arXiv:2602.04597v1 [math.AP] 4 Feb 2026

三维外部区域中具有退化黏度和远场真空的可压缩 Navier–Stokes 方程强解的局部适定性

Jiaxu LI[a], Boqiang L¨U[b], Bing YUAN[b], *a. 深圳大学数学科学学院，中国深圳 518061；b. 南昌大学数学与计算机科学学院与数学与交叉科学研究所，中国南昌 330031；

摘要

本文研究一般三维外部区域中满足 Navier 滑移边界条件的等熵可压缩 Navier–Stokes 系统。当初始密度趋于远场真空且黏度是密度的幂函数（ρ^δ 且 $0<\delta<1$）时，本文建立了强解的局部适定性。特别地，我们采用的方法不仅能够同时处理由边界项和远场真空导致的困难，还能使 δ 的选取独立于气体系数 γ。

关键词： 可压缩 Navier–Stokes 方程，退化黏度，远场真空，外区域

2020 年数学主题分类： 76N06, 76N10, 35Q35

1 引言

我们考虑如下三维等熵可压缩 Navier–Stokes 方程：

$$\begin{cases} \rho_t + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P = \mathrm{div}\mathbb{T}. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，$t \geq 0$, $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ 分别表示时间和空间变量。$\rho = \rho(x,\ t)$、$u = (u_1(x,\ t)\ u_2(x,\ t)\ u_3(x,\ t))$以及 $P(\rho) = a\rho^\gamma(a > 0,\ \gamma > 1)$分别表示未知的流体密度、速度和压力。$\mathbb{T}$表示黏性应力张量，其形式为

$$\mathbb{T} = 2\mu(\rho)\mathcal{D}(u) + \lambda(\rho)\mathrm{div}u\mathbb{I}_3, \tag{1.2}$$

其中，$\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right]$是变形张量，$\mathbb{I}_3$是 3×3单位矩阵。剪切黏度 $\mu(\rho)$和体积黏度 $\lambda(\rho) + \frac{2}{3}\mu(\rho)$满足以下假设

$$\mu(\rho) = \mu\rho^\delta,\ \lambda(\rho) = \lambda\rho^\delta, \tag{1.3}$$

对于某个常数 $\delta \geq 0$，μ 和 λ 均为满足以下条件的常数

$$\mu > 0,\ 2\mu + 3\lambda \geq 0. \tag{1.4}$$

*ema电子邮箱：jiaxvlee@gmail.com (J.X. Li), lvbq86@163.com (B.Q. L¨u), bingyuan@email.ncu.edu.cn (B. Yuan)

设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中具有光滑边界的单连通有界区域，且 $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$ 是外区域。本文研究 Ω 上方程 (1.1) 的初边值问题 (IBVP)，其初始条件为

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \Omega, \tag{1.5}$$

以及 Navier 型滑移边界条件（见 [3,26]）

$$u \cdot n = 0, \ \ \mathrm{curl} u \times n = -A(x)u, \ \ \text{on} \ \ \partial\Omega, \tag{1.6}$$

其中， $n = (n^1, n^2, n^3)$ 是边界 $\partial\Omega$ 上指向 Ω 外部的单位法向量， A 是定义在 $\partial\Omega$ 上的对称矩阵。此外，我们考虑如下远场性态

$$(\rho, u) \to (0,0), \ \ as \ \ |x| \to \infty. \tag{1.7}$$

关于多维等熵可压缩 Navier-Stokes 方程组解的适定性，已有大量文献。对于常粘性系数的情形（$\delta = 0$ 见 (1.3)）， [25, 28, 30]（无真空）以及 [5–7, 12, 18, 27]（有真空）建立了经典（强）解的局部存在性和唯一性。Matsumura-Nishida [24]最先获得了初始数据接近于非真空平衡态时的整体经典解。随后，Hoff [10, 11] 研究了不连续初始数据下初始密度和温度严格为正的整体弱解。关于大数据下解的存在性，Lions [22], 取得了重大突破，他在绝热指数 $\gamma \geq \frac{9}{5}$（三维问题）的条件下，证明了具有有限能量的弱解的整体存在性，另见 Feireisl [9] $\gamma > \frac{3}{2}$。近期，Huang-Li-Xin [14] 获得了小能量但可能具有大振荡的柯西问题的整体经典解。

对于密度依赖粘性（$\delta > 0$ 见 (1.3)），当出现真空时，动量方程 $(1.1)_2$ 会变成一个双重退化抛物方程，这给研究系统 (1.1) 解的适定性带来了新的困难。最近，Li-Xin [19] 和 Vasseur-Yu [31] 分别研究了满足 Bresch-Desjardins关系 [2]的可压缩 Navier-Stokes 系统的整体弱解。对于情形 $\delta = 1$，Li-Pan-Zhu [21]获得了具有远场真空的二维局部经典解的存在性，该结果也适用于二维浅水方程。他们 [20] 还在 $\delta > 1$条件下获得了三维局部经典解；对于一类在某些齐次Sobolev空间中密度较小但速度可能较大的光滑初值，Xin-Zhu [32] 将该解延拓为整体解。在 $\delta \in (0, 1)$的情形下，对 δ 和 γ 作如下限制：

$$\delta \to 1, \quad \text{when} \ \ \gamma \to 1, \tag{1.8}$$

Xin-Zhu [33] 在三维全空间中建立了具有远场真空的局部经典解。后来，Li-Li [17]通过更加细致的处理，扩大了 Xin-Zhu [33]中系数取值的范围，并证明了三维全空间中具有远场真空的局部经典解，因此涵盖了麦克斯韦分子等更多物理情形。

关于外部区域中的初边值问题，现有适定性理论主要集中于常黏性系数情形。Cai-Li-L¨u [4] 和 Li-Li-L¨u [16]分别建立了等熵和全可压缩 Navier–Stokes 方程经典解的整体存在性；对于具有滑移边界条件的外部区域初边值问题，这些解具有小能量但可能存在大振荡。对于具有密度依赖粘性（1.3）的情形，退化黏性系数将给边界估计带来新的困难。关于带真空且具有一般纳维滑移边界条件的外部区域中系统（1.1）的初边值问题，即使是局部解，相关研究也十分有限。最近，Liu-Zhong [23]采用与 [33], 类似的论证，证明了在条件（1.8）下三维外部区域中具有远场真空的局部经典解。

因此，本文旨在发展新的技术方法，将柯西问题推广到更一般的边值问题，同时使 δ 的选取独立于气体系数 γ，从而涵盖更广泛的物理情形。受 Li-Li [17], 的启发，我们首先将（1.1）重新表述为

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \rho^{1-\delta} u_t + \rho^{1-\delta} u \cdot \nabla u - \mathcal{L}u + \frac{a\gamma}{\gamma-\delta} \nabla \rho^{\gamma-\delta} = \delta \nabla \log \rho \cdot \mathcal{S}(u), \end{cases} \tag{1.9}$$

其中

$$\mathcal{L}u = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, \quad \mathcal{S}(u) = 2\mu \mathcal{D}(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathbb{I}_3. \tag{1.10}$$

本文所讨论的初边值问题 (1.1)-(1.7) 的强解定义如下 s:

定义 1.1. 设 $T > 0$ 为有限常数。若系统 (1.1)-(1.7) 的解 (ρ, u) 满足：对于 (ρ, u)，(1.1) 中涉及的所有导数均为正则分布，且方程(1.1) 在 $[0, T] \times \Omega$中几乎处处成立，则称其为强解。

在陈述主要结果之前，我们先说明本文中使用的记号和约定。对于正整数 k 和 $p \geq 1$，标准的勒贝格空间和索伯列夫空间记作：

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(\Omega)}, \ \|f\|_{W^{k,p}} = \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \ \|f\|_{H^k} = \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}, \ \|f\|_{L^p} = \|f\|_{W^{0,p}(\Omega)},$$
$$D^{k,p} = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : |f|_{D^{k,p}} = \|\nabla^k f\|_{L^p} < \infty\}, \ D^k = D^{k,2},$$
$$D^1_0(\Omega) = \{f \in L^6(\Omega) : \|\nabla f\|_{L^2} < \infty\}, \ \|f\|_{X \cap Y} = \|f\|_X + \|f\|_Y.$$

设 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 | |x| < R\}$，定义

$$\Omega_R \triangleq \Omega \cap B_R$$

¯其中 $R > 2R_0 + 1$ 满足 R_0，其取值充分大，使得 $D \subset B_{R_0}$。特别地，我们记 $\Omega_0 \triangleq \Omega \cap B_{2R_0}$。

本文的主要结果是如下关于强解局部存在性的定理1.1。

定理1.1. 对于参数(γ, δ) 满足

$$\gamma > 1, \ 0 < \delta < 1. \tag{1.11}$$

若初始数据(ρ_0, u_0) 满足

$$\rho_0^{\frac{1-\delta}{2}} u_0 \in L^2, \ u_0 \in D^1 \cap D^2, \ \rho_0^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}} \in D^1_0 \cap D^2, \ \nabla \rho_0^{\frac{\delta-1}{2}} \in D^1_0, \tag{1.12}$$

以及相容性条件：

$$\mathcal{L}(u_0) = \rho_0^{\frac{1-\delta}{2}} g \tag{1.13}$$

对某个 $g \in L^2$。则存在正的时间 $T_0 > 0$，使得问题 (1.1)-(1.7) 在 $[0, T_0] \times \Omega$ 上具有唯一强解 (ρ, u) 满足

$$\begin{cases} \rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}} \in L^\infty([0, T_0]; D^1_0 \cap D^2), \\ \nabla \rho^{\frac{\delta-1}{2}} \in L^\infty([0, T_0]; D^1_0), \quad \rho^{\frac{\delta-1}{2}} \in L^\infty([0, T_0]; L^6(\Omega_0)), \\ u \in L^\infty([0, T_0]; D^1_0 \cap D^2) \cap L^2([0, T_0]; D^1_0 \cap D^3), \\ \rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t \in L^\infty([0, T_0]; L^2), \quad u_t \in L^2([0, T_0]; D^1_0), \\ \rho^{\frac{\delta-1}{2}} \mathcal{L}u, \ \rho^{\frac{\delta-1}{2}} \nabla \operatorname{div} u \in L^2([0, T_0]; H^1). \end{cases} \tag{1.14}$$

注1.1. 定理*1.1*中的条件 (1.11)-(1.12) 刻画了一类使问题 (1.1)-(1.7) 可解的可容许初始数据，例如下列数据满足这些条件，

$$\rho_0(x)=\frac{1}{1+|x|^{2\alpha}},\ u_0(x)\in C_0^2(\Omega),\ with\ \ \frac{1}{2(2\gamma-1-\delta)}<\alpha<\frac{1}{2(1-\delta)}. \tag{1.15}$$

特别地， δ 的取值范围与 γ无关。这说明定理*1.1*适用于所有 $\gamma>1$ 和 $\delta\in(0,1)$，这不同于 *Xin-Zhu* *[33]* 和 *Liu-Zhong* *[23]*,的结果，后者需要满足限制条件(1.8)。此外，定理*1.1*所要求的唯一相容性条件是(1.13)，这消除了 *[23,33]*中的另外两个附加限制条件。因此，我们的定理*1.1*适用于更一般的初始数据。此外，若$2\gamma\le\delta+\frac{4}{3}$，则 $\rho_0\in L^1(\Omega)$，且定理*1.1*中构造的密度 ρ 可能具有有限的总质量。

注1.2. 事实上，根据 ρ_0 的选取（见(1.12)）以及引理 *2.4*，我们可以得到，ρ_0 在Ω_0, 上有正下界，因此它具有

$$\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\in L^6(\Omega_0). \tag{1.16}$$

定理*1.1*给出了一个新的先验估计 $\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\in L^\infty([0,T_0];\ L^6(\Omega_0))$，结合$\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\in L^\infty([0,T_0];D_0^1)$可知， ρ在边界 $\partial\Omega$附近有正下界。粗略地说，密度在Ω_0 上保持与初始密度相同的正下界。这一新发现对处理 u的边界估计起着关键作用。这里需要指出的是，这与 *Li-Li* *[17]*中的柯西问题以及 *Liu-Zhong* *[23]*在外部区域中的初边值问题有显著区别。

注1.3。 对于时间连续性，类似于 *[17,*注*1.2],* ，我们也可以由(1.14) 和经典的索 *Sobolev* 嵌入结果推出

$$\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\in C([0,T_0];D_0^1\cap D^2),\ \nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\in C([0,T_0];D_0^1), \tag{1.17}$$

$$u\in C([0,T_0];D_0^1\cap D^2),\ \rho^{\frac{1-\delta}{2}}u,\ \rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\in C([0,T_0];L^2). \tag{1.18}$$

注1.4。 定理*1.1*表明

$$\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\in L^\infty([0,T_0];D_0^1\cap D^2),\quad \nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\in L^\infty([0,T_0];D_0^1), \tag{1.19}$$

结合引理 *2.4* 可知，真空只能出现在无穷远处。

注1.5. 在 *[19]* 和 *[31],* 中，黏性系数 $\mu(\rho)$ 和 $\lambda(\rho)$ 要求满足 *B-D*关系：

$$\lambda(\rho)=2(\mu'(\rho)\rho-\mu(\rho)), \tag{1.20}$$

由此可得估计 $\mu'(\rho)\nabla\sqrt{\rho}\in L^\infty([0,T];\ L^2(\mathbb{R}^3))$，前提是 $\mu'(\rho_0)\nabla\sqrt{\rho_0}\in L^2(\mathbb{R}^3)$。本文不需要这一额外限制。

注1.6. *[26]*中推导出的一般 *Navier*型滑移边界条件表述如下：

$$u\cdot n=0,\quad \big(2\mathcal{D}(u)n+\vartheta u\big)_{tan}=0,\ on\ \partial\Omega, \tag{1.21}$$

