arXiv:2602.04601v1 [math.CA] 4 Feb 2026

弱勒贝格空间中的卡法雷利-科恩-尼伦伯格不等式

Dinghuai Wang

摘要。通过运用调和分析技术，我们在自然的参数条件下推导出弱型卡法雷利-科恩-尼伦伯格不等式。这些弱型版本的一个关键特点是，即使在经典不等式失效的临界参数值处，它们仍然成立。作为一项重要推论，我们得到即使在临界维数 $d = p$ 下也成立的弱型 Hardy 不等式。本文所采用的方法具有足够的灵活性，能够处理齐次、非齐次和各向异性权重，为插值理论中的各种端点情形提供了统一的方法。

1. 引言

卡法雷利-科恩-尼伦伯格（CKN）插值不等式是索伯列夫空间理论中的一项基本结果，在偏微分方程和变分法中有广泛应用。该不等式最初于 [4]，提出，它同时推广了经典索伯列夫不等式和 Hardy 不等式，为带幂律权重的插值估计提供了统一框架。

对于 $d \geq 1$，设 s，p，q，γ_1，γ_2，γ_3和 θ满足

$$s > 0, p, q \geq 1, 0 \leq \theta \leq 1, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} > 0, \frac{1}{p} + \frac{\gamma_2}{d} > 0, \frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d} > 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \theta\Big(\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d}\Big) + (1-\theta)\Big(\frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d}\Big), \tag{1.3}$$

$$\gamma_1 \leq \theta\gamma_2 + (1-\theta)\gamma_3, \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{s} \leq \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} \quad \text{if} \quad \theta = 0 \quad \text{or} \quad \theta = 1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d} = \frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d}. \tag{1.5}$$

定理 1.1 (Caffarelli、Kohn、Nirenberg [4])。对于 $d \geq 1$，设 s、p、q、γ_1、γ_2、γ_3 和 θ 满足(1.1) 和 (1.2)。则存在正常数 C，使得

$$\||x|^{\gamma_1} f\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \||x|^{\gamma_2} \nabla f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \||x|^{\gamma_3} f\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^d)} \tag{1.6}$$

当且仅当(1.3)-(1.5) 成立时，对所有 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ 均成立。

关键词和短语。分数阶积分、稀疏算子、卡尔德龙-齐格蒙德分解、Hardy 不等式、Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式*2020* 数学学科分类。主分类号 42B20、42B37。次分类号 42B25。

给定 (1.1)，条件 (1.2) 成立当且仅当对所有 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\||x|^{\gamma_1} f\|_{L^s(\mathbb{R}^d)}$、$\||x|^{\gamma_2}\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ 和 $\||x|^{\gamma_3} f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$均为有限值。最近，李和严 [18] 建立了一个更一般的各向异性插值不等式，将 (1.6) 不等式中参数 q 的取值范围从 $q \geq 1$ 扩展到 $q > 0$。

这一不等式已有大量推广与扩展，包括高阶导数 [16], 柱面 Sobolev-Hardy 不等式 [3], 改进的 Hardy 不等式 [1, 2],以及分数阶 Sobolev 空间情形 [10, 23, 24]。对最佳常数与极值函数的研究也一直是一个主要焦点 [7, 9]。带单项式权的精确 Sobolev 不等式与等周不等式及相关问题由 Cabré、Ros-Oton 和 Serra 研究，见 [5, 6]。

人们对经典不等式的弱型版本兴趣日益增长，特别是在强型不等式失效的端点情形。例如，经典 Hardy 不等式

$$\left\| \frac{f}{|x|} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 < p < d,$$

在 $p = d$ 时失效，但其弱型类比仍可能成立。类似地，Sobolev 嵌入

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad q = \frac{dp}{d-p},$$

失效于 端点 $p = d$，此时得到较弱的 BMO 估计 instea d.

本文建立了 CKN 不等式的弱型版本，其中源端或目标端的 Lebesgue 范数被相应的弱范数取代。我们采用现代调和分析技术，尤其是稀疏算子控制方法；事实证明，该方法在证明双权不等式方面十分有效 [11, 14, 15]。

1.1. 主要结果。 令 $d \geq 1$，并令 $s, p, q, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \theta$ 为满足以下条件的实数

$$s > 0, \quad p \geq 1, \quad q > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2}{d} < 1 \quad \text{for } p > 1; \qquad \gamma_2 \leq 0 \quad \text{for } p = 1, \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d} \geq 0. \tag{1.9}$$

我们的主要结果是以下弱型 CKN 不等式：

定理 1.2。 令 $d \geq 1$，并假设 $s, p, q, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \theta$ 满足 (1.7)、(1.8) 和 (1.9)。则存在常数 $C > 0$，使得

$$\left\| |x|^{\gamma_1} f \right\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq C \left\| |x|^{\gamma_2}\nabla f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \left\| |x|^{\gamma_3} f \right\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \tag{1.10}$$

对所有 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ 均成立，当且仅当条件 (1.3)–(1.4) 满足。

注 1.3. 条件 (1.8)源于我们对稀疏支配技术和 *Muckenhoupt* 权重的应用。然而，与不等式 (1.2)对 γ_1 和 γ_3施加的限制不同，在我们的设定中，这些参数无需满足其他约束。

