Newt}(F_{11}) + \mathrm{Newt}(F_{22}) + \mathrm{Newt}(F_{12}), \qquad P_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \mathrm{Newt}(F_{11}) + \mathrm{Newt}(F_{22}).$$

这分别给出了一个五边形和一个正方形：



(A) 多胞体 $P_{\mathcal{A}}$。



(B) 多胞体 $P_{\widetilde{\mathcal{A}}}$。

每个多胞体的面均由相应 Dyck 路径的步集合，以及位于 Dyck 路径下方的菱形标记。我们将路径的上升步记为 1、2、.....，并将 $\Sigma 1$、 $\Sigma 2$、.....记为下降步；将 M_{12} 下方的菱形标记为 12。于是，多胞体 $P_{\mathcal{A}}$ 和 $P_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 的面由（定义 3.1）标记为

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \{1, 2, \Sigma 1, \Sigma 2, 12\}, \qquad \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \{1, 2, \Sigma 1, \Sigma 2\}.$$

簇 $U_{\mathcal{A}}$ 和 $U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 分别由 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}}$ 和 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{A}}}}$中的仿射方程给出。对于 $U_{\mathcal{A}}$，我们引入变量 u_X （$X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$），方程为

$$u_{12}+u_1u_{\Sigma 2} = 1, \qquad u_1+u_{12}u_{\Sigma 1} = 1, \qquad u_2+u_{\Sigma 1}u_{\Sigma 2} = 1, \qquad u_{\Sigma 1}+u_1u_2 = 1, \qquad u_{\Sigma 2}+u_2u_{12} = 1.$$

对于 $\mathcal{A}$，我们有变量 $\widetilde{u}_X$ ($X \in \mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{A}}}$)，而 $U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 由方程定义

$$\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_{\Sigma 1} = 1, \qquad \widetilde{u}_2 + \widetilde{u}_{\Sigma 2} = 1.$$

$U_{\mathcal{A}}$ 和 $U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 是二维簇。$U_{\mathcal{A}}$ 的正部分有五条边界， $U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 的正部分有四条边界，也就是说，它们在组合上分别是一个五边形和一个正方形。

固定长度的戴克路径构成一个自然的偏序集（即 $D \le D'$ 当路径 D 位于 D'之上或与其重合，或者~位于其下方时）。对于一对有序的戴克路径 $D \le D$，它们对应的理想按包含关系排序 $I_{\widetilde{D}} \supseteq I_D$。在定理 3.6 中，我们说明，这种偏序结构也体现在~构形空间 $U_{\mathcal{A}}$之中。对于任意关系 $D \le D$，我们定义一个坐标环的单项式映射 $\phi\colon\ \mathbb{C}[U_{\widetilde{\mathcal{A}}}] \to \mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}]$，它诱导出一个满射 $\phi^*\colon\ U_{\mathcal{A}} \to U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$（定义 3.5）。单项式映射 ϕ可以根据戴克路径图形来定义：只需观察位于~和 D之间的 D 菱形即可。我们证明，映射 ϕ 忠实地实现了偏序结构。

Exam例 1.2. 在上面的 A_2 例子中，簇 $U_{\mathcal{A}}$ 和 $U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 通过映射相关联

$$\phi : \widetilde{u}_1 \mapsto u_1, \qquad \widetilde{u}_2 \mapsto u_2 u_{12}, \qquad \widetilde{u}_{\Sigma 1} \mapsto u_{12} u_{\Sigma 1}, \qquad \widetilde{u}_{\Sigma 2} \mapsto u_{\Sigma 2},$$

并且容易验证，拉回 ϕ^* 定义了一个到 $U_{\widetilde{\mathcal{A}}}$上的满射。

上文提到的环面观点为这些单项式映射提供了另一种解释。回顾一下，我们将 $U_{\mathcal{A}}$ 识别为射影环面簇中一个动量多面体为$P_{\mathcal{A}}$ 的仿射开集（定理4.6）。在此识别下，与 Dyck 路径偏序集中的关系相对应的单项式映射可解释为环面吹下映射（命题 4.8）。

1.3. **概要**。 第 2 节建立 Dyck 路径与 A型商代数之间的对应关系。第 3节定义每条 Dyck 路径对应的构型空间 $U_{\mathcal{A}}$，并研究它们之间的单项式映射。本节中，命题3.8 刻画了 $U_{\mathcal{A}}$的坐标除子。第 4 节构造 F-多项式参数化 $U_{\mathcal{A}}$（定理 4.2），并研究环面嵌入。第 5 节对多面体 $P_{\mathcal{A}}$ 及其面格给出完整的组合描述，并特别证明它们是单纯的。

致谢。感谢 Hugh Thomas、Bernd Sturmfels、Dhruv Sidana 和 Sagnik Das 提供的宝贵意见。HF 获得了 Sivian Fund 的资助。两位作者还获得了欧盟（ERC、UNIVERSE PLUS，101118787）的额外资助。[1]

2. Quotient Algebras and Dyck Paths

本节将为本文建立组合模型。我们首先回顾一些适用于本文情形的箭图表示论（详细阐述请参见 [5, 10] ）。

2.1. **型 A 路代数**。 我们的出发点是线性定向的 A_n 箭图：

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \cdots \longleftarrow n-1 \longleftarrow n.$$

现在考虑该箭图中的路：我们用 e_1，……，e_n 表示停留在顶点处的平凡路径，用 α_i，$1 \le i \le n-1$ 表示有向边 $i+1 \to i$。因此，所有非平凡路径都是相容边 $\alpha_j \alpha_{j-1} \cdots \alpha_i$的连接，其中边对为 $1 \le i \le j \le n-1$。A_n的路代数记作 $\mathbb{C}A_n$，它是一个以 A_n 的所有路为基、乘法为连接的代数。

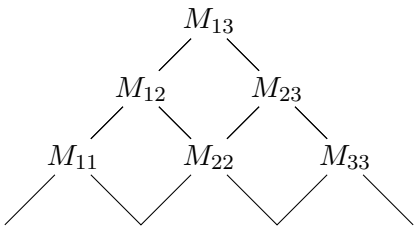
$\mathbb{C}A_n$ 的模 M 等价于 A_n的箭图表示。 A_n 的箭图表示（具有如上所述的线性定向）是：对每个顶点给定一个向量空间 V_i，并对每条箭头给定一组线性映射 $f_i : V_{i+1} \to V_i$。若 M 不能写成非平凡模的直和，则称其为不可分解的。我们可以在同构意义下显式描述 $\mathbb{C}A_n$ 的所有不可分解模。它们由在 A_n 中选取一组相邻顶点并赋予一维向量空间 $V_i = \mathbb{C}$而得到，而所有其他顶点均为零。若 V_i，V_{i+1} 均为非零，则映射 f_i 由恒等映射给出。我们将这些模记为$M_{i,\ j}$，对于$1 \le i \le j \le n$。作为箭图表示，$M_{i,\ j}$ 是

$$0 \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} \underbrace{\mathbb{C}}_{i} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathbb{C} \xleftarrow{\mathrm{id}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{id}} \underbrace{\mathbb{C}}_{j} \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} 0.$$

[1]不过，文中表达的观点和意见仅代表作者的观点和意见，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会执行局的立场。欧盟和拨款机构均不对这些观点和意见承担责任。

我们将绘制示意图，将这些模放置在一个网格中，其中每个模$M_{i,\ j}$位于位置$(i,\ j)$。为方便起见，我们将该网格画成对角线上方的三角形。例如，A_3的不可分解模为

(3)



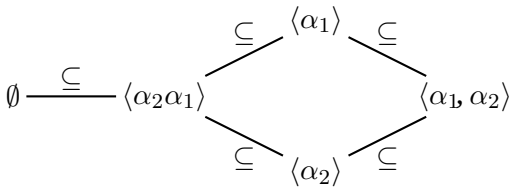
按这种方式绘制，这些网格图与模范畴的*Auslander-Reiten* 箭图 绘制惯例一致。

我们关注的代数族，即线性中山代数，恰好是$\mathbb{C}A_n$的商代数。为此，我们考虑双边理想$I \trianglelefteq \mathbb{C}A_n$。令$\mathcal{A}$为这样一个商代数$\mathbb{C}A_n/I$。$\mathcal{A}$-模用箭图语言来说，对应于 带关系箭图的表示，可记为一对(A_n, I)。（参见[5, 第二章和第三章]。）

例 2.1。考虑$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$。路代数$\mathbb{C}A_3$有六个不可分解模，

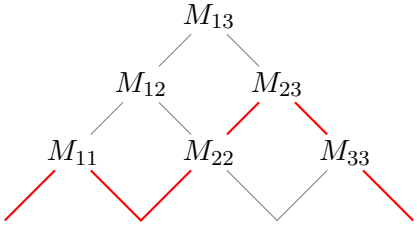
$M_{1,1}$	$\mathbb{C} \leftarrow 0 \leftarrow 0$	$M_{2,2}$	$0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$
$M_{1,2}$	$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$	$M_{2,3}$	$0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$
$M_{1,3}$	$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$	$M_{3,3}$	$0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C}A_3$有五个不含幂等元的双边理想，它们按包含关系自然构成一个偏序集：



每个商代数$\mathbb{C}A_3/I$的不可分解模都对应于$\mathbb{C}A_3$的六个不可分解模的子集。取$I = \langle\alpha_2\alpha_1\rangle$和$\mathcal{A} = \mathbb{C}A_3/I$。模$M_{1,\ 3}$不满足$I$的关系：对应于$\alpha_1$和$\alpha_2$的两个线性映射在$M_{1,\ 3}$中的复合是恒等映射（即非零）。所有其他$M_{i,\ j}$模都满足这些关系，因此对应于$\mathcal{A}$-模。

2.2. Dyck 路径与组合模型。现在我们给出一种使用 Dyck 路径构造所有商代数$\mathbb{C}A_n/I$并识别其不可分解模的组合方法。对我们而言，长度为n的 Dyck 路径是用于表示$\mathbb{C}A_n$的不可分解模的网格图中的一条格路（例如，关于$n = 3$，参见（3））。每条 Dyck 路径都从左侧位置 (1, 0) 出发，在右侧位置$(n + 1, n)$结束，并且始终位于基线之上。每一步要么是上升步，即$(i, j) \to (i, j + 1)$，要么是下降步，即$(i, j) \to (i + 1, j)$。例如，我们可以为$n = 3$画出如下 Dyck 路径（以红色显示）：



记$\mathcal{D}_n$为所有长度为n的戴克路径的集合。$\mathcal{D}_n$是一个偏序集，其偏序关系定义为：$D \leq D'$当且仅当D位于D'之上或与其重合。例如，$\mathcal{D}_3$是图3中的偏序集。图3 与例2.1 中的偏序集相似，这并非巧合。事实上，对每条戴克路径$D \in \mathcal{D}_n$，我们都可以在$\mathbb{C}A_n$中关联一个理想I_D，其定义如下。.....的生成元