其中， ϑ 是标量摩擦函数，用于衡量流体在边界上发生滑移的倾向；符号 v_{tan} 表示向量 v 在 $\partial\Omega$上的切平面投影。事实上，边界条件 (1.21) 与 (1.6) 在分布意义下等价（详情参见 *[3]*）。

最后，为回答定理 1.1 中构造的局部解能否在时间上全局延拓这一问题，类似于 Huang-Li [13], ，我们有以下爆破准则：

定理 1.2. 设(ρ,u) 是初边值问题(1.1)-(1.7) 的一个满足(1.14)的强解。假设初始数据$(\rho_0,\ u_0)$ 满足(1.11)–(1.13)，且$\{\frac{1-\delta}{2\gamma-1-\delta},\frac{1}{3}\}<\alpha\le\frac{\gamma-1+\delta}{2}$，$T^*<\infty$ 和$\rho_0^{\frac{\gamma-1+\delta}{2}}\in L^{6\alpha}$，其中最大值。若是最大存在时间，则

$$\lim_{T\to T^*}\Big(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^1(0,T;L^\infty)}+\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega_0))}+\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(0,T;L^6\cap D^{1,2})}\Big)=+\infty. \tag{1.22}$$

注 1.7. 对于 *Navier* 型滑移边界条件 (1.6)，由于在处理 u 的边界估计时可能会出现 ρ 的负次幂，因此应确保 ρ 在边界 $\partial\Omega$ 附近有正下界（见 (5.9)、(5.26)），因此需要 (1.22) 中的第二项。特别地，若 A 是半正定矩阵，则相应的边界估计是平凡的，爆破准则可简化为

$$\lim_{T\to T^*}\Big(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^1(0,T;L^\infty)}+\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(0,T;L^6\cap D^{1,2})}\Big)=+\infty. \tag{1.23}$$

现在我们对本文的分析作一些说明。受 Li-Li [17], 启发，我们将方程 $(1.1)_2$ 除以 ρ^δ，然后研究所得方程 (1.9)，以建立系统 (1.1) 的强解。与柯西问题不同，边界条件 (1.6) 将带来根本性的挑战，这需要发展新的技术方法。

首先，我们考虑环形区域 Ω_R 上的系统 (1.9)，并以此逼近外区域 Ω，随后建立与 R 无关的必要先验估计。注意，Ω_R 的第一贝蒂数不为零，散度-旋度引理 2.2 如下

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_R)}\le C\big(\|\mathrm{div}u\|_{L^2(\Omega_R)}+\|\mathrm{curl}u\|_{L^2(\Omega_R)}+\|u\|_{L^2(\Omega_R)}\big), \tag{1.24}$$

这与单连通域的情形截然不同。由于远场处密度退化，在我们的框架下，(1.24) 右侧的范数 $\|u\|_{L^2(\Omega_R)}$ 无法关于 R 获得一致估计。幸运的是，我们可以利用截断函数法将$\|u\|_{L^2(\Omega_R)}$ 局部化到$\|u\|_{L^2(\Omega_0)}$，而后者可借助这一新发现得到控制：密度 ρ 在边界附近有下界，详见 (3.48)。事实上，在推导 u的先验估计时，这一关键发现对于处理边界项也至关重要；当矩阵 A不一定正定时，边界项的符号并不确定，详见 (3.21)–(3.22)。

接下来，正如 [17], 中所述，估计项 $\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}$ 很重要。根据质量方程，该项可由 $w\triangleq\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\mathrm{div}u$ 控制。然而，Li-Li [17] 所用的方法并不适用于我们的问题，其主要困难源于环形域 Ω_R。更具体地说，无法通过针对诺伊曼边值问题的标准椭圆估计（见 [17, 引理 2.4]）在 Ω_R上推导出关于 ∇w 的所需估计。为解决这些问题，我们需要一些新思路来推导$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega_R)}$的关键估计，详见引理 3.6。一方面，由方程 $(1.9)_2$ 可推得 w 可改写为

$$(2\mu+\lambda)w=\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u+\mu\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u, \tag{1.25}$$

其中 $\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u$ 满足方程 (3.40)，因而可以直接估计。另一方面，借助引理 2.2，可以按如下方式处理 (1.25) 中的第二项

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|^2_{L^2(\Omega_R)}\\
&\le C\|\mathrm{div}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|^2_{L^2(\Omega_R)}+C\|\mathrm{curl}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|^2_{L^2(\Omega_R)}\\
&\quad+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\cdot n\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|^2_{L^2(\Omega_R)}\\
&\le C\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|^2_{L^6(\Omega_R)}\|\nabla^2u\|^2_{L^3(\Omega_R)}+C\|\mathrm{curl}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|^2_{L^2(\Omega_R)}\\
&\quad+C\mathcal{E}^\beta\|\mathrm{curlcurl}u\|^2_{H^1(\Omega_R)}+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|^2_{L^2(\Omega_R)},
\end{aligned} \tag{1.26}$$

其中涉及旋度 $\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\text{旋度旋度}u\right)$ 的项可由 (3.41) 估计。

然后，将上述所有思路与 [5–7, 17, 18], 所提出的方法相结合，我们推导出解所需的一些先验估计。注意，所有这些界均与半径 R 及初始密度的下界无关，因此可以建立该系统强解的局部存在性与唯一性。

最后，在附加初始条件 $\rho_0^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}} \in L^{6\alpha}$下，我们可以处理边界项，从而推导压力项的估计（详见(5.7)–(5.8)），并由此得到定理1.2中的爆破准则。

本文其余部分安排如下：第2节汇总后续分析中将用到的一些基本事实和不等式。第3节致力于建立强解局部存在性与唯一性所需的先验估计。随后，主要结果定理1.1将在第4节中证明。最后，我们在第5节给出强解的爆破准则。

2 预备知识

本节列出一些有用的已知事实和不等式。首先是著名的 Gagliardo-Nirenberg不等式 [15]。

引理 2.1. 假设 $U \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界*Lipschitz*区域，对于 $p \in [2,6]$, $q \in (1,\infty)$，以及$r \in (3,\infty)$，存在通用常数 C, C_1, C_2，它们依赖于 p, q, r以及 U的*Lipschitz*特征，使得对于任意 $f \in H^1(U)$ and $g \in L^q(U) \cap D^{1,r}(U)$，有

$$\|f\|_{L^p(U)} \le C\|f\|_{L^2(U)}^{(6-p)/2p}\|\nabla f\|_{L^2(U)}^{(3p-6)/2p} + C_1\|f\|_{L^2(U)}, \tag{2.1}$$

$$\|g\|_{C(\bar{U})} \le C\|g\|_{L^q(U)}^{q(r-3)/(3r+q(r-3))}\|\nabla g\|_{L^r(U)}^{3r/(3r+q(r-3))} + C_2\|g\|_{L^q(U)}. \tag{2.2}$$

此外，如果 $f \cdot n|_{\partial U} = 0$，我们可以选取 $C_1 = 0$。同样，常数 $C_2 = 0$ 由$g \cdot n|_{\partial U} = 0$给出。

以下引理的证明见 [1,3], ，它在我们的分析中起着至关重要的作用。

引理 2.2. 对于任意 $u \in W^{1,p}(\Omega_R)$ 满足 $p \in (1,\infty)$的情形，存在某个正常数 C，它仅依赖于 p 和 R_0 ，使得

- 当 $u \cdot n = 0$ 在 $\partial\Omega_R$上时，有

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_R)} \le C\big(\|\mathrm{div} u\|_{L^p(\Omega_R)} + \|\mathrm{curl} u\|_{L^p(\Omega_R)} + \|u\|_{L^p(\Omega_0)}\big), \tag{2.3}$$

- 当 $u \cdot n \neq 0$ 在 $\partial\Omega_R$上时，有

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_R)} \le C\big(\|\mathrm{div} u\|_{L^p(\Omega_R)} + \|\mathrm{curl} u\|_{L^p(\Omega_R)} + \|u\|_{L^p(\Omega_0)} + \|u \cdot n\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega_R)}\big). \tag{2.4}$$

证明。 首先，我们引入一个截断函数 $\eta(x) \in C_c^\infty(B_{2R_0})$，满足

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le R_0 \\ \eta(x) \in (0,1), & R_0 < |x| < \frac{3}{2}R_0, \\ 0, & |x| \ge \frac{3}{2}R_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

以及 $|\nabla\eta(x)| < C(R_0)$。因此，很容易发现， ηu 是定义在 Ω_0 上的一个函数，并且在 $\partial\Omega_0$上满足 $\eta u \cdot n = 0$。 consequently，使用 [3, 引理 2.5] 后可得

$$\begin{aligned}\|\nabla(\eta u)\|_{L^p(\Omega_R)} &= \|\nabla(\eta u)\|_{L^p(\Omega_0)} \\ &\le C\|\mathrm{curl}(\eta u)\|_{L^p(\Omega_0)} + C\|\mathrm{div}(\eta u)\|_{L^p(\Omega_0)} + C\|\eta u\|_{L^p(\Omega_0)} \\ &\le C\|\eta \mathrm{curl} u\|_{L^p(\Omega_0)} + C\|\nabla\eta \times u\|_{L^p(\Omega_0)} + C\|\eta \mathrm{div} u\|_{L^p(\Omega_0)} \\ &\quad + C\|\nabla\eta \cdot u\|_{L^p(\Omega_0)} + C\|\eta u\|_{L^p(\Omega_0)} \\ &\le C\|\mathrm{curl} u\|_{L^p(\Omega_R)} + C\|\mathrm{div} u\|_{L^p(\Omega_R)} + C\|u\|_{L^p(\Omega_0)}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

类似地，$(1-\eta)u$ 是定义在 B_R 上的函数，并且在∂B_R上满足$(1-\eta)u \cdot n = 0$。于是，由 [17,引理 2.2] 可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\big((1-\eta)u\big)\|_{L^p(\Omega_R)} &= \|\nabla\big((1-\eta)u\big)\|_{L^p(B_R)} \\ &\le C\|\mathrm{curl}\big((1-\eta)u\big)\|_{L^p(B_R)} + C\|\mathrm{div}\big((1-\eta)u\big)\|_{L^p(B_R)} \\ &\le C\|(1-\eta)\mathrm{curl} u\|_{L^p(B_R)} + C\|\nabla\eta \times u\|_{L^p(B_R)} \\ &\quad + C\|(1-\eta)\mathrm{div} u\|_{L^p(B_R)} + C\|\nabla\eta \cdot u\|_{L^p(B_R)} \\ &\le C\|\mathrm{curl} u\|_{L^p(\Omega_R)} + C\|\mathrm{div} u\|_{L^p(\Omega_R)} + C\|u\|_{L^p(\Omega_0)},\end{aligned}$$

结合 (2.6)，可得 (2.3)。

采用与 [1], 中类似的论证，我们还可以证明 (2.4)，从而完成引理 2.2 的证明。

□

接下来，考虑 Lam´e 系统

$$\begin{cases}\mathcal{L}u = f, & x \in \Omega_R, \\ u \cdot n = 0,\ \mathrm{curl} u \times n = -Au, & x \in \partial\Omega, \\ u \cdot n = 0,\ \mathrm{curl} u \times n = 0, & x \in \partial B_R,\end{cases} \tag{2.7}$$

由 [3, 17], 可知，关于 (2.7) 的解，我们有以下结论。

引理 2.3。设 u 是 *Lam´e* 系统 (2.7)的光滑解，对于任意 $p \in (1, \infty)$ 和$k \ge 0$，存在一个正常数 C，其仅依赖于 λ、 μ、 A、 R_0、 p和 k，使得

$$\|\nabla^{k+2} u\|_{L^p(\Omega_R)} \le C\|f\|_{W^{k,p}(\Omega_R)} + C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_R)}. \tag{2.8}$$

证明。对于式 (2.5) 中定义的 η，有 ηu 满足

$$\begin{cases}\mathcal{L}(\eta u) = \eta f + \tilde{f}, & x \in \Omega_0, \\ \eta u \cdot n = 0,\ \mathrm{curl}(\eta u) \times n = -Au, & x \in \partial\Omega, \\ \eta u \cdot n = 0,\ \mathrm{curl}(\eta u) \times n = 0, & x \in \partial B_{2R_0},\end{cases}$$

with

$$\tilde{f} \triangleq \mu u\Delta\eta + 2\mu\nabla\eta \cdot \nabla u + (\mu+\lambda)\left(u\nabla^2\eta + \nabla u \cdot \nabla\eta + \nabla\eta \mathrm{div} u\right).$$

因此，由引理 2.4] 可得 [3,

$$\begin{aligned}\|\eta u\|_{W^{k+2,p}(\Omega_R)} &= \|\eta u\|_{W^{k+2,p}(\Omega_0)} \\ &\le C(\|\eta f\|_{W^{k,p}(\Omega_0)} + \|\tilde{f}\|_{W^{k,p}(\Omega_0)} + \|\eta u\|_{L^p(\Omega_0)}) \\ &\le C(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega_R)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_R)}) + \frac{1}{4}\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega_R)},\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中我们在 $\partial\Omega_R$ 上使用了 $u \cdot n = 0$ 和引理 2.1。

接下来，我们可以验证 $(1-\eta)v$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}\big((1-\eta)u\big) = (1-\eta)f + \tilde{f}, & x \in B_R, \\ (1-\eta)u \cdot n = 0,\ \mathrm{curl}\big((1-\eta)u\big) \times n = 0, & x \in \partial B_R, \end{cases}$$

从而由 [17,引理 2.3] 推出

$$\|(1-\eta)u\|_{W^{k+2,p}(\Omega_R)} \le C(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega_R)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_R)}) + \frac{1}{4}\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega_R)}.$$

