arXiv:2602.04576v1 [math.GR] 4 Feb 2026

域上矩阵多项式方程的解向完备局部主理想环的提升

SAIKAT PANJA AYON ROY 和 ANUPAM SINGH

摘要。设 $\mathcal{O}$ 为一个完备局部主理想环，其剩余域 k 的特征不为 2，且 $f \in \widehat{\mathcal{O}}[x_1,x2,...,x_m]$。取 $A \in M_n(\widehat{\mathcal{O}})$，其约化为 $A \in M_n(k)$。本文研究以下提升问题。设存在一个元组 $(\widetilde{B}1, \widetilde{B}2,..., \widetilde{B}_m) \in M_n(k)^m$，其中各矩阵两两可交换，且 $f(\widetilde{B}1, \widetilde{B}2,..., \widetilde{B}_m) = A$；在什么条件下，此解可以提升为一个元组 $(B_1,B2,...,B_m) \in M_n(\widehat{\mathcal{O}})^m$，其中各矩阵两两可交换，并满足 $f(B_1,B2,...,B_m) = A$？对于正则半单的 A，我们证明，在与亨泽尔引理中的条件类似的适当假设下，这种提升总是可能的。

1. 引言

提升现象广泛存在于数学的许多领域，例如代数几何、数论和表示论。例如，Oort 猜想关注如何将特征p下的光滑曲线及其自同构群一同提升到特征零下的曲线及其自同构；例如参见 [17, 23]。另一个例子是将$G(k)$ 的$\widetilde{k}$上的连通约化群，而G 表示G的 ε-不动点群的连通分支。这里，ε 是G 的有限阶半单k-自同构；例如参见 [2, 1, 3]。文献 [24],研究了将绝对伽罗瓦群的二维连续表示 $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(k)$ 提升为表示 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2\big(W(k)\big)$ 的问题，其中该表示在有限个素数之外非分歧，并假设 ρ 是奇且绝对不可约的。这里k 是特征p的有限域，而$W(k)$ 表示其维特向量环。

经典的亨泽尔引理涉及将域 $\mathbb{Z}$ 上多项式f 模素数p的因式分解提升为模p^m 的因式分解，其中任意整数$m \geq 1$，以及提升为<p>进整数上的因式分解。将其中的整数替换为任意交换环、将素数替换为极大理想，并将<p>进整数替换为关于该极大理想的完备化，可以很容易地将这一结果推广。然而，对于非交换环上方程解的提升仍然相对缺乏研究，主要是因为它不一定总能得到正面的解。例如，考虑环 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 和$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{O}), L = 2$. 令$\Phi_2 : M_2(\mathcal{O}_2) \longrightarrow M_2(\mathcal{O}_2)$为平方映射，我们有

$$\overline{\Phi}_2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \overline{A} \in M_2(k),$$

日期：2026年2月5日。2020数学主题分类。15B33、16S50、16S85。关键词和短语。多项式映射、矩阵代数、局部环、提升问题。Panja获得了NBHM博士后奖学金的支持，文件编号以R&D-II/6746结尾。Roy获得了IISER Pune博士奖学金的支持。Singh获得了ANRF-MATRICS资助。

and

$$\overline{\Phi}_2^{-1}(\overline{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

然而，不存在$B \in \mathrm{M}_2(\mathscr{O})$使得$B^2 = A$；见 [19, 例6.1]。我们研究域上的矩阵代数到完备局部主理想环上的矩阵代数之间多项式方程解的提升问题，其动机来自人们对代数上的多项式映射（例如 [14, 5, 8]）及该领域各种猜想日益浓厚的兴趣。下面简要回顾代数上的多项式映射这一概念；设$\mathscr{R}$为含幺环，则给定一个$\mathscr{R}$-代数$\mathscr{A}$以及元素$f \in \mathscr{R}[x_1, x2, \ldots, x_n]$（即由$n$个生成元生成的自由$\mathscr{R}$-代数），便得到一个映射

$$\widetilde{f}\colon \mathscr{A}^n \to \mathscr{A}, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

称为多项式映射。近年来，这一领域已取得许多有趣的成果。由于相关文献迅速增长，我们仅列举几个有代表性的例子，同时也承认还有若干基础性贡献未能提及。

在 [14] 中，证明了当k是平方封闭域时，L'vov–Kaplansky 猜想对 $\mathrm{M}_2(k)$ 成立。文献 [12, 18] 确定了上三角矩阵上一般多项式的像。文献 [6, 7, 15, 22] 研究了矩阵的华林问题。文献 [5] 建立了矩阵环中的交换子与矩阵环上非交换多项式的像之间一个令人惊讶的联系。文献 [8] 开展了涉及有理函数的更一般研究。最后，文献 [20, 21] 研究了取自代数本身的常数所构成的带常数多项式映射。

我们考虑如下一个自然问题：设 $\mathscr{O}$ 是一个局部环，并考虑由 $\mathscr{O}[x_1, x_2 \cdots, x_n]$ 构成的 n 变量多项式代数，以及由 $\mathscr{O}$ 中元素构成的 n 阶矩阵 $\mathrm{M}_r(\mathscr{O})$。设 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathscr{O}$ 的极大理想。注意，对于多项式映射 $f : \mathrm{M}_r(\mathscr{O})^n \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathscr{O})$，我们得到一个自然映射$\overline{f}: \mathrm{M}_r(k)^n \longrightarrow \mathrm{M}_r(k)$，进而得到一个交换图，其中考虑了典范映射 $\theta\colon \mathscr{O} \longrightarrow k$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_r(\mathscr{O})^n & \xrightarrow{f} & \mathrm{M}_r(\mathscr{O}) \\ \theta\downarrow & & \downarrow\theta \\ \mathrm{M}_r(k)^n & \xrightarrow[\overline{f}]{} & \mathrm{M}_r(k). \end{array}$$

因此，自然会提出以下问题：

问题 1. 设 $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_r(\mathscr{O})$ 且 $\mathrm{f} \in \mathscr{O}[\mathrm{x}_1, \mathrm{x2}, \cdots, \mathrm{x}_n]$。假设存在一个解 $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C2}, \ldots, \mathrm{C}_n) \in \mathrm{M}_r(\mathrm{k})^n$，使得 $\mathrm{f}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C2}, \ldots, \mathrm{C}_n) = \overline{\mathrm{A}}$。是否存在 $(\mathrm{B}_1, \overline{\mathrm{B}}2, \ldots, \mathrm{B}_n) \in \mathrm{M}_r(\mathscr{O})^n$，使得 $\theta(\mathrm{B}_i) = \mathrm{C}_i$ 对所有 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$ 都成立，并且 $\mathrm{f}(\mathrm{B}_1, \mathrm{B2}, \cdots, \mathrm{B}_n) = \mathrm{A}$?