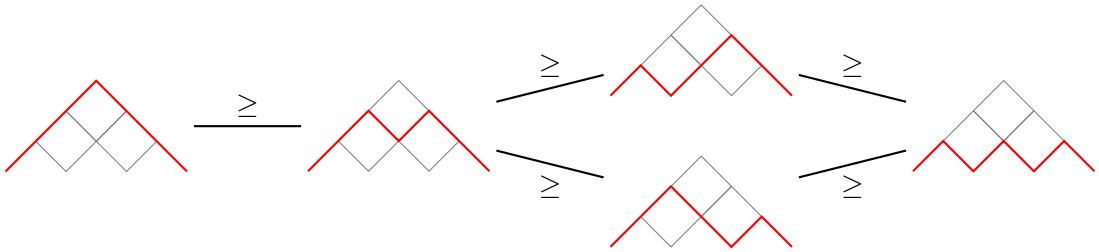


FIGURE 3. $n = 3$ 的 Dyck 路径偏序集。

I_D 对应于 D的谷点，即那些前一步为下降步、后一步为上升步的点。如果 (a, b) 是 D的一个谷点，我们考虑 $b + 1$ 到 $a - 1$ 在 A_n箭图中的路径，该路径在路径代数 $\mathbb{C}A_n$中定义元素 $p_{a,b} := \alpha_b \cdots \alpha_{a-1}$。然后令 I_D 为由这些路径生成的双边理想，

$$I_D := \langle p_{a,b} \,|\, (a, b) \text{ is a valley of } D \rangle. \tag{4}$$

例 2.2。在 $n = 3$ 网格中，恰有三个格点可以作为 Dyck 路径的谷点。它们是 (2，1)、(2，2) 和 (3，2)，分别对应路径 $p_{2,1} = \alpha_1$、$p_{2,2} = \alpha_2\alpha_1$和 $p_{3,2} = \alpha_2$。据此，图 I_D 中各条 Dyck 路径所定义的理想3恰好对应于例 $\mathbb{C}A_3$ 2.1中的理想偏序集。

我们在以下命题中将 $\mathbb{C}A_n$ 中的理想与 $\mathcal{D}_n$ 中的 Dyck 路径之间的对应关系正式表述为偏序集同构。

命题 2.3。映射 $D \mapsto I_D$ 是 $(\mathcal{D}_n, \geq)$ 与 $\mathbb{C}A_n$ 的不含幂等元的双边理想（按包含关系排序）之间的偏序集同构。此外，$\mathbb{C}A_n/I_D$ 的不可分解模与 D 上及其下方的非对角点一一对应。

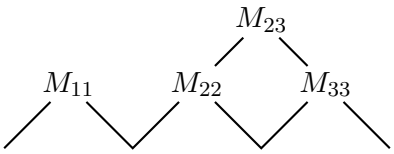
证明。我们来证明第一部分。注意，我们可以将理想 $I \subset \mathbb{C}A_n$ （不含幂等元）等同于 A_n 中属于 I 的路 $\mathcal{P}_I$ 的集合（这尤其会生成 I）。考虑路的偏序集 $(\Pi, \preccurlyeq)$，其序为子路的自然序。与理想对应的路的集合满足以下性质：

$$\text{If } \alpha_i \cdots \alpha_j \in \mathcal{P}_I \text{ then any concatenation } \alpha_{i'} \cdots \alpha_{j'} \text{ with } i' \leq i \text{ and } j \leq j' \text{ is also in } \mathcal{P}_I.$$

因此，$\mathcal{P}_I$ 是 $(\Pi, \preccurlyeq)$ 的上集。此外，$\mathbb{C}A_n$ 的理想偏序集同构于 Π 的序理想偏序集（采用上集而非通常的下集约定）。注意，我们可以将每条路 p 对应于一个二元组 (i, j)，用以标明该路起点与终点的顶点。子路关系 $\preccurlyeq$ 可转化为：$(i, j) \preccurlyeq (i', j')$ 当且仅当 $i \geq i'$ 且 $j' \geq j$。于是，偏序集同构可由 [18, 第 3 节。3] 得出，其中证明了 $(\mathcal{D}_n, \geq)$ 是此类二元组的序理想偏序集。

为证明第二部分，注意到，$\mathbb{C}A_n/I_D$ 的不可分解模恰好是满足 I_D 中关系的 $\mathbb{C}A_n$ 的不可分解模。设 $p = \alpha_l\alpha_{l-1} \cdots \alpha_k \in \mathbb{C}A_n$。当且仅当 $i \geq k$ 或 $j \leq l + 1$ 时，模 $M_{i,j}$ 满足关系 $p = 0$。于是，$M_{i,j}$ 是一个不可分解模，当且仅当对于 D 的所有谷点，例如 (a, b)，都有 $i \geq a$ 或 $j \leq b$；这等价于要求 $M_{i,j}$ 位于 D 上或下方。□

鉴于命题 2.3，给定一条 Dyck 路径 D，绘制一幅仅包含位于 D上或下方的点的网格图会更方便。这些点对应于 $\mathbb{C}A_n/I_D$的不可约模。例如，取理想 $I = \langle \alpha_1 \rangle$，我们绘制相应的 Dyck 路径 D，它在 (2，1) 处有一个谷点；于是 $\mathbb{C}A_3/\langle \alpha_1 \rangle$ 的 4 个不可分解模为



我们将这样的图称为截断网格。

3. Monomial Maps and u equations

本节介绍线性中山代数的构型空间。回顾上一节，我们看到商代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I_D$ 与戴克路径 D 一一对应。我们将利用戴克路径的组合学，为每个 $\mathcal{A}$ 关联一个仿射簇 $U_{\mathcal{A}}$。此外，我们证明从 $U_{\mathcal{A}}$ 到 $\mathcal{A}$ 的赋值具有函子性：每个代数商 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，或者等价地，每一对理想 $I \subset J$，都对应一个满射映射 $U_{\mathcal{A}} \to U_{\mathcal{B}}$。这些满射映射实现了上一节讨论的理想／戴克路径偏序集。

3.1. **仿射簇**。 固定 Dyck 路径 D 及其对应的商代数 $\mathcal{A}$如式 (4)所示。我们将考察的簇 $U_{\mathcal{A}}$ 自然地位于仿射空间 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}}$ 中，其坐标 u_X由定义 3.1 中给出的集合 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 作为指标集。

定义 3.1。 设 D 是一条 Dyck 路径，且 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I_D$。我们定义指标集 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，它由 D 的各步以及截断网格中位于 D 下方的所有菱形组成。

为方便起见，我们按顺序将 D 的上升步标记为 1、2、.....、n，并将 D 的下降步标记为Σ1、Σ2、.....、Σn。下方的菱形以其顶角的坐标作为标签。例如，图 4展示了截断网格图中 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 的标签，其中 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_5/\langle\alpha_2\alpha_1\rangle$。

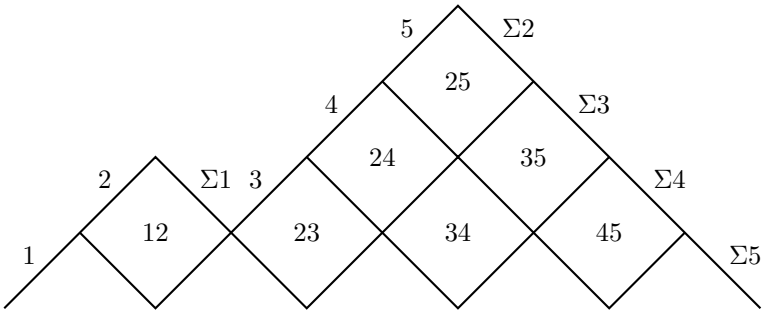


Figure 4. $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 的指标集由 Dyck 路径 D（标记为 1，2，3，4，5 和 Σ1，Σ2，Σ3，Σ4，Σ5）的各步以及 Dyck 路径下方的菱形（标记为 ij）给出。

注。 用表示论的语言来说，$\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 是 $K^b(\mathrm{proj}\mathcal{A}$ 中二项投射复形范畴的不可分解对象所成的集合。Dyck 路径的每个上升步对应于该范畴中的一个投射对象（$0 \to P$），其中 P 是一个投射 $\mathcal{A}$-模。每个下降步对应于一个内射对象（$P \to 0$）。每个菱形（i，j）对应于一个非投射 $\mathcal{A}$-模的二项投射表示（$P \to P'$）。详情请参见 [2] 。

定义 3.2. 给定两个元素 $X, Y \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，若满足以下条件，则称它们相容

- $X = (i, j)$ 和 $Y = (k, l)$ 相容，当且仅当区间 $[i, j]$ 和 $[k, l]$ 是–可比较的，$[i, j] \subset [k, l]$ 或 $[i, j] \supset [k, l]$，或–不相交，$[i, j] \cap [k, l] = \emptyset$。
- $X = (i, j)$ 和 $Y = (k)$ 相容，当且仅当 $k < i$ 或 $j \leq k$。
- $X = (i, j)$ 和 $Y = (\Sigma k)$ 相容，当且仅当 $k \leq i$ 或 $j < k$。
- $X = (i)$ 和 $Y =(\Sigma j)$ 相容，当且仅当 $i < j$ 或在 D中，下降步 Σj 先于上升步 i 。

在截断网格图中，判断哪些元素对相容的规则有着简单的几何解释。对于网格中的任意菱形（i, j），我们可以在其左右两侧分别画出尽可能大的四边形。这些四边形中的任意菱形都与（i, j）不相容；左侧四边形中的任意上升步，或右侧四边形中的任意下降步，也都与（i, j）不相容。类似地，对于任意上升步（i），我们在其右侧画出尽可能大的四边形；对于任意下降步（Σi），我们在其左侧画出尽可能大的四边形。接着，这些光线图便确定了所有相容的元素对。

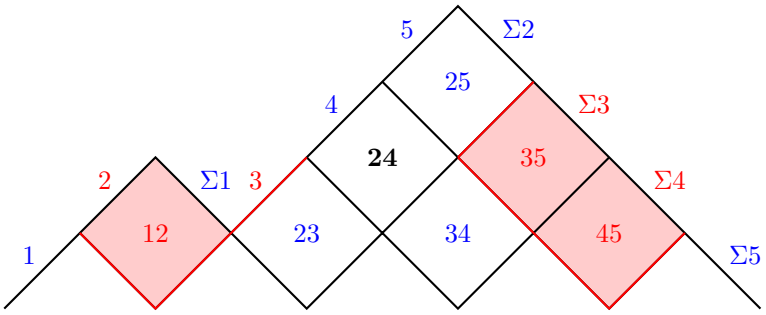


FIGURE 5. 对于 $\mathcal{A}=\mathbb{C}A_5/\langle\alpha_1\alpha_2\rangle$ 和 $X=24\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，相容的 $Y\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$（对于这些对象，$c(X,Y)=0$）以蓝色显示，不相容的则以红色显示。