注 1.4. 对于 $\theta = 1$，结合 (1.2) 和 (1.3) 可得

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d} > 0,$$

这比 (1.9) 中相应的条件更强。

注 1.5. 与经典*CKN*不等式不同，条件 (1.5)并非必要条件。*(1)* 情形 $\theta = 0$。设尺度条件

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d}$$

成立 且 $\gamma_3 > \gamma_1$。在弱勒贝格空间中应用 *Hölder* 不等式可得

$$\||x|^{\gamma_1} f\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)} \le \||x|^{\gamma_3} f\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \||x|^{\gamma_1-\gamma_3}\|_{L^{\frac{d}{\gamma_3-\gamma_1},\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \||x|^{\gamma_3} f\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.11}$$

其中 $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{\gamma_3-\gamma_1}{d}$（因此 $\frac{1}{s} > \frac{1}{q}$）。不等式 (1.11) 意味着，对于 $\theta = 0$，弱型估计(1.10) 成立，而无需满足条件 (1.5)。

（*2*）完全尺度情形。现在假设三元尺度条件

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d} = \frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d}$$

成立，且对于某些 $\theta \in \left(0, \frac{1}{s+1}\right)$，(1.10) 有效。对于任意 $\breve{q} > q$，定义 $\breve{\gamma}_3$ 如下：

$$\frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d} = \frac{1}{\breve{q}} + \frac{\breve{\gamma}_3}{d}.$$

利用 (1.11)，我们发现，对于参数 $s, p, \breve{q}, \gamma_1, \gamma_2, \breve{\gamma}_3, \theta$，(1.10) 仍然成立。若取 $\breve{q}$ 充分大，则得到

$$\frac{1}{s} > \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{\breve{q}}.$$

这表明，在完全尺度条件下，要求 (1.5) 并非必要。

(3) 情形 $\theta = 1$。通过类似的论证，对于任意满足以下条件的 $\hat{s} < \min\{s, p\}$

$$\frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \frac{1}{\hat{s}} + \frac{\hat{\gamma}_1}{d},$$

不等式 (1.10) 对于参数 $(\hat{s}, p, q, \hat{\gamma}_1, \gamma_2, \gamma_3, \theta)$仍然成立。

注 1.6. 当 $\theta = 1$、 $s = p$、 $\gamma_1 = -1$ 和 $\gamma_2 = 0$ 时，定理 *1.2* 得到弱型 *Hardy* 不等式

$$\left\|\frac{f}{|x|}\right\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

值得注意的是，即使在临界情形 $p = d$ 下，这个不等式仍然成立，而经典 *Hardy* 不等式在 $p = d$ 下则不成立。

注 1.7。 众所周知，经典 *Sobolev* 嵌入定理指出，对于$1 < p < d$,

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

其中 $q = \frac{dp}{d-p}$。当 $p = d$ 时，极限情形 $q = \infty$ 不成立，因此只能得到较弱的估计

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|\nabla f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)},$$

wh此处，有界平均振荡函数空间（有界平均振荡空间）定义为 y

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy,$$

满足 $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy$。本文建立了如下不等式:

$$\Big\|\frac{f}{|x|}\Big\|_{L^{d,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)},$$

这给出了不同的端点结论。事实上，函数 $f \in$有界平均振荡空间中的成员资格并不能保证 $f|x|^{-1}$ 属于弱 -L^d 空间 $L^{d,\infty}(\mathbb{R}^d)$。一个证实这一点的经典例子是函数 $f(x) =$ 对数 $\frac{1}{|x|}$, 众所周知它属于 有界平均振荡空间。然而，直接计算可得 $|x|^{-1}$对数 $\frac{1}{|x|} \notin L^{d,\infty}(\mathbb{R}^d)$。

注 1.8。 根据经典 *Marcinkiewicz* 插值定理，当 $\gamma_1 = \gamma_3$时，(1.10) 左侧的弱型范数 $\|\cdot\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)}$ 可以替换为强范数$\|\cdot\|_{L^s(\mathbb{R}^d)}$。具体而言，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\big\||x|^{\gamma_1} f\big\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \le C\big\||x|^{\gamma_2}\nabla f\big\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^d)}\big\||x|^{\gamma_1} f\big\|^{1-\theta}_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.12}$$

在 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ 的特殊情形下，这个不等式化为

$$\|f\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|f\|^{1-\theta}_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)},$$

这与定常 *Euler* 流 [20] 的磁弛豫理论中出现的耦合系统分析直接相关。

注 1.9。 我们的方法也适用于非齐次权重，例如 $\langle x\rangle^\gamma = (1+|x|^2)^{\gamma/2}$，以及各向异性权重 $|x'|^\beta|x|^\gamma$，其中 $x = (x_1, \cdots, x_d) = (x', x_d)$，不过本文主要关注幂律权重 $|x|^\gamma$ 。

1.2. 证明概要。 对于 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < \alpha < d$，可测函数 f 的分数阶积分 I_α 定义为

$$I_\alpha(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\,dy.$$

将梯度与分数阶积分联系起来的一个关键工具是以下逐点不等式:

$$|f(x)| \lesssim I_1(|\nabla f|)(x), \quad f \in C_c^1(\mathbb{R}^d), \tag{1.13}$$

其中 I_1 是1阶分数阶积分。该逐点界是调和分析中的标准结果，并在我们的证明中构成梯度估计与分数阶积分估计之间的桥梁。

在此基础上，我们的主要目标是建立不等式

$$\|\mu^{\frac{1}{q}} I_\alpha(f)\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|w^{\frac{1}{p}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