当然，这样的提升并不总是可能的，正如所讨论的例子所示。我们将针对矩阵 A 和元组 $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$给出充分条件，使得该解可以被提升；下一节中的定理 1 和定理 2 将对此进行讨论。

1.1. 记号。我们先约定一些记号。若交换环 $\mathscr{R}$ 含有单位元，且典范映射 $\mathscr{R} \longrightarrow \varprojlim_{j \geq 1} \mathscr{R}/I_j$ $\mathscr{R}$是同构，则称其关于理想 I完备。我们用 $\widehat{\mathscr{O}}$表示关于其唯一极大理想 $\mathfrak{m} = (\pi)$ 完备的局部主理想环。其剩余域 k 的特征不等于 2。对于 $\ell \geq 1$，记号 $\mathscr{O}_\ell$ 专用于环 $\mathscr{O}_\ell = \widehat{\mathscr{O}}/\pi^\ell\widehat{\mathscr{O}}$。这是一个长度为 ℓ、具有唯一极大理想 $\mathfrak{m}_\ell = (\pi_\ell)$ 的局部主理想环，其中 $\pi_\ell = \pi + (\pi^\ell)$。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$典范映射 $\mathscr{O}_{\ell+1} \longrightarrow \mathscr{O}_\ell$ 记作 θ_ℓ。自然满射 $\mathscr{O} \to \mathscr{O}_\ell$ 记作 θ_ℓ。如果

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\theta_{\ell+1}(a) = a_{\ell+1}$ 对某个 $a \in \mathscr{O}$成立，则记作 $a_\ell := \theta_\ell(a_{\ell+1}) \in \mathscr{O}_\ell$。因此，$\theta_\ell \circ \theta_{\ell+1} = \theta_\ell$. 从现在起，

$\widehat{}$从 $\mathscr{O}$ 到层级 $\mathscr{O}_\ell$的所有约化——对于元素、矩阵、多项式等——均统一记作 $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ θ_ℓ。例如，若 H(t) $\in \mathscr{O}$[t],，则 θ_ℓ(H(t)) $=$ H$_\ell$(t)。特别地，$\overline{\text{H}_\text{I}}$(t) 记作 H(t)，以强调它是一个系数属于剩余域 k 的多项式。全文均采用这一记号。此外，稍微滥用记号，θ 表示对任意 ℓ，从局部环 $\mathscr{O}_\ell$ 到域 k 的映射。矩阵也采用类似约定；例如，X $=$X$_\text{I}$。对于含有单位元的交换环 $\mathscr{R}$ 及矩阵 A $\in$M$_n$($\overline{\mathscr{R}}$)，我们用 $\mathscr{Z}_{\text{M}_n(\mathscr{R})}$(A) 表示 A 的中心化子代数。对于矩阵 A $\in$ M$_n$($\mathscr{R}$)，定义 $\text{N}_A^{\mathscr{R}} = \{\text{F(t)} \in \mathscr{R}[\text{t}] : \text{F(A)} = 0\}$，即 A 的零化理想；更多细节见 [19, 第 3 节。矩阵 A $\in$M$_n$($\mathscr{R}$) 称为循环的，如果 A $\in$M$_n$(k) 是循环的。回忆一下，矩阵 X $\in$ M$_n$(k) 是循环的，当且仅当 k[t] 模 k^n 在 X 的作用下是循环模。还有如下结论：若 A $\in$M$_n$($\mathscr{O}$) 满足$\overline{\text{A}}$ $\in$M$_n$(k) 是循环的，则模 $\mathscr{O}^n$ 在 A 的作用下也为循环模；见 [19,引理 5.2]。

2. 多项式映射解的提升

在文章 [19], 中，作者提出了一种策略，将剩余域层面上方程 $X^L = \bar{A}$ 的解提升为局部环层面上给定方程 $X^L = A$ 的解，其中 $\gcd(L, p) = 1$；这里p 是剩余域的特征，且为奇素数，而 A 是 M$_n$($\mathscr{O}_2$) 中的循环元素。他们使用一个单变量首一多项式，并将其代入矩阵变量，系数取自 $\mathscr{O}_2$，进而证明了以下命题。

命题 *2.1.* 设 $\mathscr{O}_2$ 是一个长度为二、极大理想为 $\mathfrak{m} = \langle\pi\rangle$、剩余域为 k 且特征为 $p > 2$的有限局部主理想环。设 $A \in M_n(\mathscr{O}_2)$ 是循环的，且 $F(t) \in \mathscr{O}_2[t]$ 是次数为 d 的首一多项式。假设存在 $\tilde{B} \in M_n(k)$，使得 $F(\tilde{B}) = A$，且 $F'(\tilde{B}) \in \overline{GL_n(k)}$，其中 $\overline{F'(t)}$ 是 $F(t)$ 关于 $\mathscr{O}_2[t]$的$\tilde{}$形式导数。那么存在 $B \in M_n(\mathscr{O}_2)$，满足 $B = B$ 且 $F(B) = A$。

这为将此类矩阵方程的提升解从剩余域提升到长度为二的层级提供了一般框架。不过，现在我们希望在更大的背景下考察这一问题。首先，对于给定的矩阵方程 $F(X) = A$；$A \in M_n(\mathscr{O}_\ell)$ 为循环的，我们来研究：对于给定矩阵 $A \in M_n(\mathscr{O}_\ell)$，长度为二层级的约化方程的一个解（如果存在）是否能够提升到长度为三的层级，并依此继续提升。我们从 $\mathscr{O}_\ell = \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$ 开始，其中 p 是一个奇素数。注意，p 进整数环可以写成$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$。在构造提升策略时，零化理想发挥了关键作用。因此，让我们利用 $\mathscr{O}_2$ 层级的信息，证明关于循环元素$A \in$GL$_n$($\mathscr{O}_3$)的零化理想以及最小多项式唯一性的结果。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta_2} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \\ & \searrow^{\theta_1\circ\theta_2} & \downarrow{\scriptstyle \theta_1} \\ & & \mathbb{F}_p \end{array}$$