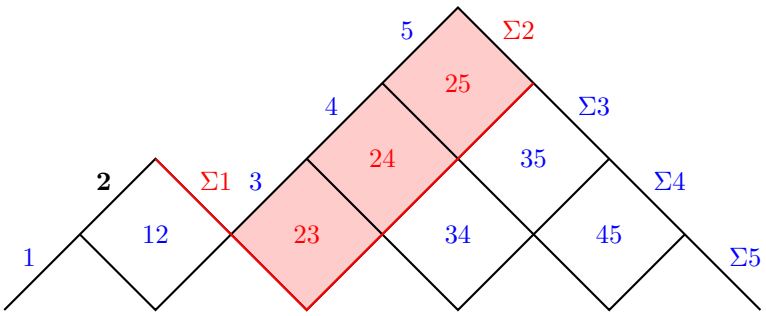


FIGURE 6. 对于 $\mathcal{A}=\mathbb{C}A_5/\langle\alpha_1\alpha_2\rangle$ 和 $X=2\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，相容的 $Y\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 以蓝色显示，不相容的则以红色显示。

现在，我们利用 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 中元素的相容性，将 $\mathcal{A}$ 的构型空间定义为满足 $|\mathcal{I}_{\mathcal{A}}|$ 个方程的解集。我们将同时考虑具有相同生成元的仿射簇 $U_{\mathcal{A}}$和非常仿射簇 $U_{\mathcal{A}}^{\circ}$，这会很有用。

定义 3.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个线性中山代数，且 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 如定义 3.1所述。 的构型空间 是仿射簇 $U_{\mathcal{A}}\subset\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}}$，由以下 u个方程给出：

$$u_X+\prod_{Y\text{ incompatible with }X}u_Y=1,\qquad \text{for } X\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}. \tag{5}$$

我们用 $U_{\mathcal{A}}^{\circ}\subset(\mathbb{C}^*)^{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}}$ 表示由同一组方程定义的非常仿射簇。

我们将在第 3 节看到，即使这些簇由平方方程组定义，$U_{\mathcal{A}}$ 和 $U_{\mathcal{A}}^{\circ}$ 也是不可约的，且维数为 n。此外，它们的消失理想恰由 u个方程生成。

例3.4。 考虑 $\mathcal{A}=\mathbb{C}A_5/\langle\alpha_2\alpha_1\rangle$。该代数对应的 Dyck 路径和截断网格如图 5 和 6所示。图 5 展示了与 $Y\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 不相容的 $X=(2,4)$。位于 (2,4) 左右两侧的两个大四边形以红色标出。相应的 u-方程为

$$u_{24}+u_2u_3u_{12}u_{35}u_{45}u_{\Sigma3}u_{\Sigma4}=1.$$

图 6 展示了 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 中与 $X=$(2) 不相容的元素，以及相应的 u-方程

$$u_2+u_{23}u_{24}u_{25}u_{\Sigma1}u_{\Sigma2}=1.$$

注。给定 X、$Y\in\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，我们可以将它们的相容度定义为：若 X 与 Y 相容（如定义 3.2 中所述），则为 $c(X,Y)=0$；否则为 $c(X,Y)=1$。从表示论的角度来看，相容度 $c(X,Y)$ 由导出范畴 $K^b(\text{proj}\mathcal{A})$ 中 Hom群的维数给出。如 [2], 中所定义，它等于 $c(X,Y)=\dim(\text{Hom}(X,\Sigma Y))+\dim(\text{Hom}(Y,\Sigma X))$，其中 Σ 对应于将复形按次数平移 -1。

我们的构形空间推广了二元几何的两个有趣例子。具体而言，是二面体坐标中的部分紧化（参见 [7, 15]），以及 pell 空间（参见

∼[6]）。要得到 $\mathcal{M}_{0,n}$，需要考虑 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n$ 完全路径代数；对于 pell 空间，$\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I$ 其中 I 是由所有长度为二的路径生成的理想。

注（多边形的弦字典）。我们可以将网格的标记转换为 $n+3$ 边形中的弦这一表述。在 $\mathcal{M}_{0,n}$ 以及结合多面体的簇实现这一背景下，这种表述可能更为熟悉。指标集 $\mathcal{I}_{\mathbb{C}A_n}$ 由标记 (i)，(Σi)（对应$i = 1, \ldots\ldots, n$）以及 $(i,\ j)$（对应 $1 \le i < j \le n$）给出。它们各自按照以下方式对应于一个 $n+3$ 边形中的一条弦，该多边形的顶点按顺序编号为 $1, \ldots\ldots, n+3$

$$(i) \leftrightarrow 1, i+1 \qquad (\Sigma i) \leftrightarrow i+1, n+3 \qquad (i,j) \leftrightarrow i+1, j+2.$$

例如，对于 $n = 3$ 图 7 （A）展示了以六边形中的弦为标记的网格。将定义 3.2 中的相容规则转换为弦的表述，恰好得到弦不相交条件。图 7 展示了弦 24 的这一情形。

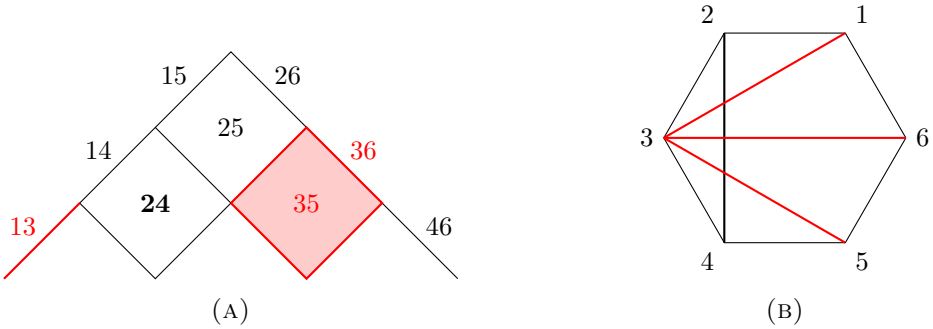


FIGURE 7. 图 $\mathbb{C}A_2$ （A）中的网格可以用正六边形的弦（B）来标记。采用这种标记时，两条弦相容，当且仅当它们不相交。

∼对于 $\mathbb{C}A_n$，众所周知，我们所考虑的构形空间，即 $\mathcal{M}_{0,\ n+3}$与$\mathcal{M}_{0}$的 *Deligne-Mumford-Knudsen* 紧化密切相关$n+3$。正如 [15, 第 1],节 1],所解释的，考虑 $n+3$-边形顶点的所有可能排序，可以得到$\mathcal{M}_{0}$的一个仿射覆盖$n+3$。为我们所得到的商代数对应的簇寻找模空间解释，是一个有趣的问题。对于与 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_3/\langle\alpha_2\alpha_2\rangle$ 对应的 pellspace，这一研究始于 [6, 第 4 节 3]，其中通过解释 $\mathbb{P}^1$ 中的点以不同速度发生碰撞来展开。我们相信，通过研究 Hassett [13] 所研究的加权射影空间中的曲线模空间，可以将其推广。

3.2. **单项式映射**。$\mathbb{C}A_n$ 的双边理想偏序集以函子性的方式对应于簇 $U_{\mathcal{A}}$之间的单项式映射。固定两条 Dyck 路径，即 D 和 D，其中 $D < D$。它们对应的理想 $I = I_{\widetilde{D}}$和 $J = I_D$按 $I \supset J$排序。记 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I$和$\mathcal{B} = \mathbb{C}A_n/J$ 为相应的代数。于是，我们定义一个坐标环的单项式映射

$$\phi_{I\supset J} : \mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}] \longrightarrow \mathbb{C}[U_{\mathcal{B}}].$$

在本节余下部分中，我们固定 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，并为简便起见将 $\phi_{I\supset J}$ 记作 ϕ。我们将 $\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}]$和 $\mathbb{C}[U_{\mathcal{B}}]$ 的环境多项式环中的坐标写作

$$\mathbb{C}[\widetilde{u}_{\widetilde{X}} \mid \widetilde{X} \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}], \qquad \mathbb{C}[u_X \mid X \in \mathcal{I}_{\mathcal{B}}].$$

定义 3.5. 令 ϕ: $\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}] \longrightarrow \mathbb{C}[U_{\mathcal{B}}]$ 为由以下规则在生成元上给出的映射。

∼ ∼ ∼若 (i,j) 是 D 下方的一个菱形，则 $\phi(\widetilde{u}_{i,j}) = u_{i,j}$。

对于 D 的任意上升步 (i)，我们考虑位于 (i) 上方、但在 D 的步 (i) 下方的∼菱形，并将其映射

$$\phi : \widetilde{u}_i \mapsto u_i \prod_{\widetilde{i}<(k,l)<i} u_{k,l}.$$

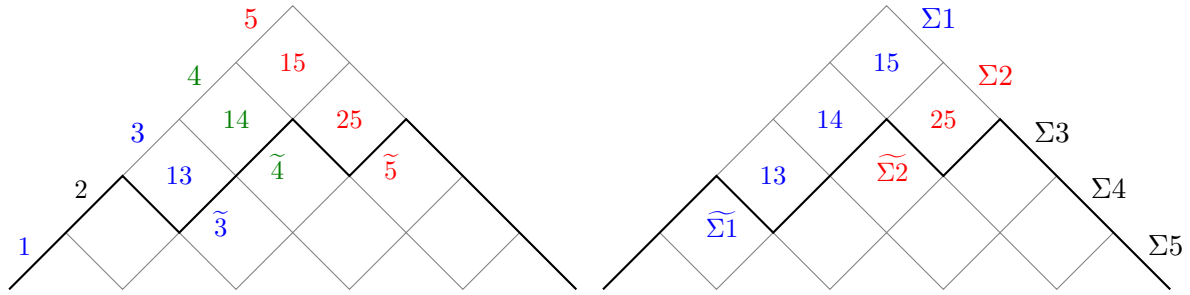


FIGURE 8. 单项式映射 $\phi_{I\supset J}$ 对于 $J=\emptyset$ 和 $I=\langle\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_4\alpha_3\alpha_2\rangle$ 由新 Dyck 路径中每个上升步对应的单项式 (A) 和每个下步对应的单项式 (B) 给出。

~~ ~ ~类似地，对于 D 的每个下降步 (Σi)，我们考虑位于 (Σi) 上方、且在 D 的下降步 (Σi) 下方的菱形：

$$\phi:\widetilde{u}_{\Sigma i}\mapsto u_{\Sigma i}\prod_{\widetilde{\Sigma i}<(k,l)<\Sigma i}u_{k,l}.$$

