不同类别时空中光子球的一般讨论

Chen-Kai Qiao* 和 Ping Su†*College of Science, Chongqing University of Technology, Banan, Chongqing, 400054, China*

Yang Huang‡*School of Physics and Electronic Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan, 411201, China*（日期：2026年2月5日）

光子球在黑洞及其他天体物理对象的研究中引起了广泛关注。对于不同类别的时空（或引力源），光子球的存在及其分布受到时空的几何性质和拓扑性质，以及相应引力场特征的显著影响。在本研究中，我们对不同类别时空中的光子球进行了几何分析，包括黑洞时空、超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空。我们得出了适用于这些时空的一些普遍性质和结论。我们主要关注不同类别时空中光子球的存在性、光子球总数 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}}$，以及稳定光子球与不稳定光子球的数量之差 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$。这些结论仅由时空光学几何的几何性质推导而来，与具体的时空度规形式无关。此外，我们的结果成功地重新得到了近年来提出的关于光子球的一些重要定理。

arXiv:2602.04573v1 [gr-qc] 4 Feb 2026

I. 引言

自事件视界望远镜（EHT）捕获黑洞图像 [1–3]以及 LIGO 和 Virgo 观测到引力波以来，光子球／圆形光子轨道便在物理学和天文学领域引起了广泛关注 [4, 5]。首先，光子球对许多天体物理观测有着极其重要的影响，例如引力透镜[6–9], 黑洞阴影 [10–15], 天体物理吸积盘 [15–17], 准正常模 [18], 时空的非线性稳定性 [19–22], 以及引力系统的混沌行为 [18, 23]。此外，光子球还能够揭示引力源的内在物理性质和特征 [24–31], 从而为理解引力理论提供宝贵的见解。近期多项研究表明，不同类别的时空（如黑洞时空、超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空）中光子球的数量及分布可能呈现截然不同的特征[32–40]。

引力源周围光子球的存在及其分布特征具有深远意义。在经典广义相对论（GR）解中，施瓦西、Reissner-Nordstrom（RN）和Kerr黑洞都只有一个不稳定光子球／光环 [1]。另一方面，与标量物质场和电磁场耦合的带毛黑洞解可能存在多个光子球 [41–44]。对于黑洞系统，根据天体物理观测中捕捉到的阴影图像，人们普遍认为，不稳定光子球的存在必定是黑洞时空的普遍特征。近期，许多学者基于几种不同的方法，证明了黑洞附近存在不稳定光子球 [39, 40, 45–51]。然而，在其他类别的时空中（例如超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空），光子球是否存在可能并不那么明晰。例如，对裸奇点时空的研究表明，在这类时空中，不稳定光子球可能消失 [32, 33]。正则时空中的光子球现象比传统黑洞时空中的更为复杂，可能呈现出有趣的行为[34–36]。此外，也有研究指出，事件视界的存在与否可能会强烈影响引力时空中光子球的数量 [38, 39]。在这种情况下，有必要且迫切需要对不同类别时空中的光子球进行普遍而全面的讨论，这将为我们从理论上（或观测上）区分不同种类的时空提供途径，并加深我们对这些时空的理解。

探索引力场中的光子球可以采用多种方法。传统上，通常通过光子的有效势来确定引力源附近光子球／光环的位置。然而，现代几何与拓扑的蓬勃发展，为研究引力理论和光子球提供了新的方法和技术。近年来，已有一些新颖的方法被提出，用于探索多种引力系统中的光子球／光环 [38–40, 52–56]。尤

*邮箱：chenkaiqiao@cqut.edu.cn
†邮箱：suping@cqut.edu.cn
‡邮箱：yanghuang@mail.bnu.edu.cn[1] 对于克尔黑洞，由于光子轨道存在同向旋转和逆向旋转之分，人们可能会对这一描述感到困惑。然而，如果固定光子轨道的角动量符号，那么赤道面上就存在唯一一个不稳定光环。

其是，P. V. P. Cunha 等人提出了一种研究光子球的拓扑方法，利用辅助矢量场为每个光子球／光环赋予一个拓扑不变量 [38]。在此方法下，他们证明，在黑洞时空中，稳定光子球与不稳定光子球的数量之差满足 $n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = -1$ 黑洞时空中的[39], 这一结果证明了黑洞时空中不稳定光子球的存在。S. W. Wei 在近期的一项研究中，利用 Y. S. Duan 提出的 [40], -映射拓扑流 ϕ，将这一拓扑不变量重新表述为拓扑荷等人 [57]。随后，这种拓扑方法被推广至更广泛的引力系统和各种圆轨道，包括光子的零类圆形测地线以及有质量粒子的类时圆轨道 [58–68]。值得注意的是，S. W. Wei 等人指出，拓扑荷还可用于研究黑洞拓扑和黑洞热力学相变[69–72]。

受上述研究启发，我们提出了一种几何方法，用于研究球对称时空中的光子球 [73, 74]。在这种几何方法中，我们通过四维洛伦兹时空的光学几何来探究光子球。光学几何的构造可视为将修正后的费马原理推广至弯曲时空 [79–81]。在二维光学几何中，两种内禀曲率（高斯曲率和测地曲率）完全决定了稳定与不稳定光子球。测地曲率（通过 $\kappa_g(r_{ph}) = 0$）唯一确定光子球的恰当位置，而高斯曲率的符号则决定光子球的稳定性。具体而言，高斯曲率为负表明光子球不稳定，而高斯曲率为正则表明光子球稳定。我们还证明，对于光子球问题，我们的几何方法所得结果与传统方法（使用有效势）和拓扑方法所得结果完全等价 [73–75]。我们几何方法背后的几何观点推动了相关领域的若干研究 [75–77], , 例如将其推广至类时圆形测地线和粒子面（其中运用了时空雅可比几何中的曲率）[75]。此外，基于光学几何中的几何分析，我们成功地为黑洞时空中的关系 $n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = -1$ [78]给出了新的证明。由此自然引出一个问题：其他类别时空（例如超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空）中光子球分布的特征，能否以类似方式进行分析和推导?

在本工作中，我们采用参考文献[73, 74, 78]中的几何方法，对若干类别时空（包括黑洞时空、超紧致天体的时空、正则时空、裸奇点时空）中的光子球进行了全面分析。假定最常见的渐近be-时空行为（渐近平坦、渐近德西特和渐近反德西特），光子球的存在性、光子球的总数$n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}}$、稳定光子球与不稳定光子球的分布特征，以及稳定光子球与不稳定光子球之差$w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$ （在不同种类的时空中可视为拓扑荷/拓扑不变量），均针对这些类别的时空进行了详细研究与讨论。这一分析将使我们能够提取不同类别时空中光子球的一些普遍而共同的特征。此外，应当指出，本文所给出的几何分析适用于一般的（静态）球对称时空，其时空度规为 $ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2$，而不依赖于时空度规分量的任何具体形式。

本文其余部分安排如下。第II 节简要回顾我们研究光子球的几何方法。第III 节讨论不同类别时空中光子球的存在性。第IV 节研究稳定光子球和不稳定光子球的分布特性，尤其是稳定光子球与不稳定光子球的消减 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$。第V 节探讨可能用于约束光子球的观测方法。结论与展望总结于第VI节。

II. 光子球的几何方法

本节简要回顾近期研究提出的光子球几何方法 [73, 74, 78]。该方法采用洛伦兹时空的低维类比——光学几何——来分析光子球。在球对称引力系统中，光学几何中的两种内蕴曲率（测地曲率和高斯曲率）能够确定光子球的位置及其稳定性。

从数学上讲，光学几何可以通过几种等价的方式构造 [79–81]。实现光学几何的一种简单方法，是利用零约束对时空几何进行连续映射 $d\tau^2 = -ds^2 = 0$

$$\underbrace{ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}_{\text{Spacetime Geometry}} \overset{d\tau^2=-ds^2=0}{\Longrightarrow} \underbrace{dt^2 = g^{\text{OP}}_{ij}dx^i dx^j}_{\text{Optical Geometry}} \quad (1)$$

对于任意球对称时空，不失一般性，总可以将光子轨道限制在赤道面内。在这种情况下，一个二维

表 I. 传统有效势方法、拓扑方法和我们的几何方法的特点。

方法	我们的几何方法	拓扑方法	传统方法
几何	光学几何	时空几何	时空几何
基本量	高斯曲率 $\mathcal{K}(r)$ 测地曲率 $\kappa_g(r)$	辅助矢量场 V 拓扑荷 w	有效势 $V_{\text{eff}}(r)$
光子球	$\kappa_g(r)=0$	$V=0$	$\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}=0$
不稳定光子球	$\kappa_g(r)=0$ 和 $\mathcal{K}(r)<0$	$V=0$ 和 $w=-1$	$\frac{dV_{\text{有效}}(r)}{dr}=0$ 和 $\frac{d^2V_{\text{有效}}(r)}{dr^2}<0$
稳定光子球	$\kappa_g(r)=0$ 和 $\mathcal{K}(r)>0$	$V=0$ 和 $w=+1$	$\frac{dV_{\text{有效势}}(r)}{dr}=0$ 和 $\frac{d^2V_{\text{有效势}}(r)}{dr^2}>0$

可以构建维光学几何。

$$\underbrace{dt^2=g_{ij}^{\text{OP}}dx^idx^j}_{\text{Optical Geometry}}\overset{\theta=\pi/2}{\Longrightarrow}\underbrace{dt^2=\tilde{g}_{ij}^{\text{OP-2d}}dx^idx^j}_{\text{Optical Geometry (Two Dimensional)}} \tag{2}$$

尤其是在球对称时空中，相应的光学几何 $dt^2=\tilde{g}_{ij}^{\text{OP-2d}}dx^idx^j$ 总是由二维黎曼几何 [80–83]描述。事实证明，光学几何在研究引力偏折和引力透镜效应方面极为强大 [80–97]。

在我们的几何方法中，光子球及其稳定性的分析是通过二维光学几何中的内禀曲率进行的。二维光学几何中最重要的内禀曲率是高斯曲率和测地曲率。基于这些内禀曲率，可以完全确定光子球的位置及其稳定性。首先，光子球在二维光学几何变换下仍可保持其测地性质，因此光子球的测地曲率自然为零 [73, 74]

$$\kappa_g(r=r_{ph})=0 \tag{3}$$

此外，已证明，我们几何方法中的测地曲率条件与传统方法中的有效势条件完全等价 [73, 74]。

$$\kappa_g(r=r_{\text{ph}})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left.\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}\right|_{r=r_{\text{ph}}}=0 \tag{4}$$

其次，光子球的稳定性可由光学几何中的共轭点来约束。对于稳定和不稳定光子球，发生微扰后的光子轨道表现截然不同。当光子轨道从不稳定光子球处受到微扰后，会远离该光子球，且永远不会返回。相反，当光子轨道从稳定光子球处受到微扰后，也可能在稳定光子球附近形成其他束缚轨道。从数学角度看，稳定和不稳定光子球的这些不同特征体现为共轭点在流形中的分布。稳定光子球上存在共轭点，而不稳定光子球上不存在共轭点 [73, 74, 78]。共轭点的存在与否为区分稳定和不稳定光子球提供了一种新方案。微分几何和拓扑中的嘉当–阿达马定理对高斯曲率以及共轭点的存在性施加了严格约束[98]。将嘉当–阿达马定理应用于光学几何，可推导出关于光子球稳定性的以下高斯曲率条件 [73, 74]。

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}(r)<0 \;\Rightarrow\; \text{The photon sphere } r=r_{ph} \text{ is unstable}\\&\mathcal{K}(r)>0 \;\Rightarrow\; \text{The photon sphere } r=r_{ph} \text{ is stable}\end{aligned}$$

这一高斯曲率条件完全由光学几何的曲率和拓扑推导得出，不依赖于特定引力系统的具体度规形式。因此，这一结论可普遍应用于任何球对称系统。此外，对于稳定和不稳定光子球，这一高斯曲率条件等价于传统方法中的有效势条件[73, 74]

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}(r)}{dr^2}\right|_{r=r_{\text{unstable}}}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{K}(r=r_{\text{unstable}})<0 \tag{5a}$$

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}(r)}{dr^2}\right|_{r=r_{\text{stable}}}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{K}(r=r_{\text{stable}})>0 \tag{5b}$$

我们几何方法、传统方法和拓扑方法的区别特征（以及这些方法之间的等价性）已汇总于表I。

III. 光子球的存在性

本节讨论一般球对称引力系统中光子球的存在性，包括黑洞时空、超致密天体时空、正则时空（不含时空奇点）以及裸奇点时空。

一般（静态）球对称时空度规可表示为

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2+g_{rr}(r)dr^2+g_{\theta\theta}(r)d\theta^2+g_{\phi\phi}(r,\theta)d\phi^2 \quad (6)$$

此外，对于任意球对称时空，通过坐标变换总可以得到度规分量 $g_{\theta\theta} = r^2$ 和 $g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$，从而使时空度规化简为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (7)$$

其中 $f(r) = -g_{tt}(r)$ 和 $g(r) = g_{rr}(r)$。球对称时空由以下内容给出

$$dt^2 = \tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{ij}dx^idx^j = \frac{g(r)}{f(r)}\cdot dr^2 + \frac{r^2}{f(r)}\cdot d\phi^2 \quad (8)$$