这与(2.9)一起给出(2.8)，并完成了2.3的证明。 □

接下来，为了得到边界项的估计，我们需要如下引理来建立密度在边界附近的正下界。

引理 2.4. 假设 $U \subset \mathbb{R}^3$ 是满足内球条件的有界光滑区域，若 $\rho \in C(U)$ 且 $\nabla\rho^{-a} \in L^p(U)$，其中 $a \ge 0$、 $p > 2$，则 ρ 在 U 上具有正下界。

证明. 对任意 $x \in U$，存在球 $B_x \subset U$ 使得 $x \in \overline{B_x}$。注意到 $\nabla\rho^{-a} \in L^p(U)$， ρ 不可能在某个正测度子集上消失。于是存在 $x_0 \in B_x$ 使得

$$\rho(x_0) = \frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} \rho dx > \tilde{C}_1 > 0,$$

从而 $\rho^{-a}(x_0) \le C_2$。

接下来, 由索 Sobole夫嵌入定理（ [8, 第 5]章），对于任意 x， $x_0 \in B_x$，有

$$\rho^{-a}(x) \le \rho^{-a}(x_0) + C\|\nabla\rho^{-a}\|_{L^p(B_x)}|x-x_0|^{1-\frac{2}{p}} \le \tilde{C}_3,$$

其中 $C_3 > 0$）。这与 $x \in U$ 的任意性一起推出

$$\rho(x) > 0, \quad x \in \overline{U}. \tag{2.10}$$

回顾 $\rho \in C(U)$，结合 $\overline{\rho}$ 的连续性以及（2.10），可得 $\rho(x)$ 在 U 上具有正下界。引理 2.4 的证明至此完成。 □

3 先验估计

在本节中，对于 $1 \le p \le \infty$ 和正整数 k，我们记

$$\int f\mathrm{dx} = \int_{\Omega_R} f\mathrm{dx},\ L^p = L^p(\Omega_R),\ W^{k,p} = W^{k,p}(\Omega_R),\ D^k = D^{k,2}(\Omega_R),\ H^k = H^k(\Omega_R).$$

我们首先给出以下局部适定性结果，其证明方法与 [5–7], 相同，其中初始密度严格远离真空。

引理 3.1。 假设初始数据 (ρ_0, u_0) 满足

$$\begin{aligned} &\rho_0 \in H^3(\Omega_R),\ u_0 \in H^3(\Omega_R),\ \inf_{x\in\Omega_R}\rho_0(x) > 0, \\ &u_0 \cdot n = 0,\ \mathrm{curl}u_0 \times n = -Au_0,\ x \in \partial\Omega, \\ &u_0 \cdot n = 0,\ \mathrm{curl}u_0 \times n = 0,\ x \in \partial B_R. \end{aligned} \tag{3.1}$$

那么　　存在一个较小的时间 T_R，以及下列初边值问题的唯一经典解 (ρ, u)

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \rho^{1-\delta} u_t + \rho^{1-\delta} u \cdot \nabla u - \mathcal{L} u + \frac{a\gamma}{\gamma-\delta} \nabla \rho^{\gamma-\delta} = \delta \nabla \log \rho \cdot \mathcal{S}(u), \\ u \cdot n = 0,\ \operatorname{curl} u \times n = -Au,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u \cdot n = 0,\ \operatorname{curl} u \times n = 0,\ x \in \partial B_R,\ t > 0, \\ (\rho, u)(x, 0) = (\rho_0, u_0)(x),\ x \in \Omega_R, \end{cases} \tag{3.2}$$

在 $\Omega_R \times (0, T_R)$ 中，使得

$$\begin{cases} \rho \in C([0, T_R]; H^3),\ \nabla \log \rho \in C([0, T_R]; H^2), \\ u \in C([0, T_R]; H^3) \cap L^2(0, T_R; D^4), \\ u_t \in L^\infty(0, T_R; H_0^1) \cap L^2(0, T_R; H^2),\ \rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_{tt} \in L^2(0, T_R; L^2), \\ \sqrt{t} u \in L^\infty(0, T_R; D^4),\ \sqrt{t} u_t \in L^\infty(0, T_R; D^2),\ \sqrt{t} u_{tt} \in L^2(0, T_R; H^1), \\ \sqrt{t} \rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_{tt} \in L^\infty(0, T_R; L^2),\ t u_t \in L^\infty(0, T_R; D^3), \\ t u_{tt} \in L^\infty(0, T_R; H^1) \cap L^2(0, T_R; D^2),\ t \rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_{ttt} \in L^2(0, T_R; L^2), \\ t^{3/2} u_{tt} \in L^\infty(0, T_R; D^2),\ t^{3/2} u_{ttt} \in L^2(0, T_R; H^1), \\ t^{3/2} \rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_{ttt} \in L^\infty(0, T_R; L^2). \end{cases} \tag{3.3}$$

在本节余下部分，我们始终假设 (ρ, u) 是 $\Omega_R \times [0, T_R]$ 中初边值问题 (3.2) 的一个解，该解由引理 3.1 得到。本节的主要目标是推导如下关于 $\mathcal{E}$ 的关键先验估计，其中 $\mathcal{E}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) \triangleq & 1 + \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t\|_{L^2} + \|\rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6} \cap D^1 \cap D^2} \\ & + \|\nabla \rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6 \cap D^1} + \|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6(\Omega_0)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

命题 3.1. 假设(ρ_0, u_0) 满足(3.1)。设(ρ, u) 是$\Omega_R \times (0, T_R]$ 中初边值问题(3.2) 的解，该解由引理 *3.1* 得到。那么存在正常数 T_0和 M，它们仅依赖于 $a, \delta, \gamma, \mu, \lambda, A, R_0$ 和 C_0，使得

$$\sup_{0 \le t \le T_0} \big(\mathcal{E}(t) + \|\nabla^2 u\|_{L^2}\big) + \int_0^{T_0} \big(\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}} \mathcal{L} u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2\big) ds \le M, \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{aligned} C_0 \triangleq & 1 + \|\rho_0^{\frac{1-\delta}{2}} u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{D^1 \cap D^2} + \|\rho_0^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6} \cap D^1 \cap D^2} \\ & + \|\nabla \rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6 \cap D^1} + \|\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}} \mathcal{L} u_0\|_{L^2} + \|\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6(\Omega_0)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

由(1.12)、(1.13)和(1.16)可知，该常数有界。

为证明命题 3.1（其证明将推迟到本节末尾），我们将建立一些必要的先验估计，见引理 3.2–3.6。我们先给出关于 $(\rho,\ u)$ 的标准能量估计。

引理 3.2。 在命题 *3.1* 的条件下，设 (ρ, u) 是初边值问题 (3.2)的光滑解。则存在一个 $T_1 = T_1(C_0) > 0$ 和一个正数 $\beta = \beta(\delta, \gamma) > 1$，使得对所有 $t \in (0, T_1]$，

$$\sup_{0 \le s \le t} \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \le C C_0^\beta + C \int_0^t \mathcal{E}^\beta ds, \tag{3.7}$$

其中（下文同） C 表示仅依赖于 a、 δ、 γ、 μ、λ、 A、 R_0 和 C_0的一个通用正常数。

证明。 首先，由 (3.4) 可得

$$\|\rho\|_{L^\infty} = \|\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^\infty}^{\frac{2}{2\gamma-1-\delta}} \le C\|\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6}}^{\frac{2}{2\gamma-1-\delta}} \le C\mathcal{E}^\beta, \tag{3.8}$$

其中 $\beta = \beta(\delta,\ \gamma) > 1$ 可逐行变化。

接下来，由 $(3.2)_2$ 可知 u 满足

$$\mathcal{L}u = \rho^{1-\delta}u_t + \rho^{1-\delta}u\cdot\nabla u + \frac{a\gamma}{\gamma-\delta}\nabla\rho^{\gamma-\delta} - \delta\nabla\log\rho\cdot S(u). \tag{3.9}$$

因此，利用引理 2.3、Gagliardo-Nirenberg不等式、(3.4)、(3.9)、$(3.2)_3$,$(3.2)_4$,和 (3.8)，可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 u\|_{L^2} \le& C\big(\|\rho^{1-\delta}u_t\|_{L^2} + \|\rho^{1-\delta}u\cdot\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla\rho^{\gamma-\delta}\|_{L^2} + \|\nabla\log\rho\cdot S(u)\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}\big)\\
\le& C\big(\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla u\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u\|_{H^1}^{1/2} + \|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}\\
&+ \|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{H^1}^{1/2} + \|\nabla u\|_{L^2}\big)\\
\le& C\mathcal{E}^\beta + \frac{1}{2}\|\nabla^2 u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

由此可直接得到

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2} \le C\mathcal{E}^\beta. \tag{3.10}$$

然后，将质量方程 $(3.2)_1$ 乘以 $(1-\delta)\rho^{-\delta}$，可得

$$(\rho^{1-\delta})_t + u\cdot\nabla\rho^{1-\delta} + (1-\delta)\rho^{1-\delta}\mathrm{div}u = 0. \tag{3.11}$$

将 $(3.2)_2$ 乘以 u 与 (3.11) 乘以 $\frac{|u|^2}{2}$ 相加，并对所得等式在 Ω_R 上积分，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2 + \mu\|\mathrm{curl}u\|_{L^2}^2 + (2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}u\|_{L^2}^2 + \mu\int_{\partial\Omega} u\cdot A\cdot u dS\\
&\le C\int\big(\rho^{1-\delta}|\nabla u||u|^2 + |\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}||\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u| + |\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}||\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u||\nabla u|\big)dx\\
&\le C\Big(\|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2} + \|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}\\
&\qquad + \|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^3}\Big)\\
&\le C\mathcal{E}^\beta,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中用到了引理 2.1、(3.4)、(3.8) 和 (3.10)。利用迹定理，(3.12) 中的边界项可估计为

$$\int_{\partial\Omega} u\cdot A\cdot u dS \le C\|u\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \le C(\Omega_0)\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le C\mathcal{E}^\beta. \tag{3.13}$$

因此，对所得的 (3.12) 在 $(0,\ t)$ 上积分并利用 (3.13)，即可推得 (3.7)。引理 3.2 的证明完成。□

下面的引理给出了 u_t 的正幂加权估计，以及 ∇u_t 的 L^2-界。

引理 3.3. 设 (ρ,u) 和 T_1 如引理 *3.2* 中所述。则对所有 $t\in(0,T_1]$,

$$\sup_{0\le s\le t}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^2 + \int_0^t\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 ds \le CC_0^\beta + C\int_0^t\mathcal{E}^\beta ds. \tag{3.14}$$

证明. 首先，由 (3.2)$_1$ 可知，$\rho^{\gamma-\delta}$和 $\nabla\log\rho$满足

$$(\rho^{\gamma-\delta})_t = -u\cdot\nabla\rho^{\gamma-\delta} - (\gamma-\delta)\rho^{\gamma-\delta}\mathrm{div}u, \tag{3.15}$$

and

$$(\nabla\log\rho)_t = -\nabla u\cdot\nabla\log\rho - u\cdot\nabla^2\log\rho - \nabla\mathrm{div}u, \tag{3.16}$$

结合引理 2.1、(3.4)、(3.8) 和 (3.10)，可得

$$\|(\rho^{\gamma-\delta})_t\|_{L^2} \le \|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^\infty}^{\gamma-\delta}\|\nabla u\|_{L^2} \le C\mathcal{E}^\beta, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla(\log\rho)_t\|_{L^2} \le{}& C\big(\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla u\|_{L^3}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6} + \|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|u\|_{L^6}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^2\\ &+ \|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2} + \|\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}\big)\\ \le{}& C\mathcal{E}^\beta.\end{aligned} \tag{3.18}$$

接下来，对 (3.2) 进行 ∂_t 运算$_2$，得到

$$\begin{aligned}&(\rho^{1-\delta})_t u_t + \rho^{1-\delta}u_{tt} + (\rho^{1-\delta})_t u\cdot\nabla u + \rho^{1-\delta}u_t\cdot\nabla u + \rho^{1-\delta}u\cdot\nabla u_t\\ &-\mathcal{L}u_t + \frac{a\gamma}{\gamma-\delta}\nabla(\rho^{\gamma-\delta})_t = \delta(\nabla\log\rho)_t\cdot S(u) + \delta\nabla\log\rho\cdot S(u)_t.\end{aligned} \tag{3.19}$$

将上式乘以 u_t，利用分部积分和 (3.11) 后可得 at

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^2 + \mu\|\mathrm{curl}u_t\|_{L^2}^2 + (2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}u_t\|_{L^2}^2 + \mu\int_{\partial\Omega}u_t\cdot A\cdot u_t dS\\ &\le C\int\Big(\rho^{1-\delta}|\nabla u||u_t|^2 + \rho^{1-\delta}|u||\nabla u_t||u_t| + |u|^2|\nabla\rho^{1-\delta}||\nabla u||u_t| + \rho^{1-\delta}|u||\nabla u|^2|u_t|\\ &\quad + |(\rho^{\gamma-\delta})_t||\mathrm{div}u_t| + |(\nabla\log\rho)_t||\nabla u||u_t| + |\nabla\log\rho||\nabla u_t||u_t|\Big)dx\\ &\triangleq \sum_{i=1}^7 I_i.\end{aligned} \tag{3.20}$$

由引理 2.1、(3.4)、(3.8)、(3.10) 以及 (3.17)-(3.18)，我们可以对每个 I_i 进行如下估计：

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla u\|_{L^3}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}\|u_t\|_{L^6} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\\
I_2 &\le C\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\\
I_3 &\le C\|\rho\|_{L^\infty}^{3(1-\delta)/2}\|u\|_{L^6}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^6} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\\
I_4 &\le C\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^6}\|u_t\|_{L^6} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\\
I_5 &\le C\|(\rho^{\gamma-\delta})_t\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\\
I_6 &\le C\|(\nabla\log\rho)_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^3}\|u_t\|_{L^6} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\\
I_7 &\le C\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/4}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u_t\|_{L^2}\|u_t\|_{L^6}^{1/2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^{1/2} \le C\mathcal{E}^\beta + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