其中 $1 \le p \le q < \infty$ 和 $\frac{\alpha}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \ge 0$。结合这些估计与加权Marcinkiewicz插值，我们在自然的参数条件下推导出弱型卡法雷利-科恩-尼伦伯格不等式。

我们的方法结合了现代调和分析中的若干技巧：

(1) 稀疏控制：如果 $\mathcal{S} := \{Q_{j,k}\}$ 是一个立方体稀疏族，则称其为：

(a) 对每个固定的 k，立方体 $Q_{j,k}$ 两两不相交；(b) 如果 $\Gamma_k = \bigcup_j Q_{j,k}$，则 $\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$；(c) $|\Gamma_{k+1} \bigcap Q_{j,k}| \le \eta |Q_{j,k}|$，$0 < \eta < 1$。

我们采用稀疏算子控制方法，这一方法彻底改变了加权不等式的研究 [14, 15]。对于由立方体构成的稀疏族 $\mathcal{S}$，我们考虑如下形式的算子

$$\mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{|Q|^{\frac{\alpha}{d}}}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \cdot \chi_Q(x).$$

根据 [8, 命题 3.6，命题 3.9]，I_α 可以被这类算子逐点控制。这些结果使我们能够将所需估计归结为求得稀疏算子 $\mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}}$的双权范数不等式。

(2) 双权理论：在调和分析中，为重要不等式建立加权版本的研究始于 20 世纪 70 年代，当时 Muckenhoupt 刻画了哈代-李特尔伍德极大算子的有界性，并将其表述为所谓的 A_p 条件（[21]）。对于 $1 < p < \infty$，权 w 属于 A_p，如果

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \Big)^{p-1} < \infty,$$

其中，上确界取遍立方体 Q。我们称

$$[w]_{A_1} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \|w^{-1} \chi_Q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

我们还定义 $w \in A_\infty$，如果

$$[w]_{A_\infty} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \exp\big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \log w(y)^{-1} dy \big) < \infty.$$

在 [8], 克鲁兹-乌里韦给出了稀疏算子的加权范数界，该界满足 $A^\alpha_{p,q}$条件。设 $1 < p \le q < \infty$, $0 \le \alpha < d$，且 $\mathcal{S}$ 是一个稀疏族。若 $(\mu, w) \in A^\alpha_{p,q}$且 $w^{-p'/p}$, $\mu \in A_\infty$，则

$$\|\mu^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}} f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|w^{\frac{1}{p}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.14}$$

其中

$$[\mu, w]_{A^\alpha_{p,q}} := \sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{d}-1} \|\mu \chi_Q\|^{1/q}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)^{p-1} < \infty.$$

为建立乘子弱型估计，我们将考虑满足以下 Muckenhoupt型条件的权对 (μ, w)。对于 $1 \le p \le q < \infty$和 $0 \le \alpha < d$，我们称 $(\mu, w) \in A^{\alpha, p^*, q}$，如果

$$[\mu, w]_{A^{\alpha,*}_{p,q}} := \sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{d}-1} \|\mu \chi_Q\|^{1/q}_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)^{p-1} < \infty.$$

(3) **乘子弱型估计**：我们分三步证明分数阶积分的弱型有界性。

(i) 情形 $p > 1$ 满足 $(\mu, w) \in A^{\alpha, p^*_q}$。我们通过稀疏控制进行证明。$A^{\alpha, p^*, q}$ 条件结合稀疏族的几何性质，可直接推出所需的估计。

(ii) 情形 $p = 1$ 满足 $(\mu, w) \in A^{\alpha}_{1,q}$。我们沿用李、Ombrosi 和 Pérez [17] 关于 Hardy–Littlewood 极大函数的策略，并依赖两种关键工具："鸽笼"技巧和 Calderón–Zygmund分解。

(iii) 情形 $p = 1$ 满足 $\mu(x) = |x|^{-d}$ 且 $w(x) = |x|^{\alpha-d}$。我们对空间进行二进分解。利用第 (ii) 部分的结论，根据三个项与相关二进环之间的距离，分别对它们进行估计。

(4)**加权Marcinkiewicz插值**：我们采用加权版本的Marcinkiewicz插值定理来处理插值参数 θ。

1.3. **组织结构**。本文安排如下。第 2 节为 $\mathcal{A}^{\alpha}_{\mathcal{S}}$建立乘子弱型估计。第 3 节证明定理 1.2 中条件 (1.3)–(1.4) 的必要性。第 4 节利用前面各节建立的工具证明充分性。第 5 节给出 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 插值不等式的一些变体。最后，第 6 节包含关于幂权的技术性引理。

本文始终在 $\mathbb{R}^d$ 中处理 $d \ge 1$。我们用 $C^1_c(\mathbb{R}^d)$表示光滑紧支函数空间，用 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ 表示弱 L^p 空间，其拟范数定义为

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \lambda\} \right|^{1/p}.$$

我们使用记号 $A \lesssim B$ 表示：对于某个与相关参数无关的常数 $C > 0$，有 $A \le CB$。本文中考虑的所有权函数 w 均假设在 $\mathbb{R}^d$ 上局部可积，并且对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$满足 $0 < w(x) < \infty$。最后，对于立方体 $Q \subset \mathbb{R}^d$，我们记

$$\langle f \rangle_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy.$$

2. 稀疏算子的乘子弱型估计

本节的主要目标是建立$\mathcal{A}^{\alpha}_{\mathcal{S}}$的乘子弱型不等式。这些不等式需要更为微妙的证明技巧，并且与标准的加权弱型不等式存在根本差异，即使对于极大算子也是如此。造成这种差异的两个主要原因是，权 μ 充当乘子而非测度，并且不假设权 μ满足倍增条件。