设 F(t) $\in \mathscr{O}_3$[t]，使得 F(t) $\in \text{N}^{\mathscr{O}_3}\text{A} = \{\text{G} \in \mathscr{O}_3[\text{t}] : \text{G(A)} = 0\}$。那么 F(t) $=$H(t)χ(A)(t)$+$ R(t)，其中 R(t) $= 0$ 或 deg(R(t)) $<$deg(χ(A)(t))。若可能，令 R(t) $\neq 0$。若 R(t) 的系数中至少有一个是 $\mathscr{O}_3$ 中的单位，则这与 k[t] 中 $\chi(\bar{\text{A}})$(t) 的最小性矛盾。因此 R(t) $\in \mathfrak{m}$[t]。注意 ker(θ_2) $=$ p$^2\mathbb{Z}$/p$^3\mathbb{Z}$。现在我们总能将 R(t) 写成 $=$ pS(t)，且其首项系数模 p^2 不同余于 0。因此 deg(R(t)) $=$ deg(S(t))。由于 R(A) $= 0$，可知 S(A) $=$ p^{2}Q，其中某个 Q $\in$ M$_2$($\mathscr{O}_3$)，因此 θ_2(S(A)) $=$ **0**；于是 θ_2(S) $\in \text{N}_{\theta_2}^{\mathscr{O}_2}$(A)。现在，根据 [19,引理 3.1], $\text{N}_{\theta_2}^{\mathscr{O}_2}$(A) $= \langle\chi(\theta_2(\text{A}))\rangle$。注意

$$\deg(\theta_2(S)) = \deg(S) = \deg(R) < \deg(\chi(A)) = \deg(\chi(\theta_2(A))),$$

这就产生了矛盾。因此，$R(t)$ 必须是零多项式。现在让我们证明一般情形下的这一结论，以便将其用于证明主要定理。

命题 2.2. 设 $\mathcal{O}$ 是一个局部主理想环，且关于其极大理想 $\mathfrak{m}=(\pi)$ 完备，其剩余域 k 的特征不等于2。设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$。假设存在一个首一多项式 $F(t) \in N_A^{\mathcal{O}}$，使得

$$\deg\big(\overline{F}(t)\big) = \deg\big(\mathrm{Min}_{k,\overline{A}}(t)\big).$$

那么，对每个 $i \in \mathbb{N}$，零化理想 $N^{\mathcal{O}_{i+1}}A_{i+1}$ 都是主理想，由 $F_{i+1}(t)$ 生成，其中

$$A_i = \widehat{\theta}_i(A), \qquad F_i(t) = \widehat{\theta}_i\big(F(t)\big), \qquad \mathcal{O}_i = \widehat{\mathcal{O}}/\pi^i\widehat{\mathcal{O}}.$$

证明。 我们通过对i使用归纳法来证明该命题。

当$i = 1$时，应用 [19, 引理 3.1], ，可得$N^{\mathcal{O}_2}A_2 = \langle F_2(t)\rangle$。因为此时 $\mathcal{O}_2$ 是一个长度为 2 的局部主理想环。

归纳假设： 设该命题对$i = 2, 3, \cdots, m$成立。

归纳步骤： 考虑$i = m+1$。参见以下图示

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{m+2} & \xrightarrow{\theta_{m+1}} & \mathcal{O}_{m+1} \\ & \searrow^{\theta_m\circ\theta_{m+1}} & \downarrow{\scriptstyle \theta_m} \\ & & \mathcal{O}_m \end{array}$$

任取一个多项式$G(t) \in \mathcal{O}_{m+2}[t]$，使其属于$N^{\mathcal{O}_{m+2}}A_{m+2}$。根据 [13, 定理 2.14], ，存在多项式$Z(t)$和$R(t)$，满足$R(t) = 0$，或者 $\deg(R(t)) < \deg(F_{m+2}(t))$，使得

$$G(t) = Z(t)F_{m+2}(t) + R(t).$$

现在，若有可能，设$R(t)$非零。那么$R(t) \in N^{\mathcal{O}_{m+2}}A_{m+2}$，且 $\deg(R(t)) < \deg(F_{m+2}(t))$。我们考虑以下两种情形。

若有可能，设$R(t)$的至少一个系数是 $\mathcal{O}$中的单位。那么，经过约化后，$\theta(R(t)) = r(t)$将是 $A \in \mathrm{M}_n(k)$在$k[t]$中的湮灭多项式。这与 $\deg F(t)$的最小性矛盾。因此，这种情形不可能发生。

因此，我们假设 $\mathrm{R(t)} \in \mathfrak{m}_{m+2}[\mathrm{t}]$。由于 $\mathcal{O}_{m+2}$ 是局部主理想环，我们可写为 $\mathfrak{m}_{m+2} = \langle \pi_{m+2}\rangle$。于是存在 $\mathrm{S(t)} \in \mathcal{O}_{m+2}[\mathrm{t}]$，其首项系数模 $\ker(\theta_{m+1})$ 不同余于 0，使得 $\mathrm{R(t)} = \pi_{m+2}\cdot\mathrm{S(t)}$。因此，$\deg \mathrm{R(t)} = \deg \mathrm{S(t)}$。由于 $\mathrm{R(t)} \in \mathrm{N}^{\mathcal{O}_{m+2}}\mathrm{A}_{m+2}$，我们有 $\mathbf{0} = \mathrm{R(A}_{m+2}) = \pi_{m+2}\mathrm{S(A}_{m+2})$，从而 $\mathrm{S(A}_{m+2}) \in \mathrm{M}_n(\mathfrak{m}_{m+1})$。应用 θ_{m+1} 得到

$$\theta_{m+1}(S(A_{m+2})) = \mathbf{0}$$

这进一步意味着 $\theta_{m+1}(S)(A_{m+1}) = \mathbf{0}$。因此 $\theta_{m+1}(S(t)) \in N^{\mathcal{O}_{m+1}}A_{m+1}$。现在

$$\deg(\theta_{m+1}(S(t))) = \deg(S(t)) = \deg(R(t)) < \deg(F_{m+2}(t)) = \deg(F_{m+1}(t)),$$