利用迹定理，(3.20) 中的边界项可估计为

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}u_t\cdot A\cdot u_t dS &\le C\big\||u_t|^2\big\|_{W^{1,1}(\Omega_0)}\\ &\le C\|\rho^{\delta-1}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\ &\le C\mathcal{E}^\beta\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中我们使用了

$$\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega_0)} \le C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{W^{1,6}(\Omega_0)} \le C\mathcal{E}^\beta. \tag{3.22}$$

此外，由引理 2.2、(3.4) 和 (3.22) 可得

$$\begin{aligned}\int_\tau^t \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 ds &\le C\int_\tau^t \big(\|\mathrm{curl} u_t\|_{L^2}^2 + \|\mathrm{div} u_t\|_{L^2}^2 + \|u_t\|_{L^2(\Omega_0)}^2\big) ds \\ &\le C\int_\tau^t \big(\|\mathrm{curl} u_t\|_{L^2}^2 + \|\mathrm{div} u_t\|_{L^2}^2 + \|\rho^{\delta-1}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t\|_{L^2(\Omega_0)}^2\big) ds \\ &\le C\int_\tau^t \big(\|\mathrm{curl} u_t\|_{L^2}^2 + \|\mathrm{div} u_t\|_{L^2}^2 + \mathcal{E}^\beta(s)\big) ds.\end{aligned} \tag{3.23}$$

将 I_1–I_7 代入 (3.20)，并将所得不等式在 (τ, t) 上对 $\tau \in (0, t)$ 积分，利用 (3.21) 和 (3.23)，并选择足够小的 ϵ，可得

$$\sup_{\tau\le s\le t} \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t(t)\|_{L^2}^2 + \int_\tau^t \|\nabla u_t(s)\|_{L^2}^2 ds \le \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + C\int_\tau^t \mathcal{E}^\beta(s) ds. \tag{3.24}$$

然后，将改写后的动量方程 $(3.2)_2$ 乘以 u_t，容易推出

$$\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t\|_{L^2} \le C\Big(\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2} + \|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2} + \|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2} + \|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\Big),$$

结合相容性条件 (1.13)，可得

$$\begin{aligned}\limsup_{\tau\to 0} \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t(\tau)\|_{L^2} \le& C\big(\|\rho_0\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u_0\|_{L^\infty}\|\nabla u_0\|_{L^2} + \|\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u_0\|_{L^2} \\ &+ \|\nabla\rho_0^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2} + \|\nabla\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u_0\|_{L^3}\big) \\ \le& C\big(\|\rho_0^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6}}^{\frac{1-\delta}{2\gamma-1-\delta}}\|\nabla u_0\|_{H^1}\|\nabla u_0\|_{L^2} + \|\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u_0\|_{L^2} \\ &+ \|\nabla\rho_0^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2} + \|\nabla\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u_0\|_{H^1}\big) \\ \le& C_0^\beta.\end{aligned} \tag{3.25}$$

最后，将 $\tau \to 0$ 代入 (3.24)，再利用 (3.25)，即可得到 (3.14)。引理 3.3 的证明至此完成。□

接下来，我们需要关于带有 ρ 负次幂的 $\mathcal{L}u$ 的以下加权估计，以及 $\mathrm{curl} u$ 和 $\mathrm{div} u$ 的 L^2-界；这些估计将用于推导关于 $\|\nabla u\|_{L^2}^2$ 的估计。

引理 3.4。设 (ρ, u) 和 T_1 如引理 *3.2* 中所述。那么，对所有 $t \in (0, T_1]$，

$$\sup_{0\le s\le t}\big(\|\mathrm{curl} u\|_{L^2}^2 + \|\mathrm{div} u\|_{L^2}^2\big) + \int_0^t \|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 ds \le CC_0^\beta + C\int_0^t \mathcal{E}^\beta ds. \tag{3.26}$$

证明。将 $(3.2)_2$ 乘以 $-2\rho^{\delta-1}\mathcal{L}u$，并对所得等式进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\mu\|\mathrm{curl} u\|_{L^2}^2 + (2\mu+\lambda)\|\mathrm{div} u\|_{L^2}^2\big) + 2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + 2\mu\int_{\partial\Omega} u\cdot A\cdot u_t dS \\ &\le C\int\big(\rho^{\frac{1-\delta}{2}}|u||\nabla u||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u| + |\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u| + |\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}||\nabla u||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u|\big)dx \\ &\le C\Big(\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2} + \|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\Big)\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2} \\ &\le \|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + C\mathcal{E}^\beta,\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中用到了引理 2.1、(3.4)、(3.8) 和 (3.10)。与 (3.13) 类似，(3.27) 右端的边界项可估计为

$$\int_{\partial\Omega} u\cdot A\cdot u_t dS \le C\||u||u_t|\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \le C\mathcal{E}^\beta + C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2. \tag{3.28}$$

对 (3.27) 在 $(0,t)$ 上积分，并利用 (3.28) 和 (3.14)，即可得到 (3.26)。引理 3.4 的证明完成。□

下面的引理涉及对具有正幂 $\gamma-\frac{1+\delta}{2}>0$ 的 ρ 的估计。

引理3.5。 设 (ρ,u) 和 T_1 如引理 *3.2* 中所述。那么对所有 $t\in(0,\ T_1]$,

$$\sup_{0\le s\le t}\|\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6}\cap D^1\cap D^2}\le CC_0^{\beta}+C\int_0^t\mathcal{E}^{\beta}ds. \tag{3.29}$$

证明。 首先，由引理 2.1、2.3、$(3.2)_2$,$(3.2)_4$,(3.10) 以及 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^3u\|_{L^2}&\le C\|\mathcal{L}u\|_{H^1}+C\|\nabla u\|_{L^2}\\
&\le C\Big(\|\nabla\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^6}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^3}+\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla u_t\|_{L^2}+\|\nabla\rho^{1-\delta}\|_{L^6}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^6}\\
&\quad+\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}+\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2}+\|\nabla^2\rho^{\gamma-\delta}\|_{L^2}\\
&\quad+\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla^2\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^6}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^6}\\
&\quad+\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla^2u\|_{L^3}\Big)+C\mathcal{E}^{\beta}\\
&\le C\Big(\|\rho\|_{L^\infty}^{5(1-\delta)/4}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{1/2}+\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\quad+\|\rho\|_{L^\infty}^{3(1-\delta)/2}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla^2\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}\\
&\quad+\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^3}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}+\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6\cap D^1}\|\nabla^2u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2u\|_{H^1}^{1/2}\\
&\quad+\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^2\|\nabla u\|_{H^1}+\mathcal{E}^{\beta}\Big)\\
&\le C\mathcal{E}^{\beta}+C\mathcal{E}^{\beta}\|\nabla u_t\|_{L^2}+\frac{1}{2}\|\nabla^3u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

由此可直接得到

$$\|\nabla^3u\|_{L^2}\le C\mathcal{E}^{\beta}+C\mathcal{E}^{\beta}\|\nabla u_t\|_{L^2}. \tag{3.30}$$

接下来，将质量方程 $(3.2)_1$ 乘以 $(\gamma-\frac{1+\delta}{2})\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}-1}$，可得 $\varphi\triangleq\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}$ 满足

$$\varphi_t+u\cdot\nabla\varphi+(\gamma-\frac{1+\delta}{2})\varphi\mathrm{div}u=0. \tag{3.31}$$

将 (3.31) 乘以 φ^5 后在 Ω_R 上积分，得到

$$\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{L^6}^6\le C\|\mathrm{div}u\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^6}^6. \tag{3.32}$$

对 (3.31) 进行 ∇ 运算，所得等式两边乘以 $|\nabla\varphi|^{r-2}\nabla\varphi$，其中$r=2,\ 6$，并在 Ω_R 上分部积分，得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|_{L^r}^r\le&C\int\big(|\nabla\varphi|^r|\nabla u|+|\varphi||\nabla\varphi|^{r-1}|\nabla\mathrm{div}u|\big)\,dx\\
\le&C\big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^r}^r+\|\varphi\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^r}^{r-1}\|\nabla\mathrm{div}u\|_{L^r}\big).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

此外，对 (3.31) 施加 ∇^2，将其乘以 $\nabla^2\varphi$，并在 Ω_R 上分部积分，可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}^2\le&C\int\big(|\nabla^2\varphi|^2|\nabla u|+|\nabla\varphi||\nabla^2\varphi||\nabla^2u|+|\varphi||\nabla^2\varphi||\nabla^2\mathrm{div}u|\big)dx\\
\le&C\big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}^2+\|\nabla\varphi\|_{L^6}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}\|\nabla^2u\|_{L^3}\\
&+\|\varphi\|_{L^\infty}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}\|\nabla^3u\|_{L^2}\big).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

最后，由 (3.32)-(3.34)、(3.30) 和 Gagliardo-Nirenberg不等式可推得 at

$$\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{W^{1,6}\cap D^1\cap D^2} \le C\|\nabla u\|_{H^2}\|\varphi\|_{W^{1,6}\cap D^1\cap D^2} \le C\mathcal{E}^\beta + C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2. \tag{3.35}$$

因此，通过对 (3.35) 在 $(0,t)$ 上积分并利用 (3.14)，可得到 (3.29)。引理3.5的证明完成。

□

现在，我们可以推导关于 $\rho^{\frac{\delta-1}{2}}$ 的关键估计。 —

引理 3.6。 设 (ρ,u) 和 T_1 如引理 *3.2* 中所述。则对于所有 $t\in(0,T_1]$,

$$\sup_{0\le s\le t}\big(\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6(\Omega_0)} + \|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6\cap D^1}\big) \le CC_0^\beta + C\int_0^t \mathcal{E}^\beta ds. \tag{3.36}$$

证明。 首先，根据 ∂B_R 上的边界条件 $\mathrm{curl}u\times n=0$ ，可推出

$$\mathrm{curlcurl}u\cdot n = 0 \ \text{ on } \ \partial B_R. \tag{3.37}$$

事实上，对于所有满足 $\vartheta=\overline{\nabla\vartheta}=0$ on $\partial\Omega$ 的 $\vartheta\in C^\infty(\Omega_R)$，有

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_R}\mathrm{curlcurl}u\cdot n\vartheta dS &= \int_{\partial\Omega_R}\mathrm{curlcurl}u\cdot n\vartheta dS = \int_{\Omega_R}\nabla\vartheta\cdot\mathrm{curlcurl}u dx\\ &= -\int_{\Omega_R}\mathrm{div}\big(\nabla\vartheta\times\mathrm{curl}u\big)dx = -\int_{\partial\Omega_R}\big(\nabla\vartheta\times\mathrm{curl}u\big)\cdot n dS\\ &= -\int_{\partial\Omega_R}\big(\mathrm{curl}u\times n\big)\cdot\nabla\vartheta dS = \int_{\partial B_R}\big(\mathrm{curl}u\times n\big)\cdot\nabla\vartheta dS = 0,\end{aligned}$$

从而直接得到 (3.37)。

接下来，通过直接计算可得

$$\begin{aligned}&\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2\\ &= (\lambda+2\mu)^2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}^2 + \mu^2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|_{L^2}^2\\ &\quad - 2\mu(\lambda+2\mu)\int_{\Omega_R}\rho^{\delta-1}\nabla\mathrm{div}u\cdot\mathrm{curlcurl}u dx\\ &= (\lambda+2\mu)^2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}^2 + \mu^2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|_{L^2}^2\\ &\quad - 2\mu(\lambda+2\mu)\left(\int_{\partial\Omega_R}\rho^{\delta-1}\mathrm{div}u\mathrm{curlcurl}u\cdot n dS - \int_{\Omega_R}\nabla\rho^{\delta-1}\cdot\mathrm{curlcurl}u\mathrm{div}u dx\right)\\ &\ge (\lambda+2\mu)^2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}^2 + \mu^2/2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|_{L^2}^2 - C\mathcal{E}^\beta\||\nabla u||\nabla^2 u|\|_{W^{1,1}(\Omega_0)}\\ &\quad - C\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^2\|\mathrm{div}u\|_{L^3}^2,\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中用到了 (3.10)、(3.22)、(3.30) 和 (3.37)。因此， $w\triangleq\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla$散度$u$和 $\rho^{\frac{\delta-1}{2}}$旋度旋度$u$满足以下估计

$$\|w\|_{L^2} + \|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|_{L^2} \le C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2} + C\mathcal{E}^\beta + C\|\nabla u_t\|_{L^2}. \tag{3.39}$$

将 $(3.2)_2$ 乘以 $\rho^{\frac{\delta-1}{2}}$ 可得—

$$\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u = \rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t + \rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\cdot\nabla u + \frac{2a\gamma}{2\gamma-1-\delta}\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}} + \frac{2}{1-\delta}\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\cdot\mathcal{S}(u), \tag{3.40}$$

因此

$$\begin{aligned}\mu\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u = &-\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t - \rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\cdot\nabla u - \frac{2a\gamma}{2\gamma-1-\delta}\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}} - \frac{2}{1-\delta}\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\cdot\mathcal{S}(u)\\ &+ (2\mu+\lambda)\nabla\big(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{div}u\big) - (2\mu+\lambda)\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{div}u.\end{aligned} \tag{3.41}$$