在该二维光学几何中，半径为常数 r 的圆形曲线（例如光子球）的测地曲率可计算为

$$\begin{aligned}\kappa_g(r) &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{rr}}}\frac{\partial\left[\log(\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{\phi\phi})\right]}{\partial r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left[\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right]\end{aligned} \quad (9)$$

an二维光学几何中的高斯曲率可通过以下方式计算

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}}}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{\phi\phi}}}\frac{\partial\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{rr}}}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{rr}}}\frac{\partial\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{\phi\phi}}}{\partial r}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2r}\frac{1}{g(r)}\frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{2r}\frac{f(r)}{[g(r)]^2}\frac{dg(r)}{dr} - \frac{1}{2f(r)g(r)}\left[\frac{df(r)}{dr}\right]^2 - \frac{1}{4[g(r)]^2}\frac{df(r)}{dr}\frac{dg(r)}{dr} + \frac{1}{2g(r)}\frac{d^2f(r)}{dr^2}\end{aligned} \quad (10)$$

其中，$\tilde{g}^{\text{OP-2d}} = \det(\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{ij})$ 为二维光学几何度规的行列式。在本文中，关于光子球的所有结论均通过几何分析（利用光学几何中的测地曲率）以及引力系统的渐近行为获得，而与任何特定的时空度规函数 g_{tt}、g_{rr}、$g_{\theta\theta}$ 和 $g_{\phi\phi}$ 无关。

由第II节所述的几何方法可知，光子球的条件是测地曲率为零，即 $\kappa_g(r_{ph}) = 0$。因此，光子球的存在意味着方程$\kappa_g(r) = 0$ 至少存在一个解 [78]。为分析一般球对称引力系统中光子球的存在性，关键在于研究二维光学几何中圆形曲线的测地曲率 $\kappa_g(r)$ 的行为。

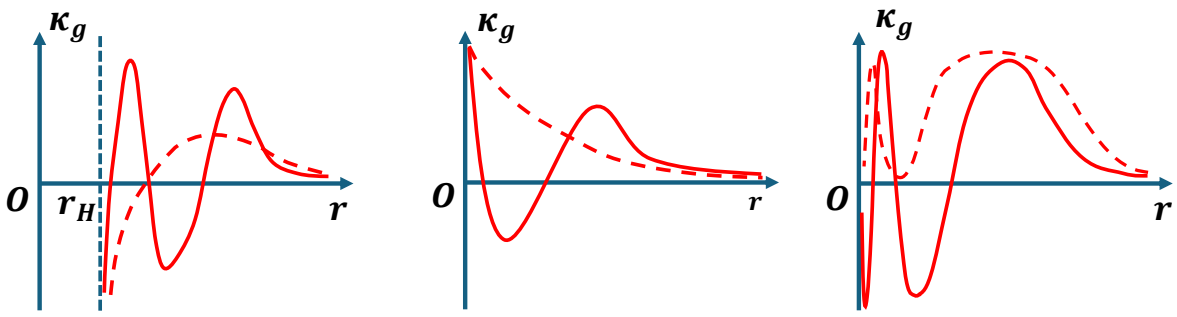
对于不同类别的时空，光子球可能出现的有效区域略有不同。当时空具有事件视界时，光子球出现的有效区域通常位于视界之外 $r > r_H$（如果视界内存在光子球，视界外的任何天体物理观测者都无法观测到它们）。相反，如果时空不具有事件视界，光子球可能出现在整个时空区域 $r > 0$。为了全面讨论光子球的存在性，需要研究不同类别时空中有效区域（光子球可能存在的区域）内边界和外边界处的测地曲率κ_g（r）。特别是，对于黑洞时空和正则时空（没有奇点但具有视界），需要分析近视界区域 $r > r_H$ 和无限远区域 $r > 0$的测地曲率。

对于超紧致天体时空、裸奇点以及正则时空（没有奇点且没有视界的时空），必须分析 $r \to 0$ 极限和无限远区域 $r \to \infty$ 的测地曲率。在本文中，我们将讨论以下几种情况:

•**情况 I**：对于具有视界的黑洞时空和常规时空，在无限远极限下，测地曲率满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$，而在视界附近区域满足 $\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r) < 0$，方程 $\kappa_g(r) = 0$ 必须在事件视界之外至少有一个解。这种情况见图1中的第一种情形。

•**情况 II**：对于超紧致天体时空（无视界）、一阶度规导数有限的裸奇点时空以及常规时空（无视界），在无限远极限下，测地曲率满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$，而在中心极限下满足 $\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) > 0$，方程 $\kappa_g(r) = 0$ 必须没有解或有偶数个解。这种情况见图1中的第二种情形。

• **情况 III**：对于裸奇点时空（在时空奇点处一阶度规导数趋于正无穷大，$\lim_{r\to 0}{}^{df(r)}{}_{dr} =$



情况 I　　情况 II　　情况 III

图 1. 不同类别时空中测地曲率 $\kappa_g(r)$ 随径向坐标 r 的变化。情况 I：对于满足 $\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r) < 0$ 且 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$ 的黑洞时空和正则时空（存在视界），方程 $\kappa_g(r) = 0$ 在事件视界之外必须至少有一个解。虚线表示一个解的情况，实线表示三个解的情况。情况 II：对于满足 $\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) > 0$ 且 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$ 的超紧致天体时空、一阶度规导数有限的裸奇点时空以及正则时空（不存在视界），方程 $\kappa_g(r) = 0$ 要么无解，要么有偶数个解。虚线表示无解的情况，实线表示两个解的情况。情况 III：对于在时空奇点 $\lim_{r\to 0}\frac{df(r)}{dr} = +\infty$ 处一阶度规导数发散至正无穷的裸奇点时空，测地曲率满足 $\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) =$ 不定且 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$。无法确定方程 $\kappa_g(r) = 0$ 是否有解。实线描绘了 $\kappa_g(r) = 0$ 存在解的示例，而虚线描绘了 $\kappa_g(r) = 0$ 无解的示例。在此图中，记号 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$ 表示在无限远极限 $r\to\infty$ 下，测地曲率满足 $\kappa_g(r)\to 0$ 且 $\kappa_g(r) > 0$。

$+\infty$），在无限距离极限下，测地曲率满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$；而在中心极限下，测地曲率变得不定（$\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) =$ 不定）。在这种情况下，无法确定方程 $\kappa_g(r) = 0$ 是否有解。图1的第三种情况展示了这一情形。

在本节余下部分，我们将分别分析图 $\kappa_g(r)$ 中不同类别时空各情形下的测地曲率1 。

A. 无限远极限下的测地曲率 $r\to\infty$

本小节讨论二维光学几何中无限远区域 $r\to\infty$ 内测地曲率 $\kappa_g(r)$ 的行为。正如我们将在接下来的推导中看到的，无限远极限下的测地曲率仅取决于时空度规的渐近展开，与事件视界的存在与否无关。对于不同类别的时空（如黑洞时空、超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空），分析过程和结论完全相同。特别是，我们选取最常见的时空渐近行为（渐近平坦、渐近平坦、渐近德西特和渐近反德西特）进行分析。

渐近平直时空： 渐近平坦时空在无限远极限下具有如下渐近度规展开 $r\to\infty$

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = 1 + \frac{a_i}{r^i} + O\left(\frac{1}{r^{i+1}}\right) \qquad (i \geq 1) \tag{11a}$$

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \frac{1}{1 + \frac{b_j}{r^j} + O\left(\frac{1}{r^{j+1}}\right)} \qquad (j \geq 1) \tag{11b}$$

其中 a_i 和 b_j 为展开系数。根据渐近度规展开，可计算无限远极限下的测地曲率$\kappa_g(r)$，结果为

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) &= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right] \\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\frac{1}{r} + \frac{a_i}{r^{i+1}} + \frac{ia_i}{2r^{i+1}} + O\left(\frac{1}{r^{i+2}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\frac{a_i}{r^i} - \frac{b_j}{r^j} + O\left(\frac{1}{r^{i+1}}, \frac{1}{r^{j+1}}\right)}{1 + \frac{b_j}{r^j} + O\left(\frac{1}{r^{j+1}}\right)}}} \\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r} = 0^+ \end{aligned} \tag{12}$$

记号 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$ 表示测地曲率满足 $\kappa_g(r)\to 0$ 且 $\kappa_g(r) > 0$在 $r\to\infty$ 极限下。这与图 1所示的三种情况完全一致。

渐近德西特与渐近反德西特时空：在无限远极限下，渐近德西特／渐近反德西特时空具有如下渐近解析度规展开

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{a_i}{r^i} + O\left(\frac{1}{r^{i+1}}\right) \quad (i \geq 1) \quad (13a)$$

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \frac{1}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{b_j}{r^j} + O\left(\frac{1}{r^{j+1}}\right)} \quad (j \geq 1) \quad (13b)$$

其中 a_i 和 b_j 为展开系数， Λ 为宇宙学常数。渐近德西特／反德西特时空允许正（或负）宇宙学常数 $\Lambda > 0$ （或 $\Lambda < 0$）。利用上述度规展开，我们得到无限远极限下的测地曲率

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \kappa_g(r) &= \lim_{r\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right] \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{1}{r} + \frac{a_i}{r^{i+1}} + \frac{ia_i}{2r^{i+1}} + O\left(\frac{1}{r^{i+2}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\frac{a_i}{r^i} - \frac{b_j}{r^j} + O\left(\frac{1}{r^{i+1}}, \frac{1}{r^{j+1}}\right)}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{b_j}{r^j} + O\left(\frac{1}{r^{j+1}}\right)}}} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0^+ \end{aligned} \quad (14)$$

记号 $\lim_{r\to\infty} \kappa_g(r) = 0^+$ 表示测地曲率满足 $\kappa_g(r) \to 0$ 和 $\kappa_g(r) > 0$在 $r \to \infty$ 极限下的关系，这与渐近平直时空的结果相同。无限远极限下的测地曲率行为与图1所示的三种情形完全吻合。

B. 近视界极限 $r \to r_H$ （或中心极限 $r \to 0$）下的测地曲率

与无限远极限下的测地曲率行为不同（后者仅取决于度规分量的渐近解析展开，与视界及时空类型无关），区域内边界处（可能存在光子球）的测地曲率则受到时空结构和引力源性质的强烈约束。对于不同类别的时空（黑洞时空、超紧致天体时空、正则时空、裸奇点时空），内边界处的测地曲率 κ_g（r）分为两种情形：近视界极限 $r \to r_H$ 和中心极限 $r \to 0$。

黑洞时空：根据 R. Penrose 提出的宇宙监督猜想等人，黑洞时空总是存在事件视界，使得时空奇点被事件视界包围 [99–101]。事件视界是洛伦兹时空中的类光超曲面，并使度规分量$g_{tt}(r) = -f(r)$， $g_{rr}(r) = g(r)$ 消失，并且在.....方面发挥着重要作用于时空的因果结构中。度规分量 $f(r)$ 和 $g(r)$ 在穿越视界时必须改变符号。出于天文观测方面的考虑，光子球的位置总是假定在黑洞视界之外，因为事件视界内的任何光子球都无法被远处观测者观测到。

值得注意的是，对于黑洞时空，近期一项研究表明，在近视界极限下，测地曲率与黑洞的表面引力密切相关，可表示为 $\lim_{r\to r_H} \kappa_g(r) = -\kappa_{\text{surface gravity}} < 0$ [75]。由于在无限远极限下，测地曲率满足 $\lim_{r\to\infty} \kappa_g(r) = 0^+$ （这一点已在小节 IIIA 中讨论），因此方程 $\kappa_g(r) = 0$ 必须至少有一个解（如图 1第一种情形所示），这证实了黑洞附近存在光子球。

然而，在本研究中，我们通过对事件视界附近的度规函数 $g_{tt}(r) = -f(r)$ 和 $g_{rr}(r) = g(r)$ 及其导数进行更简单的分析，采用另一种方式证明黑洞时空中光子球的存在。由于事件视界的存在会改变度规分量$f(r)$ 和 $g(r)$ 的符号，因此视界附近的度规分量函数必须满足以下关系

$$\begin{aligned} f(r) &< 0 \quad \text{when } r < r_H \\ f(r) &= 0 \quad \text{when } r \to r_H \\ f(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r > r_H \end{aligned}$$

这表明在近视界极限下

$$\lim_{r\to r_H} \frac{df(r)}{dr} > 0 \qquad \lim_{r\to r_H} \frac{f(r)}{r} = 0$$

根据这些关系，近视界极限下二维光学几何中的测地曲率变为

$$\begin{aligned}\lim_{r\to r_H} \kappa_g(r) &= \lim_{r\to r_H} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right] \\ &= \lim_{r\to r_H} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(0 - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right] \\ &< 0 \end{aligned} \quad (15)$$

这与 Cunha 等人在参考文献 [75]中得到的结果一致。在上述推导过程中，需要注意的是，因子 $\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}$ 被假定为在近视界极限下保持非奇异。特别是，在简单的球对称黑洞系统中（例如经典的史瓦西黑洞和 RN 黑洞），度规分量满足 $f(r)\cdot g(r) = 1$。在最一般的球对称黑洞系统中，尽管关系 $f(r)\cdot g(r) = 1$ 不再成立，但合理的假设是，乘积$f(r)\cdot g(r) > 0$ 在事件视界之外成立。这可以视为时空因果结构所施加的限制，因此切向量 $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial r}$