因为 $F(t)$ 是首一多项式。由于根据归纳假设，$N^{\mathcal{O}_{m+1}}A_{m+1} = \langle F_{m+1}(t)\rangle$，这与 $\theta_{m+1}(S(t)) \in N^{\mathcal{O}_{m+1}}A_{m+1}$ 的事实矛盾。因此，唯一的可能是 $R(t)$ 必须是零多项式。因此 $N^{\mathcal{O}_{m+2}}A_{m+2} = \langle F_{m+2}(t)\rangle$。□

推论 2.3。 若 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ 是循环的，则命题 2.2 对该 A 成立。此外，在此情况下，$\chi(A^{j+1})(t) = \mathrm{Min}_{\mathcal{O}_{j+1},A^{j+1}}(t)$ 对每个 $j \in \mathbb{N}$均成立。

证明。固定一个 j。根据命题 2.2，$N^{\mathcal{O}_{j+1}} A_{j+1} = \langle \chi(A_{j+1})(t) \rangle$（假设 $F(t) = \chi(A)(t)$）。现在考虑 $H(t) \in \mathcal{O}_{j+1}[t]$，它是另一个湮灭 A_{j+1} 的首一多项式，并且 $\deg(H) < \deg(\chi(A_{j+1}))$. 那么根据零化理想的描述，存在 $P(t) \in \mathcal{O}_{j+1}[t]$，使得 $H(t) = P(t)\chi(A_{j+1})(t)$。但是，$\deg(P(t)\chi(A_{j+1})(t))$ 总是 $\geq \deg(\chi(A_{j+1})(t))$。这与 $H(t)$ 存在于 $N^{\mathcal{O}_{j+1}} A_{j+1}$ 且 $\deg(H) < \deg(\chi(A_{j+1}))$ 相矛盾。因此，$\chi(A_{j+1})(t) = \mathrm{Min}_{\mathcal{O}_{j+1}, A_{j+1}}(t)$。这证明了第二个断言，从而也证明了第一个断言，只需令 $F = \chi(A)(t)$ 即可。□

典范映射 $\mathcal{T}$：$\widehat{\mathcal{O}} \to \varprojlim_{j\geq 1} \widehat{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}}$ 定义为

$$\mathcal{T}(r) = \left(r + \mathfrak{m},\ r + \mathfrak{m}^2,\ r + \mathfrak{m}^3,\ r + \mathfrak{m}^4,\ \ldots\right).$$

$\widehat{\ }$是一个环同态，且 $\mathcal{O}$ 关于极大理想 $\mathfrak{m}$ 完备，意味着 $\mathcal{T}$是一个同构；参见 [11, 第 7 节1]。在此情形下，同构 $\mathcal{T}$诱导出一个同构 $\mathfrak{T}$：$M_n(\mathcal{O}) \to \widehat{\ } M_n(\varprojlim_{j\geq 1} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}})$，定义为 $A = [a_{u,v}] \mapsto \mathfrak{T}(A) = [\overline{\mathcal{T}(a_{u,v})}]$，其中此处 $u,v \in \{1,2,\cdots,n\}$。利用典范映射 $\mathcal{T}$的描述，我们还可以定义映射 $\mathfrak{T}^*$：$M_n(\varprojlim_{j\geq 1} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}}) \to \varprojlim_{j\geq 1} M_n(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}})$，它将 $\mathfrak{T}(A)$映为 $(A_1, A2, \ldots)$；其中 $A_i = [a_{u,v} \pm \mathfrak{m}^i]$ 对于 $i \in \mathbb{N}$。（注：$a_{u,v}$表示矩阵 A 的第 (u,v) 个元素。）此对应关系给出了 $M_n(\varprojlim_{j\geq 1} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}})$ 与 $\varprojlim_{j\geq 1} M_n(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}}) = \widehat{\varprojlim} M_n(\mathcal{O}_j)$ 之间的同构，因此得到同构 $\mathcal{T}^*$：$M_n(\mathcal{O}) \to \varprojlim M_n(\mathcal{O}_j)$，定义为 $A \mapsto \mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T}(A)$；其中 $j \geq 1$ $j\geq 1$，可通过下面的交换图来表示。

$$\begin{array}{ccc} M_n(\widehat{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{\ \mathfrak{T}\ } & M_n(\varprojlim_{j\geq 1} \widehat{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}^j\widehat{\mathcal{O}}) \\ & \searrow^{\mathcal{T}^* = \mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T}} & \downarrow \mathfrak{T}^* \\ & & \varprojlim_{j\geq 1} M_n(\mathcal{O}_j) \end{array}$$

定理 1. 设 $\mathcal{O}$ 是一个局部主理想环，关于其唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$ 完备，且其剩余域 k 的特征不等于 2。设 A 是 $M_n(\mathcal{O})$ 中的一个循环元素，$F \in \mathcal{O}[t]$ 是一个次数为 d 的首一多项式。设存在 $B \in M_n(k)$ 使得 $f(B) = A$，且 $f'(B) \in GL_n(k)$。那么存在 $B \in M_n(\mathcal{O})$ 使得 $B = B$ 且 $F(B) = A$。

证明。 根据命题 2.1，存在 $B_2 \in M_n(\mathcal{O}_2)$ 使得 $F_2(B_2) = A_2$。我们通过逐步提升方程的一个解来构造这样的矩阵

$$F_j(X) = A_j$$

从层级 $\mathcal{O}_j$提升到 $\mathcal{O}_{j+1}$，对所有$j \geq 2$均成立。这通过归纳法完成。我们先通过对i进行归纳，证明以下命题：

断言 ***1***：对于每个 $i \in \mathbb{N}$，方程 $F_i(X) = A_i$ 的任意解 $B_i \in M_n(\mathcal{O}_i)$，只要满足 $F_i'(B_i) \in GL_n(\mathcal{O}_i)$，就可以提升为方程 $F_{i+1}(X) = A_{i+1}$. 的一个解 $B_{i+1} \in M_n(\mathcal{O}_{i+1})$。

断言 *1* 的证明：从 $i = 1$ 开始。由命题 2.1 可知存在 $B_2 \in M_2(\mathcal{O}_2)$，使得 $F_2(B_2) = A_2$。因此，该结论对 $i = 1$ 成立。

归纳假设： 假设该结论对所有 $i \leq m - 1$ 均成立。

归纳步骤： 考虑方程 $F_{m+1}(X) = A_{m+1}$，其中$A_{m+1} \in M_n(\mathcal{O}_{m+1})$，在$F_{m+1}(t)$中用矩阵不定元 X 代替t 后进行求值。应用约化 θ_m，我们得到方程$F_m(X) = A_m$，它定义在 $M_n(\mathcal{O}_m)$ 上；该方程是在$F_m(t)$中用矩阵不定元X 代替t 后求值得到的。根据归纳