由引理 2.1、(3.40)-(3.41)、(3.10)、(3.8)、(3.30) 和 (3.39) 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u)\|_{L^2}+\|\mathrm{curl}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|_{L^2}\\
&\le C\Big(\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^3}+\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\quad+\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^6}+\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}+\|\nabla^2\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}\\
&\quad+\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2}+\|\nabla^2\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla^2u\|_{L^3}\Big)\\
&\le C\Big(\|\rho\|_{L^\infty}^{3(1-\delta)/4}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{1/2}+\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\quad+\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla^2\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla^2\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2}\|\nabla^2u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2u\|_{H^1}^{1/2}+\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla^2u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2u\|_{H^1}^{1/2}\Big)\\
&\le C\mathcal{E}^\beta\big(1+\|\nabla u_t\|_{L^2}\big).
\end{aligned}
$$

因此，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\|w\|_{D^1}^2&=\frac{1}{(2\mu+\lambda)^2}\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}(\mathcal{L}u+\mu\mathrm{curlcurl}u)\|_{D^1}^2\\
&\le C\|\nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u)\|_{L^2}^2+C\|\nabla\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|_{L^2}^2\\
&\le C\|\nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u)\|_{L^2}^2+C\|\mathrm{div}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|_{L^2}^2+C\|\mathrm{curl}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|_{L^2}^2\\
&\quad+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\cdot n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|_{L^2}^2\\
&\le C\|\nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u)\|_{L^2}^2+C\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^2\|\nabla^2u\|_{L^3}^2+C\|\mathrm{curl}\left(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\right)\|_{L^2}^2\\
&\quad+C\mathcal{E}^\beta\|\mathrm{curlcurl}u\|_{H^1}^2+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathrm{curlcurl}u\|_{L^2}^2\\
&\le C\mathcal{E}^\beta\big(1+\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\big)+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

由引理 2.2、(3.22)、(3.37) 和 (3.39) 可知。此外，引理 2.1 结合 (3.39) 和 (3.42) 可推出

$$
\|w\|_{L^6}\le C\|w\|_{H^1}\le C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}+C\mathcal{E}^\beta\big(1+\|\nabla u_t\|_{L^2}\big).
\tag{3.43}
$$

定义 $\Phi\triangleq\rho^{\frac{\delta-1}{2}}$，由 (3.2)$_1$ 乘以 $\binom{\delta-1}{2}\rho^{\frac{\delta-1}{2}-1}$ 可得

$$
\Phi_t+u\cdot\nabla\Phi+\frac{\delta-1}{2}\Phi\mathrm{div}u=0.
\tag{3.44}
$$

将 (3.44) 乘以 $|\Phi|^4\Phi$ 后在 Ω_0, 上积分，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\Phi\|_{L^6(\Omega_0)}^6\le&C\int_{\Omega_0}\big(|u||\nabla\Phi||\Phi|^5+|\Phi|^6|\mathrm{div}u|\big)dx\\
\le&C\big(\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\Phi\|_{L^6}\|\Phi\|_{L^6(\Omega_0)}^5+\|\Phi\|_{L^6(\Omega_0)}^6\|\nabla u\|_{L^\infty}\big).
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

现在，对 (3.44) 进行 ∇，并将所得等式乘以 $|\nabla\Phi|^4\nabla\Phi$，然后在 Ω_R 上分部积分，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla\Phi\|_{L^6}^6\le&C\int\big(|\nabla\Phi|^6|\nabla u|+|\nabla\Phi|^5|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\mathrm{div}u|\big)dx\\
\le&C\big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\Phi\|_{L^6}^6+\|\nabla\Phi\|_{L^6}^5\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\mathrm{div}u\|_{L^6}\big).
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

然后，对 (3.44) 进行 ∇^2 ，并将所得等式乘以 $\nabla^2\Phi$，再在 Ω_R 上积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla^2\Phi\|_{L^2}^2 \leq & C\int\big(|\nabla u||\nabla^2\Phi|^2+|\nabla^2 u||\nabla\Phi||\nabla^2\Phi|+|\nabla^2\Phi||\nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u)|\big)dx\\ \leq & C\big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2\Phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^3}\|\nabla\Phi\|_{L^6}\|\nabla^2\Phi\|_{L^2}\\ & +\|\nabla^2\Phi\|_{L^2}\|\nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u)\|_{L^2}\big).\end{aligned}\tag{3.47}$$

最后，由 (3.46)-(3.47) 和 (3.30) 可推出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|\Phi\|_{L^6(\Omega_0)}+\|\nabla\Phi\|_{L^6\cap D^1}\right)\\ &\leq C\|\nabla u\|_{H^2}\left(\|\Phi\|_{L^6(\Omega_0)}+\|\nabla\Phi\|_{L^6\cap D^1}\right)+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u\|_{L^6\cap D^1}\\ &\leq C\mathcal{E}^\beta+C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

对上述不等式在 $(0,t)$ 上积分，并利用 (3.14) 和 (3.26)，即可得到 (3.36)，从而完成引理 3.6 的证明。

□

现在，命题 3.1 是引理 3.2-3.6 的直接推论。

命题 3.1 的证明。首先，直接计算可得

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq s\leq t}\|\nabla u\|_{L^2}^2 &\leq C\sup_{0\leq s\leq t}\left(\|\mathrm{curl} u\|_{L^2}^2+\|\mathrm{div} u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2(\Omega_0)}^2\right)\\ &\leq C\exp\left(C\int_0^t\mathcal{E}^\beta ds\right)+C\sup_{0\leq s\leq t}\left(\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega_0)}^2\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2(\Omega_0)}^2\right)\\ &\leq C\exp\left(C\int_0^t\mathcal{E}^\beta ds\right),\end{aligned}\tag{3.48}$$

其中用到了引理 2.2、(3.7)、(3.26) 和 (3.36)。

其中 因此，由 (3.7)、(3.26)、(3.14)、(3.29)、(3.36) 和 (3.48) 可知，对所有 $t\in(0,\ T_1\ ]$,

$$\mathcal{E}^2(t)\leq CC_0^\beta+C\int_0^t\mathcal{E}^\beta ds+C\exp\left(C\int_0^t\mathcal{E}^\beta ds\right)\leq C\exp\left(C\int_0^t\mathcal{E}^\beta ds\right).\tag{3.49}$$

因此，运用标准论证可得，对于 $M\triangleq Ce^C$ 和 $T_0\triangleq\min\{T_1,(CM^\beta)^{-1}\}$,

$$\sup_{0\leq t\leq T_0}\mathcal{E}(t)\leq M.$$

结合 (3.7)、(3.26) 和 (3.14)，即得到 (3.5)。命题 3.1 的证明完成。

□

注 3.1。 我们还可以由引理 *2.1*、(3.39)、(3.29)和(3.43) 推得，对所有$t\in(0,\ T_0]$,

$$\sup_{0\leq s\leq t}(\|u\|_{L^6}+\|\nabla^2 u\|_{L^2})+\int_0^t\left(\|u_t\|_{L^6}^2+\|\nabla^3 u\|_{L^2}^2+\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u\|_{L^6\cap D^1}^2\right)ds\leq C.\tag{3.50}$$

4 定理1.1的证明

令$(\rho_0,\ u_0)$如定理1.1所示。由于真空仅出现在远场，我们首先构造近似光滑的 $\rho_0^R \in C^\infty(\Omega)$，使其满足 $\rho_0^R > 0$ 且

$$\begin{cases} (\rho_0^R)^{\frac{\delta-1}{2}} \to \rho_0^{\frac{\delta-1}{2}} \in L^6(\Omega_0), \\ (\rho_0^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}} \to \rho_0^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}} \ in\ D_0^1(\Omega)\cap D^2(\Omega), \\ \nabla(\rho_0^R)^{\frac{\delta-1}{2}} \to \nabla\rho_0^{\frac{\delta-1}{2}} \ in\ D_0^1(\Omega), \end{cases} \quad \text{as} \quad R\to\infty. \tag{4.1}$$

接下来，我们考虑以下 Lam´e 系统的唯一强解

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_0^R = -(\rho_0^R)^{1-\delta}u_0^R + (\rho_0^R)^{\frac{1-\delta}{2}}(\rho_0^{\frac{1-\delta}{2}}u_0 + g) * j_{\frac{1}{R}}, \\ u_0^R\cdot n = 0,\ \mathrm{curl}u_0^R\times n = -Au,\ x\in\partial\Omega, \\ u_0^R\cdot n = 0,\ \mathrm{curl}u_0^R\times n = 0,\ x\in\partial B_R. \end{cases} \tag{4.2}$$

按照与 [18], 类似的论证，可以证明

$$\lim_{R\to\infty}(\|u_0^R - u_0\|_{D^1\cap D^2} + \|(\rho_0^R)^{\frac{1-\delta}{2}}u_0^R - \rho_0^{\frac{1-\delta}{2}}u_0\|_{L^2}) = 0. \tag{4.3}$$

于是，引理 3.1 表明，初边值问题 (3.2) 在初始数据 (ρ_0^R, u_0^R) 下，在 $\Omega_R\times[0,T_R]$ 上存在经典解 (ρ^R, u^R)。此外，命题 3.1 表明，存在一个与 R 无关的 T_0，使得 (ρ^R, u^R) 满足 (3.5) 和 (3.50)。将 $(\rho^R, u^R, \phi^R := \nabla(\rho^R)^{\frac{\delta-1}{2}})$ 在 $\Omega\setminus\Omega_R$ 上延拓为零，并记

$$\tilde\rho^R = \rho^R\varphi_R^\nu,\quad \tilde\phi^R = \nabla(\rho^R)^{\frac{\delta-1}{2}}\varphi_R,\quad w^R = u^R\varphi_R, \tag{4.4}$$

其中 $\nu = \frac{2}{2\gamma-1-\delta}$ 和 $\varphi_R\in C_0^\infty(B_R)$ 满足

$$0\le\varphi_R\le 1,\quad \varphi_R(x)\le 1 \text{ for } |x|\le R/2,\quad |\nabla^k\varphi_R|\le CR^{-k}(k=1,2,3), \tag{4.5}$$

对于 $R > 2R_0+1$，由命题 3.1、(3.50) 和 (4.5) 可知

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T_0}(\|(\tilde\rho^R)^{\frac{1-\delta}{2}}w^R\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w^R\|_{L^2(\Omega)} + \|(\tilde\rho^R)^{\frac{1-\delta}{2}}w_t^R\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\le C + C\sup_{0\le t\le T_0}(\|\nabla u^R\|_{L^2(\Omega_R)} + \|u^R\|_{L^6(\Omega_R)}\|\nabla\varphi_R\|_{L^3(\Omega_R)}) \\ &\le C, \end{aligned} \tag{4.6}$$

and

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T_0}(\|w^R\|_{L^6(\Omega)} + \|\nabla^2 w^R\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\le C + C\sup_{0\le t\le T_0}(\|\nabla^2 u^R\|_{L^2(\Omega_R)} + \frac{1}{R}\|\nabla u^R\|_{L^2(\Omega_R)} + \|u^R\|_{L^6(\Omega_R)}\|\nabla^2\varphi_R\|_{L^3(\Omega_R)}) \\ &\le C. \end{aligned} \tag{4.7}$$

接下来，经过直接计算可得

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T_0}\|(\tilde\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6}\cap D^1\cap D^2(\Omega)} \\ &\le C + C\sup_{0\le t\le T_0}(\|\nabla(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2\cap L^6(\Omega_R)} + \|(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6}(\Omega_R)}\|\nabla\varphi_R\|_{L^3\cap L^6(\Omega_R)}) \\ &\quad + C\sup_{0\le t\le T_0}(\|\nabla^2(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2(\Omega_R)} + \|(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6(\Omega_R)}\|\nabla\varphi_R\|_{L^3(\Omega_R)}) \\ &\le C, \end{aligned} \tag{4.8}$$

以及

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T_0}\|\tilde{\phi}^R\|_{L^6\cap D^{1,2}(\Omega)}\\&\le C+C\sup_{0\le t\le T_0}(\|\nabla^2(\rho^R)^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2(\Omega_R)}+\|\nabla(\rho^R)^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6(\Omega_R)}\|\nabla\varphi_R\|_{L^3(\Omega_R)})\\&\le C.\end{aligned}\tag{4.9}$$

类似地，由命题 3.1 和 (3.50) 可得

$$\int_0^{T_0}\big(\|\nabla w_t^R\|_{L^2(\Omega)}+\|w_t^R\|_{L^6(\Omega)}^2+\|\nabla^3 w^R\|_{L^2(\Omega)}^2\big)dt\le C,\tag{4.10}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0}\|\big((\tilde{\rho}^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\big)_t\|_{L^6(\Omega)}^2dt\\&\le\int_0^{T_0}\|u\cdot\nabla(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6(\Omega_R)}^2+\|(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\mathrm{div}u\|_{L^6(\Omega_R)}^2dt\\&\le\int_0^{T_0}\|(\rho^R)^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{W^{1,6}(\Omega_R)}^2\|\nabla u\|_{H^1(\Omega_R)}^2dt\\&\le C,\end{aligned}\tag{4.11}$$

由 (3.31) 可知。利用这些估计 (4.6)–(4.11)，存在一个子序列 R_j，$R_j\to\infty$ $\tilde{\rho}^{R_j}$ w^{R_j} $\tilde{\phi}^{R_j}$ ρ u ϕ ，使得 (,,) 在某种弱意义下收敛到某个极限 (,,)，如下所示:

$$\rho^{R_j}\to\rho,u^{R_j}\to u\ in\ C(\overline{\Omega_N}\times[0,T_0]),\forall\ N>2R_0+1,\tag{4.12}$$

$$(\rho^{R_j})^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\rightharpoonup\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\ \text{weakly}^*\ in\ L^\infty(0,T_0;D_0^1\cap D^2(\Omega)),\tag{4.13}$$

$$\tilde{\phi}^R\rightharpoonup\phi\ \text{weakly}^*\ L^\infty(0,T_0;D_0^{1,2}(\Omega)),\tag{4.14}$$

$$u^{R_j}\rightharpoonup u\ \text{weakly}^*\ in\ L^\infty(0,T_0;D_0^1(\Omega)\cap D^2(\Omega)),\tag{4.15}$$

$$\nabla^3u^{R_j}\rightharpoonup\nabla^3u\ \text{weakly}\ in\ L^2((0,T_0)\times\Omega),\tag{4.16}$$

$$u_t^{R_j}\rightharpoonup u_t\ \text{weakly}\ in\ L^2(0,T_0;D_0^1(\Omega)).\tag{4.17}$$