与传统静态坐标相关联的切向量在事件视界之外同时指向类时和类空方向。

总之，对于黑洞时空，光学几何中的测地曲率在近视界极限下满足 $\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r) < 0$，在无限远极限下满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$，如图 1 的第一种情况所示。在这些情况下，方程 () 的解必然存在，这表明黑洞附近存在光子球。此外，假设测地曲率的连续性 () [2]，我们可以很容易地看出，黑洞时空中（事件视界之外）光子球的总数必定为奇数，即 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}} = 2k+1$（其中 $k \in \mathbb{N}$ 为自然数）。

超紧致天体时空：对于由超紧致天体（例如中子星、玻色子星、轴子星、奇异星，以及其他作为黑洞模拟体的大质量致密天体）产生的时空，由于不存在事件视界，光子球可能出现在整个时空区域 $r \geq 0$ [3] 内。对于此类时空，有必要分析中心极限 $r \to 0$下测地曲率 $\kappa_g(r)$ 的行为。

超紧致天体不会产生事件视界，因此时空度规在整个时空中都是正则的

$$\begin{aligned} f(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r \geq 0 \\ g(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r \geq 0 \\ \frac{df(r)}{dr} &= \text{finite} \quad \text{when } r \geq 0 \end{aligned}$$

这表明，在中心极限下 $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(r)}{r} = +\infty$$

在这种情况下，测地曲率满足以下在 $r \to 0$ 极限下的关系

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0}\kappa_g(r) &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right] \\ &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(+\infty - \text{finite}\right)\right] \\ &= +\infty \end{aligned} \tag{16}$$

因此，对于由超紧致天体产生的时空，在中心极限下，测地曲率满足 $\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) = +\infty$，而在无限远极限下满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r) = 0^+$（后者已在小节IIIA中作了解释）。这正是图1第二种情形所描绘的场景。在这种情况下，方程 $\kappa_g(r) = 0$要么无解，要么有偶数个解 [4]。因此，超紧致天体时空（例如由中子星、玻色子星、轴子星、奇异星及其他作为黑洞模拟体的大质量致密天体所产生的时空）并非必然存在光子球。此外，超紧致天体时空中的光子球总数必为偶数，即 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}} = 2k$（其中 $k \in \mathbb{N}$ 为自然数）。

正则时空（存在事件视界）：在本部分中，我们分析不存在时空奇点但存在事件视界的正则时空。出于天文观测的原因，与黑洞情形类似，我们只研究位于事件视界外部的光子球。尽管近期研究表明，特殊正则时空的事件视界内部可能存在光子球 [35]，但它们与观测之间的联系仍面临巨大挑战。因此，我们仅关注事件视界外部的光子球；关于视界内部光子球的讨论超出了本研究的范围。

对于拥有视界的正则时空，由于事件视界的存在会改变度规分量 $f(r)$ 和 $g(r)$ 的符号，视界附近及外部的度规分量必须满足关系

$$\begin{aligned} \lim_{r\to r_H} f(r) &= 0 \quad \text{when } r \to r_H \\ f(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r > r_H \\ g(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r > r_H \end{aligned}$$

这表明，在近视界极限 $r \to r_H$ 下

$$\lim_{r\to r_H}\frac{df(r)}{dr} > 0 \qquad \lim_{r\to r_H}\frac{f(r)}{r} = 0$$

那么，光学几何中的测地曲率在

[2] 测地曲率取决于度规分量 $f(r)$ 和 $g(r)$ 的一阶导数。为了在四维时空几何及相应的二维光学几何中定义良好的曲率张量（或曲率标量），度规分量 $f(r)$、$g(r)$ 的一阶导数必须连续。对于存在事件视界的时空，其光学几何通常定义在事件视界 $r \geq r_H$ 之外，因此不包括时空中的（黑洞）奇点。因此，我们总是假设光学几何中的测地曲率连续，但对于没有视界的裸奇点时空的中心点 $r = 0$ 则不作此假设。[3]严格来说，由于超紧致天体不透明，在天体物理观测中，远处观测者只能探测到半径大于超紧致天体尺寸（$r_{ph} \geq r_{\text{surface}}$）的光子球。超紧致天体内部的光子球复杂得多，超出了本研究的范围。在当前研究中，我们简单地假设超紧致天体的尺寸足够小。在这种情况下，整个时空区域 $r \geq 0$ 中出现的任何光子球都可以被观测到。

[4]我们假设测地曲率的连续性，正如脚注中所解释的2

近视界极限下变为

$$\begin{aligned}\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r) &= \lim_{r\to r_H}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r}-\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right]\\ &= \lim_{r\to r_H}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(0-\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right]\\ &< 0\end{aligned} \tag{17}$$

与黑洞时空类似，这里我们假设因子 $\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}$ 在近视界极限下是非奇异的（因此 $f(r)\cdot g(r)>0$ 始终位于事件视界之外）。总之，对于具有事件视界的正则时空，测地曲率在近视界极限下满足 $\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r)<0$，并在无限远极限下满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r)=0^+$（后者已在小节 IIIA中讨论），这与图1的第一种情况相同。在这些情况下，方程 $\kappa_g(r)=0$ 中解的存在性得以保证，从而明确证实了此类正则时空中光子球的存在。此外，假设测地曲率连续，可以清楚地证明，正则时空（具有事件视界）周围的光子球总数必为奇数 $n=n_{\text{stable}}+n_{\text{unstable}}=2k+1$（其中 $k\in\mathbb{N}$ 是自然数）。

正则时空（不存在事件视界）： 与上一部分（正则时空具有事件视界）相反，对于同时不存在视界和奇点的正则时空，光子球可能出现在整个时空区域 $r\geq 0$。有必要分析中心极限 $r\to 0$下测地曲率的行为。

对于不存在视界的正则时空，度规分量 $f(r)$和 $g(r)$必须正则且符号不变，即

$$\begin{aligned}f(r)&=\text{finite}>0 \quad \text{when } r\geq 0\\ g(r)&=\text{finite}>0 \quad \text{when } r\geq 0\end{aligned}$$

这表明中心极限下$\lim_{r\to 0}\frac{f(r)}{r}=+\infty$。与此同时，正则时空不存在时空奇点，因此度规分量的导数在整个时空中必须有限

$$\frac{df(r)}{dr}=\text{finite} \quad \text{when } r\geq 0$$

因此，中心极限下的测地曲率可简化为

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r}-\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right]\\ &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(+\infty-\text{finite}\right)\right]\\ &= +\infty\end{aligned} \tag{18}$$

结合无限远极限处的测地曲率 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r)=0^+$和 $\lim_{r\to 0}\kappa_g(r)=+\infty$ 在中心极限下，这种情形正是我们在图 1 的第二种情况中所描绘的，这意味着方程 $\kappa_g(r)=0$ 要么无解，要么有偶数个解。因此，对于没有事件视界的正则时空，光子球并非必然存在。光子球的总数由 $n=n_{\text{stable}}+n_{\text{unstable}}=2k$ 表征，其中 $k\in\mathbb{N}$ 是一个自然数。

裸奇点时空（度规的一阶导数有限）： 裸奇点时空最显著的特征是出现了远处观察者能够看到、且未被事件视界包围的裸奇点。对于本文讨论的球对称裸奇点时空，我们将裸奇点限定在中心位置 $r=0$。我们首先考虑度规分量的一阶导数在整个时空中有限的情形，这使得能够在时空奇点位置 $r=0$ 适当地定义黎曼曲率张量（尽管利用黎曼曲率张量构造的几何不变量在时空奇点处必定发散）。

裸奇点时空没有事件视界，因此度规分量 $f(r)$ 和$g(r)$的符号保持不变

$$\begin{aligned}f(r)&=\text{finite}>0 \quad \text{when } r\geq 0\\ g(r)&=\text{finite}>0 \quad \text{when } r\geq 0\end{aligned}$$

这表明在中心极限下，$\lim_{r\to 0}\frac{f(r)}{r}=+\infty$。再结合度规函数有限的一阶导数

$$\frac{df(r)}{dr}=\text{finite} \quad \text{when } r>0$$

因此，中心极限下的测地曲率 $\kappa_g(r)$ 为

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\kappa_g(r) &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(\frac{f(r)}{r}-\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\right)\right]\\ &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}}\left(+\infty-\text{finite}\right)\right]\\ &= +\infty\end{aligned} \tag{19}$$

因此，对于一阶度规导数有限的裸奇点时空，在无限远极限下，测地曲率满足 $\lim_{r\to\infty}\kappa_g(r)=0^+$，而在中心极限下满足 $\lim_{r\to 0}\kappa_g(r)=+\infty$，这正是我们在图 1 的第二种情形中所描绘的，表明 $\kappa_g(r)=0$ 要么没有解，要么有偶数个解。在此类裸奇点时空中，光子球不一定存在，并且光子球的总数必为偶数 $n=n_{\text{stable}}+n_{\text{unstable}}=2k$，其中 $k\in\mathbb{N}$ 是一个自然数。

裸奇点时空（度规的一阶导数发散）： 现在我们考虑裸奇点时空的另一种情况，

在这种情况下，度规分量的一阶导数在时空奇点 $r = 0$ 处发散，以至于无法恰当地定义黎曼曲率张量（这会直接导致时空奇点的出现）。

由于裸奇点时空中不存在事件视界，度规分量 $f(r)$ 和 $g(r)$ 的符号必须保持不变

$$\begin{aligned} f(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r > 0 \\ g(r) &= \text{finite} > 0 \quad \text{when } r > 0 \end{aligned}$$

这表明 $\lim_{r\to 0} \frac{f(r)}{r} = +\infty$ 在中心极限下。然而，由于括号中第二项（即度规导数 $\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}$，见方程（9））的发散性质，2维光学几何中测地曲率的行为显得微妙。有必要讨论度规导数 $\frac{df(r)}{dr}$ 如何在时空奇点 $r = 0$ 处发散。

一方面，假设度规导数在时空奇点处发散至正无穷（$\lim_{r\to 0} \frac{df(r)}{dr} = +\infty$），则中心极限下的测地曲率 $\kappa_g(r)$ 化为

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0} \frac{df(r)}{dr} = +\infty \\ \Rightarrow \quad &\lim_{r\to 0} \kappa_g(r) = \lim_{r\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}} \left(\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr} \right) \right] \\ &= \lim_{r\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}} \left(+\infty - (+\infty) \right) \right. \\ &= \text{indefinite} \end{aligned} \tag{20}$$

在这种情况下，无法确定方程 $\kappa_g(r) = 0$ 是否有解，如图 1 的第三种情形所示。因此，这类裸奇点时空中光子球的存在性是不确定的。

另一方面，假设度规导数在时空奇点处趋于负无穷（$\lim_{r\to 0} \frac{df(r)}{dr} = -\infty$），则中心极限下的测地曲率 $\kappa_g(r)$ 变为

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0} \frac{df(r)}{dr} = -\infty \\ \Rightarrow \quad &\lim_{r\to 0} \kappa_g(r) = \lim_{r\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}} \left(\frac{f(r)}{r} - \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr} \right) \right] \\ &= \lim_{r\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)\cdot g(r)}} \left(+\infty - (-\infty) \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned} \tag{21}$$

考察无限远极限下的测地曲率极限 $\lim_{r\to\infty} \kappa_g(r) = 0^+$ 以及中心极限下的 $\lim_{r\to 0} \kappa_g(r) = +\infty$，方程 $\kappa_g(r) = 0$ 要么无解，要么有偶数个解，这正是图1第二种情形所描绘的。因此，这类裸奇点时空（其度规导数 $\frac{df(r)}{dr}$ 在时空奇点处发散至正无穷）具有偶数个光子球。

总之，对于一阶度规导数发散的裸奇点时空，度规导数在时空奇点处的发散行为$r = 0$会极大地影响光子球的存在性。如果度规导数 $\frac{df(r)}{dr}$ 在时空奇点处趋于正无穷，那么裸奇点时空中光子球是否存在以及光子球的总数都是不确定的。反之，如果度规导数 $\frac{df(r)}{dr}$ 在时空奇点处趋于负无穷，那么这类裸奇点时空中不一定存在光子球，且光子球的总数必为偶数 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}} = 2k$（其中 $k \in \mathbb{N}$ 是一个自然数）。

IV. 稳定与不稳定光子球的分布

本节讨论不同类别时空中稳定与不稳定光子球的分布特性。本节主要关注稳定与不稳定光子球的差值 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$。这是引力理论中一个极为重要的课题，通过研究这一问题，可以揭示并检验引力源的内在物理性质。值得注意的是，近期多项研究表明，稳定与不稳定光子球的分布能够反映引力时空的拓扑性质，而不稳定光子球与稳定光子球的差值 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$ 可作为时空的拓扑不变量／拓扑荷 [38–40, 56]。本文不采用拓扑方法，而是遵循文献 [78] 中的几何分析，基于光学几何中的曲率展开研究。

光子球分布最重要的性质是，稳定光子球与不稳定光子球呈一一交替分布：

> 时空中的稳定光子球与不稳定光子球彼此一一交替分布，因此每个不稳定光子球都夹在两个稳定光子球之间（每个稳定光子球也都夹在两个不稳定光子球之间）。

稳定与不稳定光子球的这种分布特征如图2所示。粗略地说，这种一一交替、彼此分隔的分布，可以理解为光子运动过程中有效势的局部极大值和局部极小值依次出现（文献中假设若干引力系统的有效势连续）。不过，这一特征也