定理 3.6。 上述环映射 ϕ 是整的，即 ϕ^* 是仿射簇之间的满射映射。此外，对于 $\mathbb{C}A_n$的任意理想 $I\supset J\supset K$，这些映射满足

$$\phi_{K\subset I}=\phi_{K\subset J}\circ\phi_{J\subset I}.$$

证明。 这些映射的复合性质由定义可立即得出。因此，可以逐步检验单项式映射的整性。只需考虑满足 $|\mathcal{I}_{\mathcal{A}}|=|\mathcal{I}_{\mathcal{B}}|-1$的 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$。设不同之处在于菱形 $(i,\ j)$。那么，除了变量 $u_{i,\ j},\ u_i$ 和 $u_{\Sigma j+1}$ 之外，其余变量显然都是整的。对于剩下的三个变量，我们使用 u-方程。□

注。 就代数本身而言， $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$的一个商代数。给定一个 $\mathcal{B}$-模 M，记 πM 为 $\mathcal{A}$-模 $M\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$。这是一个模范畴之间的函子， $\pi:\mathrm{mod}\mathcal{B}\to\mathrm{mod}\mathcal{A}$，并且可以将其提升到二项投射复形范畴， $\pi:K_{\mathcal{B}}\to K_{\mathcal{A}}$。那么，我们在上文定义的单项式映射可以写作

$$\phi(\widetilde{u}_X)=\prod_{Y\in\mathcal{I}_{\mathcal{B}}}(u_Y)^{[\pi Y:X]},$$

其中 $[\pi Y:\ X]$ 是 X 作为 πY的一个不可分解直和项时的重数。特别地，Dyck 路径 D 下方的菱形 (i,j) 对应于 $K_{\mathcal{B}}$中的对象 $X=(P_j\to P_i)$，其中~ ~ ~$P_i=e_i\mathcal{B}$ 是投射 $\mathcal{B}$-模。该对象被映射为 $\pi X=(P_j\to P_i)$，其中 $P_i=e_i\mathcal{A}$是投射 $\mathcal{A}$-模。但是，当且仅当 $\alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_i\in I$时， πX 在 $K_{\mathcal{A}}$中可分解。~等价地，若菱形 (i,j) 位于 Dyck 路径 D上方，则 πX 可分解。在这种情况下

$$\pi X\simeq(\widetilde{P}_j\to 0)\oplus(0\to\widetilde{P}_i)$$

在 $K_{\mathcal{A}}$中，因此 u_X同时出现在 $\widetilde{u}_{\Sigma\widetilde{P}_j}$和 $\widetilde{u}_{\widetilde{P}_i}$的单项式公式中。对于所有有限表示型代数，这些单项式映射均有定义并得到研究，见 [2]。

例 3.7。 对于 $n=5$，考虑理想 $I\supset J$，其中 $I=\langle\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_4\alpha_3\alpha_2\rangle$ 以及 $J=\emptyset$。与 I 对应的 Dyck 路径 D 以粗体显示于图 8中。如上所述，取 $\mathcal{A}=\mathbb{C}A_5/I$ 和 $\mathcal{B}=\mathbb{C}A_5$为相应的代数。于是有一个单项式映射 $\phi_{I\supset J}:\ \mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}]\to\mathbb{C}[U_{\mathcal{B}}]$。对于 D的上升步对应的变量，该映射为（图 8a）

$$\widetilde{u}_{\widetilde{1}}\mapsto u_1,\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{2}}\mapsto u_2,\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{3}}\mapsto u_3u_{13},\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{4}}\mapsto u_4u_{14},\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{5}}\mapsto u_5u_{15}u_{25}.$$

关于 D下降步的变量，该映射为（图8b）

$$\widetilde{u}_{\widetilde{\Sigma 1}}\mapsto u_{\Sigma 1}u_{13}u_{14}u_{15},\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{\Sigma 2}}\mapsto u_{\Sigma 2}u_{25},\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{\Sigma 3}}\mapsto u_{\Sigma 3},\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{\Sigma 4}}\mapsto u_{\Sigma 4},\qquad \widetilde{u}_{\widetilde{\Sigma 5}}\mapsto u_{\Sigma 5}.$$

3.3. **正部分与边界除子**。对于每个代数簇 $U_{\mathcal{A}}$，我们都可以通过与正正交象限 $(\mathbb{R}_+)^{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}}$ 相交，得到其自然的正部分（分别为非负部分）$(U_{\mathcal{A}})_{>0}$（分别为 $(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$）。本小节描述界定 $(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$ 的簇的素除子，并说明它们在单项式映射下的变化方式。

命题 3.8. 设 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I_D$ 和 $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$。记 $U_{\mathcal{A}}(X)$ 为 $U_{\mathcal{A}}$ 中由 $u_X = 0$给出的子簇。那么，$U_{\mathcal{A}}(X)$ 同构于 $U_{\mathcal{A}'} \times U_{\mathcal{A}''}$，其中 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 是秩较低的线性中山代数（即对于 $m < n$，有 $\mathbb{C}A_m/J$）。具体而言，有以下几种情形：

- *if* $X = (i, j)$ *then* $\mathcal{A}' = \mathbb{C}A_{j-i-1}$ *and* $\mathcal{A}'' = \mathbb{C}A_{n+i-j}/I_{D_{ij}}$
- *if* $X = (i)$ *or* $X = (\Sigma i)$ *then* $\mathcal{A}' = \mathbb{C}A_{n-i}/I_{D_R}$ *and* $\mathcal{A}'' = \mathbb{C}A_{i-1}/I_{D_L}$

其中 D_{ij}、D_R 和 D_L 是相应网格中的戴克路径，这些网格由 D得到。

证明。该命题由定义3.2 在我们的（截断）网格中的理解直接得出。注意，u-方程具有这样的性质：一旦我们设定 $u_X = 0$ 那么对于所有 $Y \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 与.....不相容的X，都有 $u_Y = 1$。接下来，只需弄清其余$Z \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 之间的关系。切去网格中与 X 不相容的菱形后，剩下两个截断网格。图 9 和 10 展示了这两种情形。

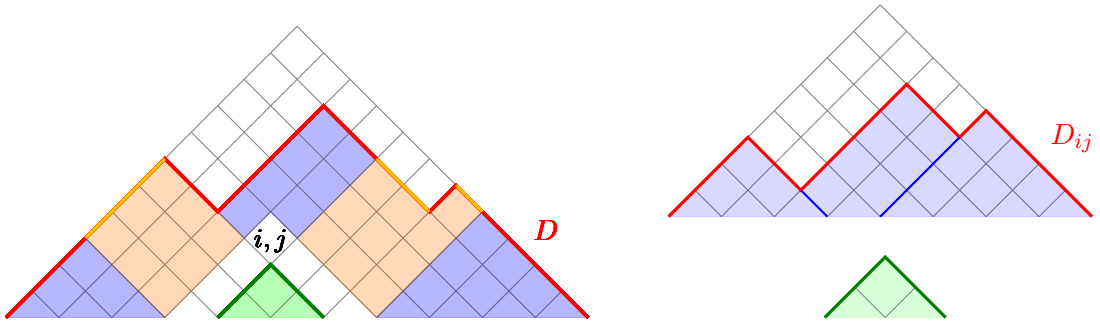


FIGURE 9. 对于戴克路径 D 和菱形 (i, j)，不相容的菱形和边以橙色标出（左图）。在除子 $u_{i,j} = 0$上，与 D 相关的簇 $U_{\mathcal{A}}$同构于两个此类簇的乘积：一个对应于戴克路径$D_{i,j}$（右上图），它由收缩橙色区域得到；另一个对应于下方的三角形 (i, j)（右下图）。白色菱形（左图）标示了绿色戴克路径（右下图）的步。

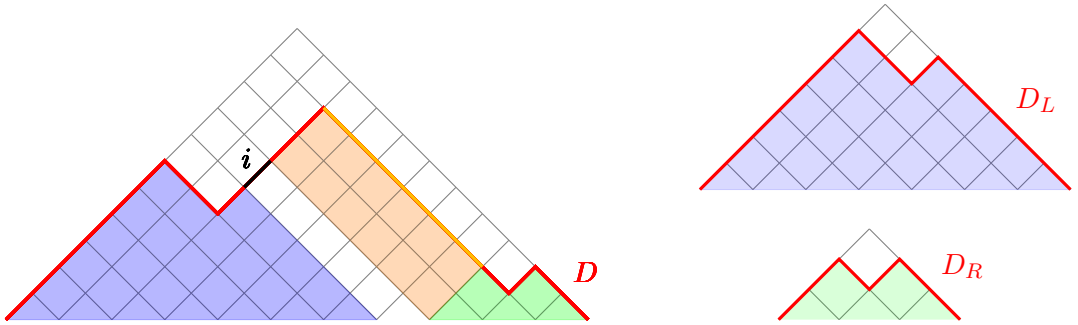


FIGURE 10. 对于 Dyck 路径 D 和上升步（i），不相容的菱形和边以橙色显示（左）。在除子 $u_i = 0$上，与 D 相关联的簇 $U_{\mathcal{A}}$ 同两个这样的簇的乘积同构，它们分别对应于收缩橙色区域后得到的戴克路径 D_L 和D_R（右）。

□

例3.9。 继续例 3.4 ，我们考虑 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_5/\langle\alpha_2\alpha_1\rangle$。与设定 $U_{\mathcal{A}}$ 和 $u_{24} = 0$ 相关联的 $u_2 = 0$ 的边界除子为

$$U_{\mathcal{A}}(u_{24}) \cong U_{\mathbb{C}A_1} \times U_{\mathbb{C}A_3/D_{24}} \qquad U_{\mathcal{A}}(u_2) \cong U_{\mathbb{C}A_1} \times U_{\mathbb{C}A_2}$$

其中 D_{24} 是 红色Dyck 路径，位于 A_3 网格中。这些除子是通过移除图 5 和图 6 中所绘截断网格内的红色方格，并将剩余的菱形拼接起来得到的。

注。 注意，定义 3.5中的单项式映射限制在边界除子上时表现良好。考虑几何映射 $\phi^* : U_{\mathcal{B}} \longrightarrow U_{\mathcal{A}}$ ，并将 $U_{\mathcal{A}}$ 和 $U_{\mathcal{B}}$ 的环境坐标分别记为 $\widetilde{u}_{\widetilde{X}}$ 和 u_X 。于是有

$$U_{\mathcal{A}}(\widetilde{u}_{\widetilde{X}}) = \begin{cases} \phi^*(U_{\mathcal{B}}(u_X)) & \text{if } \widetilde{X} = (i,j) \text{ is below } \widetilde{D}, \\ \bigcup_{\widetilde{\imath}<(k,l)<i} \phi^*(U_{\mathcal{B}}(u_{k,l})) & \text{if } \widetilde{X} = \widetilde{(i)}, \\ \bigcup_{\widetilde{\Sigma i}<(k,l)<\Sigma i} \phi^*(U_{\mathcal{B}}(u_{k,l})) & \text{if } \widetilde{X} = \widetilde{(\Sigma i)}. \end{cases}$$

4. F-polynomials and toric coordinates

本节将用 $U^\circ_{\mathcal{A}}$ 和 $U_{\mathcal{A}}$ 的不变模的 F-多项式，给出簇 $\mathcal{A}$的显式参数化；一般定义见 [11] 。这使我们能够将 $U_{\mathcal{A}}$ 视为射影环面簇的一个仿射开子集。

考虑变量 $y_1, \ldots, y_n$，并将这些变量上的多项式环记为 $\mathbb{C}[y]$，相应的有理函数域记为 $\mathbb{C}(y)$。为简化记号，我们用 $y_{i,\ldots,j}$代替单项式 $y_i y_{i+1} \cdots y_j$ （对应于 $1 \le i < j \le n$）。给定一个 $\mathbb{C}A_n$-模 $M_{i,j}$，其对应的F-多项式为 $F_{i,j} := 1 + y_i + y_i y_{i+1} + \cdots + y_{i,\ldots,j} \in \mathbb{C}[y]$.