并且容易验证，$\phi=\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}$ 在弱意义下成立，因为对于所有 $R>2R_0+1$，在 $\Omega^{R/2}$ 中有 $\tilde{\phi}^R=\nabla(\tilde{\rho}^R)^{\frac{\delta-1}{2}}$。接下来，对于任意测试函数 $\Psi\in C_0^\infty(\Omega\times[0,T_0])$，由 (4.12)–(4.17) 可得

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_0^{T_0}\int_\Omega(\rho^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u^{R_j}\varphi_{R_j}\Psi dxdt&=\lim_{j\to\infty}\int_0^{T_0}\int_{supp\Psi}(\rho^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u^{R_j}\varphi_{R_j}\Psi dxdt\\&=\lim_{\substack{j\to\infty\\supp\Psi\subset B_{R_j/2}}}\int_0^{T_0}\int_{supp\Psi}(\rho^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u^{R_j}\varphi_{R_j}\Psi dxdt\\&=\lim_{\substack{j\to\infty\\supp\Psi\subset B_{R_j/2}}}\int_0^{T_0}\int_\Omega(\tilde{\rho}^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}w^{R_j}\Psi dxdt\\&=\int_0^{T_0}\int_\Omega\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\Psi dxdt,\end{aligned}\tag{4.18}$$

因此

$$(\rho^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u^{R_j}\varphi_{R_j}\rightharpoonup\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\ \text{weakly}\ in\ L^2((0,T_0)\times\Omega).\tag{4.19}$$

同理，我们可以得到

$$(\rho^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u^{R_j}\varphi_{R_j} \rightharpoonup \rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u \text{ weakly } in\ L^2((0,T_0)\times\Omega), \tag{4.20}$$

$$\nabla((\rho^{R_j})^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u^{R_j})\varphi_{R_j} \rightharpoonup \nabla(\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \mathrm{div} u) \text{ weakly } in\ L^2((0,T_0)\times\Omega). \tag{4.21}$$

此外，(ρ, u) 也满足 (3.5) 和 (3.50)。因此，我们可以很容易地证明，(ρ, u) 是问题 (1.1)-(1.7) 的强解，且满足正则性条件 (1.14)。

现在，只需证明满足 (1.14) 的强解的唯一性。设 (ρ_1, u_1) 和 (ρ_2, u_2) 是满足 (1.14) 且具有相同初始数据的两个强解。令

$$\begin{aligned}&\varphi_i = \rho_i^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}},\ h_i = \rho_i^{\frac{1-\delta}{2}},\ g_i = \log\rho_i,\ i=1,2,\\ &\bar{\varphi} = \varphi_1-\varphi_2,\ \bar{h} = h_1-h_2,\ \bar{g} = g_1-g_2,\ \bar{u} = u_1-u_2.\end{aligned}$$

将 (ρ_1, u_1) 和 (ρ_2, u_2) 满足的动量方程相减，得到

$$\begin{aligned}&h_1^2\bar{u}_t + h_1^2 u_1\cdot\nabla\bar{u} - \mathcal{L}\bar{u} = -h_1\nabla\bar{\varphi} - \bar{h}\nabla\varphi_2 - \bar{h}(h_1+h_2)(u_2)_t\\ &-\bar{h}(h_1+h_2)u_2\cdot\nabla u_2 - h_1^2\bar{u}\cdot\nabla u_2 + \nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2) + \nabla g_1\cdot\mathcal{S}(\bar{u}),\end{aligned} \tag{4.22}$$

为简便起见，假设所有系数均为 1。同时，(φ, h, g, u) 满足以下初始条件 $\quad - \bar{} - -$

$$(\overline{\varphi}, \overline{h}, \overline{g}, \overline{u})|_{t=0} = (0,0,0,0),$$

以及边界条件

$$\overline{u}\cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathrm{curl}\overline{u}\times n|_{\partial\Omega} = -A\overline{u}.$$

将 (4.22) 乘以 $\bar{u}$ 并进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int h_1^2|\bar{u}|^2dx + \mu\|\mathrm{curl}\bar{u}\|_{L^2}^2 + (2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}\bar{u}\|_{L^2}^2 + \mu\int_{\partial\Omega}\bar{u}\cdot A\cdot\bar{u}dS\\ &\le C\Big(\|\mathrm{div}u_1\|_{L^\infty}\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}\|h_1\bar{u}\|_{L^2} + \|\bar{h}\|_{L^3}\|\nabla\varphi_2\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^6}\\ &\quad + \|\bar{h}\|_{L^3}(\|h_1\bar{u}\|_{L^2}\|(u_2)_t\|_{L^6} + \|h_2(u_2)_t\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^6})\\ &\quad + \|\bar{h}\|_{L^3}\|h_1+h_2\|_{L^\infty}\|u_2\|_{L^6}\|\nabla u_2\|_{L^3}\|\bar{u}\|_{L^6} + \|\nabla u_2\|_{L^\infty}\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2\\ &\quad + \|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\|\nabla u_2\|_{L^3}\|\bar{u}\|_{L^6} + \|h_1\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\Big)\\ &\le \epsilon\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2 + CF(t)(\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}^2 + \|\bar{h}\|_{H^1}^2 + \|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2),\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $F(t) = 1 + \|\nabla u_1\|_{H^2}^2 + \|\nabla u_2\|_{H^2}^2 + \|\nabla(u_1)_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla(u_2)_t\|_{L^2}^2$ 由迹定理可知，(4.23) 中的边界项可估计为

$$\mu\int_{\partial\Omega}\bar{u}\cdot A\cdot\bar{u}dS \le C\||u|^2\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \le \epsilon\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2 + C\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2, \tag{4.24}$$

其中我们用到了

$$\|h_1^{-1}\|_{L^\infty(\Omega_0)} = \|h_1^{-1}\|_{W^{1,6}(\Omega_0)} \le C. \tag{4.25}$$

将 $(\rho_1,\ u_1)$ 和 $(\rho_2,\ u_2)$ 满足的质量方程相减，得到

$$\bar{h}_t + \nabla\bar{h}\cdot u_2 + \bar{h}\mathrm{div}u_2 = -\nabla h_1\cdot\bar{u} - h_1\mathrm{div}\bar{u}, \tag{4.26}$$

$$(\nabla\bar{g})_t + \nabla^2\bar{g}\cdot u_2 + \nabla\bar{g}\cdot\nabla u_2 = -\nabla^2 g_1\cdot\bar{u} - \nabla g_1\cdot\nabla\bar{u} - \nabla\mathrm{div}\bar{u}, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}&(\nabla\bar{\varphi})_t + \nabla^2\bar{\varphi}\cdot u_2 + \nabla\bar{\varphi}\cdot\nabla u_2 + \nabla\bar{\varphi}\cdot\mathrm{div}u_2 + \bar{\varphi}\nabla\mathrm{div}u_2\\ &= -\nabla^2\varphi_1\cdot\bar{u} - \nabla\varphi_1\cdot\nabla\bar{u} - \nabla\varphi_1\cdot\mathrm{div}\bar{u} - \varphi_1\nabla\mathrm{div}\bar{u},\end{aligned} \tag{4.28}$$

¯为简便起见，我们将所有系数取为 1。将 (4.26) 乘以 h 并进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\bar{h}\|_{L^2}^2 \leq&\|\mathrm{div}u_2\|_{L^\infty}\|\bar{h}\|_{L^2}^2+\|h_1\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}\|\bar{h}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}\|h_1\bar{u}\|_{L^3}\|\bar{h}\|_{L^2}\\\leq&CF(t)(\|\bar{h}\|_{L^2}+\|h_1\bar{u}\|_{L^2}+\|\nabla\bar{u}\|_{L^2})\|\bar{h}\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

¯对（4.26）取梯度，将所得方程乘以 ∇h 并进行分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}^2 \leq&\|\nabla u_2\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}^2+\|\bar{h}\|_{L^6}\|\nabla^2u_2\|_{L^3}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}^3\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}^2\|\bar{u}\|_{L^6}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}^2\|\nabla^2(h_1)^{-1}\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}^2\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}\|\nabla\bar{u}\|_{L^3}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}\\\leq&CF(t)(\|\bar{h}\|_{H^1}^2+\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2+\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2)+\epsilon\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.30}$$

将（4.27）乘以 $\nabla\bar{g}$ 并进行分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2 \leq&\|\nabla u_2\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2+\|h_1\|_{L^\infty}\|\nabla^2(h_1)^{-1}\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}^2\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}^2\|\bar{u}\|_{L^6}\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\\&+\|h_1\|_{L^\infty}\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}\|\nabla\bar{u}\|_{L^3}\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}+\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\\\leq&CF(t)(\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2+\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2+\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2)+\epsilon\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.31}$$

将（4.28）乘以 $\nabla\bar{\varphi}$ 并进行分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}^2 \leq&\|\nabla u_2\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}^2+\|\bar{\varphi}\|_{L^6}\|\nabla^2u_2\|_{L^3}\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}\\&+\|\nabla^2\varphi_1\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}+\|\nabla\varphi_1\|_{L^6}\|\nabla\bar{u}\|_{L^3}\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}\\&+\|\varphi_1\|_{L^\infty}\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}\\\leq&CF(t)(\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}^2+\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2+\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2)+\epsilon\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.32}$$

对（4.22）应用标准的 L^p-估计理论，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}\leq&C\|\mathcal{L}\bar{u}\|_{L^2}+C\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}\\\leq&CF(t)(\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}+\|\bar{h}\|_{H^1}+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2})+C\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2}+C\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

注意到

$$h_1^2(u_1)_t-h_2^2(u_2)_t=\frac{1}{2}\Big(h_1^2\bar{u}_t+(h_1+h_2)\bar{h}(u_2)_t\Big)+\frac{1}{2}\Big((h_1+h_2)\bar{h}(u_1)_t+h_2^2\bar{u}_t\Big),\tag{4.34}$$

将 (4.22) 乘以 $2\bar{u}_t$ 并分部积分后，可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\mu\|\mathrm{curl}\bar{u}\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}\bar{u}\|_{L^2}^2+\mu\int_{\partial\Omega}\bar{u}\cdot A\cdot\bar{u}dS\right)+\int(h_1^2+h_2^2)|\bar{u}_t|^2dx\\&=2\int\Big(-h_1^2u_1\cdot\nabla\bar{u}-h_1\nabla\bar{\varphi}-\bar{h}\nabla\varphi_2-\frac{1}{2}(h_1+h_2)\bar{h}\big((u_2)_t+(u_1)_t\big)\\&\quad-\bar{h}(h_1+h_2)u_1\cdot\nabla u_2-h_1^2\bar{u}\cdot\nabla u_2+\nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2)+\nabla g_1\cdot\mathcal{S}(\bar{u})\Big)\cdot\bar{u}_tdx\\&\triangleq\sum_{i=1}^8K_i.\end{aligned}\tag{4.35}$$

我们对每个 $K_i(i=1,\ \ldots\ldots,\ 8)$ 作如下估计：

$$
\begin{aligned}
&K_1 \le C\|h_1\|_{L^\infty}\|u_1\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2} \le CF(t)\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2+\epsilon\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2}^2,\\
&K_2 \le C\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2} \le C\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}^2+\epsilon\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2}^2,\\
&K_3 \le C\|\bar{h}\|_{L^3}\|h_2^{-1}\nabla\varphi_2\|_{L^6}\|h_2\bar{u}_t\|_{L^2} \le C\|\bar{h}\|_{H^1}^2+\epsilon\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2}^2,\\
&K_4 \le C\|\bar{h}\|_{L^3}\big(\|(u_2)_t\|_{L^6}+\|(u_1)_t\|_{L^6}\big)\|(h_1+h_2)\bar{u}_t\|_{L^2}\\
&\quad \le CF(t)\|\bar{h}\|_{H^1}^2+\epsilon\|(h_1+h_2)\bar{u}_t\|_{L^2}^2,\\
&K_5 \le C\|\bar{h}\|_{L^6}\|u_1\|_{L^6}\|\nabla u_2\|_{L^6}\|(h_1+h_2)\bar{u}_t\|_{L^2}\\
&\quad \le CF(t)\|\nabla\bar{h}\|_{L^2}^2+\epsilon\|(h_1+h_2)\bar{u}_t\|_{L^2}^2,\\
&K_6 \le C\|h_1\|_{L^\infty}\|\bar{u}\|_{L^6}\|\nabla u_2\|_{L^3}\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2} \le C\|\nabla u_2\|_{H^1}^2\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}+\epsilon\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2}^2,\\
&K_8 \le C\|\nabla(h_1)^{-1}\|_{L^6}\|\nabla\bar{u}\|_{L^3}\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2} \le C\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2+\epsilon\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}^2+\epsilon\|h_1\bar{u}_t\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
K_7 =&\frac{d}{dt}\int\nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2)\cdot\bar{u}dx-\int\nabla\bar{g}_t\cdot\mathcal{S}(u_2)\cdot\bar{u}dx-\int\nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2)_t\cdot\bar{u}dx\\
\le&\frac{d}{dt}\int\nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2)\cdot\bar{u}dx+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\|\nabla u_1\|_{L^6}\|\nabla u_2\|_{L^6}\|\bar{u}\|_{L^6}\\
&+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\|u_1\|_{L^\infty}\|\nabla^2u_2\|_{L^3}\|\bar{u}\|_{L^6}+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\|u_1\|_{L^\infty}\|\nabla u_2\|_{L^6}\|\nabla\bar{u}\|_{L^3}\\
&+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\|\nabla u_1\|_{L^6}\|\nabla u_2\|_{L^6}\|\bar{u}\|_{L^6}+\|\nabla^2g_1\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^6}^2\|\nabla u_2\|_{L^6}\\
&+\|\nabla g_1\|_{L^6}\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}\|\nabla u_2\|_{L^6}\|\bar{u}\|_{L^6}+\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}\|\nabla u_2\|_{L^3}\|\bar{u}\|_{L^6}\\
&+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}\|\nabla(u_2)_t\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^\infty}\\
\le&\frac{d}{dt}\int\nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2)\cdot\bar{u}dx+CF(t)\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2+C\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2+\epsilon\|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