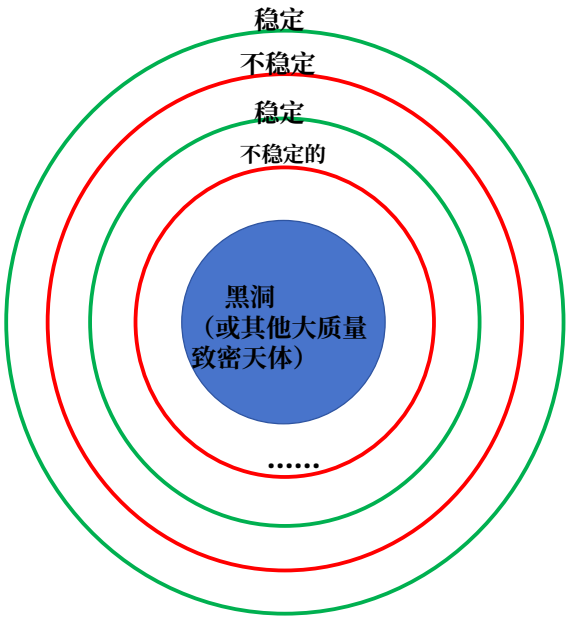


图 2. 时空中的稳定光子球与不稳定光子球彼此交替、一一分隔。

与光学几何的几何性质密切相关，并且可以通过数学方法严格证明。这种一一交替、彼此分隔的分布性质，可借助高斯-博内定理加以严格证明；该定理的证明方法最初由我们在近期的工作中提出 [78]。尽管参考文献 [78] 中的原始证明针对黑洞时空，但证明过程与时空奇点和事件视界的信息无关，因此无需任何改动即可应用于其他类别的时空（例如超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空）。为方便读者，附录A中简要回顾了详细的证明过程。

稳定光子球与不稳定光子球一一交替分布的性质，很容易导出一些非平凡的结论，尤其是对不同物体的时空和引力源中稳定光子球与不稳定光子球之差的约束 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$。对于超紧致天体的时空、正则时空（无视界）以及一阶导数有限的裸奇点时空（这些时空具有偶数个光子球$n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}} = 2k$），这种一一交替分布会迫使稳定光子球与不稳定光子球的数量彼此相等。在这些时空中，不稳定光子球与稳定光子球之差 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$在用于对不同类型的时空进行分类时充当拓扑荷，而对于这些时空，该拓扑荷为零。这成功地恢复了.....

Cunha 提出的一个近期定理等人 [39]，，该定理指出，超紧致时空的拓扑荷为 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = 0$。通过我们的几何分析可以发现，这一关系不仅适用于超紧致天体的时空，也适用于具有偶数个光子球的大类时空，包括无视界的正则时空、一阶导数有限的裸奇点时空，以及一阶度规导数 $^{df}{}_{(r)}\,{}_{dr}$ 在时空奇点处发散至负无穷（$\lim_{r\to 0} \frac{df(r)}{dr} = -\infty$）的裸奇点时空。这些时空最常见的特征是不存在事件视界，这与 Cunha 等人在参考文献 [39, 75], 中的结论一致；该结论表明，事件视界的存在与否会极大地影响时空的拓扑荷。

另一方面，对于存在事件视界的时空，例如黑洞时空和正则时空（具有事件视界），光子球的总数为奇数 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}} = 2k + 1$。这种一一交替分布意味着稳定光子球与不稳定光子球的数量之差为 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = \pm 1$。若要进一步将稳定光子球与不稳定光子球的数量之差限制为 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = -1$，就必须证明最内侧（或最外侧）光子球是不稳定光子球，这样时空中的不稳定光子球数量就不会少于稳定光子球数量。反之，若要将稳定光子球与不稳定光子球的数量之差限制为 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = +1$，就必须证明最内侧（或最外侧）光子球是稳定光子球。值得庆幸的是，我们近期的研究表明，黑洞时空中的最内侧光子球（离事件视界最近）必定是不稳定光子球 [78]。原则上，这一分析适用于任何具有事件视界的球对称时空（例如具有事件视界的正则时空），而不仅限于黑洞时空。为方便读者，附录B 回顾了详细的分析过程。由此，对于黑洞时空和具有事件视界的正则时空，不稳定光子球与稳定光子球的数量之差（作为时空的拓扑荷）必定为 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = -1$，而非 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = +1$。这一结果成功地重现了近期关于黑洞时空拓扑荷的一个定理 [39, 40, 75]。

然而，对于在时空奇点处一阶度规导数 $^{df}{}_{(r)}\,{}_{dr}$ 发散至正无穷的裸奇点时空（~~$\lim_{r\to 0} \frac{df(r)}{dr} = +\infty$~~），光子球的存在性及其总数均具有不确定性，因此，稳定光子球与不稳定光子球一一交替分离的分布，无法将稳定光子球与不稳定光子球 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$ 之差约束为一个确定值。在这种情况下，还需要更多信息（例如

时空奇点处度规导数的具体发散行为），才能确定光子球的存在性及其数量。

V. 约束光子球预测的可能观测方法

关于光子球／圆形光子轨道的理论预测，或可通过天体物理观测数据加以约束和检验，例如甚长基线干涉测量（VLBI）观测（如 EHT 拍摄的光学图像）和引力波观测。

从无穷远观测者的视角看，不稳定光子球会在引力源的光学图像中产生显著的观测特征。特别是，光子球附近极端的光线偏折会使甚长基线干涉观测拍摄的光学图像中出现明亮的辐射环，这通常被称为“光子环”[15, 102–105]。尤其是，对于具有事件视界的黑洞，明亮光子环内部还会出现额外的暗色“黑洞阴影”，正如 EHT 对 M87 和人马座A* 的观测结果所示 [1–3]。尽管不同的引力源（黑洞、作为黑洞模拟体的超紧致天体以及裸奇点）可能导致光学图像（以及引力透镜光子环）的形状和结构有所不同，但成功观测到这一明亮的光子辐射环，必然有力地证明不稳定光子球的存在。观测到的光子辐射环投影直径，其辐射主要来自引力透镜光子环，并与不稳定光子球半径成正比 $r_{\rm unstable}$，同时也受到天体物理吸积流和辐射模型的影响[103, 104]。

当黑洞或其他超紧致天体具有多个不稳定光子球时，可能会产生显著的观测特征。例如，具有多个不稳定光子球的毛发黑洞时空，可能会在光学图像中产生更多明亮的光子辐射环，并且在不同的明亮辐射环之间出现额外的内部子结构 [42, 43]。无视界致密天体也能产生类似的多环结构 [106]。这些结论表明，多重光子环结构（及其子结构）的存在，似乎是具有多个不稳定光子球的引力系统的显著特征。尽管目前甚长基线干涉观测（如 EHT）的精度可能不足以观测并分辨此类多重光子辐射环及光子环之间的其他额外子结构，但下一代甚长基线干涉设备和基础设施或许能够在光学图像中探测到这些结构，使我们能够发现具有多个不稳定光子球的引力系统

光子球 [107, 108]。

另一方面，如果超紧致天体附近存在稳定光子球，且这些天体没有事件视界，那么在引力扰动过程中，引力波可能会不断累积增强，从而产生长寿命准正常模 [19]。这些长寿命准正常模会影响振铃过程，并可能在未来的引力波观测中留下观测特征。此外，近期研究还指出，稳定光子球（或稳定光环）和长寿命准正常模的存在可能引发时空的非线性不稳定性，最终导致此类超紧致天体在天体物理时间尺度内转变或坍缩为其他致密天体构型或黑洞构型 [20, 22]。

VI. 结论与展望

光子球是黑洞和其他天体物理天体研究中的一个极其重要的课题。它不仅与天体物理观测密切相关，还揭示了各种引力源背后的物理学。光子球的数量和分布受到引力场特征、引力源的物理性质以及时空的几何性质和拓扑性质的强烈影响。在不同类别的时空中（例如黑洞时空、超致密天体时空、正则时空、裸奇点时空），光子球的存在性、数量和分布可能呈现完全不同的特征。

在本研究中，我们基于光学几何的几何曲率和几何性质，对不同类别时空中的光子球进行了总体讨论。通过几何分析，我们成功推导出了关于光子球存在性、光子球总数 $n = n_{\rm stable} + n_{\rm unstable}$、稳定光子球与不稳定光子球数量之差 $w = n_{\rm stable} - n_{\rm unstable}$（可将其视为拓扑荷，用于阐明不同类别的时空）在黑洞时空、超紧致天体时空、正则时空（存在或不存在事件视界）、裸奇点时空（度规的一阶导数有限或发散）中的结论。本文关于光子球的详细结论总结于表 II。

假定时空具有最一般的渐近行为（渐近平坦、渐近德西特和渐近反德西特），不同类别时空中的光子球可总结如下：

- **黑洞时空：** 黑洞时空中（事件视界之外）至少存在一个光子球。黑洞时空中光子球的总数为奇数$n = n_{\text{稳定的}} + n_{\text{不稳定的}} = 2k + 1$，而稳定与不稳定光子球数量之差-

表 II. 利用我们的几何分析得到的不同类别时空中光子球的特征。

类别 时空	存在性 光子球	光子球的分布 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}}$	$w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}}$	不稳定与稳定 光子球数量	
黑洞 时空	必须 存在	$n = 2k+1$	$w = -1$	$n_{\text{unstable}} = k+1$	$n_{\text{stable}} = k$
超紧致 物体的时空	不一定 存在	$n = 2k$	$w = 0$	$n_{\text{unstable}} = k$	$n_{\text{stable}} = k$
正则时空 （有视界）	必须是 存在	$n = 2k+1$	$w = -1$	$n_{\text{unstable}} = k+1$	$n_{\text{stable}} = k$
正则时空 （无视界）	不一定 存在	$n = 2k$	$w = 0$	$n_{\text{unstable}} = k$	$n_{\text{stable}} = k$
裸奇点 时空（具有 有限 $\frac{df_{(r)}}{dr}$）	不一定 存在	$n = 2k$	$w = 0$	$n_{\text{unstable}} = k$	$n_{\text{stable}} = k$
裸奇点 时空（具有 $\lim_{r\to 0} \frac{df_{(r)}}{dr} = +\infty$）	非决定性	非决定性	非决定性	非决定性	
裸奇点 时空（具有 $\lim_{r\to 0} \frac{df_{(r)}}{dr} = -\infty$）	不一定 存在	$n = 2k$	$w = 0$	$n_{\text{unstable}} = k$	$n_{\text{stable}} = k$

满足$w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = -1$。

• **超紧致天体时空：**超紧致天体时空中不一定存在光子球。若超紧致天体时空附近存在光子球，其总数必为偶数 $n = n_{\text{稳定}} + n_{\text{不稳定}} = 2k$。稳定光子球与不稳定光子球的数量之差满足 $w = n_{\text{稳定}} - n_{\text{不稳定}} = 0$。

• **规则时空（有视界）：**规则时空（存在视界）中的光子球与黑洞时空中的光子球相似。规则时空（事件视界之外）至少存在一个光子球。光子球的总数为奇数$n = n_{\text{稳定}} + n_{\text{不稳定}} = 2k+1$，且稳定光子球与不稳定光子球的数量之差必须为$w = n_{\text{稳定}} - n_{\text{不稳定}} = -1$。

•**规则时空（无视界）：**规则时空（不存在视界）中的光子球与超紧致天体时空中的光子球相似；在这类时空中不一定存在光子球。若存在光子球，规则时空（无视界）中的光子球总数必为偶数 $n = n_{\text{稳定}} + n_{\text{不稳定}} = 2k$，且稳定光子球与不稳定光子球的数量之差为 $w = n_{\text{稳定}} - n_{\text{不稳定}} = 0$。

•**一阶度规导数有限的裸奇点时空：**假设所有在时空奇点 $r = 0$ 处，一阶度规导数均为有限值的情况下，这类裸奇点时空不一定存在光子球。若存在光子球，其总数必为偶数 $n = n_{\text{stable}} + n_{\text{unstable}} = 2k$，且稳定光子球与不稳定光子球之差为 $w = n_{\text{stable}} - n_{\text{unstable}} = 0$。

•**裸奇点时空（时空奇点处一阶度规导数发散）**：在这类时空中，时空奇点处度规导数的发散行为会极大地影响光子球的存在与分布。首先，若度规导数 $df_{(r)}/dr$ 在时空奇点处发散至正无穷，则裸奇点时空中光子球是否存在以及其总数均无法确定。其次，若度规导数 $df_{(r)}/dr$ 在时空奇点处发散至负无穷，则此类裸奇点时空中不一定存在光子球。若光子球存在，其总数必为偶数$n = n_{\text{稳定}} + n_{\text{不稳定}} = 2k$，且稳定光子球与不稳定光子球的数量之差满足$w = n_{\text{稳定}} - n_{\text{不稳定}} = 0$。

本研究中的分析适用于具有一般时空度规 $ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2$ 的任意球对称（静态）引力系统，而不依赖于度规分量 $g_{tt}(r) = -f(r)$、$g_{rr}(r) = g(r)$ 的具体表达式。这些结论反映了不同类别时空的一般几何与拓扑性质，仅依