假设，存在 $B_m \in M_n(\mathcal{O}_m)$，使得 $F_m(B_m) = A_m$，且 $F'_m(B_m) \in GL_n(\mathcal{O}_m)$，因为 $F'_{m+1}(B_{m+1}) \in GL_n(\mathcal{O}_{m+1})$。注意，$B_m \in \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_m)}(A_m)$。如果方程 $F_{m+1}(X) = A_{m+1}$ 在 $M_n(\mathcal{O}_{m+1})$ 中有解，那么该解必属于 $\mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_{m+1})}(A_{m+1})$。$\mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_{m+1})}(A_{m+1})$ 与 $\langle \chi_{m+1}^{\mathcal{O}_{m+1}[\,]} t\,(A)(t)\rangle$ 之间存在环同构；参见 [19, 第 4] 节。定义求值映射 $EV_{m+1}: \mathcal{O}_{m+1}[t] \to \mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}]$，使 $H(t) \mapsto H(A_{m+1})$。这是一个满射，且 $\ker(EV_{m+1}) = N^{\mathcal{O}_{m+1}} A_{m+1}$。由于根据命题 2.2 和推论 2.3，$N^{\mathcal{O}_{m+1}} A_{m+1} = \langle \chi(A_{m+1})(t)\rangle$，因此必有 $\langle \chi_{m+1}^{\mathcal{O}_{m+1}[\,]} t\,(A)(t)\rangle \cong \mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}]$。类似地，$\langle \chi_{m}^{\mathcal{O}_{m}[\,]} t\,(A)(t)\rangle \cong \mathcal{O}_{m}[A_{m}]$。

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_{m+1})}(A_{m+1}) & \xrightarrow{\theta_m} & \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_m)}(A_m) \\ \downarrow{\scriptstyle iso_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle iso_m} \\ \mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}] & \xrightarrow{\theta_m} & \mathcal{O}_m[A_m] \end{array}$$

设 $B_m \in \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_m)}(A_m)$，且 $iso_m(B_m) = r\sum_{j=0} a_j A\, j m$。由于 θ_m 是满射，存在 $\check{B}_{m+1} = \sum_{j=0}^{r} b_j A\, j\, m_{+1} \in \mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}]$，使得 $\theta_m(\check{B}_{m+1}) = iso_m(B_m)$。注意，$\ker(\theta_m) = \mathfrak{n}_{m+1}[A_{m+1}]$。其中 $\mathfrak{n}_{m+1} = \ker(\mathcal{O}_{m+1} \to \mathcal{O}_m) = \pi^m \mathcal{O} / \pi^{m+1} \widehat{\mathcal{O}}$。

由于 $\theta_m(F_{m+1}(\check{B}_{m+1})) = F_m(iso_m(B_m)) = iso_m(A_m) = A_m$，因此可将 $F_{m+1}(\check{B}_{m+1}) = A_{m+1} + \pi_{m+1}^m C$ 写成某个 $C \in \mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}]$ 的形式。根据归纳假设，$F'_m(B_m) \in GL_n(\mathcal{O}_m)$，因此 $F'_m(iso_m(B_m)) \in \mathcal{O}_m[A_m]^{\times}$。由于 $\theta_m(F'_{m+1}(\check{B}_{m+1})) = F'_m(iso_m(B_m))$，因此 $iso_{m+1}(F'_{m+1}(\check{B}_{m+1}))$ 必须是 $\mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}]$ 中的一个单位。考虑 $D = -CF'_{m+1}(\check{B}_{m+1})^{-1}$。利用泰勒级数展开（例如参见 [9]），可得

$$\begin{aligned} F_{m+1}(\check{B}_{m+1} + \pi_{m+1}^m D) &= F_{m+1}(\check{B}_{m+1}) + \pi_{m+1}^m D F'_{m+1}(\check{B}_{m+1}) \\ &= F_{m+1}(\check{B}_{m+1}) - \pi_{m+1}^m C \\ &= A_{m+1}. \end{aligned}$$

注意，$\widehat{B}_{m+1} = \check{B}_{m+1} + \pi_{m+1}^m D$ 是相对于 $\theta_m: \mathcal{O}_{m+1}[A_{m+1}] \to \mathcal{O}_m[A_m]$ 而对 $iso_m(B_m)$ 的一个提升。通过同构 iso_{m+1}，存在唯一的 $B_{m+1} \in \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_{m+1})}(A_{m+1})$，使得 $iso_{m+1}(B_{m+1}) = \widehat{B}_{m+1}$。上述图的交换性以及同构 iso_{m+1}、iso_m 的存在（其中 $iso_{m+1}(A_{m+1}) = A_{m+1}$，且 $iso_m(A_m) = A_m$）立即表明，B_{m+1} 必须是相对于 $\theta_m: \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_{m+1})}(A_{m+1}) \to \mathscr{Z}_{M_n(\mathcal{O}_m)}(A_m)$ 而对 B_m 的一个提升，并且满足 $F_{m+1}(B_{m+1}) = A_{m+1}$。因此，断言 1 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。

现在，典范同构 $\mathscr{T}$ 在多项式环层面诱导出同构 $\widetilde{\mathscr{T}}$，其形式为：

$$\widetilde{\mathscr{T}}: \widehat{\mathcal{O}}[t] \to \varprojlim_{j \geq 1} \frac{\widehat{\mathcal{O}}}{\mathfrak{m}^j \widehat{\mathcal{O}}}[t]$$

由 $H(t) \mapsto (H_1(t),\ H_2(t) \cdots)$ 定义，其中 $H_j(t) = \widehat{\theta}_j(H(t)) \in \frac{\widehat{\mathcal{O}}}{\mathfrak{m}^j \widehat{\mathcal{O}}}[t]$。由此以及定理开始之前的交换图，我们得到如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} M_n(\widehat{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{\mathscr{T}^*} & \varprojlim_{j \geq 1} M_n(\mathcal{O}_j) \\ \downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle (H_1, H_2, \cdots)} \\ M_n(\widehat{\mathcal{O}}) & \xrightarrow[\mathscr{T}^*]{} & \varprojlim_{j \geq 1} M_n(\mathcal{O}_j) \end{array}$$