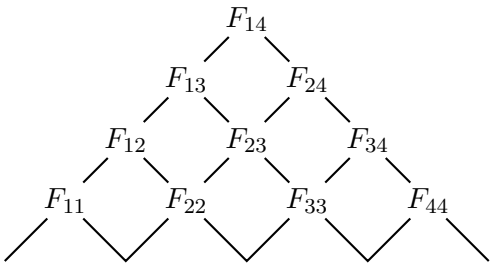
固定一个商代数 $\mathcal{A}$ 及其对应的 Dyck 路径 D。回顾一下， $U_{\mathcal{A}}$ 的环境空间的坐标由指标集 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$标记。设 D 的上升步的坐标为 $(j_i, i-1) \to (j_i, i)$；下降步的坐标为 $(i, k_i) \to (i+1, k_i)$。对于每个 $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，我们考虑有理函数 $f_X \in \mathbb{C}(y)$，其定义如下

$$f_{i,j} := \frac{F_{i,j}F_{i+1,j-1}}{F_{i+1,j}F_{i,j-1}}, \qquad \text{for } (i,j) \text{ diamond below } D \tag{6}$$

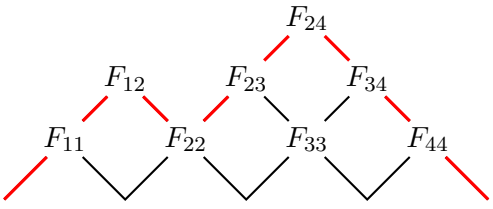
$$f_i := \frac{F_{j_i,i-1}}{F_{j_i,i}}, \quad \text{and} \quad f_{\Sigma i} := y_i \frac{F_{i+1,k_i}}{F_{i,k_i}} \qquad \text{for } 1 \le i \le n.$$

按照约定，如果 $k = 0, l = n+1$ 或 $k > l$，则令 $F_{k,l} = 1$。对于 $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，我们用 $R_{\mathcal{A}}$ （分别用 $R^\circ_{\mathcal{A}}$）表示由 f_X （分别由 $f_X^{\pm 1}$）生成的 $\mathbb{C}(y)$ 的子环。这些有理函数可以通过以下方式从我们的网格中得到：用 F-多项式标记格点，并对每个标记为 $X = (i,j)$ 的菱形，取乘积 $f_X = \text{上} \cdot \text{下左} \cdot \text{右}$。上升步和下降步遵循类似的规则，但对于 $\widetilde{(\Sigma i)}$，我们还要乘以一个 y_i 因子。

例4.1. 对于 $n = 4$，考虑由 F-多项式标记的网格，分别对应于 $\mathbb{C}A_4$ 以及带有 $I = \langle\alpha_2\alpha_2\rangle$的商代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_4/I$:



(A) 网格用于 $\mathbb{C}A_4$



(B) 网格用于 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_4/\langle\alpha_2\alpha_1\rangle$

$\mathcal{A}$ 有8个不可分解模，它们标记了 D 在我们网格中的菱形和上步。我们还考虑 D的下步的四个额外标记。然后，在本例中，这12个有理函数 f_X 来自（6）为

$$f_{1,2}=\frac{F_{1,2}}{F_{2,2}F_{1,1}} \qquad f_{2,3}=\frac{F_{2,3}}{F_{3,3}F_{2,2}} \qquad f_{\Sigma 1}=y_1\frac{F_{2,2}}{F_{1,2}} \qquad f_1=y\frac{1}{F_{1,1}}$$
$$f_{2,4}=\frac{F_{2,4}F_{3,3}}{F_{2,3}F_{3,4}} \qquad f_{3,4}=\frac{F_{3,4}}{F_{3,3}} \qquad f_{\Sigma 2}=y_2\frac{F_{3,4}}{F_{2,4}} \qquad f_2=\frac{F_{1,1}}{F_{1,2}}$$
$$f_{\Sigma 3}=y_3\frac{F_{4,4}}{F_{3,4}} \qquad f_3=\frac{F_{2,2}}{F_{2,3}} \qquad f_{\Sigma 4}=y_4\frac{1}{F_{4,4}} \qquad f_4=\frac{F_{2,3}}{F_{2,4}}.$$

定理 4.2. 映射 $\varphi^\circ:\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}^\circ]\to R_{\mathcal{A}}^\circ$ 和 $\varphi:\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}]\to R_{\mathcal{A}}$ 由 $u_X\to f_X$ 给出，且均为环同构。换言之，它们给出了非常仿射簇 $U_{\mathcal{A}}^\circ$ 和仿射簇 $U_{\mathcal{A}}$的参数化。

证明。首先，我们看到有理函数 f_X 满足定义 $U_{\mathcal{A}}$ （以及$U_{\mathcal{A}}^\circ$）的 u-方程。直接计算可得， F-多项式满足恒等式 $F_{i,j-1}F_{i+1,j}=F_{i,j}F_{i+1,j-1}+y_{i+1,j}$。将此代入 f_X 的定义，得到

$$1-f_{i,j}=\frac{y_{i+1,j}}{F_{i,j-1}F_{i+1,j}}, \qquad 1-f_i=\frac{y_{j_i,i}}{F_{i,j_i}}, \qquad 1-f_{\Sigma i}=\frac{1}{F_{i,k_i}}.$$

现在，我们要证明这些表达式恰好是 f_X 中的单项式，它们由 u-方程的相容性条件给出。从网格中更容易看出以下乘积中的望远镜式消去：

$$\frac{y_{i,j}}{F_{i,j}}=\prod_{\substack{X\in \text{ right rectangle of } (i,j)\\ X\neq(k)}} f_X \qquad \frac{1}{F_{i,j}}=\prod_{\substack{X\in \text{ left rectangle of } (i,j)\\ X\neq\Sigma(k)}} f_X. \tag{7}$$

关键观察是，当我们考虑一个矩形 r，如图 12 所示，在我们的网格中，其顶部被一条 Dyck 路径削去时，有如下公式

$$\prod_{X \text{ label in } r} f_X=\frac{\text{peaks}}{\text{valleys}}$$

在这里，我们宽泛地使用术语，也将 r 的左角和右角称为谷点。这

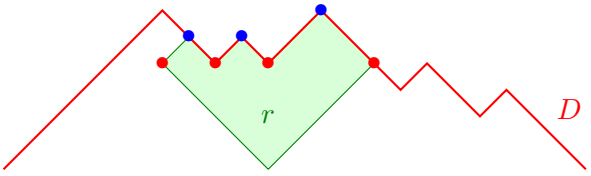


FIGURE 12. 区域 r （绿色）中 f_{ij} 的乘积，等于峰点 （蓝色）对应的 F_{ij} 的乘积除以谷 （红色）对应的 F_{ij}。

这个公式可由望远镜式消去得到。对于图13 (A)中的 2×2 矩形，矩形内 f_X 的乘积为 $f_{M_1}f_{M_2}f_{M_3}f_{M_4}=\frac{F_{k-1,l+1}F_{k+1,l-1}}{F_{k,l}F_{k,l}}$。我们可以重复这一过程，从而得到适用于更大矩形的相同向上-向下向左-向右 公式。如果 Dyck 路径从矩形顶部削去了一些方格，那么要得到正确的公式，就必须在分子中加入标记峰点的 F，并在分母中加入标记谷点的 F。例如，在图13(B)中，我们有 $f_{M_1}f_{M_2}f_{M_3}=\frac{\mathbf{F_{k,l+1}F_{k+1,l-1}}}{\mathbf{F_{k,l}F_{k,l}}}$，其中用**粗体** 标出了与峰点和谷点相对应的 F。

将 f_X 用于标签（Σk），或者分别用于（k），在削去的矩形中，将抵消一些 F，这些项来自 Dyck 路径的峰点和谷点。当我们考虑（i，j）的左、右矩形时，实际上会将它们全部抵消。此外，考虑到对于右侧矩形，我们需要加上（ y）的Σk，恰好得到（7）。

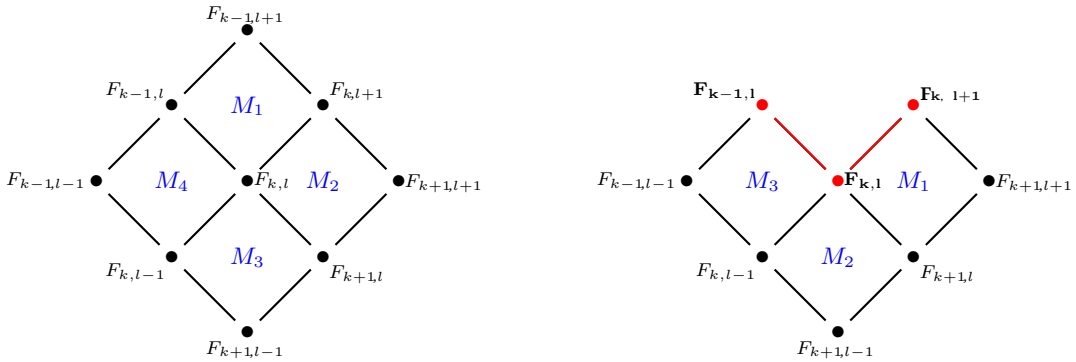


FIGURE 13. 相邻 f_{ij} 的乘积中的消去。

这表明 $f_X(y)$ 满足 u-方程。显然，在 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}^{\circ}] \subset \mathbb{C}[u_X, u_X^{-1}]$ 中，我们可以求逆映射 $\varphi^{\circ}\colon \mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}^{\circ}] \to R_{\mathcal{A}}^{\circ}$。这为非常仿射簇 $U_{\mathcal{A}}^{\circ}$ 提供了一个参数化。