赖于时空最一般的渐近行为（渐近平坦、渐近德西特和渐近反德西特），因此可以放心地应用于任何具体的引力系统。

此外，本研究有望推动一些有趣的研究，拓展我们对引力系统中粒子轨道的认识。一个可能的方向是将我们的分析推广到有质量粒子的圆轨道。近年来，时空中各类有质量粒子的最内稳定圆轨道（ISCO）是否存在，以及临界稳定圆轨道（MSCO）的总数，都是极其重要的研究课题，因为它们会影响天体物理吸积过程和引力波。若要将类似的分析应用于有质量粒子的圆轨道，就必须运用时空雅可比几何中的测地曲率和高斯曲率。进一步将我们的分析拓展至有质量粒子的圆轨道（例如有质量粒子的最内稳定圆轨道和临界稳定圆轨道），值得在后续研究中作更为详细的探讨。另一个可能的方向是将我们针对光子球的几何方法推广到轴对称时空／旋转时空，因为宇宙中大量引力源都在自转。将我们的方法推广至轴对称时空，需要对曲率（例如测地曲率）作出更复杂的定义并进行更复杂的计算，因为在这种情况下，相应的光学几何会成为兰德–芬斯勒几何。附录C概述了如何将我们的几何方法应用于平稳轴对称时空中的光子球。

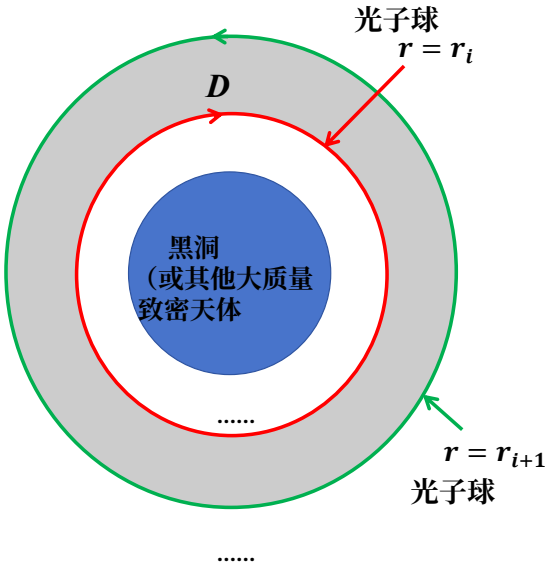


图 3. 高斯-博内定理中二维光学几何内区域 D 的选取，用于证明时空中的稳定光子球与不稳定光子球彼此一一交替分布。

附录A：稳定与不稳定光子球一一交替分布的证明

在本附录中，我们将证明球对称时空中稳定光子球与不稳定光子球一一交替分布。这种光子球的一一交替分布性质已在图2中展示。此处给出的证明最初由文献 [78] 针对黑洞时空提出。然而，证明过程与时空奇点或事件视界的信息无关。因此，同一结论对其他不同类别的时空（如超紧致天体时空、正则时空和裸奇点时空），且不作任何改变。

为证明稳定与不稳定光子球呈一一交替分布的性质，我们在时空的二维光学几何中应用高斯-博内定理。首先，必须在光学几何中选取一个区域 D，以应用高斯-博内定理。所选区域D 是由两个相邻光子球围成的环形区域，如图 3所示。该区域是一个复连通区域，其欧拉示性数为$\chi(D) = 0$。在该区域应用高斯-博内定理可得

$$\int_D \mathcal{K} \cdot dS = 2\pi\chi(D) = 0 \tag{A1}$$

这意味着相邻两个光子球之间的“平均”高斯曲率为零。特别是，根据作者近期的一项研究 [93, 94], ，可以简化二维光学几何中的高斯曲率曲面积分

$$\begin{aligned}\int_D \mathcal{K} \cdot dS &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathcal{K}(r)\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}(r)}dr \\ &= 2\pi\big[H(r_{i+1}) - H(r_i)\big] = 0\end{aligned} \tag{A2}$$

其中函数 $H(r)$ 定义为

$$H(r) = -\frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{\phi\phi}}{\partial r} = -\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{\phi\phi}} \cdot \kappa_g(r) \tag{A3}$$

最后一个等号直接由方程（9）中给出的圆形曲线的测地曲率表达式得出。由于区域 D 的内边界和外边界均为测地曲率为零的光子球，因此环形区域 $\kappa_g(r_{i+1}) = \kappa_g(r_i) = 0 \Rightarrow H(r_{i+1}) = H(r_i) = 0$ 的边界必须满足 D。

区域 D 中高斯曲率曲面积分为零可能由四种不同情况导致，已汇总于图

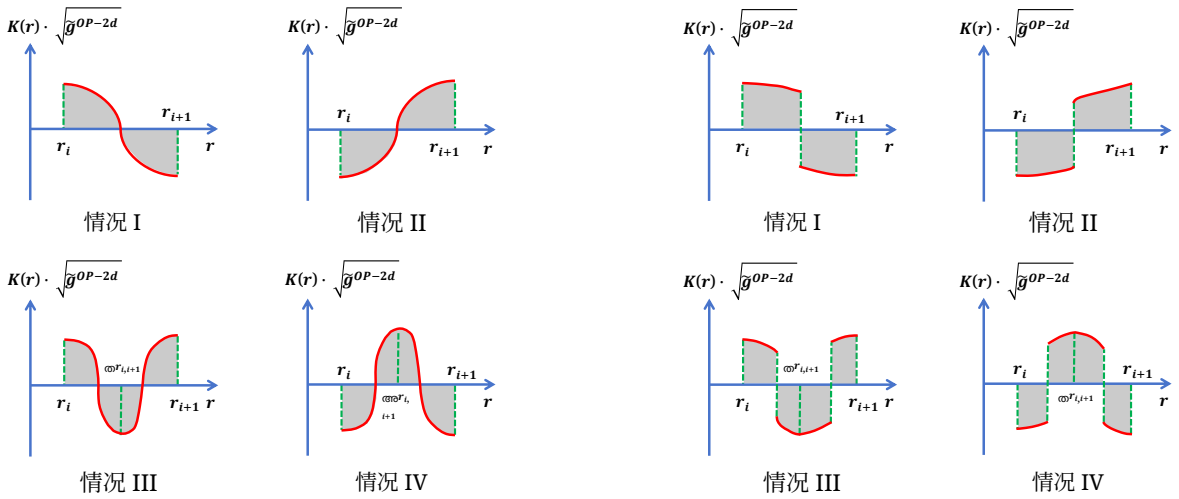


图 4. 本图总结了区域 D（即 $\int_D \mathcal{K}\cdot dS=0$）内高斯曲率曲面积分为零的四种不同情况。**情况 I：** 内边界光子球稳定，外边界光子球不稳定，其中 $\mathcal{K}(r_i)>0$ 且 $\mathcal{K}(r_{i+1})<0$。**情况 II：** 内边界光子球不稳定，外边界光子球稳定，其中 $\mathcal{K}(r_i)<0$ 且 $\mathcal{K}(r_{i+1})>0$。**情况 III：** 内边界光子球和外边界光子球均稳定，其中 $\mathcal{K}(r_i)>0$ 且 $\mathcal{K}(r_{i+1})>0$。**情况 IV：** 内边界光子球和外边界光子球均不稳定，其中 $\mathcal{K}(r_i)<0$ 且 $\mathcal{K}(r_{i+1})<0$。在最后两种情况下，进一步分析表明，位于 $r=r_i$ 和 $r=r_{i+1}$ 的内、外边界光子球不能相邻，并且 r_i 和 r_{i+1}之间必定存在另一个光子球。值得注意的是，面积元中的 $\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}}$ 始终为正，因此从本图可以很容易看出高斯曲率的符号。具体而言，左图展示了区域 D内高斯曲率连续的情况，而右图则表示高斯曲率关于径向坐标 r存在有限个不连续点的情况。

4。曲面积分 $\int_D \mathcal{K}\cdot dS$ =$2\pi\int_{r=r_i}^{r=r_{i+1}}\mathcal{K}(r)\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}}dr=0$ 为零，表明积分中的图4所示阴影区域为零。在前两种情况下，内侧和外侧光子球类型不同（一个是稳定光子球，另一个是不稳定光子球），因此稳定光子球和不稳定光子球呈一一交替分布。然而，在情况 III 和情况 IV 中，内侧和外侧光子球类型相同，这违反了图 2 中稳定光子球和不稳定光子球一一交替分隔的分布规律。所幸，进一步分析表明，内边界光子球 $r=r_i$ 与外边界光子球 $r=r_{i+1}$之间必定还存在另一个光子球。下面以情况 III 为例说明这一结论。若内侧和外侧光子球均为稳定光子球，且满足 $\mathcal{K}(r=r_i)>0$ 和$\mathcal{K}(r=r_{i+1})>0$，则总能找到一个位置 $\bar{r}_{i,i+1}$，使区域 D 可分为两部分。这样的划分要求高斯曲率积分 $\int\mathcal{K}(r)\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}}(r)dr$ 在区间 $[r_i,\bar{r}_{i,i+1}]$ 和$[\bar{r}_{i,i+1},r_{i+1}]$ 上的值为零（且区间 $[r_i,\bar{r}_{i,i+1}]$ 和 $[\bar{r}_{i,i+1},r_{i+1}]$ 内的阴影区域均为零）。从简化后的积分公式 (A2) 和 (A3) 可知，该位置满足 $H(\bar{r}_{i,i+1})=H(r_i)=H(r_{i+1})$ 和 $\kappa_g(\bar{r}_{i,i+1})=\kappa_g(r_{i+1})=\kappa_g(r_i)=0$，这表明 $r=\bar{r}_{i,i+1}$ 必定是另一个光子球的位置。此外，负高斯曲率 $\mathcal{K}(\bar{r}_{i,\,i+1})<0$ 表明位于$r=\bar{r}_{i,\,i+1}$ 处的这个新光子球是不稳定光子球，与 $r=r_i$，$r=r_{i+1}$处的内侧和外侧光子球相反。对于情况 IV，也可以进行类似的分析：在$r=r_i$ 和 $r=r_{i+1}$处的内侧和外侧不稳定光子球之间，必定存在一个额外的稳定光子球。即使高斯曲率 $\mathcal{K}(r)$ 存在有限个不连续点（如图4右图所示）[5]，这一分析仍然成立。总之，在全部四种情况下，我们证明了两个稳定光子球（或两个不稳定光子球）不能相邻。在球对称时空中，稳定光子球和不稳定光子球必须一一交替分布。每个稳定光子球都夹在相邻的两个不稳定光子球之间，而每个不稳定光子球都夹在两个

[5]通常，高斯-博内定理适用于光滑区域，此时高斯曲率在整个 D 区域内连续（沿边界 ∂D 的测地曲率也连续）。曲率的不连续性可能会引入额外项，对高斯-博内定理产生影响（这些项可能取决于不连续点的具体行为）。然而，探讨存在不连续性时高斯-博内定理可能的扩展公式，远超出本文的研究范围。我们的分析假定经典高斯-博内定理 $\int_D \mathcal{K}dS+\int_{\partial D}\kappa_g dl+\sum_i\theta_i=2\pi\chi\,(D)$ 仍然成立。

稳定光子球。

附录 B：证明事件视界附近的最内侧光子球不稳定

为方便读者，本附录详细证明，事件视界附近最内侧的光子球是不稳定的。这一结论最初在参考文献 [78] 中针对黑洞时空得到了证明。然而，正如下文将要看到的，整个证明过程与事件视界内的信息无关，因此适用于任何具有事件视界的时空。最后，我们得出一个广义结论：如果时空具有事件视界（例如黑洞时空、正则时空），那么距离事件视界最近的最内侧光子球必定是不稳定光子球。

在证明中，应将高斯-博内定理应用于图3所示的类似环形区域。在这种情况下，区 D 域的内边界圆趋近于事件视界 $r_{\rm min}\to r_H$，外边界圆则是最内侧光子球 $r_{\rm max}=r_{\rm innermost}$。在此区域应用高斯-博内定理可得

$$\int_D \mathcal{K}\cdot dS+\int_{\partial D}\kappa_g\cdot dl=2\pi\chi(D)=0 \tag{B1}$$

区域 D 的外边界是最内侧光子球，因此测地曲率为零。区域 D 的内边界正趋近于事件视界r_H，测地曲率的曲线积分为

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\kappa_g\cdot dl &= -\int_{C_r(r\to r_H)}\kappa_g(r)\cdot dl\\ &= -\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\kappa_g(r_H)\cdot\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}_{\phi\phi}(r_H)}\cdot d\phi\\ &= -C(r_H)\cdot\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r)\\ &\propto -2\pi r_H\cdot\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r)\end{aligned} \tag{B2}$$

这里，$C(r_H)\sim 2\pi r_H$ 表示二维光学几何中内边界 $r\to r_H$ 的周长。注意，图 $D3$ 所示区域内边界的方向与方位角 ϕ的增大方向相反，因此会多出一个负号 [6]。由此可得高斯曲率曲面积分的下列关系式

$$\begin{aligned}\int_D \mathcal{K}\cdot dS &= -\int_{\partial D}\kappa_g\cdot dl\\ &\propto 2\pi r_H\cdot\lim_{r\to r_H}\kappa_g(r)<0\end{aligned} \tag{B3}$$