其中，对于 $X \in \mathrm{M}_n(\mathscr{O})$，$H(X)$ 表示将 $H(t)$ 中的 t 替换为 X 后求值。对H_i's 也有类似的定义。

设 $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\widehat{\mathscr{O}})$ 是循环的，且存在 $\tilde{\mathrm{B}} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{k})$，使得 $\mathrm{f}(\tilde{\mathrm{B}}) = \bar{\mathrm{A}}$，且 $\mathrm{f}'(\tilde{\mathrm{B}}) \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{k})$，其中 $\mathrm{A}_1 = \bar{\mathrm{A}}$，$\mathrm{B}_1 = \tilde{\mathrm{B}}$。由命题 2.1，存在 $\mathrm{B}_2 \in \mathrm{M}_n(\mathscr{O}_2)$，使得 $\mathrm{F}_2(\mathrm{B}_2) = \mathrm{A}_2$，且 $\mathrm{F}_2'(\mathrm{B}_2) \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}_2)$。由断言 1 可知，存在满足断言 1 中所述性质的 $\mathrm{B}_3, \mathrm{B}4, \cdots$，使得对于每个 $\mathrm{j} \in \mathbb{N}$，均有 $\mathrm{F}_j(\mathrm{B}\,\mathrm{j}) = \mathrm{A}j$。现在，在同构 $\mathscr{T}^*$ 下，我们有 $\mathscr{T}^*(\mathrm{A}) = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}2, \cdots)$。由于 $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}2, \cdots) \in \varprojlim \mathrm{M}_n(\mathscr{O}_j)$，根据断言 1（因为对于 $\mathrm{j} \geq 1$，$\mathrm{B}\,\mathrm{j}+1$ 是 $\mathrm{B}\,\mathrm{j}$ 的提升），因此 $\mathrm{j}\geq 1$ 存在 $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\widehat{\mathscr{O}})$，使得 $\mathscr{T}^*(\mathrm{B}) = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}2, \cdots)$。因此，B 是映射 $\theta_1 : \mathrm{M}_n(\mathscr{O}) \to \mathrm{M}_n(\mathrm{k})$ 下 $\mathrm{B}_1 = \tilde{\mathrm{B}}$ 的一个提升。由上述交换图可得 $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$。□

定理 2. 设 $\mathscr{O}$ 是一个局部主理想环，关于其唯一极大理想 $\mathfrak{m}$ 完备，其剩余域 k 的特征不为 2。设 A 是 $M_n(\mathscr{O})$ 中的一个循环元素，且 $F \in \mathscr{O}[x_1, x2, \cdots, x_m]$ 是一个次数为 d 的首一多项式。设存在 $B = (B_1, B2, \cdots, B_m) \in M_n(k) \times \tilde{M}_n(k) \times \cdots \times M_n(k)$（$m$ 个副本），使得对每个 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$B_i$ 与 B_j 彼此交换，且 $f(\tilde{B}) = A$。此外，我们假设对 $i = 1, 2, \cdots, r$，有 $\partial f \partial x_i|_{\tilde{\mathbf{B}}} \in GL_n(k)$；其中 $1 \leq r \leq m$，并且对 $i = r+1, r+2, \cdots, m$，有 $\partial f \partial x_i|_{\tilde{\mathbf{B}}} = \mathbf{0} \in M_n(k)$。则存在 $B = (B_1, B2, \cdots, B_m) \in M_n(\widehat{\mathscr{O}}) \times M_n(\widehat{\mathscr{O}}) \times \cdots \times M_n(\mathscr{O})$（$m$ 个副本），使得 $B = B$（即对每个 $i = 1, 2, \cdots, m$，有 $\theta_1(B_i) = B_i$）且 $F(B) = \bar{A}$。

证明。 首先，我们针对 $\ell = 2$ 证明这一点。随后，我们运用归纳论证，确保其在每个有限步骤上成立，并由此证明定理在 $\mathscr{O}$ 层上的结论。

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{Z}_{\mathrm{M}_n(\mathscr{O}_2)}(A_2))^m & \xrightarrow{(\theta_1, \theta_1, \cdots, \theta_1)} & (\mathscr{Z}_{\mathrm{M}_n(k)}(\bar{A}))^m \\ \downarrow \mathrm{ISO_2} & & \downarrow \mathrm{ISO_1} \\ (\mathscr{O}_2[A_2])^m & \xrightarrow{(\theta_1, \theta_1, \cdots, \theta_1)} & (k[\bar{A}])^m \end{array}$$

其中 $\mathrm{ISO_2} = (\underbrace{\mathrm{iso}_2, \mathrm{iso}2, \cdots, \mathrm{iso}_2}_{m\text{次}})$ 和 $\mathrm{ISO_1} = (\underbrace{\mathrm{iso}_1, \mathrm{iso}1, \cdots, \mathrm{iso}_1}_{m\text{次}})$.

容易得到 $\mathrm{ISO}_2(\mathrm{A}_2, \mathrm{A}2, \cdots, \mathrm{A}_2) = (\mathrm{A}_2, \mathrm{A}2, \cdots, \mathrm{A}_2)$。我们考虑 $\theta_2(\mathrm{F}) = \mathrm{F}_2$ 在 $\mathscr{O}_2$ 上。给定 $\tilde{\mathrm{B}} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{k})$，满足 $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$，则对每个 $\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \overline{\mathrm{m}}$，都有 $\mathrm{B}i \in \mathscr{Z}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{k})(\mathrm{A})$。由于 A 是循环的，$\mathscr{Z}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{k})(\mathrm{A}) = \mathrm{k}[\mathrm{A}]$，因此 $\tilde{\mathrm{B}}_i = \mathrm{s}\sum \mathrm{j}=0 \mathrm{a}^{(i)}\mathrm{j}\,\mathrm{A}\,\mathrm{j}$，其中某个 $\mathrm{a}^{(i)}\mathrm{j} \in \mathrm{k}$。现在记 $\mathrm{s}\ \sum \mathrm{j}=0 \mathrm{b}^{(i)}\mathrm{j}\,\mathrm{A}_2^j = \check{\mathrm{B}}_i \in \mathscr{O}_2[\mathrm{A}_2] \subseteq \mathrm{M}_n(\mathscr{O}_2)$，它是 $\tilde{\mathrm{B}}_i$ 在映射 $\theta_1 : \mathscr{O}_2[\mathrm{A}_2] \longrightarrow \mathrm{k}[\mathrm{A}]$, 下的一个提升，其中 $\theta(\mathrm{b}^{(i)}\mathrm{j}) = \mathrm{a}^{(i)}\mathrm{j}$。注意 $\ker(\theta_1) = \mathfrak{m}[\mathrm{A}_2]$。