最近，Sweeting [25] 证明了，当 $p > 1$时，他们针对极大算子提出的必要条件也是充分条件。对于 $1 < p < \infty$，如果 w 是一个乘子 A_p 权，记作$w \in A_p^* := A_p^*(\mathbb{R}^d)$，则称

$$[w]_{A_p^*} := \sup_Q \frac{1}{|Q|}\|w\chi_Q\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}dy\Big)^{p-1} < \infty.$$

对于 $1 < p,\ q < \infty$，我们称 w 为乘子 A_p 权，记作 $w \in A_{p,\ q}^* := A_{p,\ q}^*(\mathbb{R}^d)$，如果

$$[w]_{A_{p,q}^*} := \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\|w^q\chi_Q\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-p'}dy\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

对于 $p = 1$的情形， [22] 中证明了，当 $p \geq 1$时， $|x|^{-1}$ 是维数为 $d = 1$ 时极大算子的可容许权；当$p = 1$时，对于 Hilbert 变换也是如此，尽管该函数不属于任何 A_p 类。这一发现随后引出了 Muckenhoupt 和 Wheeden 提出的开放问题，即刻画在何种权类下这类估计仍然成立。

基于 [8], [22] 和 [25], 中的思想，我们研究 $A^{\alpha,\ p\ ^*,\ q}$ 权设置下分数阶积分的乘子弱型有界性。分析将分别针对 $p = 1$ 和 $p > 1$的情形进行。

2.1. 在 $p > 1$ 满足 $(\mu, w) \in A^{\alpha,p\ ^*_q}$. 首先，我们在 $p > 1$ 的情况下，为 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}$ 建立弱型乘子有界性。与 (1.14) 的结果不同，这里不需要条件 $\mu \in A_\infty$，并且我们注意到严格包含 $A^{\alpha,p\ ^*,q} \subsetneq A_{p,q_0}^{\alpha}$。

定理2.1。 设 $0 < \alpha < d$ 和 $1 < p \leq q < \infty$。若 $(\mu, w) \in A^{\alpha,p\ ^*,q}$ 满足 $w^{1-p'} \in A_\infty$，则

$$\|\mu^{1/q}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}f\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|w^{1/p}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

证明。 对每个指标 k，令 $\Gamma_k = \bigcup_j Q_{j,k_0}$ 由于 $\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\|\mu^{\frac{1}{q}}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}^q &= \|\mu\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)^q\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \sup_{\lambda>0}\lambda\Big|\Big\{x \in \mathcal{S} : \mu(x)\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)(x)^q > \lambda\Big\}\Big| \\
&= \sup_{\lambda>0}\lambda\sum_k\Big|\Big\{x \in \Gamma_k \setminus \Gamma_{k+1} : \mu(x)\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)(x)^q > \lambda\Big\}\Big| \\
&\leq \sup_{\lambda>0}\lambda\sum_k\sum_j |Q_{j,k}|^{\frac{\alpha q}{d}}\langle f\rangle_{Q_{j,k}}^q\big|\big\{x \in Q_{j,k} : \mu(x) > \lambda\big\}\big|.
\end{aligned}$$

取满足 $\frac{1}{r} + \frac{1}{p's} = 1$ 的数 $1 < r, s < \infty$。那么$p > r$ 并且

$$\|\mu^{\frac{1}{q}}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}^q \leq \sum_{k,j}|Q_{j,k}|^{\frac{\alpha q}{d}}\langle w^{\frac{r}{p}}f^r\rangle_{Q_{j,k}}^{\frac{q}{r}}\langle w^{(1-p')s}\rangle_{Q_{j,k}}^{\frac{q}{p's}}\|\mu\chi_{Q_{j,k}}\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

因为 $w^{1-p'} \in A_\infty$，我们可以选取 $s > 1$ 使得

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{(1-p')s}\,dy\Big)^{\frac{1}{p's}} \lesssim \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}\,dy\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

因此,

$$\|\mu^{\frac{1}{q}}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}^{q} \lesssim [\mu,w]_{A_{p,q}^{\alpha,*}}^{q} \sum_{k,j} |Q_{j,k}|^{\frac{q}{p}} \langle w^{\frac{r}{p}} f^r\rangle_{Q_{j,k}}^{\frac{q}{r}}.$$

利用条件 $|Q_{j,\,k}| \le 2|E(Q_{j,\,k})|$ 和 $q \ge p > r$，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mu^{\frac{1}{q}}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}^{q} &\lesssim \Big(\sum_{k,j} |E(Q_{j,k})| \langle w^{\frac{r}{p}} f^r\rangle_{Q_{j,k}}^{\frac{p}{r}}\Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\lesssim \Big(\sum_{k,j} \int_{E(Q_{j,k})} M\big(|w^{\frac{1}{p}} f|^r\big)(x)^{\frac{p}{r}}\, dx\Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\lesssim \big\|M\big(|w^{\frac{1}{p}} f|^r\big)\big\|_{L^{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^d)}^{\frac{q}{r}} \lesssim \|w^{\frac{1}{p}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{q}.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