现在，我们要说明映射 $\varphi\colon \mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}] \to R_{\mathcal{A}}$ 由 $u_X \to f_X$ 给出，也是一个同构。我们对 n进行归纳。对于 $n = 0,\ 1,\ 2$，这一点可以借助计算机代数软件验证。归纳步骤中，我们采用与 [3, 定理 51] 相同的技巧。利用命题 3.8 和归纳假设可知，诱导映射 $\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}]/(u_X) \to R_{\mathcal{A}}/(f_X)$，对任意 $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 都是同构。然后，利用 [3, 引理 A1] 中的交换代数结论，可得 φ 是一个同构。□

与 [4, 第 10]节中一样，我们要考虑的环面簇由牛顿多面体的法扇给出，该牛顿多面体对应于参数化定理 F中使用的 4.2-多项式。对于每个商代数 $\mathcal{A}$，我们将以下多胞体定义为一个闵可夫斯基和

$$P_{\mathcal{A}} := \sum_{M_{i,j} \text{ indecomposable of } \mathcal{A}} \operatorname{Newt}(F_{i,j}). \tag{8}$$

将其（内）法扇记为 $\Sigma_{\mathcal{A}}$。回顾第2 节，如果 D 是与 $\mathcal{A}$ 对应的 Dyck 路径，我们可以通过查看与 D对应的截断网格中的格点，读出哪些 F-多项式出现在和式（8）中。令 ε_i 为$\mathbb{R}^d$中的标准基向量。 g-向量属于 $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，其为

$$g_X := \begin{cases} \varepsilon_i & \text{if } X = (\Sigma i) \\ -\varepsilon_i & \text{if } X = (i) \\ \varepsilon_i - \varepsilon_j & \text{if } X = (i,j). \end{cases} \tag{9}$$

命题 4.3。 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 的射线是 $\mathcal{A}$的 g-向量。

我们将命题4.3 的证明推迟到第5节，届时我们将更详细地研究多胞体 $P_{\mathcal{A}}$。不过，为了引出本节的主要定理，我们需要这一结果。

给定一个劳朗多项式，我们可以通过将通常的算术运算替换为热带算术（其中在 $\mathbb{C}$上取平凡赋值），得到一个分段线性函数。也就是说，我们将通常的加法替换为热带加法：min，将通常的乘法替换为热带乘法： $+$。具体而言，由 $p \in \mathbb{C}[y, y^{-1}]$ 可得到函数 $\operatorname{trop}(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，如下所示

$$p = \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_a y^a \quad \mapsto \quad \operatorname{trop}(p) = \min(\langle a, Y\rangle : a \in \operatorname{supp}(p))$$

其中 $\operatorname{supp}(p) := \{a \in \mathbb{Z}^n :\ c_a \neq 0\}$ 有限。回忆一下，$\operatorname{Newt}(p)$ 的法扇也可以表示为 $\operatorname{trop}(p)$ 的公共线性区域。与 [3, 第 5] 节中一样，我们利用参数化的热带化，得到 $U_{\mathcal{A}}$ 的坐标环的描述。以下结果将有所帮助。

引理 4.4. 设 $X, Y \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$. 那么，

$$trop(f_X)(g_Y) = \delta_{X,Y}.$$

证明。 注意，$\mathrm{trop}(F_{i,\ j}) = \min\{0, Y_i, Y_i + Y_{i+1}, \ldots, Y_i + \ldots + Y_j\}$。于是，对于 $l \leq k$

$$\mathrm{trop}(F_{i,j})(\varepsilon_l) = 0, \quad \mathrm{trop}(F_{i,j})(-\varepsilon_l) = -\mathbb{1}_{i \leq l \leq j}, \quad \mathrm{trop}(F_{i,j})(\varepsilon_l - \varepsilon_k) = -\mathbb{1}_{l < i \leq k \leq j}$$

其中 $\mathbb{1}$ 是指示函数。由此可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{trop}(f_{\Sigma i})(\varepsilon_l) = \mathrm{trop}(y_i)(\varepsilon_l) + \mathrm{trop}(F_{k_i,i+1})(\varepsilon_l) - \mathrm{trop}(F_{k_i,i})(\varepsilon_l) = \delta_{i,l} \\
&\mathrm{trop}(f_{\Sigma i})(-\varepsilon_l) = -\delta_{l,i} - \mathbb{1}_{i+1 \leq l \leq k_i} + \mathbb{1}_{i \leq l \leq k_i} = 0 \\
&\mathrm{trop}(f_{\Sigma i})(\varepsilon_l - \varepsilon_j) = \delta_{i,l} - \delta_{i,j} - \mathbb{1}_{l < i+1 \leq j \leq k_i} + \mathbb{1}_{l < i \leq j \leq k_i}.
\end{aligned} \tag{10}$$

现在我们检验：若 $(l,\ j)\ \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，则（10）等于零。回忆一下，$(l,\ j)\ \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 当且仅当其所标记的正方形位于对应于 $\mathcal{A}$ 的 Dyck 路径下方时成立。特别地，它所标记的菱形严格位于由（Σi）标记的下降步下方。具体而言，我们得到不等式：$l \leq i+1$ 或 $j \leq k_i$。逐一进行计算可得，（10）确实为 0。类似的计算表明，对于由 f_X 中的其他元素标记的 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，结论同样成立。□

命题 4.5。 环 $R_{\mathcal{A}}$ 是由 *Laurent* 单项式生成的 $\mathbb{C}(y)$ 的子环，其中

$$\{y_1, \ldots, y_n\} \cup \{F_{i,j} : M_{i,j} \ is \ an \ indecomposable \ module \ of \ \mathcal{A}\}$$

其热带化在所有 $\mathbb{R}^n$ 上均为非负。

证明。 回忆一下，$P_{\mathcal{A}}$ 的法扇由分段线性函数 $\mathrm{trop}(F_{\mathcal{A}})$ 的线性区域给出，其中

$$F_{\mathcal{A}} := \prod_{M_{i,j} \text{ indecomposable of } \mathcal{A}} F_{i,j}.$$

设 $L(y)$ 是陈述中的 Laurent 单项式。由于因子 y_i 不会影响热带化的线性性，因此 $\mathrm{trop}(L)$ 的线性区域是 $P_{\mathcal{A}}$的法扇的粗化。因此，要确定 $\mathrm{trop}(L)$ 的值，只需知道它在 $P_{\mathcal{A}}$的法扇的射线上的取值，也就是 g 的 $\mathcal{A}$-向量。由引理4.4 可将 $L(y)$ 写成

$$L(y) = \prod_{X \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}} f_X^{\mathrm{trop}(L)(g_X)}.$$

于是，对所有 $\mathcal{A}$ 的 g-向量，$L(y) \in R_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $\mathrm{trop}(L)(g_M) \geq 0$，这等价于 $\mathrm{trop}(L)$ 非负。$R_{\mathcal{A}}$ 中的每个元素都是 f_X 上的多项式。由于 f_X 上的每个单项式都对应于 $\{y_i, F_{i,j}\}$ 上的一个 Laurent 单项式，且其热带化非负，结论得证。□

现在，我们已经建立了所有必要的结果，可以证明本节的主要结论，并自然地看到 $U_{\mathcal{A}}$ 位于一个环面簇内。关于环面簇的标准结果，请参见 [8] 。

定理 4.6。 $U_{\mathcal{A}}$ 同构于仿射开集 $\{F_{\mathcal{A}} \neq 0\}$，它位于与 $\Sigma_{\mathcal{A}}$相关联的射影环面簇 $\mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}}}$内。

证明。根据命题 4.5 ，我们可以直接应用 [4, 第 10] 节中的技巧。由 [9]可知，$P_{\mathcal{A}}$ 的法扇是幺模的，因此特别地，$P_{\mathcal{A}}$ 是非常充足的。于是，我们可以将（抽象的）环面簇 $\mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}}}$ 嵌入到 $\mathbb{P}^{l-1}$中，其中 l 是 $P_{\mathcal{A}}$中的格点数。在此嵌入下，$H = \{F_{\mathcal{A}} = 0\} \subset X_{P_{\mathcal{A}}}$ 是一个超平面，因为 $F_{\mathcal{A}}$ 中的每个单项式都对应一个格点。直接验证可知，$X_{P_{\mathcal{A}}} \setminus H$ 的坐标环同构于 $R_{\mathcal{A}}$。□

利用定理4.6 中的同构，我们可以描述构形空间非负部分的边界偏序集：$(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$。特别地，我们得到了命题3.8中除子交的一个优美组合描述。

推论 y 4.7. $P_{\mathcal{A}}$ 的面格与$(U_{\mathcal{A}})_{\geq}$ 的边界分层偏序集同构 0.

证明。由于所有 F-多项式都不含减法，因此 $F_{\mathcal{A}}$ 也不含减法。因此，它在正正交象限内不为零，并且 $(U_{\mathcal{A}})_{\geq 0}$ 与环面簇 $(X_{P_{\mathcal{A}}})_{\geq 0}$ 的正部分同构。□

环面语言还为我们提供了另一种理解第 3 节中的单项式映射的方式，即将其视为迭代吹下映射。根据定理 3.6 ，我们只需考察 Dyck 路径偏序集中的覆盖关系，并描述其对应的单项式映射。设 $\mathcal{A}'$、$\mathcal{A}$是两个线性中山代数，其对应的 Dyck 路径为 D 和 D' ，且满足 $D \leq D'$是一个覆盖关系。特别地，这意味着 $|\mathcal{I}_{\mathcal{A}}| = |\mathcal{I}_{\mathcal{A}'}| + 1$。

命题 4.8。记 $\mathcal{H} = \mathbb{V}(F_{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}}}$ 和 $\mathcal{H}' = \mathbb{V}(F_{\mathcal{A}'}) \subset \mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}'}}$。存在一个环面爆破 π ：$\mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}}} \to \mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}'}}$ ，使得 $\pi^{-1}(\mathcal{H}') \subset \mathcal{H}$。特别地， π 限制为一个定义良好的映射 π_U： $U_{\mathcal{A}} \to U_{\mathcal{A}'}$。

证明。根据推论 5.7，爆破映射 π 的存在性可由标准环面几何得到。此外，根据命题 5.6，爆破中心是余维二子簇 $V(\sigma) \subset \mathcal{X}_{\Sigma_{\mathcal{A}'}}$，对应于由 ε_i、$-\varepsilon_j$张成的锥 $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}'}$。在 $X_{P_{\mathcal{A}'}}$的坐标中，$V(\sigma)$ 是一个线性空间，其中对应于面 $F_\sigma \subset P_{\mathcal{A}'}$的所有格点的坐标均为零。特别地，爆破映射 π 可以看作从 $\mathbb{P}^{l-1}$ 到 $\mathbb{P}^{l'-1}$ 的投影，其中 $l = |P_{\mathcal{A}} \cap \mathbb{Z}^d|$ 和 $l' = |P_{\mathcal{A}'} \cap \mathbb{Z}^d|$，我们只保留 $P_{\mathcal{A}'}$的格点坐标。因此，由于 $F_{\mathcal{A}'}$ 整除 $F_{\mathcal{A}}$ ，可推出 $\pi^{-1}(\mathcal{H}') \subset \mathcal{H}$。□