考虑 $\check{\mathrm{B}} = (\check{\mathrm{B}}_1, \check{\mathrm{B}}2, \cdots, \check{\mathrm{B}}_m)$。对于某个 $\mathrm{C} \in \mathscr{O}_2[\mathrm{A}_2]$，我们有 $\mathrm{F}_2(\check{\mathrm{B}}) = \mathrm{A}_2 + \pi\mathrm{C}$。我们希望构造 $\mathrm{B_0} = (\check{\mathrm{B}}_1 + \pi\mathrm{D}_1, \check{\mathrm{B}}_2 + \pi\mathrm{D}2, \cdots, \check{\mathrm{B}}_m + \pi\mathrm{D}_m)$，使得对于某个 $\mathrm{D}_i \in \mathscr{O}_2[\mathrm{A}_2]$，$\mathrm{F}_2(\mathrm{B_0}) = \mathrm{A}_2$；$\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{m}$。对于任意含单位元的交换环 $\mathscr{R}$，以及系数属于 $\mathscr{R}$ 的 m 元多项式 F(x)，可以写成 $\mathrm{F}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial}\mathrm{F}\ \mathrm{x}_i\,\mathrm{y}i + \Sigma_{1\leq i},\ \mathrm{j}\leq \mathrm{m}\ \mathrm{C}i\mathrm{j}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{y}_i\mathrm{y}\,\mathrm{j}$；其中 $\mathrm{C}i\mathrm{j}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathscr{R}[\mathrm{x}, \mathrm{y}]$；$\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}2, \cdots, \mathrm{x}m)$，$\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}2, \cdots, \mathrm{y}m)$；见 [10, 方程 (3.4)]。对于每个 $\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{m}$，分别以 $\check{\mathrm{B}}_i$和 $\pi\mathrm{D}_i$代替 x_i和 y_i，可得 $\mathrm{F}_2(\mathrm{B_0}) = \mathrm{F}_2(\check{\mathrm{B}}) + \pi\sum_{i=1}^m \partial\mathrm{F}\ \partial\,^2\mathrm{x}_i|_{\check{}}\mathrm{BD}_i$。需要谨慎选择 D_i，使得 $\mathrm{F}_2(\mathrm{B_0}) = \mathrm{A}_2$。这里，根据 r 的不同，可能出现两种情况。

情形 I. $(p \nmid r)$：在此情形下，我们选择 $D_i = -C\left(r\,\partial_F \partial\,^2 x_i|_{\check{\mathbf{B}}}\right)^{-1}$，对于 $i = 1, 2, \cdots, r$，以及 $\mathscr{O}_2[A_2]$ 中任意元素，将其作为 D_i 对应的元素，其中 $i = r+1, r+2, \cdots, m$。

情形 II. $(p \mid r)$：取

$$D_i = \begin{cases} -C\left(2(r-1)\frac{\partial F_2}{\partial x_i}|_{\check{\mathbf{B}}}\right)^{-1} & 1 \leq i \leq r-1 \\ -C\left(2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}|_{\check{\mathbf{B}}}\right)^{-1} & i = r \end{cases}$$

并且对于 $i = r+1、r+2、r+3、\cdots、m$，$\mathscr{O}_2[A_2]$ 中的任意元素都适合作为 D_i 的选择，因为此时 $\partial F/\partial x_i|_{\check{B}}$ 在 $\mathscr{O}_2[A_2]$ 中都是非单位。因此，关于 $\ell = 2$ 的结论成立。现在，采用与定理 1 中类似的归纳法方法，考虑到在提升 $M_n(\mathscr{O}_\ell) \longleftarrow M_n(\mathscr{O}_{\ell+1})$ 时，B_0 应选为 $(\check{B}_1 + \pi^\ell D1, \cdots, \check{B}_m + \pi^\ell D_m)$，即可得到 $\mathscr{O}$ 情形的结论。□

例 2.4。考虑 $\mathscr{O} = Z_5$，即 5 进整数环。其剩余域 k 同构于 $\mathbb{F}_5$。取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(Z_5)$，作为 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_5)$ 的一个提升。考虑 $F(x, y) = xy + y^2 \in Z_5[x, y]$。现在存在 $\tilde{B} = (\tilde{B}1, \tilde{B}_2) \in (M_2(\mathbb{F}_5))$，使其满足定理 2 的假设。取 $\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$。考虑 $\bar{F} = f$，那么 $\partial f/\partial x|_{\bar{B}} = \tilde{B}2$，$\partial f/\partial y|_{\bar{B}} = \tilde{B}_2^2$ 都可逆。存在 $B = (B_1, B_2) \in (M_2(Z_5))$，使得 $F(B_1, B_2) = A$，其中 $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{-1}.5 \end{pmatrix}$、$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 分别是 $\tilde{B}_1$ 和 $\tilde{B}_2$ 在 $M_2(Z_5)$ 中的提升。

注记 2.5（简述群上的字问题）。 群上的字问题广为人知；给定一个元素 $w \in \mathbf{F}_r$ 和一个群 G，通过代入可得到一个映射

$$\widetilde{w} : G^r \longrightarrow G, (g_1, g_2, \cdots, g_r) \mapsto w(g_1, g_2, \cdots, g_r);$$

称为字映射。具有影响力的成果包括 Ore 猜想的解决，以及有限单群上字的宽度问题的解决；参见 [16, 25]。在提升解的背景下，文献 [4]给出了关于 $SL_n(\mathscr{O})$ 上交换子映射的结果。定理 2 还表明，若从一个字 w 出发，且其约化形式中不含逆元，那么只要方程 $\tilde{w}(x_1, x2, \cdots, x_r) = A$（这是 $GL_n(k)$ 中的一个方程）存在两两可交换的解，对于一个循环矩阵 $A \in GL_n(\mathscr{O})$，方程 $\tilde{w}(x_1, x2, \ldots, x_r) = A$ 就存在提升解；事实上，$GL_n(\mathscr{O}) \subseteq M_n(\mathscr{O})$，并且 $A \in GL_n(\mathscr{O})$ 当且仅当 $A \in GL_n(k)$。