2.2. 当 $p = 1$ 且 $(\mu,\ w) \in A_{1,\,q}^{\alpha}$ 时。对于端点情形 $p = 1$，我们无法直接推出属于类 $A^{\alpha,}{}_{1}{}^{*}{}_{,\,q}$ 的权重对 $(\mu,\ w)$ 的相关结论；因此需要更强的条件：

定义 2.2。设 $1 \le q < \infty$ 和 $0 \le \alpha < d$。一对 (μ, w) 属于 $A_{1,\,q}^{\alpha}$，当且仅当

$$[\mu,w]_{A_{1,q}^{\alpha}} := \sup_{Q} |Q|^{\frac{\alpha}{d}-1} \|\mu\chi_Q\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/q} \|w^{-1}\chi_Q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

我们将用到以下适用于 A_∞ 权的反向 Hölder 不等式（见 [13]）。

引理 2.3. 令 $w \in A_\infty$ 并设 $r_w = 1 + \dfrac{1}{\tau_d [w]_{A_\infty}}$。那么对于任意立方体 Q,

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\Big)^{1/r_w} \le \frac{2}{|Q|}\int_Q w.$$

因此，对于任意可测集 $E \subset Q$,

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \le 2\Big(\frac{|E|}{|Q|}\Big)^{\varepsilon_w}, \qquad \varepsilon_w = \frac{1}{1+\tau_d[w]_{A_\infty}}.$$

定理 2.4. 令 $0 < \alpha < d$ 并令 $1 \le q < \infty$。若 $(\mu, w) \in A_{1,q}^{\alpha}$ 满足 $\mu \in A_1$ 和 $w^{1-p'} \in A_\infty$，则

$$\|\mu^{1/q}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha} f\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|wf\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

证明. 设 $v := \dfrac{1}{\mu^{1/q}\circ}$ 由于 $\mu \in A_1$，可得 $v \in A_2 \subset A_\infty$。只需证明对于每个有界紧支撑函数 f，不等式

$$\Big|\Big\{x \in \mathbb{R}^d : 1 < \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)(x)}{v(x)} \le 2\Big\}\Big| \lesssim \|wf\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{q}. \tag{2.1}$$

我们将 (2.1) 的左端分解为

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\Big\{x \in \mathbb{R}^d : 1 < \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)(x)}{v(x)} \le 2,\ a^k < v(x) \le a^{k+1}\Big\}\Big| := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |E_k|,$$

其中 $a > 2^d$。

对每个 k，定义族 $\mathcal{Q}_k := \{I_j^k\}_j$，其中 $I_j^k \in \mathcal{S}$ 是满足以下条件的极大立方体

$$|I_j^k|^{\frac{\alpha}{d}} \langle f \rangle_{I_j^k} > a^k. \tag{2.2}$$

注意到

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^d : \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)(x) > a^k\} &= \bigcup_{\tilde{k}} \Big\{ x \in \Gamma_{\tilde{k}} \setminus \Gamma_{\tilde{k}+1} : \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{\alpha}(f)(x) > a^k \Big\} \\ &= \bigcup_{\tilde{j},\tilde{k}} \big\{ x \in Q_{\tilde{j},\tilde{k}} : |Q_{\tilde{j},\tilde{k}}|^{\frac{\alpha}{d}} \langle f \rangle_{Q_{\tilde{j},\tilde{k}}} > a^k \big\} = \bigcup_j I_j^k.\end{aligned}$$

因此 $E_k \subset \Omega_k := \bigcup_j I_j^k$。现在，我们根据 v 的平均值将集合 $\{I_j^k\}_j$ 分成以下几类:

$$\mathcal{Q}_{l,k} := \{I_j^k \in \mathcal{Q}_k : a^{k+l} \le \langle v \rangle_{I_j^k} < a^{k+l+1}\}, \qquad l \ge 0,$$

and

$$\mathcal{Q}_{-1,k} := \{I_j^k \in \mathcal{Q}_k : \langle v \rangle_{I_j^k} < a^k\}.$$

对于立方体 $I_j^k \in \mathcal{Q}_{-1,k}$，我们对 $v\chi_{I_j^k}$ 在高度 a^k 处进行 Calderón–Zygmund分解，得到一族子立方体 $\{I_{j,i}^k\}_i \subset \mathcal{D}(I_j^k)$，使得

$$a^k < \langle v \rangle_{I_{j,i}^k} < 2^d a^k \quad \text{for all } i, \tag{2.3}$$

并且 $v(x) \le a^k$ 对于 $x \in I_j^k \setminus \bigcup_i I_{j,i}^k$。定义 $\Omega_{-1,k} := \bigcup_{I_j^k \in \mathcal{Q}_{-1,k}} \bigcup_i I_{j,i}^k$

现在写作

$$\begin{aligned}\sum_k |E_k| = \sum_k |E_k \cap \Omega_k| &\le \sum_{k,j} |E_k \cap I_j^k| \\ &\le \sum_k \sum_{l \ge 0} \sum_{I_j^k \in \mathcal{Q}_{l,k}} a^{q(k+1)} \mu(E_k \cap I_j^k) + \sum_k \sum_{I_j^k \in \mathcal{Q}_{-1,k}} a^{q(k+1)} \mu(E_k \cap I_j^k) \\ &\le \sum_k \sum_{l \ge 0} \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} a^{q(k+1)} \mu(E_k \cap I_j^k) + \sum_k \sum_{i : I_{j,i}^k \in \Gamma_{-1,k}} a^{q(k+1)} \mu(I_{j,i}^k),\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma_{l,k} := \{I_j^k \in \mathcal{Q}_{l,k} : |I_j^k \cap \{x : a^k < v \le a^{k+1}\}| > 0\} \qquad (l \ge 0),$$

and

$$\Gamma_{-1,k} := \{I_{j,i}^k \in \mathcal{Q}_{-1,k} : |I_{j,i}^k \cap \{x : a^k < v \le a^{k+1}\}| > 0\}.$$