将 K_1–K_8 代入(4.35)，并选取足够小的 ϵ ，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\mu\|\mathrm{curl}\bar{u}\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}\bar{u}\|_{L^2}^2+K(t)\Big)+\int(h_1^2+h_2^2)|\bar{u}_t|^2dx\\
&\le CF(t)(\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2+\|\bar{h}\|_{H^1}^2+\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2),
\end{aligned}
$$

其中

$$
K(t)=\mu\int_{\partial\Omega}\bar{u}\cdot A\cdot\bar{u}dS-\int\nabla\bar{g}\cdot\mathcal{S}(u_2)\cdot\bar{u}dx
$$

满足如下估计

$$
|K(t)|\le\epsilon\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}^2+C\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2+C\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2.
$$

最后，令

$$
G(t)\triangleq\|h_1\bar{u}\|_{L^2}^2+\|\bar{h}\|_{H^1}^2+\|\nabla\bar{g}\|_{L^2}^2+\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L^2}^2+\nu\big(\mu\|\mathrm{curl}\bar{u}\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}\bar{u}\|_{L^2}^2+K(t)\big),
$$

在选取足够小的 ν 和 ϵ后，我们推得

$$
\frac{d}{dt}G(t)+\nu\int(h_1^2+h_2^2)|\bar{u}_t|^2dx\le CF(t)G(t),
$$

结合 Gr¨onwall 不等式可得 $G(t)\equiv 0$。定理1.1的证明完成。

5 定理 1.2 的证明

设 $(\rho,\ u)$ 是定理1.1中所述初边值问题 (1.1)-(1.7) 的强解，并满足以下附加初值条件

$$\rho_0^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}} \in L^{6\alpha}, \quad \max\{\frac{1-\delta}{2\gamma-1-\delta},\frac{1}{3}\}<\alpha<1, \tag{5.1}$$

假设 (1.22) 不成立，即

$$\lim_{T\to T^*}\left(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^1(0,T;L^\infty)}+\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega_0))}+\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(0,T;D_0^1)}\right)\le M_0<\infty. \tag{5.2}$$

T这与 (3.2)1 立即给出密度的如下 L^∞ 界 ρ.

引理 5.1。假设

$$\int_0^T\|\mathrm{div}u\|_{L^\infty}dt\le C,\quad 0<T<T^*. \tag{5.3}$$

Then

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^{6\alpha}}+\|\rho\|_{L^\infty}\right)\le C,\quad 0<T<T^*. \tag{5.4}$$

在此（以及本节中），C 表示一个通用常数，它仅依赖于 a、 δ、 γ、 μ、 λ、 A、R_0、 M_0、 T 和初始数据。

证明。 首先，容易看出，沿着由下式定义的特征曲线$X(s\,x,\ t)$，连续性方程 (3.2)1

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}X(s;x,t)=u(X(s;x,t),s),\\ X(s;x,t)=x,\end{cases}$$

可写为

$$\frac{d}{ds}\rho(X(s;x,t),t)=-(\rho\mathrm{div}u)(X(s;x,t),t).$$

因此，由 Gr¨onwall 不等式和 (5.3) 可得，对所有 $x\in\Omega$

$$\rho(x,t)\le\sup_{x\in\Omega}\rho_0(x)\exp\left(\int_0^T\|\mathrm{div}u\|_{L^\infty}dt\right)\le C.$$

接下来，由 (3.2)1 可知 $\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}$ 满足—

$$\rho_t^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}+u\cdot\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}+(\gamma-\frac{3+\delta}{2})\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\mathrm{div}u=0. \tag{5.5}$$

因此，结合 (5.1) 的标准论证表明

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^{6\alpha}}\le C.$$

引理 5.1 的证明至此完成。 □

我们先给出 $(\rho,\ u)$ 的以下标准能量估计。

引理 5.2. 在条件(5.2)下，对任意 $T<T^*$，成立

$$\sup_{0\le t\le T}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\le C. \tag{5.6}$$

证明. 类似于(3.12)，将(5.2)与(5.4)结合可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2+\mu\|\mathrm{curl}u\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}u\|_{L^2}^2+\mu\int_{\partial\Omega}u\cdot A\cdot u dS\\
&\le\int\left(C|\rho|^{1-\delta}|\mathrm{div}u||u|^2-\frac{2a\delta}{2\gamma-1-\delta}\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}(\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u)+C|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}||\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u||\nabla u|\right)dx\\
&\le C\Big(\|\mathrm{div}u\|_{L^\infty}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2+\|\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^{6\alpha}}\|\nabla(\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u)\|_{L^{\frac{6\alpha}{6\alpha-1}}}\\
&\qquad+\|\rho^{\frac{1-\delta}{4}}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^6}^{1/2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^{1/2}\Big)\\
&\le\epsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2+C(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}+1)\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2+C,
\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中我们使用了

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u)\|_{L^{\frac{6\alpha}{6\alpha-1}}}\\
&\le C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^{1-\theta}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{H^1}^{\theta}\\
&\le C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^{1-\theta}\left(\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^{\theta}+\|\rho^{\frac{3(1-\delta)}{4}}\|_{L^\infty}^{\theta}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^{\theta}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^{\theta/2}\|u\|_{L^6}^{\theta/2}+\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}^{\theta}\|\nabla u\|_{L^2}^{\theta}\right)\\
&\le\epsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2+C
\end{aligned}\tag{5.8}$$

这是由于 $0<\theta<1$ 由 $\max\{\frac{1-\delta}{2\gamma-1-\delta},\frac{1}{3}\}<\alpha<1$退化而来。利用迹定理，(5.7) 中的边界项可估计为

$$\int_{\partial\Omega}u\cdot A\cdot u dS\le C\||u|^2\|_{H^1(\Omega_0)}\le C\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2,\tag{5.9}$$

其中我们使用了

$$\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega_0)}=\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{W^{1,6}(\Omega_0)}\le C.\tag{5.10}$$

由引理 2.2、(5.7)、(5.9) 以及 Gr¨onwall 不等式可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\le C.\tag{5.11}$$

引理 5.2 的证明完成。 □

关于 $\nabla\rho$ 和 ∇u 的关键估计将在下面的引理中给出。

引理 5.3。 在条件 (5.2)下，对任意 $T<T^*$，均有

$$\sup_{0\le t\le T}(\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2)+\int_0^T(\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2u\|_{L^2}^2)dt\le C.\tag{5.12}$$

证明。 首先，Lam´e 算子的标准正则性估计（例如参见 [29]）以及引理 5.1 得出

$$\|\nabla^2u\|_{L^2}\le C\|\mathcal{L}u\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{L^2}\le C\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{L^2}.\tag{5.13}$$

接下来，将 $(3.2)_2$ 乘以 $-2\rho^{\delta-1}\mathcal{L}u$，对所得方程在 Ω 上积分并进行分部积分后，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\mu\|\mathrm{curl}u\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}u\|_{L^2}^2+\mu\int_{\partial\Omega}u\cdot A\cdot u dS\right)+2\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2\\
&\le(2\mu+\lambda)\int u\cdot\nabla u\cdot\nabla\mathrm{div}u dx-\mu\int u\cdot\nabla u\cdot\mathrm{curlcurl}u dx\\
&\quad+C\int\left(|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u|+|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}||\nabla u||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u|\right)dx.
\end{aligned}\tag{5.14}$$

类似于 [13], 中的推导，经过分部积分可得

$$\begin{aligned}\int u\cdot\nabla u\cdot\nabla \mathrm{div} u dx &= \int_{\partial\Omega} u\cdot\nabla u\cdot n \mathrm{div} u dS - \int \nabla u : \nabla^{\perp} u \mathrm{div} u dx + \frac{1}{2}\int (\mathrm{div} u)^3 dx\\ &\le \int_{\partial\Omega} u\cdot\nabla n\cdot u \mathrm{div} u dS + C\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^2\\ &\le C\||u|^2|\mathrm{div} u|\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} + C\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^2\\ &\le C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{H^1} + C\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.15}$$

利用以下事实

$$u\times \mathrm{curl} u = \frac{1}{2}\nabla(|\nabla u|^2) - u\cdot\nabla u,$$

and

$$\nabla\times(a\times b) = (b\cdot\nabla)a - (a\cdot\nabla)b + (\mathrm{div} b)a - (\mathrm{div} a)b,$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\int (u\cdot\nabla)u\cdot \mathrm{curlcurl} u dx\\ &= \int_{\partial\Omega} u\cdot\nabla u\cdot A\cdot u dS - \int \mathrm{curl} u\cdot\nabla\times\big((u\cdot\nabla)u\big)dx\\ &\le C\||u\cdot\nabla u||u|\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} + \int \mathrm{curl} u\cdot\nabla\times(u\times\mathrm{curl} u)dx\\ &\le C\||u|^2|\nabla u|\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} + \int \mathrm{curl} u\cdot\mathcal{D}(u)\cdot\mathrm{curl} u dx - \frac{1}{2}\int |\mathrm{curl} u|^2 \mathrm{div} u dx\\ &\le C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{H^1} + C\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{5.16}$$

结合 (5.2)，可推出

$$\begin{aligned}&\int \left(|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u| + |\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}||\nabla u||\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u|\right)dx\\ &\le \epsilon\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + C(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}^2).\end{aligned} \tag{5.17}$$

将 (5.15)–(5.17) 代入 (5.14)，并适当取小的 ε，可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\mu\|\mathrm{curl} u\|_{L^2}^2 + (2\mu+\lambda)\|\mathrm{div} u\|_{L^2}^2 + \mu\int_{\partial\Omega} u\cdot A\cdot u dS\right) + \frac{3}{2}\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2\\ &\le C\left(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + 1\right)\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.18}$$

记

$$\varphi \triangleq \rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}, \quad \zeta \triangleq \gamma - \frac{1+\delta}{2},$$

对 (3.31) 进行 ∇ 运算，并将所得方程乘以 $\nabla\varphi$，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t|\nabla\varphi|^2 =& -\nabla\varphi\cdot\nabla u\cdot\nabla\varphi - u\cdot\nabla(|\nabla\varphi|^2) - \zeta|\nabla\varphi|^2\mathrm{div} u - \zeta\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla\mathrm{div} u\\ =& -\nabla\varphi\cdot\mathcal{D}(u)\cdot\nabla\varphi - u\cdot\nabla(|\nabla\varphi|^2) - \zeta|\nabla\varphi|^2\mathrm{div} u - \zeta\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla\mathrm{div} u.\end{aligned} \tag{5.19}$$

在 Ω 上积分 (5.19)，由 (5.4) 可推得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 \le C\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + C(\epsilon)\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2. \tag{5.20}$$

最后 y，凭借 (5.18)、(5.20) 和 (5.13)，在选取 ε充分小之后，我们得到 th at

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\mu\|\mathrm{curl}u\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}u\|_{L^2}^2+\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}^2+\mu\int_{\partial\Omega}u\cdot A\cdot u dS\right)+\|\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\mathcal{L}u\|_{L^2}^2\\&\le C\big(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}+\|\nabla u\|_{L^2}^2+1\big)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}^2\right)+C\|\nabla u\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

结合 Gr¨onwall 不等式、(5.2)、(5.9) 和 (5.13)，即可得到 (5.12)，并完成引理 5.3 的证明。

□

引理 5.4. 在条件 (5.2) 下，有

$$\sup_{0\le t\le T}(\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2)+\int_0^T\|\nabla u_t\|_{L^2}^2dt\le C. \tag{5.21}$$

证明.首先，由引理 2.3、(3.9)、(5.2)、(5.4)、(5.6)、(5.12) 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式可推出

$$\begin{aligned}&\|\nabla^2u\|_{L^2}\le C\|\mathcal{L}u\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}\\&\le C(\|\rho^{1-\delta}u_t\|_{L^2}+\|\rho^{1-\delta}u\cdot\nabla u\|_{L^2}+\|\nabla\rho^{\gamma-\delta}\|_{L^2}+\|\nabla\log\rho\cdot S(u)\|_{L^2}+1)\\&\le C(\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}+\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}+\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}+\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}+1)\\&\le\frac{1}{2}\|\nabla^2u\|_{L^2}+C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}+C\\&\le C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}+C.\end{aligned} \tag{5.22}$$

接下来，由 (3.15)、(3.16)、(5.2)、(5.4)、(5.6)、(5.12) 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\|(\rho^{\gamma-\delta})_t\|_{L^2}\le\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}+\|\rho\|_{L^\infty}^{\gamma-\delta}\|\nabla u\|_{L^2}\le C\|\nabla^2u\|_{L^2}^{1/2}+C, \tag{5.23}$$

and

$$\begin{aligned}\|\nabla(\log\rho)_t\|_{L^2}\le C\big(&\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^2\|u\|_{L^6}+\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla^2\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\\&+\|\rho\|_{L^\infty}^{(1-\delta)/2}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}+\|\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}\big)\le C\|\nabla^2u\|_{L^2}+C.\end{aligned} \tag{5.24}$$