[6] 图 $\int_{\partial D}\kappa_g dl$ 中所示的曲线积分方向（对应于参考文献3中的图）[78] 有误。正确的曲线积分方向如图3所示。我们将在近期对参考文献 [78] 发布勘误/更正。

推导中，使用了第$_{r\to r_H}\kappa_g(r)<0$ 节得到的近视界极限下的测地曲率 limIIIB，适用于黑洞时空和正则时空。

导致高斯曲率曲面积分满足 $\int_D\mathcal{K}\cdot dS<0$ 的情况有四种。这些情况已汇总于图5中。曲面积分的负值 $\int_D\mathcal{K}\cdot dS=2\pi\int_{r_H}^{r_{\rm innermost}}\mathcal{K}(r)\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}(r)}dr<0$ 表明，积分区间内图5 所示的阴影区域小于零。在前两种情况下，最内侧光子球均为具有负高斯曲率的不稳定光子球。然而，在后两种情况下，最内侧光子球似乎是稳定光子球，而非预期的不稳定光子球。幸运的是，简单分析表明，在事件视界 $r=r_H$ 与这个被误认为“最内侧”的光子球 $r=r_{\rm innermost}$之间，必定还存在另一个光子球。真正的最内侧光子球应位于更小的半径 $r=\bar{r}$ 处，而不是 $r=r_{\rm innermost}$。从图5中的情况 III 和情况 IV 可以看出，总能在区间 $[r_H,r_{\rm innermost}]$ 内找到一个新的位置 $r=\bar{r}$，使得区间 $[\bar{r},r_{\rm innermost}]$ 内的积分$\int\mathcal{K}(r)\sqrt{\tilde{g}^{\text{OP-2d}}(r)}\,dr$ 为零（且该区间内的阴影区域为零）。利用方程（A2）和（A3）中的简化积分公式，积分为零意味着$H(\bar{r})=H(r_{\rm innermost})=0$ 且 $\kappa_g(\bar{r})=\kappa_g(r_{\rm innermost})=0$，这表明 $r=\bar{r}$ 必定是另一个光子球的恰当位置。此外，负高斯曲率将这个新光子球的位置$r=\bar{r}$ 限定为不稳定光子球。总之，对于这四种情况，我们都证明了最内侧光子球必定是不稳定光子球。值得注意的是，即使高斯曲率存在有限个不连续点，本文所给出的证明过程仍然成立，如图5 7右图所示。

附录 C：我们的几何方法向轴对称时空的可能推广

本文提出的圆形光子轨道分析方法基于光学几何中的几何方法与曲率，可应用于轴对称时空。本附录概述了将我们的方法推广至轴对称时空的可能扩展。

在轴对称时空中，仍然可以通过零约束构造光学几何$d\tau^2=-ds^2=0$，方法与我们在第II节中介绍的四维时空几何相同。

[7] 类似于附录 A 及脚注 5中的讨论，我们的分析是在假定经典高斯-博内定理 $\int_D\mathcal{K}dS+\int_{\partial D}\kappa_g dl+\sum_i\theta_i=2\pi\chi$（$D$）成立的前提下进行的。

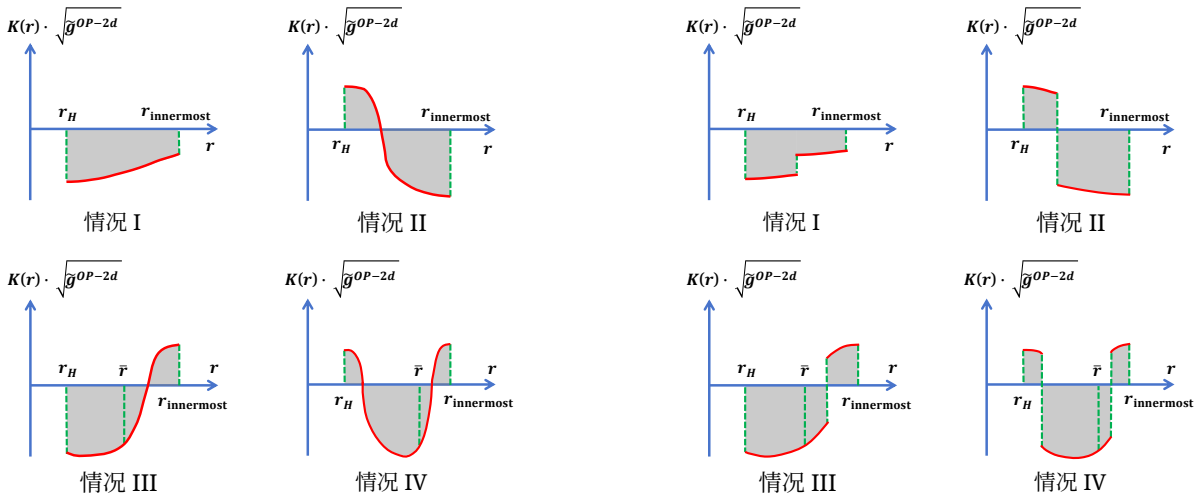


图 5. 本图总结了曲率高斯曲面积分满足 $\int_D \mathcal{K}\cdot dS < 0$ 的四种不同情况。**情况 I：** 最内侧光子球不稳定，且 $\mathcal{K}(r_H) < 0$ 和 $\mathcal{K}(r_{\rm innermost}) < 0$。**情况 II：** 最内侧光子球不稳定，且 $\mathcal{K}(r_H) > 0$ 和 $\mathcal{K}(r_{\rm innermost}) < 0$。**情况 III：** 最内侧光子球稳定，且 $\mathcal{K}(r_H) < 0$ 和 $\mathcal{K}(r_{\rm innermost}) > 0$。**情况 IV：** 最内侧光子球稳定，且 $\mathcal{K}(r_H) > 0$ 和 $\mathcal{K}(r_{\rm innermost}) > 0$。在最后两种情况下，进一步分析表明，事件视界 $r = r_H$ 与伪“最内侧”光子球 $r = r_{\rm innermost}$之间必定还存在一个额外的光子球 $r = \bar{r}$。值得注意的是，面积元中的 $\sqrt{\tilde{g}^{\rm OP\text{-}2d}}$ 始终为正，因此可以从图中轻松看出高斯曲率的符号。具体而言，左图显示了高斯曲率在区域 D内连续的情形，而右图则表示高斯曲率相对于径向坐标 r存在有限个不连续点的情形。

对任意轴对称时空构造光学几何，得到的将是 Randers-Finsler 几何[84, 87, 94], 而非静态球对称时空情形下的黎曼光学几何 [8]。轴对称时空的光学几何给出

$$\underbrace{ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}_{\text{Spacetime Geometry}} \overset{d\tau^2=-ds^2=0}{\Longrightarrow} \underbrace{dt = \sqrt{\alpha_{ij}dx^i dx^j} + \beta_i dx^i}_{\text{Optical Geometry}} \tag{C1}$$

其中 T 为连续零曲线的切向量。

对于具有一般度规形式的任意轴对称时空

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 \tag{C2}$$

在时空中施加零约束 $d\tau^2 = -ds^2 = 0$ 几何给出

$$dt = \sqrt{-\frac{g_{rr}}{g_{tt}}\cdot dr^2 - \frac{g_{\theta\theta}}{g_{tt}}\cdot d\theta^2 + \frac{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}{g_{tt}^2}\cdot d\phi^2} - \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}}\cdot d\phi \tag{C3}$$

在这里，光学几何中的弧长参数 / 空间距离参数变成了平稳时间坐标 t。从数学上看，（C3）中的光学几何给出了一个 Renders-Finsler流形。Renders-Finsler几何是黎曼几何的扩展[109], 允许将弧长 / 空间距离分成两部分

$$ds = \sqrt{\alpha_{ij}(x)dx^i dx^j} + \beta_i(x)dx^i. \tag{C4}$$

第一部分 α_{ij} 是一个黎曼度量，第二部分 $\beta = \beta_i dx^i$ 则量化了这种 Renders-Finsler几何相对于黎曼几何的偏离程度。显然，当且仅当 $\beta = 0$时，Renders-Finsler几何才会还原为黎曼几何。

在轴对称时空中，光子球一般不再存在（因为光子球是一个球对称曲面）。这使得圆形光子轨道比球对称时空中的略为复杂。光子球的一种特定分类在近期研究中备受关注——轴对称时空赤道面上的光环。为了分析其存在与分布

[8] 尤其是，O. L. Andino 最近提出的研究 *et.al.* 表明，可以通过对光学几何 / 雅可比几何进行一种“广义”构造来绕过 Randers-Finsler 几何 [110–112]。这种新构造为光学几何 / 雅可比几何提供了新的见解，值得进一步研究。然而，在本附录中，我们遵循 G. W. Gibbons 给出的光学几何构造 *et. al.*[80, 81, 84], 该构造导出了适用于轴对称时空的 Randers-Finsler 光学几何。

光环，光学几何（C3）必须被约束到赤道面

$$dt = \sqrt{-\frac{g_{rr}}{g_{tt}}\cdot dr^2 + \frac{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}{g_{tt}^2}\cdot d\phi^2} - \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}}\cdot d\phi \tag{C5}$$

任何轴对称时空中的光环都是四维时空几何中的类光测地线；变换到光学几何后，它们就成为空间测地线。由此，任何光环都必须是二维 Randers-Finsler 几何中的测地线，且这些光环的协变导数为零

$$\text{Light Rings} \quad \Leftrightarrow \quad D_T^{(F)}T = 0 \tag{C6}$$

其中 $T = \frac{dx}{dt}$ 是二维光学几何中的切向量，而 $D_T^{(F)}$ 是二维 Randers-Finsler 几何中沿该切向方向的协变导数算子。

测地曲率的概念也可以推广到 Randers-Finsler 几何中。首先，对于一条连续曲线 γ，在二维 Randers-Finsler 几何中，其测地曲率可定义为切向量 $D_T^{(F)}\tilde{T}$ 的协变导数与单位向量 $\tilde{V}$ [113]的内积的比例量，关系式为 [9]

$$\kappa_g^{(F)} \propto \left\langle D_T^{(F)}\tilde{T}\cdot\tilde{V}\right\rangle_{(x,T)}^{(F)} \tag{C7}$$

其中 $T = T/F(x,\ T)$ 是连续曲线 γ的单位切向量，而 V 是二维 Randers-Finsler 几何中的一个单位向量，与切向量垂直 $\tilde{T}$(即 $<\tilde{T},\ \tilde{V}>^{(F)}{}_{(x,\ T)}=0$。另一方面，由于 Randers-Finsler 几何是黎曼几何的推广，自然可以预期，二维 Randers-Finsler 几何中连续曲线的测地曲率可用黎曼几何部分 $\alpha_{ij}dx^i dx^j$和非黎曼部分 β 表示，如表达式（C4）所示。因此，测地曲率可表示为

$$\kappa_g^{(F)} = \kappa_g^{(\alpha)} + \kappa_\beta^{(\alpha)} \tag{C8}$$

其中，$\kappa_g^{(\alpha)}$是相对于黎曼度量$\alpha_{ij}dx^i dx^j$的同一连续曲线的测地曲率，而 $\kappa_\beta^{(\alpha)}$ 是由于非黎曼部分 β的存在而对 $\kappa_g^{(\alpha)}$产生的额外贡献。

上述（C7）中的测地曲率定义，衡量了连续曲线偏离二维 Randers-Finsler 几何中测地线的程度。光环变换到光学几何后仍保持测地线性质，因此其测地曲率自然为零。

$$\begin{aligned}\text{Light Rings} \quad &\Leftrightarrow \quad D_T^{(F)}T = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \kappa_g^{(F)} = \kappa_g^{(\alpha)} + \kappa_\beta^{(\alpha)} = 0\end{aligned} \tag{C9}$$

此外，经过繁琐的推导（此处不再展示），由非黎曼部分引起的贡献 β 可计算为 [85, 114] [10]

$$\begin{aligned}&\kappa_g^{(F)} = \kappa_g^{(\alpha)} + \kappa_\beta^{(\alpha)} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\kappa_g^{(\alpha)} = -\kappa_\beta^{(\alpha)} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_{rr}\alpha_{\phi\phi}}}\cdot\frac{\partial\beta_\phi}{\partial r}\end{aligned} \tag{C10}$$

这是基于二维 Randers-Finsler 光学几何的光环测地曲率条件。

上述讨论概述了我们推广到轴对称时空的几何方法。与静态球对称时空的情形类似，轴对称时空赤道面中光环的存在表明，方程 $\kappa_g^{(F)} = 0$ （或方程（C10）中给出的测地曲率条件）至少有一个解 [78]。为了分析一般轴对称引力系统中光环的存在性与分布，必须详细研究圆形曲线的测地曲率 $\kappa_g^{(F)} = \kappa_g^{(\alpha)} + \kappa_\beta^{(\alpha)}$ 的行为，尤其是在中心极限 $r \to 0$、近视界极限 $r \to r_H$和无限远极限 $r \to \infty$下的行为。原则上，可以运用这一方法，对不同类别的时空（黑洞时空、超紧致天体时空、正则时空以及裸奇点时空）中的光环进行全面分析。然而，这一分析超出了本文的研究范围。对这些时空中光环的研究将在未来的工作中开展。