我们分别处理对应于 $l \ge 0$ 和 $l = -1$ 的求和。根据单调收敛定理，只需对

$$\sum_{k \ge N} \sum_{l \ge 0} \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} a^{q(k+1)} \mu(E_k \cap I_j^k) + \sum_{k \ge N} \sum_{i : I_{j,i}^k \in \Gamma_{-1,k}} a^{q(k+1)} \mu(I_{j,i}^k),$$

其中 $N < 0$。

情形 $l \geq 0$。利用 [17], 中的引理3.8, 存在常数 c_1, $c_2 > 0$, 它们仅依赖于 μ 和 v, 使得

$$\mu(E_k \cap I_j^k) \leq c_1 e^{-c_2 l}\, \mu(I_j^k).$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_{l\geq 0} \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} a^{q(k+1)} \mu(E_k \cap I_j^k) \\
&\quad \leq \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} a^{q(1-l)} \sum_k \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} \langle v\rangle_{I_j^k}^q \mu(I_j^k) \\
&\quad = \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} a^{q(1-l)} \sum_k \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} |I_j^k|\, \langle \mu\rangle_{I_j^k} \langle v\rangle_{I_j^k}^q.
\end{aligned}$$

固定 $l \geq 0$, 并为 $\bigcup_{k\geq N} \Gamma_{l,\ k}$ 构造主立方体。令 $\mathcal{P}_0^l$ 为此并集中的极大方体。归纳地, 若 $I_s^t \in \mathcal{P}_m^l$, 则当 $I_j^k \in \mathcal{P}_{m+1}^l$ 是 $\mathcal{D}(I_s^t)$ 中关于包含关系的极大立方体时,

$$\langle \mu\rangle_{I_j^k} > 2\langle \mu\rangle_{I_s^t}.$$

设 $\mathcal{P}^l := \bigcup_{m\geq 0} \mathcal{P}_m^l$, 并用 $\pi(Q)$ 表示包含 Q 的极小主方体。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_{l\geq 0} \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} a^{q(k+1)} \mu(E_k \cap I_j^k) \\
&\quad \leq \sum_{l\geq 0} 2c_1 e^{-c_2 l} a^{q(1-l)} \sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} \langle \mu\rangle_{I_s^t} \sum_{\substack{k,j \\ \pi(I_j^k) = I_s^t}} |I_j^k|\, \langle v\rangle_{I_j^k}^q \\
&\quad \leq \sum_{l\geq 0} 2c_1 e^{-c_2 l} a^{q(1-l)} \sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} \langle \mu\rangle_{I_s^t} \Big(\sum_{\substack{k,j \\ \pi(I_j^k) = I_s^t}} |I_j^k|^{-1/q'} v(I_j^k) \Big)^q \\
&\quad \lesssim_d \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} a^{-ql} [v]_{A_\infty^q} \sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} \mu(I_s^t) \langle v\rangle_{I_s^t}^q \\
&\quad \leq a^q \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} [v]_{A_\infty}^q \sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} a^{qt} \mu(I_s^t).
\end{aligned}$$

利用不等式 (2.2), 我们进一步将最后一个表达式估计为

$$\begin{aligned}
&\leq a^q \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} [v]_{A_\infty}^q \sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} |I_s^t|^{\frac{q\alpha}{d}} \langle f\rangle_{I_s^t}^q \mu(I_s^t) \\
&\leq a^q \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} [v]_{A_\infty}^q \Big(\sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} |I_s^t|^{\frac{\alpha}{d}} \langle f\rangle_{I_s^t} \mu(I_s^t)^{1/q} \Big)^q \\
&\leq a^q \sum_{l\geq 0} c_1 e^{-c_2 l} [v]_{A_\infty}^q \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \sum_{I_s^t \in \mathcal{P}^l} |I_s^t|^{\frac{\alpha}{d} + \frac{1}{q} - 1} \langle \mu\rangle_{I_s^t}^{1/q} \chi_{I_s^t}(x)\, dx \Big)^q.
\end{aligned}$$

固定 x，令 $\{I_x^m\}$ 为包含 x 的主立方体链。由于 $\langle\mu\rangle_{I_x^m}$ 构成一个有限几何数列，

$$\begin{aligned}\sum_{I_s^t\in\mathcal{P}^l}|I_s^t|^{\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{q}-1}\langle\mu\rangle_{I_s^t}^{\frac{1}{q}}\chi_{I_s^t}(x)&=\sum_{0\le m\le m_0}|I_x^m|^{\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{q}-1}\langle\mu\rangle_{I_x^m}^{\frac{1}{q}}\\&\le\sum_{0\le m\le m_0}2^{m-m_0}|I_x^{m_0}|^{\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{q}-1}\langle\mu\rangle_{I_x^{m_0}}^{\frac{1}{q}}\\&\le 2\,[\mu,w]_{A_{1,q}^\alpha}\,w(x).\end{aligned}$$