然后，按照与 (3.20) 类似的估计，由 (5.2)、(5.4)、(5.6) 和 (5.22)–(5.24) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^2+\mu\|\mathrm{curl}u_t\|_{L^2}^2+(2\mu+\lambda)\|\mathrm{div}u_t\|_{L^2}^2+\mu\int_{\partial\Omega}u_t\cdot A\cdot u_t dS\\&\le C\int\Big(\rho^{1-\delta}|\nabla u||u_t|^2+\rho^{1-\delta}|\nabla^2u||u|^2|u_t|+\rho^{1-\delta}|u||\nabla u|^2|u_t|+\rho^{1-\delta}|u|^2|\nabla u||\nabla u_t|\\&\quad+\rho^{1-\delta}|u||\nabla u_t||u_t|+|(\rho^{\gamma-\delta})_t||\mathrm{div}u_t|+|(\nabla\log\rho)_t||\nabla u||u_t|+|\nabla\log\rho||\nabla u_t||u_t|\Big)dx\\&\le C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^3}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}\|u_t\|_{L^6}+C\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2}\|u\|_{L^6}^2\|u_t\|_{L^6}\\&\quad+C\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}^2\|u_t\|_{L^6}+C\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}^2\|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\&\quad+C\|\rho^{\frac{3(1-\delta)}{4}}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^{1/2}\|u_t\|_{L^6}^{1/2}+C\|(\rho^{\gamma-\delta})_t\|_{L^2}\|\mathrm{div}u_t\|_{L^2}\\&\quad+C\|(\nabla\log\rho)_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^3}\|u_t\|_{L^6}\\&\quad+C\|\rho^{\frac{1-\delta}{4}}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^{1/2}\|u_t\|_{L^6}^{1/2}\\&\le\epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C(1+\|\nabla^2u\|_{L^2}^2)\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.25}$$

利用迹定理，(5.25) 中的边界项可估计为

$$\int_{\partial\Omega} u_t \cdot A \cdot u_t dS \le C \left\| |u_t|^2 \right\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \le C\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2. \tag{5.26}$$

在 (5.25) 中将 ϵ取充分小，结合 (5.26) 应用 Gr¨onwall 不等式，可得

$$\sup_{0\le t\le T} \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}} u_t\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 dt \le C,$$

这是因为

$$\rho_0^{\frac{1-\delta}{2}} u_t(x,0) = -\rho_0^{\frac{1-\delta}{2}} u_0 \cdot \nabla u_0 - \frac{\gamma a}{\gamma - \frac{1+\delta}{2}} \nabla \rho_0^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}} + \frac{2\delta}{\delta - 1} \nabla \rho_0^{\frac{\delta-1}{2}} \mathcal{S}(u_0) + g_2 \in L^2.$$

最后，由 (5.22) 可得

$$\sup_{0\le t\le T} \|\nabla u\|_{H^1} \le C.$$

引理 5.4 的证明至此完成。 □

引理 5.5. 在条件 (5.2) 下，有

$$\sup_{0\le t\le T} \|\nabla \rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6 \cap D^{1,2}} + \int_0^T \|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 dt \le C. \tag{5.27}$$

证明. 考虑满足边界条件 (1.6) 和远场行为条件 (1.7) 的 Lam´e 系统 (3.9)，结合 (5.2)、(5.4)、(5.12)、(5.21) 和 (5.22) 的标准 L^p-估计可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 u\|_{L^6} &\le C\|\mathcal{L}u\|_{L^6} + C\|\nabla u\|_{L^2} \\
&\le C(\|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|u_t\|_{L^6} + \|\rho\|_{L^\infty}^{1-\delta}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^6} + \|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla \rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6} \\
&\quad + \|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla \rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^\infty} + 1) \\
&\le C(1 + \|\nabla u_t\|_{L^2} + \|\nabla \rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6}) + \frac{1}{2}\|\nabla^2 u\|_{L^6} \\
&\le C(1 + \|\nabla u_t\|_{L^2} + \|\nabla \rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6}).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

接下来，将（5.19）乘以 $3|\nabla\phi|^4$，得到

$$\frac{1}{2}\partial_t |\nabla\varphi|^6 = -3|\nabla\phi|^4 \nabla\varphi \cdot \mathcal{D}(u) \cdot \nabla\varphi - u \cdot \nabla(|\nabla\varphi|^6) - 3\zeta|\nabla\varphi|^6 \mathrm{div} u - 3|\nabla\phi|^4 \zeta\varphi\nabla\varphi \cdot \nabla \mathrm{div} u.$$

对上述等式在 Ω 上积分，并利用（5.28），可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|_{L^6}^2 &\le C\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^6}^2 + C\|\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\phi\|_{L^6}\|\nabla^2 u\|_{L^6} \\
&\le C(1 + \|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty})\|\nabla\varphi\|_{L^6}^2 + C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

结合 Gr¨onwall 不等式、(5.2) 和 (5.21)，可得

$$\sup_{0\le t\le T} \|\nabla \rho^{\gamma - \frac{1+\delta}{2}}\|_{L^6} \le C.$$

然后，类似于 (5.28)，结合 (5.2)、(5.4)、(5.12)、(5.21) 和 (5.22) 的标准 L^2-估计可得

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla^3 u\|_{L^2} \le C\|\mathcal{L}u\|_{H^1} + C\|\nabla u\|_{L^2}\\
&\le C(\|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}u_t\|_{L^3} + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\quad + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}^{3/2}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3} + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\\
&\quad + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2 u\|_{L^2} + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}^{3/2}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}\\
&\quad + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}^{1/2}\|\nabla^2\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2} + \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla^2\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^2}\|\mathcal{S}(u)\|_{L^\infty}\\
&\quad + \|\rho^{1-\delta}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}^2\|\mathcal{S}(u)\|_{L^6} + \|\rho^{\frac{1-\delta}{2}}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^{\frac{\delta-1}{2}}\|_{L^6}\|\nabla^2 u\|_{L^3} + 1)\\
&\le C(1 + \|\nabla u_t\|_{L^2} + \|\nabla^2\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}) + \frac{1}{2}\|\nabla^3 u\|_{L^2}\\
&\le C(1 + \|\nabla u_t\|_{L^2} + \|\nabla^2\rho^{\gamma-\frac{1+\delta}{2}}\|_{L^2}).
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

最后，类似于（3.34），由（5.2）和引理 5.1-5.4 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}^2 \le& C\int |\nabla^2\varphi\cdot\nabla u\cdot\nabla^2\varphi| + |\nabla^2\varphi|^2|\mathrm{div}u| + |\nabla\varphi||\nabla^2\varphi||\nabla^2 u| + |\varphi||\nabla^2\varphi||\nabla^3 u|\Big)dx\\
\le& C(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L^6}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^3}\\
&+ \|\varphi\|_{L^\infty}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}\|\nabla^3 u\|_{L^2})\\
\le& C(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty}\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2\varphi\|_{L^2}\|\nabla^3 u\|_{L^2}^{1/2} + \|\nabla^2\varphi\|_{L^2}\|\nabla^3 u\|_{L^2})\\
\le& C(\|\mathcal{D}(u)\|_{L^\infty} + 1)\|\nabla^2\varphi\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

结合 Gr¨onwall 不等式、（5.2）、（5.21）和（5.30），可推出（5.27），从而完成引理 5.5 的证明。 □

现在，只需将（ρ，u）的强解延拓到 $t > T^*$ 之后。事实上，引理 5.2-5.5 表明，(ρ，u)$|_{t=T^*} =$lim$_{t\to T^*}$(ρ，u) 在时间 $t = T^*$ 满足对初始数据（1.13）所施加的条件。此外，有

$$
\mathcal{L}(u)|_{t=T^*} = \lim_{t\to T^*}\left(\rho^{1-\delta}u_t + \rho^{1-\delta}u\cdot\nabla u + \frac{\gamma a}{\gamma-\delta}\nabla\rho^{\gamma-\delta} - \delta\nabla\log\rho\cdot\mathcal{S}(u)\right) \triangleq \rho^{\frac{1-\delta}{2}}g|_{t=T^*}
$$

其中 $g|_{t=T^*} \in L^2$。因此，(ρ，u)$|_{t=T^*}$ 也满足（1.13）。所以，我们可以将 (ρ，u)$|_{t=T^*}$ 作为初始数据，并应用局部存在性定理，将局部强解延拓到 T^* 之后。这与关于 T^* 的假设矛盾，从而证明了定理 1.2。

利益冲突声明

所有作者均声明不存在利益冲突。

致谢

本研究部分得到国家自然科学基金（编号：12371219）和江西省双千计划（编号：jxsq2023201115）的资助。

参考文献

[1] J. Aramaki, L^p 散度-旋度系统理论，Int. J. Math. Anal., 8 (2014), 259-271。

[2] D. Bresch, B. Desjardins，若干 Korteweg型扩散毛细管模型，C. R. Mec., 332 (2004), 881-886。[3] G.C. Cai, J. Li，三维有界区域中带滑移边界条件的可压缩 Navier–Stokes 方程整体经典解的存在性与指数增长，Indiana Univ. Math. J., 72 (2023), 2491-2546。[4] G.C. Cai, J. Li, B.Q. L¨u，三维外部区域中带滑移边界条件的可压缩 Navier–Stokes 方程整体经典解，arXiv:2112.05586, 2021年。[5] Y. Cho, H.J. Choe, H. Kim，可压缩黏性流体初边值问题的唯一可解性，纯粹与应用数学杂志，83 (2004), 243-275。[6] Y. Cho, H. Kim，非负初始密度下可压缩 Navier–Stokes 方程的经典解，Manuscr. Math., 120 (2006), 91-129。[7] H.J. Choe, H. Kim，等熵可压缩流体 Navier–Stokes 方程的强解，J. Differ. Equ., 190 (2003), 504-523。[8] L.C. Evans，偏微分方程。数学研究生教程，第2版。AMS, Providence, 2010。[9] E. Feireisl, A. Novotn´y, H. Petzeltov´a，关于 Navier–Stokes 方程整体定义弱解的存在性，数学流体力学杂志，3 (2001), 358-392。[10] D. Hoff，不连续初始数据下多维可压缩流中 Navier–Stokes 方程的不连续解，J. Differ. Equ., 120 (1995), 215-254。[11] D. Hoff，导热流体多维流动中 Navier–Stokes 方程的不连续解，Arch. Rational Mech. Anal., 139 (1997), 303-354。[12] X.D. Huang，真空下三维正压可压缩 Navier–Stokes 方程的局部强解与经典解，Sci. China Math., 64 (2021), 1771-1788。[13] X.D. Huang, J. Li, Z.P. Xin，真空状态下黏性正压流的爆破解判据，Commun. Math. Phys., 301 (2011), 23-35。[14] X.D. Huang, J. Li, Z.P. Xin，真空与大振荡下三维全可压缩Navier–Stokes系统的整体经典解与弱解，Commun. Pure Appl. Math., 65 (2012), 549-585。[15] O. Ladyzenskaja, N. Ural’ceva，抛物型线性与拟线性方程，American Mathematical Society, Providence, 1968。[16] J.X. Li, J. Li, B.Q. L¨u，三维外部区域中全可压缩Navier–Stokes系统的整体经典解，arXiv:2208.11925, 2022年。[17] J.X. Li, L.X. Li，退化黏度与远场真空下三维等熵可压缩 Navier–Stokes 方程柯西问题的局部强解，J. Differ. Equ., 435 (2025年), 113338。[18] J. Li, Z.L. Liang，真空下二维正压可压缩 Navier–Stokes 方程柯西问题的局部经典解，纯粹与应用数学杂志，102 (2014), 640-671。[19] J. Li, Z.P. Xin，退化黏度下正压可压缩 Navier–Stokes 流弱解的整体存在性，arXiv:1504.06826, 2015年。

[20] Y.C. Li、R.H. Pan、S.G. Zhu，关于具有退化黏度的二维浅水方程经典解，数学流体力学杂志，19（2017），151-190。[21] Y.C. Li、R.H. Pan、S.G. Zhu，关于具有退化黏度和真空的黏性多方流体经典解，Arch. Ration. Mech. Anal.，234（2019），1281-1334。[22] P.L. Lions，《流体力学数学专题》第2卷：可压缩模型，牛津大学出版社，1998年。[23] H.R. Liu、H. Zhong，具有密度依赖粘性且远场真空的外部区域中三维可压缩 Navier–Stokes 方程的适定性，arXiv:2512.07614，2025年。[24] A. Matsumura、T. Nishida，黏性导热气体运动方程的初值问题，京都大学数学杂志，20（1980），67-104。[25] J. Nash，关于一般流体微分方程的柯西问题，法国数学会通报，90（1962），487-497。́Navier，C. L. M. H.，关于弹性体平衡与运动定律，法国科学院科学院院刊，6（1827），369。 ́R. Salvi、I. Straskraba，黏性可压缩流体的整体存在性及其在́时的行为，东京大学理学部杂志，第一辑，数学，40（1993），17-51。́J. Serrin，关于可压缩流体运动的唯一性，Arch. Ration. Mech. Anal.，3（1959），271-288。́E. Stein，《奇异积分与函数的可微性》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970年。[26] A. Tani，关于可压缩黏性流体运动的第一初边值问题，京都大学数学科学研究所刊，13（1977），193-253。́C. Vasseur、C. Yu，三维退化可压缩 Navier–Stokes 方程整体弱解的存在性，数学创刊，206（2016），935-974。́Z.P. Xin、S.G. Zhu，具有退化黏度和真空的三维等熵可压缩纳维–斯托克斯方程正则解的整体适定性，数学进展，393（2021），108072。[27] Z.P. Xin、S.G. Zhu，具有退化黏度和远场真空的三维等熵可压缩纳维–斯托克斯方程的适定性，纯粹与应用数学杂志，152（2021），94-144。