由命题4.8 的证明可知，与π 对应的吹下映射与定义 3.5中的单项式映射一致。为此，我们可以验证这两个映射在与二维锥 σ 对应的仿射图中一致；我们将该锥细分为两个锥，以便从 $\Sigma_{\mathcal{A}'}$ 得到 $\Sigma_{\mathcal{A}}$。

5. Polytopes

本节将对我们在线性中山代数研究中出现的多面体给出完全组合式的描述。回顾一下，对于商 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_n/I$ ，我们有多胞体 $P_{\mathcal{A}}$ ，其定义见（8）。现在我们将运用 [12, 第 3] 节中的方法来研究它们。

对每个子集 $G \subset \{0, \ldots, n\}$，我们关联一个 $|G| - 1$ 维标准单形

$$\Delta_G = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0, \quad x_i = 0 \text{ if } i \notin G, \quad \text{and } x_0 + \ldots + x_n = 1\}.$$

对于子集集合族 $\mathcal{G}$，我们考虑 $P_{\mathcal{G}} = \sum_{G \in \mathcal{G}} \Delta_G$。[12, 16] 关注的是当 $\mathcal{G}$ 为称作建筑集的特殊子集族时的情形。在我们的设定中，我们处理的集合族并非建筑集，但仍可借鉴其结果中的一些关键观察。

回忆一下， $P_{\mathcal{A}}$ 是与$F_{i,j} = 1 + y_i + y_i y_{i+1} + \ldots + y_i \cdots y_j$的牛顿多面体对应的单形的闵可夫斯基和。我们先进行一次坐标变换，使每个被加项都成为一个标准单形。考虑多项式环 $\mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]$ 以及由 $x_i = y_1 y_2 \cdots y_i$ 给出的单项式映射，其中 $i = 1, \ldots, n$ 且 $x_0 = 1$。那么，

$$x_{i-1} + \ldots + x_{j+1} = y_1 \cdots y_{i-1}(1 + y_i + y_i y_{i+1} + \ldots + y_i \cdots y_j).$$

这对应于 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个线性变换，其矩阵为 $n \times n$ 上三角矩阵T，对角线及其上方的所有元素均为1。对于每个 $i = 1, \ldots, n$，我们考虑向量 $b_i = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$，其第一个零元素位于位置 i。将仿射变换 $T - b_i$ 应用于单形 $\Delta_{[i-1,j]}$ （具体来说，我们将其应用于最后 n 个坐标，并忽略 x_0），恰好得到 Newt($F_{i,j}$)。作为示例，我们在图14中画出了五边形 $P_{\mathbb{C}A_2}$ 的两种不同实现。为了区分这两种不同的实现，我们用 ε_i 表示 $\mathbb{R}^n$ （y 个坐标）中的标准基向量，并在提及 $\mathbb{R}^{n+1}$ （x 个坐标）中的标准基向量时使用 ϵ_i 。

我们再次考虑我们的三角网格，并在底部添加一行。现在我们用区间 $[i, j]$ （对于 $0 \leq i \leq j \leq n$）标记网格中的格点。各行自下而上按区间大小递增，水平方向自左向右按字典序排列，见图 15。设 D 是对应于代数 $\mathcal{A}$ 的 Dyck 路径。在采用新标记的网格中完全按先前方式绘制 D ，将有助于我们描述集合 $\mathcal{G}$ ，该集合给出与 $P_{\mathcal{A}}$ 同构的多胞体。



(A) (B)

FIGURE 14. 五边形的坐标（A）和 y 坐标（B）。

注意，我们所选择的新标记将 $F_{i,\ j}$ 替换为区间 $[i-1,j]$。随后考虑集合 $\mathcal{G}=\{G\subseteq\{0,\ldots,n\}:\ G$ 位于 D 上或其下方，且 $|G|>1\}$，我们得到 $P_{\mathcal{A}}\cong P_{\mathcal{G}}$。

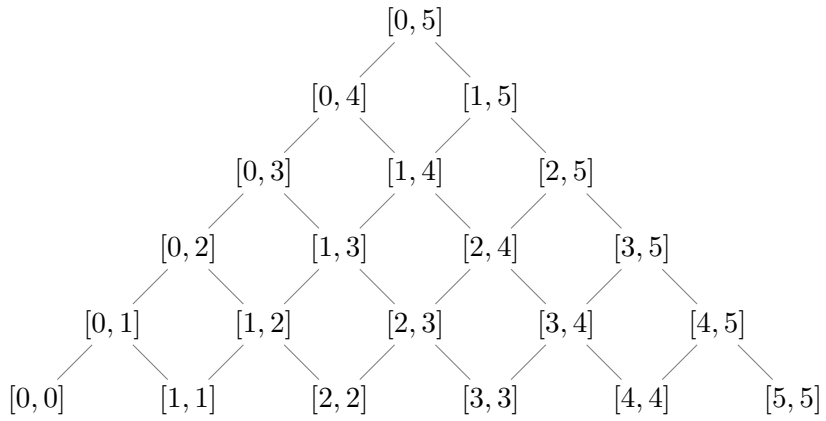


FIGURE 15. 由区间标记的 $\mathbb{C}A_5$ 网格。

注。 注意，我们从网格中的戴克路径得到的集合族 $\mathcal{G}$ 是由以下两个条件刻画的所有区间 $\{[i,j],0\leq i\leq j\leq n\}$ 所构成的集合族的子集

- $[i-1,i]\in\mathcal{G}$ 对所有 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n$;
- 若 $[i,j]\notin\mathcal{G}$，则没有包含 $[i,j]$ 的区间属于 $\mathcal{G}$。

这尤其意味着，我们考虑的集合族 $\mathcal{G}$ 生成连通的单纯复形。因此，根据 [12, 注 3。11], 多面体 $P_{\mathcal{A}}\cong P_{\mathcal{G}}$ 的维数为 n。

现在我们利用这些新坐标来给出多面体的面描述。回想一下，在闵可夫斯基和上对一个线性形式取最小值，等价于在每个被加项上分别取最小值。因此，我们得到以下引理；它已隐含地出现在 [12,命题3.12] 中。

引理5.1。 设 $\mathcal{G}$ 是 $\{0,\ldots,n\}$的一个子集族。对于任意 $F\subseteq\{0,\ldots,n\}$，线性形式$\sum_{i\in F}x_i$ 在 $P_{\mathcal{G}}$ 的如下所示的面上取得最小值：

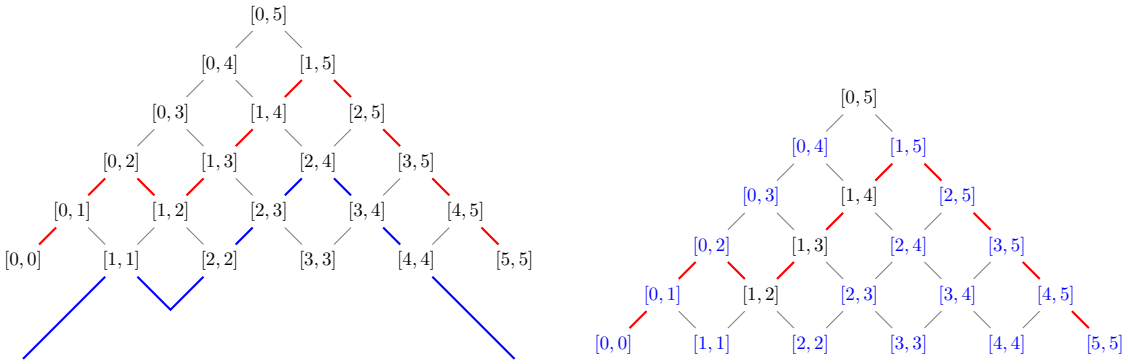
$$\sum_{G\in\mathcal{G}:G\subseteq F}\Delta_G+\sum_{G\in\mathcal{G}:G\setminus F\neq\emptyset}\Delta_{G\setminus F}. \tag{11}$$

为了完整描述多面体的面，我们还需要一个组合学要素。固定一条 Dyck 路径 D，其对应的区间族为 $\mathcal{G}$。令 D' 为将 D 垂直向下平移两行后得到的 Dyck 路径。也就是说，对于每个 $[i,j]$ 位于 D 上的区间，$[i+1,j-1]$ 该区间都位于 D'，例子见图16 （A）。

命题5.2。 $P_{\mathcal{G}}$ 的面与区间一一对应

$$\mathcal{F}:=\{[0,i]:0\leq i<n\}\cup\{[i,n]:0<i\leq n\}\cup\{intervals\ on\ or\ below\ D'\}.$$

此外 *er*，与区间 $[i,j]$ 对应的面具有内法向量 $\epsilon_i+\ldots+\epsilon_j$.



(A) Dyck 路径 D 及其降阶 D'。

(B) 定义面所对应的区间，以蓝色标示。

FIGURE 16

证明。 我们注意到， $P_{\mathcal{G}}$ 中的点由以下内容确定

$$\sum_{i\in F} x_i \geq |\{G\in\mathcal{G} : G\subseteq F\}| \text{ for } G\subseteq\{0,\ldots,n\} \quad \text{and} \quad x_0+\ldots+x_n=|\mathcal{G}|. \tag{12}$$

由于 $P_{\mathcal{G}}$ 是 n维 permutahedron 的闵可夫斯基加项，因此其面由前述不等式（12）的某个子集给出。我们将使用引理5.1来确定哪些$G\subset\{0,\ldots,n\}$产生面，即余维一的面。（11）中的左侧和的维数至多为 $|G|-1$。当 $\{G\in\mathcal{G}$时，等号成立： $G\subseteq F\}$ 表示一个连通单纯复形。当 G 是一个区间时，情况即是如此。（11）中的右侧和的维数至多为 $n-|F|$，且当且仅当.....时等号成立

(1) $\{G\setminus F$： $G\in\mathcal{G}$和 $G\setminus F\neq\emptyset\}$ 是一个连通单纯复形；(2) 并且，存在 G_1、.....、 $G_r\in\mathcal{G}$ 使得 $\{0,\ldots,n\}\setminus F\subset G_1\cup\ldots\cup G_r$。

对于我们的集合族，条件 (2) 总是满足，因为 $\bigcup\mathcal{G}=\{0,\ldots,n\}$。如果 $F=[0,i]$或 $[i,n]$，那么 (1) 成立，因为它们的补集是一个区间。如果 $F=[i,j]$ 且 $0<i<j<n$，那么 (1) 成立当且仅当存在某个 $G\in\mathcal{G}$ 使得 $\{i-1,j+1\}\subseteq G$。由于在我们的网格中， $[i-1,j+1]$ 位于下方菱形中 $[i,j]$ 的底部，这等价于说 G 是 D' 下方的一个区间。□