对 l 求和，现在得到

$$\sum_k\sum_{l\ge0}\sum_{I_j^k\in\Gamma_{l,k}}a^{q(k+1)}\mu(E_k\cap I_j^k)\lesssim_{d,q,\mu,w}\|wf\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^q.$$

情形 $l=-1$。如下定义相对于 μ 的主立方体。令 $\mathcal{F}_0$ 为$\Gamma_{-1,N}$中的极大立方体。对于 $m\ge0$，若$I_{s,\ell}^t\in\mathcal{F}_m$，则$I_{j,i}^k\in\mathcal{F}_{m+1}$，如果它是 $\mathcal{D}(I_{s,\ell}^t)$中满足以下条件的一个极大立方体

$$\langle\mu\rangle_{I_{j,i}^k}>a^{(k-t)\delta}\langle\mu\rangle_{I_{s,\ell}^t},$$

其中 $\delta>0$ 将在后面选取。设 $\mathcal{F}:=\bigcup_{m\ge0}\mathcal{F}_m$，并再次用 $\pi(Q)$表示包含 Q的极小主立方体。如果 $\pi(I_{j',i'}^{k'})=I_{s,\ell}^t$，那么 $k'\ge t$，根据构造

$$\langle\mu\rangle_{I_{j',i'}^{k'}}\le a^{(k'-t)\delta}\langle\mu\rangle_{I_{s,\ell}^t}.$$

Now,

$$\begin{aligned}\sum_k\sum_{I_{j,i}^k\in\Gamma_{-1,k}}a^{q(k+1)}\mu(I_{j,i}^k)&\le a^q\sum_k\sum_{I_{j,i}^k\in\Gamma_{-1,k}}\langle v\rangle_{I_{j,i}^k}^q\mu(I_{j,i}^k)\\&\le a^q\sum_{I_{s,\ell}^t\in\mathcal{F}}\langle\mu\rangle_{I_{s,\ell}^t}\sum_{\substack{k,j,i\\\pi(I_{j,i}^k)=I_{s,\ell}^t}}a^{q(k-t)\delta}|I_{j,i}^k|^{1-q}v(I_{j,i}^k)^q\\&\le a^q\sum_{I_{s,\ell}^t\in\mathcal{F}}\langle\mu\rangle_{I_{s,\ell}^t}\sum_{k\ge t}a^{q(k-t)\delta}\sum_{\substack{j,i\\\pi(I_{j,i}^k)=I_{s,\ell}^t}}|I_{j,i}^k|^{1-q}v(I_{j,i}^k)^q.\end{aligned}$$

按照与 [17, 引理 2.1], 中相同的推理，族 $\Gamma:=\bigcup_{l\ge-1}\bigcup_{k\ge N}\Gamma_{l,k}$ 是稀疏的，并且满足

$$\Big|\bigcup_{\substack{Q',Q\in\Gamma\\Q'\subsetneq Q}}Q'\Big|\le\frac{2^d}{a}\,|Q|.\tag{2.4}$$

根据稀疏性条件 (2.4),

$$\sum_{\substack{j,i\\\pi(I_{j,i}^k)=I_{s,\ell}^t}}|I_{j,i}^k|\le\Big(\frac{2^d}{a}\Big)^{k-t}|I_{s,\ell}^t|,$$

以及引理 2.3 可得

$$\sum_{\substack{j,i\\ \pi(I^k_{j,i})=I^t_{s,\ell}}} v(I^k_{j,i}) \le 2\Big(\frac{2^d}{a}\Big)^{\frac{k-t}{2\tau_d[v]_{A_\infty}}} v(I^t_{s,\ell}).$$

取 $\delta := 1/(c_d'[v]_{A_\infty})$，其中 c_d' 足够大（仅取决于 d）。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge t} a^{q(k-t)\delta} \sum_{\substack{j,i\\ \pi(I^k_{j,i})=I^t_{s,\ell}}} |I^k_{j,i}|^{1-q} v(I^k_{j,i})^q \\
&\quad\le \sum_{k\ge t} a^{q(k-t)\delta} \Big(\sum_{\substack{j,i\\ \pi(I^k_{j,i})=I^t_{s,\ell}}} |I^k_{j,i}|^{1/q-1} v(I^k_{j,i}) \Big)^q \\
&\quad\le c_d [v]^q_{A_\infty} |I^t_{s,\ell}|^{1-q} v(I^t_{s,\ell})^q.
\end{aligned}$$

剩下需要估计

$$\begin{aligned}
\sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} \langle\mu\rangle_{I^t_{s,\ell}} |I^t_{s,\ell}|^{1-q} v(I^t_{s,\ell})^q &= \sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} \langle v\rangle^q_{I^t_{s,\ell}} \mu(I^t_{s,\ell}) \\
&\le \sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} a^{q(t+1)} \mu(I^t_{s,\ell}) \le a^q \sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} |I^t_s|^{\frac{q\alpha}{d}} \langle f\rangle^q_{I^t_s} \mu(I^t_{s,\ell}) \\
&\le a^q \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Big(\sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} |I^t_s|^{\frac{\alpha}{d}-1} \mu(I^t_{s,\ell})^{\frac{1}{q}} \chi_{I^t_s}(x) \Big)^q dx.
\end{aligned}$$

因此，我们需要证明

$$\sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} |I^t_s|^{\frac{\alpha}{d}-1} \mu(I^t_{s,\ell})^{1/q} \chi_{I^t_s}(x) \lesssim_{d,\mu,w} w(x). \tag{2.5}$$