参考文献

[1] Jeffrey D. Adler、Michael Cassel、Joshua M. Lansky、Emma Morgan 和 Yifei Zhao。“有限约化群表示的提升：一个特征标关系”。载于：*Involve*9.5（2016），第 805–812 页。ISSN：1944-4176,1944-4184 [1].[2] Jeffrey D. Adler 和 Joshua M. Lansky。“有限约化群表示的提升 I：半单共轭类”。载于：*Canad. J. Math.* 66.6（2014），第 1201–1224 页。ISSN：0008-414X,1496-4279 [1].[3] Jeffrey D. Adler 和 Joshua M. Lansky。“有限约化群表示的提升 II：显式余范数”。载于：*J. Algebra* 631（2023），第 610–657 页。ISSN：0021-8693,1090-266X [1].[4] Nir Avni、Tsachik Gelander、Martin Kassabov 和 Aner Shalev。“*p*-进群和阿代尔群中的字值”。载于：*Bull. Lond. Math.Soc.*45.6（2013），第 1323–1330 页。ISSN：0024-6093,1469-2120 [8].[5] Matej Breˇsar。“非交换多项式的交换子与像”。载于：*Adv. Math.*374（2020），第 107346 页，共 21 页。ISSN：0001-8708,1090-2082 [2]. ˇ[6] Matej Breˇsar 和 Peter Semrl。“矩阵代数上的华林问题”。载于：*Israel J. Math.*253.1（2023），第 381–405 页。ISSN：0021-2172,1565-8511 [2]. ˇ[7] Matej Breˇsar 和 Peter Semrl。“矩阵代数上的华林问题，II”。载于：*Bull. Lond.Math. Soc.* 55.4（2023），第 1880–1889 页。ISSN：0024-6093,1469-2120 [2]。

[8] Matej Breˇsar 和 Jurij Volˇciˇc。“非交换有理函数的矩阵求值与华林问题”。载于：Selecta Math. (N.S.) 31.5（2025），论文编号 97，共 16 页。ISSN：1022-1824,1420-9020 [2].[9] Keith Conrad。亨泽尔引理。https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/hensel.pdf。访问日期：2025-05-19 [6].[10] Keith Conrad。多变量情形的亨泽尔引理。https://kconrad.math.uconn. edu / blurbs / gradnumthy / multivarhensel .pdf。访问日期：2026年1月25日。无日期。 [7].[11] David Eisenbud。交换代数。第 150 卷。数学研究生教材。侧重代数几何。施普林格出版社，纽约，1995 年，第 xvi+785 页。ISBN：0-387-94268-8；0-387-94269-6 [5].[12] Ivan Gonzales Gargate 和 Thiago Castilho de Mello。“无限域上 n× n 阶上三角矩阵上的多线性多项式的像”。载于：Israel J. Math. 252.1（2022），第 337–354 页。ISSN：0021-2172,1565-8511 [2].[13] Nathan Jacobson。《基础代数》I。第二版。W. H. Freeman and Company，纽约，1985 年，第 xviii+499 页。ISBN：0-7167-1480-9 [4].[14] Alexey Kanel-Belov、Sergey Malev 和 Louis Rowen。“在 2×2 矩阵上求值的非交换多项式的像”。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 140.2（2012），第 465–478 页。ISSN：0002-9939,1088-6826 [2].[15] Krishna Kishore 和 Anupam Singh。“矩阵华林问题 II”。载于：Israel J. Math. 267.1（2025），第 301–320 页。ISSN：0021-2172,1565-8511 [2].[16] Martin W. Liebeck、E. A. O’Brien、Aner Shalev 和 Pham Huu Tiep。“Ore 猜想”。载于：J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 12.4（2010），第 939–1008 页。ISSN：1435-9855,1435-9863 [8].[17] Andrew Obus 和 Stefan Wewers。“循环扩张与局部提升问题”。载于：Ann. of Math. (2) 180.1（2014），第 233–284 页。ISSN：0003-486X,1939-8980 [1].[18] Saikat Panja 和 Sachchidanand Prasad。“上三角矩阵代数上的多项式像与华林型问题”。载于：J. Algebra 631（2023），第 148–193 页。ISSN：0021-8693,1090-266X [2].[19] Saikat Panja、Ayon Roy 和 Anupam Singh。有限主理想局部环上长度为二的一般线性群的幂映射。2025。arXiv：2508.18952 [math.GR] [2–4, 6].[20] Saikat Panja、Prachi Saini 和 Anupam Singh。“带常数的多项式映射的像”。载于：《Mathematika》71.3（2025），论文编号 e70031，共 17 页。ISSN：0025-5793,2041-7942 [2].[21] Saikat Panja、Prachi Saini 和 Anupam Singh。“分裂八元数代数上的带常数多项式映射”。载于：Comm. Algebra 54.2（2026），第 579–594 页。ISSN：0092-7872,1532-4125 [2].[22] Saikat Panja、Prachi Saini 和 Anupam Singh。“矩阵上的多项式映射的满射性”。载于：Eur. J. Math. 11.3（2025），论文编号 62，共 22 页。ISSN：2199-675X,2199-6768 [2].[23] Florian Pop。“曲线覆盖提升中的 Oort 猜想”。载于：Ann. of Math. (2) 180.1（2014），第 285–322 页。ISSN：0003-486X,1939-8980 [1].[24] Ravi Ramakrishna。“伽罗瓦表示的提升”。载于：Invent. Math. 138.3（1999），第 537–562 页。ISSN：0020-9910,1432-1297 [1].[25] Aner Shalev。“字映射、共轭类与一个非交换华林型定理”。载于：Ann. of Math. (2) 170.3（2009），第 1383–1416 页。ISSN：0003-486X,1939-8980 [8]。

电子邮件地址，（Panja）：panjasaikat300@gmail.com

参考文献

印度统计研究所班加罗尔中心，迈索尔路8英里处，RVCE邮政区，格纳纳·巴拉蒂，班加罗尔，卡纳塔克邦560059，印度

电子邮件地址，（Roy）：ayonroy1999@gmail.com

印度科学教育与研究学院浦那分校，霍米·巴巴博士路，帕尚，浦那411 008，印度

电子邮件地址，（Singh）：anupamk18@gmail.com

印度科学教育与研究学院浦那分校，霍米·巴巴博士路，帕尚，浦那411 008，印度