[9] 此处，上标（F）表示芬斯勒几何中的内积。值得注意的是，芬斯勒几何中两个向量场内积的数学定义不仅取决于基点 x，还取决于参考向量 y（其中（$x,\ y$） $\in TM$） [109]。这不同于黎曼几何中的情形，在后者中，黎曼度量仅取决于基点 $x \in M$。因此，为了在芬斯勒几何中恰当地表示内积 $<V,\ W>$ 有必要在下标中添加一对（$x,\ y$），以指定参考向量。在定义 $\kappa_g^{(F)}$连续曲线的测地曲率时，方便起见，可将参考向量选为该曲线的切向量，即 $y = T$。

[10] 特别是在后续工作中， [114]，我们采用如下正则化，使光的逆向旋转运动（角速度为 $\Omega = \frac{d\phi}{dt} < 0$）的$\kappa_\beta^{\alpha}$ 多出一个负号，由此得到以下光环方程

$$\kappa_g^{(\alpha)} = -\kappa_\beta^{(\alpha)} = -\frac{\text{Sign}(\Omega)}{\sqrt{\alpha_{rr}\alpha_{\phi\phi}}}\cdot\frac{\partial\beta_\phi}{\partial r}$$

致谢

本工作得到中国自然科学基金（批准号：1240051542）和重庆市科学技术研究计划的支持教育委员会（项目编号：KJQN202201126）、重庆市自然科学基金（项目编号：CSTB2022NSCQ-MSX0932）、湖南省青年自然科学基金（项目编号：2024JJ6210）以及重庆理工大学研究与创新团队培育计划（项目编号：2023TDZ007）。

[1] K. Akiyama *et al.*（事件视界望远镜合作组），首批M87事件视界望远镜观测结果 I：超大质量黑洞的阴影，《天体物理学杂志》 **875**, 1 2019 1906 11238 [ ] L（）。[2] K. Akiyama *et al.*（事件视界望远镜合作组），首批M87事件视界望远镜观测结果 IV：超大质量黑洞中心区域成像，《天体物理学杂志快报》875，L4（2019）。arXiv: 1906 11241[ ] 。天体物理学.GA [3] K. Akiyama *et al.*（事件视界望远镜合作组），首批人马座A*事件视界望远镜观测结果 I：银河系中心超大质量黑洞的阴影，《天体物理学杂志快报》930 2，12 2022L（）。[4] B. P. Abbott *et al.*（LIGO科学合作组和Virgo合作组），双黑洞并合产生引力波的观测，《物理评论快报》116，061102（2016）。[5] B. P. Abbott *et al.*（LIGO科学合作组和Virgo合作组），先进LIGO首次观测运行中的双黑洞并合，《物理评论X》6，041015（2016）；勘误：《物理评论X》8，039903（2018）。[6] K. S. Virbhadra 和 G. F. R. Ellis，施瓦西黑洞引力透镜，《物理评论D》62，084003（2000）。arXiv:astro-ph/0004193[7] V. Bozza，强场极限下的引力透镜，《物理评论D》 **66**, 103001 2002 0208075 （）。[8] arXiv:gr-qc/ S. V. Iyer 和 A. O. Petters，黑洞导致的光线偏折角：从光子球到无穷远，《Gen. Rel. Grav.》 **39**, 1563 1582 2007 0611086 - （）。[9] arXiv:gr-qc/ N. Tsukamoto，一般渐近平坦静态球对称时空中的强偏折极限偏折角，《物理评论D》95，064035（2017）。arXiv: 1612 08251[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 J. Grover 和 A. Wittig，黑洞阴影与不变相空间结构，《物理评论D》96，024045 2017 1705（）。arXiv: . 07061[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [10] N. Tsukamoto，渐近平坦、定常且轴对称时空中的黑洞阴影：克尔-纽曼黑洞与旋转正则黑洞，《物理评论D》 **97**, 064021 2018 1708 07427[ ] （）。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [11] V. Perlick 和 O. Y. Tsupko，*Calculating black hole shadows: review of analytical studies* ，《物理报告》947，1 39 2022 2105 -（）。arXiv: . 07101[ ] 广义相对论与量子宇宙学 S. Vagnozzi、R. Roy、Y. D. Tsai、L. Visinelli、M. Afrin、A. Allahyari、P. Bambhaniya、D. Dey、S. G. Ghosh 和 P. S. Joshi，*et al.* 利用事件视界望远镜拍摄的人马座A*图像检验视界尺度上的引力理论与基础物理，《Class. Quant. Grav.》40，165007 2023 2205（）。arXiv: . 07787[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [12] S. Chen、J. Jing、W. -L. Qian 和 B. Wang，黑洞图像：一篇综述，《中国科学：物理学 力学 天文学》66, 260401 2023 2301 ( ). arXiv: . 00113[ ] 天体物理高能 [13] S. E. Gralla、D. E. Holz 和 R. M. Wald，《黑洞阴影、光子环与透镜环》，《物理评论D》 **100**, 024018 2019 1906 00873[ ] ( ). arXiv: . 天体物理高能 [14] M. Jaroszynski 和 A. Kurpiewski，《克尔黑洞附近的光学：平流主导吸积流的光谱》，天文学与天体物理学 326, 419-426 (1997)。arXiv:astro-ph/9705044[15] X. -X. Zeng、H. -Q. Zhang、H. -B. Zhang，《四维高斯–博内黑洞中的球对称吸积、阴影与光子球》，《Eur. Phys. J. C》 **80**, 872 2020 2004 12074[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [16] V. Cardoso、A. S. Miranda、E. Berti、H. Witek 和 V. T. Zanchin，《测地线稳定性、李雅普诺夫指数与准正常模》，《物理评论D》79, 064016 (2009)。arXiv: 0812 1806[ ] 。高能物理理论 [17] V. Cardoso、L. C. B. Crispino、C. F. B. Macedo、H. Okawa 和 P. Pani，《光环作为事件视界的观测证据：超紧致天体的长寿命模、能层与非线性不稳定性》，《物理评论D》 **90**, 044069 2014 1406 5510[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [18] J. Keir，《球对称时空与超致密中子星中的缓慢衰减波》，《Class. Quant. Grav.》 **33**, 135009 2016 1404 7036[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [19] M. Guo、Z. Zhong、J. Wang 和 S. Gao，《准黑洞时空中的光环与长寿命模》，《物理评论D》 **105**, 024049 2022 2108 08967[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [20] P. V. P. Cunha、C. A. R. Herdeiro、E. Radu 和 N. Sanchis-Gual，《奇异致密天体与光环不稳定性的命运》，《物理评论快报》130, 061401 (2023 2207 13713[ ])。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [21] A. Deich、N. Yunes 和 C. Gammie，《利用李雅普诺夫指数检验广义相对论》，《物理评论D》110, 044033 2024 2308 ( )。arXiv: . 07232[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [22] T. Johannsen，《克尔及类克尔黑洞周围的光子环》，《天体物理学杂志》777, 170 (2013)。arXiv: 1501 02814[ ] 。天体物理高能 [23] S. Hod，《毛黑洞与零类圆形测地线》，《物理评论 D 》 **84**, 124030 2011 1112 3286[ ] ( ) arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [24] S. Hod，《黑洞光子球半径的上界》，物理快报B 727, 345-348 (2013)。arXiv: 1701 06587[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 [25] A. K. Mishra、S. Chakraborty 和 S. Sarkar，《理解动态演化时空中的光子球与黑洞阴影》，《物理评论D》99, 104080 (2019 1903 06376[ ])。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [26] M. Wielgus，《球对称黑洞的光子环与非Kerr度规的稳健检验》，《物理评论D》 **104**, 124058 2021 2109 10840[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [27] B. Raffaelli，《黑洞光子球上的隐藏共形对称性》，高能物理杂志 2022, 125

(2022 2112 12543[ ])。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [30] P. Bargueno, 《静态与极端黑洞中的光环》, 《物理评论D》 107, 104029 (2023)。arXiv: 2211 16899[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 [31] V. Vertogradov 和 A. ¨Ovg¨un, 《分析几何形变对光子球和阴影半径的影响：一种新的解析方法——球对称时空》, 《暗宇宙物理学》45, 101541 2024 2404 ( )。arXiv: . 04046[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [32] R. Shaikh、P. Kocherlakota、R. Narayan 和 P. S. Joshi, 《球对称黑洞与裸奇点的阴影》, 《皇家天文学会月报》482, 52-64 (2019 1802 08060[ ])。arXiv: . 天体物理高能 [33] A. B. Joshi、D. Dey、P. S. Joshi 和 P. Bambhaniya, 《没有光子球的裸奇点阴影》, 《物理评论D》102, 024022 (2020)。arXiv:2004.06525[ ] 广义相对论与量子宇宙学[34] T. Berry、A. Simpson 和 M. Visser, 《光子球、最内稳定圆轨道和最外稳定圆轨道：具有渐近闵可夫斯基核的正则黑洞的天体物理可观测量》, Universe **7**, 2 2020 2008 13308[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [35] K. Isomura、R. Suzuki 和 S. Tomizawa, 《正则黑洞周围的粒子运动》, 《物理评论D》107, 084003 2023 2301 ( )。arXiv: . 10465[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [36] S. Murk 和 I. Soranidis, 《非线性电动力学源产生的非奇异超紧致天体中的光环与因果性》, 《物理评论D》110, 044064 (2024)。arXiv:2406.07957[广义相对论与量子宇宙学]。[37] N. Tsukamoto, 《具有 Z_2 对称性的一般静态球对称虫洞的圆形光轨道》, 《Eur. Phys. J. C》84, 1325 (2024)。arXiv:2401.07846[广义相对论与量子宇宙学]。[38] P. V. P. Cunha、E. Berti 和 C. A. R. Herdeiro, 《超紧致天体的光环稳定性》, 《物理评论快报》 **119**, 251102 2017 1708 04211[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [39] P. V. P. Cunha 和 C. A. R. Herdeiro, 《定常黑洞与光环》, 《物理评论快报》124, 181101 (2020 2003 06445[ ])。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [40] S. W. Wei, 《拓扑荷与黑洞光子球》, 《物理评论D》102, 064039 (2020)。arXiv: 2006 02112[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 [41] H. S. Liu、Z. F. Mai、Y. Z. Li 和 H. L¨u, 《准拓扑电磁学：暗能量、双荷黑洞、稳定光子球与隐藏电磁对偶性》, 《中国科学：物理学 力学 天文学》 **63**, 240411 2020 1907 10876[ ] ( )。arXiv: . 高能物理理论 [42] Q. Gan、P. Wang、H. Wu 和 H. Yang, 《带毛黑洞的光子球与球对称吸积成像》, 《物理评论D》104, 024003 (2021)。arXiv:2104.08703[广义相对论与量子宇宙学[43] Q. Gan、P. Wang、H. Wu 和 H. Yang, 《带毛黑洞的光子环与观测外观》, 《物理评论D》 **104**, 044049 2021 2105 11770[ ] ( )。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [44] G. Guo、Y. Lu、P. Wang、H. Wu 和 H. Yang, 《具有多重光子球的黑洞》, 《物理评论D》107, 124037 2023 2212 ( )。arXiv: . 12901[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [45] M. Cvetic、G. W. Gibbons 和 C. N. Pope, 《超引力及其他理论中的黑洞光子球与声视界》, 《物理评论D》94, 106005 (2016 1608 02202[ ])。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [46] C. Cederbaum 和 G. J. Galloway, 《通过正质量刚性证明光子球的唯一性》, 《分析与几何通讯》25, 303-320 (2017)。arXiv:1504.05804[微分几何] [47] C. Cederbaum 和 G. J. Galloway, 《电真空时空中光子球的唯一性》, 《Class. Quant. Grav.》 **33**, 075006 2016 1508 00355[ ] ( )。arXiv: 。 [48] 微分几何 J. Jia、J. Liu、X. Liu、Z. Mo、X. Pang、Y. Wang 和 N. Yang, 《一般静态球对称时空中圆轨道的存在性与稳定性》, 《Gen. Rel. Grav.》 **50**, 17 2018 1702 05889[ ] ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [49] J. Jia、X. Pang 和 N. Yang, 《静态轴对称时空中圆轨道的存在性与稳定性》, Gen Relativ Gravit 50, 41 (2018)。arXiv:1704.01689[gr- qc[50] M. Guo 和 S. Gao, 《定常轴对称时空中光环的普适性质》, 《物理评论D》 **103**, 104031 2021 2011 02211[ ] ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [51] R. Ghosh 和 S. Sarkar, 《定常时空的光环》, 《物理评论D》104, 044019 (2021)。arXiv: 2107 07370[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 [52] Clarissa-Marie Claudel、K. S. Virbhadra 和 G. F. R. Ellis, 《光子面的几何》, 《J. Math. Phys.》 **42**, 818 838 2001 0005050[ ] - ( )。arXiv: 广义相对论与量子宇宙学 [53] Y. Koga 和 T. Harada, 《光子球与光子面上零轨道的稳定性》, 《物理评论D》100, 064040 2019 1907 ( )。arXiv: . 07336[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [54] K. Kobialko、I. Bogush 和 D. Gal'tsov, 《有质量粒子面的几何》, 《物理评论D》106, 084032 (2022 2208 02690[ ])。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [55] Y. Song、Y. Cen、L. Tang、J. Hu、K. Diao、X. Zhao 和 S. Shi, 《自旋试验粒子的粒子面》, 《Eur. Phys. J. C》 **83**, 833 2023 2208 03665[ ] ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [56] P. V. P. Cunha 和 C. A. R. Herdeiro, 《阴影与强引力透镜：简要综述》, Gen Relativ Gravit **50**, 42 2018 1801 00860[ ] ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [57] Y. S. Duan 和 M. L. Ge, 《SU( )规范理论及具有 N 个磁单极子的电动力学》, 《Sci. Sin.》9, 1072 (1979)。[58] S. W. Wei 和 Y. X. Liu, 《定常黑洞周围赤道面类时圆轨道的拓扑》, 《物理评论D》 **107**, 064006 2023 2207 08397[ ] ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [59] X. Ye 和 S. W. Wei, 《球对称（有毛）黑洞赤道面类时圆轨道的不同拓扑构型》, 《J. Cosmol. Astropart. Phys.》 **2023 07** 049 2023 2301 04786[ ] ( ), ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [60] S. W. Wei、Y. P. Zhang、Y. X. Liu 和 R. B. Mann, 《球对称黑洞时空周围的静止球面》, Phys. Rev. Res. 5, 043050 (2023)。arXiv: 2303 06814[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 [61] H. C. D. Lima Junior、J. Z. Yang、L. C. B. Crispino、P. V. P. Cunha 和 C. A. R. Herdeiro, 《强磁场中的爱因斯坦–麦克斯韦–膨胀子中性黑洞：拓扑荷、阴影与透镜》, 《物理评论D》 **105**, 064070 2022 2112 10802[ ] ( )。arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 [62] J. Yin、J. Jiang 和 M. Zhang, 《黑洞的运动学拓扑》, 《物理评论D》108, 044077 (2023)。arXiv: 2305 14179[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 [63] A. Tavlayan 和 B. Tekin, 《五维定常黑洞与裸奇点周围的光环》, 《物理评论D》107, 024016 (2023)。arXiv: 2209 14873[ ] 。广义相对论与量子宇宙学 J. Sadeghi、M. A. S. Afshar、S. N. Gashti 和 M. R. Alipour, 《超标度违背黑洞中的热力学拓扑与光子球》, 《Astropart. Phys.》156 102920 (2024)。arXiv:2307.12873[gr- qc[65] P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro 和 J. P. A.