现在，我们可以通过对命题 5.2中出现的法向量应用一个线性映射来证明命题4.3。

命题 *4.3* 的证明。 注意，我们对多胞体 $P_{\mathcal{A}}$ 应用仿射变换后得到 $P_{\mathcal{G}}$，该变换在法扇层面转化为线性变换。具体而言，我们得到一个映射 $\mathbb{R}^{n+1}/(1,\ldots,1)\to\mathbb{R}^n$，在标准基下（忽略 ϵ_0在 $\mathbb{R}^{n+1}$中）由下列矩阵表示

$$T^{-t}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在此变换下， $P_{\mathcal{G}}$ 的可能法向量映射如下。

$$\begin{aligned} &\text{For } i>0: && \epsilon_i+\ldots+\epsilon_n\mapsto\varepsilon_i\\ &\text{for } i>0 \text{ and } j<n: && \epsilon_i+\ldots+\epsilon_j\mapsto\varepsilon_i-\varepsilon_{j+1}\\ &\text{for } j<n: && \epsilon_0+\ldots+\epsilon_j\mapsto-\varepsilon_{j+1}. \end{aligned}$$

根据命题 5.2 可知，$P_{\mathcal{G}}$经过仿射变换后的法向量为 $\sum_{i\in F}\epsilon_i$其中 F是 $[0,i],[i,n]$对于某个 i，或者它属于 D的下降部分，即 $\mathcal{A}$的 Dyck 路径。在坐标中，这恰好对应于 g-向量（9）。□

引理 5.3。 我们称 F、$F' \in \mathcal{F}$为 $\mathcal{G}$-相容，如果对于任意满足 $G \subset F \cup F'$的 $G \in \mathcal{G}$，都有 $G \subset F$或 $G \subset F'$。 $P_{\mathcal{G}}$的两个面（分别标记为 F、$F' \in \mathcal{F}$）相交，当且仅当F 和 F' 相容。

证明。 假设 F 和 F' 是 $\mathcal{G}$-相容的。由（11）可知，它们的面的交集为

$$\sum_{G\in\mathcal{G}:G\subseteq F\cap F'} \Delta_G + \sum_{G\in\mathcal{G}:G\setminus(F\cup F')\neq\emptyset} \Delta_{G\setminus(F\cup F')} + \sum_{G\in\mathcal{G}:G\setminus F\neq\emptyset, G\setminus F'=\emptyset} \Delta_{G\setminus F} + \sum_{G\in\mathcal{G}:G\setminus F'\neq\emptyset, G\setminus F=\emptyset} \Delta_{G\setminus F'}.$$

$\mathcal{G}$-相容条件保证这是 $P_{\mathcal{G}}$ 的一个面，因为对于每个 $G \in \mathcal{G}$，我们取的是 Δ_G 的一个闵可夫斯基加项。如果 F和 F' 不 $\mathcal{G}$-相容，那么根据定义，存在一个 $G \in \mathcal{G}$，使得对应于 F 和 F' 的面中的相应闵可夫斯基加项互不相交，因此它们不可能相交。□

注。 第 3节中的簇也可以用多面体$P_{\mathcal{G}}$来描述。我们可以将每个 u变量标记为 $P_{\mathcal{G}}$ 的一个面，并称两个面相容，如果它们相交。引理5.3 保证相容条件与定义 3.2一致，具体例子见例 5.4。

给定任意多胞体 P，可以利用其面将簇 U_P 描述为一个平方方程组的零点集，如（5）所示。然而， U_P 是一个维数为 $\dim(P)$ 的不可约簇，并且具有一个自然的非负部分，作为 P 的“曲线”版本，这一点相当特殊。例如，我们的线性中山代数构形空间中出现的 u坐标，可以参数化为 $\mathbb{P}^1$中点的交比所构成的非常特殊的乘积。 $P_{\mathcal{A}}$ 在某种意义上是“带交比的多面体”，这一事实赋予了 $U_{\mathcal{A}}$良好的结构。

例 5.4. 图 16 （A）中的网格对应于代数 $\mathcal{A} = \mathbb{C}A_5/\langle\alpha_2\alpha_1\rangle$，来自例 3.4。与标签 (2),(2,4) $\in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 对应的面，以区间表示，分别为 $[0,1]$ 和 $[2,3]$。引理 $\mathcal{G}$中不相容的区间，如引理 5.3 所述，分别为 $[1,5],[2,2],[2,3],[2,4],[2,5]$，对于 $[0,1]$ 以及 $[0,1],[1,1],[1,2],[2,4],[3,4],[3,5],[4,5]$，对于 $[2,3]$。将其转换回 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 的标签，恰好得到图 u中的关系 6 和图 5中的关系。

命题 5.5. $P_{\mathcal{G}}$ 是一个单纯多面体。

证明。 来自 [12, 定理 3。14] 的相同重新标记论证也适用于我们的集合族 $\mathcal{G}$，即使它们不是建筑集。关键在于，（重新标记后）与顶点 v相邻的面为 $G_i = [i,n]$，它们对所有 $i = 1$、.....、n都是定义面。□

现在我们想从组合角度理解，当族 $\mathcal{G}$逐一增大时，多面体 $P_{\mathcal{G}}$ 会发生什么变化。设 $\mathcal{G}'$ 满足 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \{[i,j]\}$，并将 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 分别对应的 Dyck 路径记为 D和 D'。那么， D 是通过将 D' 的一个谷点变成峰点而得到的。我们将 $P_{\mathcal{G}'}$ 和 $P_{\mathcal{G}}$ 的法扇分别记为 $\Sigma_{\mathcal{G}'}$ 和 $\Sigma_{\mathcal{G}}$。

命题 5.6. $\Sigma_{\mathcal{G}}$恰好多一条射线，即 $r := \epsilon_{i+1}+\ldots+\epsilon_{j-1}$。此外，$r$ 位于 $\Sigma_{\mathcal{G}'}$的一个唯一二维锥中。

证明。根据命题 5.2， $P_{\mathcal{G}}$ 比 $P_{\mathcal{G}'}$多一个面。这个额外的面标记为$[i+1, j-1]$，它对应于法射线 $r = \epsilon_{i+1} + \ldots + \epsilon_{j-1}$。注意， r可以用 $\Sigma_{\mathcal{G}'}$ 的射线按以下方式求和表示

$$\begin{aligned} r &= (\epsilon_{i+1} + \ldots + \epsilon_k) + (\epsilon_{k+1} + \ldots + \epsilon_{j-1}) && \text{for some } k, \\ r &= (\epsilon_0 + \ldots + \epsilon_{j-1}) + (\epsilon_{i+1} + \ldots + \epsilon_n). \end{aligned}$$

根据引理 5.3 和命题 5.5，标记为 $[i+1,k]$ 和 $[k+1,j-1]$ 的射线在 $\Sigma_{\mathcal{G}'}$中不张成一个锥，而对应于 $[0,j-1]$ 和 $[i+1,n]$ 的射线则张成一个锥。□

推论 5.7。 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 是相对于射线 r 对 $\Sigma_{\mathcal{G}'}$ 进行的星细分。

证明。 由引理 5.3 和命题 5.5 显然可知 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 细化 $\Sigma_{\mathcal{G}'}$。由命题 5.6 我们还知道，在细化过程中会额外加入一条射线。由于我们讨论的是单纯扇，只需检验 Cone$(r, \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_{j-1})$ 和 Cone$(r, \epsilon_{i+1} + \ldots + \epsilon_n)$ 都是 $\Sigma_{\mathcal{G}}$的二维锥。由于标记这些射线的集合是 $\mathcal{G}$-相容的，结论成立。□

References

[1] Nima Arkani-Hamed、Yuntao Bai、Song He 和 Gongwang Yan。《散射形式与运动学、色荷及世界面的正几何》。*Journal of High Energy Physics*，2018(5):1–78，2018。[2] Nima Arkani-Hamed、Hadleigh Frost、Pierre-Guy Plamondon、Giulio Salvatori 和 Hugh Thomas。《有限表示型代数的构形空间》，2025年。arXiv:2512.24870。[3] Nima Arkani-Hamed、Song He 和 Thomas Lam。《有限型的簇构形空间》。*SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 17 092, 41, 2021 ，：论文编号。

[4] Nima Arkani-Hamed、Song He 和 Thomas Lam。《弦论典范形式》。*Journal of High Energy Physics*，2021 2 1 62, 2021 ( ): – 。[5] Ibrahim Assem、Andrzej Skowronski 和 Daniel Simson。*Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of Representation Theory* 。伦敦数学会学生教材。剑桥大学出版社，2006年。[6] Lara Bossinger、M

Le Matem- ate Telek 和 *atiche* 80 1 189 209, 2025 Hannah Tillmann-Morris。《由 pellytopes 得到的二元几何》。, ( ): – 。[7] Francis C. S. Brown。《多重ζ值与模空间的周期》 $\mathfrak{M}_{0\ n}$ *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* , 。, ( ): – 。[8] *(4)* 42 3 371 489, 2009 David A. Cox、John B. Little 和 Henry K. Schenck。*Toric Varieties*。《数学研究生丛书》。美国数学会，2011年。[9] Laurent Demonet、Osamu Iyama 和 Gustavo Jasso。

τ *Interna-* -倾斜有限代数、 *tional Mathematics Research Notices* 2019 3 852 892, 2019 砖与 -向量。, ( ): – 。[10] Harm Derksen 和 Jerzy Weyman。*An introduction to quiver representations*，第184卷。美国数学会，2017年。[11] Harm Derksen、Jerzy Weyman 和 Andrei Zelevinsky。《带势箭图及其表示 II：在丛代数中的应用》。*Journal of the American Mathematical Society*，23(3):749–790，2010年。[12] Eva Maria Feichtner 和 Bernd Sturmfels。《拟阵多胞体、嵌套集与伯格曼扇》。*Portugaliae Mathematica. Nova Série* 62 4 437 468, 2005 ，( ): – 。[13] Brendan Hassett。《带权标记稳定曲线的模空间》。*Advances in Mathematics* 173 2 316 352, ，( ): – 。[14] 2003 Ziro Koba 和 Holger Bech Nielsen。《n介子振幅的显式交叉不变参数化》。*Nuclear Physics B*，12(3):517–536，1969年。[15] Thomas Lam。《正几何中的模空间》。*Le Matematiche*，80(1):17–101，2025年。[16] Alexander Postnikov。《排列多胞体、结合多胞体及其他》。*International Mathematics Research Notices*，2009 6 1026 1106，2009 ( ): – 。[17] James Stasheff。*H-spaces from a homotopy point of view*，第161卷。施普林格，2006年。[18] Jennifer Woodcock。《按包含关系排序的戴克路径偏序集的性质》，2010年。arXiv:1011.5008。

Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, Germany
Email address: veronica.calvo@mis.mpg.de

Institute for Advanced Study, Princeton, 08540 NJ, U.S.A.
Email address: frost@ias.edu