Novo, 《定常轴对称时空中的光环：不受拓扑影响且能够共存》，《物理评论D》109, 第6期, 064050（2024年）。arXiv:2401.05495[gr- qc[66] S. V. M. C. B. Xavier、C. A. R. Herdeiro 和 L. C. B. Crispino, 《可穿越虫洞与光环》，《物理评论D》 **109**, 124065 2024 2404 02208[ ] ( )。[67] arXiv: . gr-qc J. Sadeghi 和 M. A. S. Afshar, 《拓扑光子球在约束黑洞参数中的作用》，《Astropart. Phys.》162，102994（2024年）。arXiv: 2405 06568[ ] . gr-qc J. Sadeghi 和 M. A. S. [68] Afshar, 《有效势与拓扑光子球：黑洞参数分类的新方法》，arXiv: 2405 18798[ ] . gr-qc S. W. Wei 和 Y. -X. Liu, [69] 《黑洞热力学的拓扑》，《物理评论D》105，104003（2022年）。arXiv: 2112 01706[ ] . gr-qc S. W. Wei、Y. -X. Liu 和 [70] R. B. Mann, 《黑洞解作为拓扑热力学缺陷》，《物理评论快报》 **129**, 191101 2022 2208 01932[ ] ( )。[71] arXiv: . gr-qc S. W. Wei、Y. X. Liu 和 R. B. Mann, 《黑洞热力学的普适拓扑分类》，《物理评论D》110，L081501（2024年）。arXiv: 2409 09333[ ] . gr-qc X. D. Zhu、W. Liu 和 [72] D. Wu, 《旋转黑洞的普适热力学拓扑类别》，arXiv: 2409 12747[ ] . 高能物理理论 C. K. Qiao 和 M. Li, [73] 《圆形光子轨道与黑洞阴影的几何方法》，《物理评论D》 **106**, 021501 2022 2204 07297[ ] L ( )。arXiv: . [74] qr-qc C. K. Qiao, 《曲率、光子球与黑洞阴影》，《物理评论 D 》106，084060（2022年）。arXiv: 2208 01771[ ] . [75] gr-qc P. V. P. Cunha、C. A. R. Herdeiro 和 J. P. A. Novo, 《等效二维度规中的零类和类时圆形轨道》，经典与量子引力 39，225007（2022年）。arXiv: 2207 14506[ ] . gr-qc B. [76] Bermudez-Cardenas 和 O. L. Andino, 《关于有质量粒子面、部分脐性与圆轨道》，arXiv: 2409 10789[ ] . gr-qc E. [77] Gallo 和 T. Madler, 《黑洞中圆形光轨道李雅普诺夫指数的界》，《Eur. Phys. J. C》 **85**, 299 2025 2412 10328[ ] ( )。[78] arXiv: . gr-qc C. K. Qiao, 《球对称黑洞附近光子球的存在与分布：一项几何分析》，《Eur. Phys. J. C》85，191（2025年）。arXiv:2407.14035[gr-qc]. [79] M. A. Abramowicz、B. Carter 和 J. P. Lasota, 《定常与静态动力学的光学参考几何》，《广义相对论与引力》20，1173–1183（1988年）。[80] G. W. Gibbons 和 C. M. Warnick, 《近视界光学几何的普适性质》，《物理评论D》79, 064031 2009 0809 ( )。arXiv: . 1571[ ] gr-qc G. W. Gibbons 和 [81] M. C. Werner, 《高斯-博内定理在引力透镜中的应用》，经典与量子引力 25，235009（2008年）。arXiv: 0807 0854[ ] . [82] gr-qc A. Ishihara 、 Y. Suzuki 、 T. Ono 、 T. Kitamura 和 H. Asada, 《有限距离下光的引力偏折角与高斯-博内定理》，《物理评论D》 **94**, 084015 2016 1604 08308[ ] ( )。arXiv: . [83] gr-qc A. Ishihara、Y. Suzuki、T. Ono 和 H. Asada, 《光的引力偏折角的有限距离修正 强偏折极限下的光线，《物理评论D》95, 044017 2017 1612 ( )。arXiv: . 04044[ ] 广义相对论与量 [84] 子宇宙学 M. C. Werner，克尔-Randers光学几何中的引力透镜，《广义相对论与引力》44, 3047 3057 2012 1205 - ( )。arXiv: . 3876[ ] 广义相对论与量子宇宙 [85] 学 T. Ono、A. Ishihara、H. Asada，定常轴对称时空中带有限距离修正的光线引力磁偏折角，《物理评论D》96, 104037 2017 1704 ( )。arXiv: . 05615[ ] 广义相对论与量 [86] 子宇宙学 K. Jusufi与A. Ovgun，旋转虫洞的引力透镜，《物理评论D》97, 024042 (2018)。arXiv: 1708 06725[ ] . 广义相 [87] 对论与量子宇宙学 Z. Li与J. Jia，定常时空中有质量粒子的有限距离引力偏折：一种Jacobi度规方法，”《Eur. Phys. J. C》80, 157 (2020年)。arXiv: 1912 05194 [ ] . 广义相对论与量子宇宙学 Z. Li [88] 与T. Zhou，引力透镜研究中Gibbons-Werner方法与测地线方法的等价性，《物理评论D》101, 044043 2020年 10 1103 101 044043 ( )。doi: . /PhysRevD. . arXiv: 1908 05592[ ] . 广义相对论 [89] 与量子宇宙学 G. Crisnejo与E. Gallo，等离子体介质中的弱透镜以及利用高斯-博内定理对有质量粒子引力偏折的统一处理，《物理评论D》97, 124016 (2018)。arXiv:1804.05473[广义相对论与量子宇宙学 [90] T. Ono与H. Asada，有限距离对光线引力偏折角的影响，Universe 5, 218 2019 1906 ( )。arXiv: . 02414[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [91] K. Takizawa、T. Ono与H. Asada，光线的引力偏折角：观测者定义及其在渐近非平直时空中的应用，《物理评论D》101, 104032 (2020年)。arXiv:2001.03290[广义相对论与量子宇宙学[92] Z. Li、G. Zhang与A. ¨Ovg¨un，粒子的圆轨道与弱引力透镜，《物理评论D》101, 124058 2020年 2006 ( )。arXiv: . 13047[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [93] Y. Huang 与 Z. Cao，偏折角的广义 Gibbons-Werner 方法，《物理评论D》106, 104043 (2022年)。[94] Y. Huang、Z. Cao与Z. Lu，定常时空的广义Gibbons-Werner方法，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 **2024 01** 013 2024 2306 04145[ ] ( ), ( )。arXiv: . [95] 广义相对论与量子宇宙学 K. Takizawa与H. Asada，静态光学常曲率背景上的引力透镜：在Weyl引力模型中的应用，《物理评论D》108, 104055 2023年 2304 ( )。arXiv: . 02219[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [96] Z. Zhang，光线偏转几何化及其在 SdS $_w$ **39**, 时空中的应用，《Class. Quant. Grav.》( )。arXiv: . 015003 2022 2112 04149[ ] 广义相对论与量子宇宙学 [97] Z. Zhang 与 R. Zhang，论全局高斯弯曲测度及其在定常时空中的应用，arXiv:2408.02195[广义相对论与量子宇宙学]。[98] M. Berger与B. Gostiaux， *Differential Geometry:Manifolds, Curves, and Surfaces*, Springer-Verlag，纽约 (1988)。[99] R. Penrose，引力坍缩：广义相对论的作用，《新物理学评论》1, 252- 276 (1969)。重印于《Gen. Rel. Grav.》34, 1141-1165 (2002)。[100] S. W. Hawking与G. F. R. Ellis， *The Large ScaleStructure of Space Time*，剑桥大学出版社，剑桥 (1973)

[101] R. M. Wald，引力坍缩与宇宙监督，书中第 5 章，，由B. R. Iyer与B. Bhawal编辑，第69-86页，Springer-Verlag，多德雷赫特 (1998年)。arXiv:广义相对论与量子宇宙学/gr-qc/9710068[102] *Black Holes Gravitational Radiation and the Universe* *et al.* M. D. Johnson，黑洞光子环的普适干涉特征，Sci. Adv. 6, eaaz1310 (2020) 1907.04329。arXiv: . astro-ph.IM S. [103] E. Gralla、A. Lupsasca与D. P. Marrone，黑洞光子环的形状：对强场广义相对论的精确检验，《物理评论D》102, 124004 (2020) 2008.03879。arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学 [104] A. Chael、M. D. Johnson与A. Lupsasca，观测黑洞的内阴影：事件视界的直接视图，”天体物理学杂志 918, 6 (2021年)。arXiv: 2106.00683。天体物理高能 A. E. Broderick，*et al.* [105] M87*中的光子环，天体物理学杂志 **935**, 61 (2022) 2208.09004。arXiv: . 天体物理高能 G. J. Olmo、J. L. Rosa、D. Rubiera-Garcia与D. Saez-Chillon Gomez，正则黑洞与无视界几何子致密天体的阴影和光子环，《Class. Quant. Grav.》40, 174002 (2023年)。arXiv: 2302.12064。广义相对论与量子宇宙学 P. Tiede、M. D. Johnson、D. W. Pesce、D. C. M. Palumbo、D. O. Chang与P. Galison，用下一代事件视界望远镜测量光子环，《星系》10, 111 (2022年)。arXiv: 2210.13498。天体物理高能 A. [108] Lupsasca、A. Cardenas-Avendaño、D. C. M. Palumbo、M. D. Johnson、S. E. Gralla、D. P. Marrone、P. Galison、P. Tiede 和 L. Keeble，《黑洞探测器：光子环科学、探测与形状测量》，Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng. 13092, 130926（2024）2406.09498（）。arXiv：. 广义相对论与量子宇宙学 [109] D. Bao、S. S. Chern、Z. Shen，*An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*，《Graduate Texts in Mathematics》（GTM，第 200 卷），Springer，纽约（2000）。[110] M. A. Argañaraz 和 O. L. Andino，《一种用于类时及时空测地线的黎曼几何方法》，《Gen. Rel. Grav.》56, 121（2024）。arXiv: 2112.10910。广义相对论与量子宇宙学 B. [111] Bermudez-Cardenas 和 O. L. Andino，《大质量粒子曲面、部分脐性与圆轨道》，《物理评论D》111, 064001（2025）。arXiv:2409.10789[广义相对论与量子宇宙学[112] B. Bermúdez-Cárdenas 和 O. L. Andino，《基于内禀曲率的大质量粒子曲面与黑洞阴影》，arXiv: 2503.21203。广义相对论与量子宇宙学 J. Itoh、[113] S. V. Sabau 和 H. Shimada，《具有非恒定指标曲面体积的黎曼-芬斯勒曲面上的高斯-博内型公式》，Kyoto J. Math. 50, 165-192（2010）。[114] C. Qiao、M. Li、D. Xie 和 M. Guo，《轴对称时空中光环的几何方法》，arXiv:2512.20802[广义相对论与量子宇宙学]