固定 $x_\circ$。对于每个 t，至多存在一个包含 x 且满足 $\langle v\rangle_{I^t} \le a^t$的立方体 I^t；令 $G:=\{I^t : I^t \ni x\}$。为 G构造主立方体：取 $\mathcal{G}_0 = \{I^{k_0}\}$ 为 G中的极大立方体；若$I^{k_m} \in \mathcal{G}_m$，则令 $I^{k_{m+1}} \in \mathcal{G}_{m+1}$ 为满足 $\langle\mu\rangle_{I^{k_{m+1}}} > 2\langle\mu\rangle_{I^{k_m}}$的极大子立方体。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} |I^t_s|^{\frac{\alpha}{d}-1} \mu(I^t_{s,\ell})^{1/q} \chi_{I^t_s}(x) \\
&= \sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} |I^t|^{\frac{\alpha}{d}-1} \mu(I^t_{s,\ell})^{1/q} = \sum_{I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} |I^t|^{\frac{\alpha}{d}} \langle\mu\rangle^{1/q}_{I^t} \Big(\frac{\mu(I^t_{s,\ell})}{\mu(I^t)}\Big)^{1/q} \\
&\le \sum_m |I^{k_m}|^{\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{q}-1} \mu(I^{k_m})^{1/q} \sum_{\substack{I^t\in G\\ k_m\le t<k_{m+1}}} \sum_{s,\ell: I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} \Big(\frac{\mu(I^t_{s,\ell})}{\mu(I^t)}\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

如果我们能够证明

$$\sum_{\substack{I^t\in G\\ k_m\le t<k_{m+1}}} \sum_{s,\ell: I^t_{s,\ell}\in\mathcal{F}} \Big(\frac{\mu(I^t_{s,\ell})}{\mu(I^t)}\Big)^{1/q} \le c_{d,\mu}, \tag{2.6}$$

那么（2.5）立即成立。

为证明 (2.6)，记 $I_j^{k_m},_i \subset I^{k_m}$ 为包含 $I_{s,\ell}^t$ 的立方体（根据 Γ的构造，这样的立方体存在）。令 $I_{j'}^{k'}{}_{,i'} = \pi(I_{j\,i}^{k_m}{}_{,}) \in \mathcal{F}$。我们有

$$\langle\mu\rangle_{I_{s,\ell}^t} > a^{(t-k')\delta}\langle\mu\rangle_{I_{j',i'}^{k'}}, \qquad \langle\mu\rangle_{I_{j,i}^{k_m}} \le a^{(k_m-k')\delta}\langle\mu\rangle_{I_{j',i'}^{k'}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\langle\mu\rangle_{I_{s,\ell}^t} &> a^{(t-k_m)\delta}\langle\mu\rangle_{I_{j,i}^{k_m}} \ge a^{(t-k_m)\delta}\operatorname*{ess\,inf}_{y\in I_{j,i}^{k_m}}\mu(y)\\ &\ge \frac{a^{(t-k_m)\delta}}{[\mu]_{A_1}}\langle\mu\rangle_{I^{k_m}} \ge \frac{a^{(t-k_m)\delta}}{2[\mu]_{A_1}}\langle\mu\rangle_{I^t}.\end{aligned}$$

所以，对于几乎处处的 $y \in I_{s,\ell}^t$，

$$\mu(y) \ge \frac{a^{(t-k_m)\delta}}{2[\mu]_{A_1}^2}\langle\mu\rangle_{I^t} =: \lambda.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{s,\ell:I_{s,\ell}^t\in\mathcal{F}}\mu(I_{s,\ell}^t)^{1/q} &\le \mu\big(\{y\in I^t:\mu(y)>\lambda\}\big)^{1/q}\\ &\le 2\,\mu(I^t)^{1/q}\Big(\frac{|\{y\in I^t:\mu(y)>\lambda\}|}{|I^t|}\Big)^{\frac{1}{2q\tau_d[\mu]_{A_1}}}\\ &\le 2^{1/q}\mu(I^t)^{1/q}\Big(\lambda^{-1}\langle\mu\rangle_{I^t}\Big)^{\frac{1}{c_{d,q}[\mu]_{A_1}}}\\ &\lesssim_d \mu(I^t)^{1/q}a^{\frac{t-k_m}{c_d[\mu]_{A_1}[v]_{A_\infty}}}.\end{aligned}$$

现在对 t求和，得到 (2.6)，这就完成了 (2.5) 的证明，进而完成了该定理的证明。□

3. Necessity of the conditions

在本 节中，我们证明条件 (1.3)–(1.4) 是定理 1 的必要条件。 2. 必要性证明。令 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$，并考虑缩放 $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$，其中 $\lambda > 0$。于是

$$\begin{aligned}\||x|^{\gamma_1}f_\lambda\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)} &= \lambda^{-\gamma_1-d/s}\||x|^{\gamma_1}f\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)},\\ \||x|^{\gamma_2}\nabla f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \lambda^{1-\gamma_2-d/p}\||x|^{\gamma_2}\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\\ \||x|^{\gamma_3}f_\lambda\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} &= \lambda^{-\gamma_3-d/q}\||x|^{\gamma_3}f\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

代入 (1.10) 得到

$$\lambda^{-\gamma_1-d/s} \lesssim \lambda^{\theta(1-\gamma_2-d/p)-(1-\theta)(\gamma_3+d/q)}.$$

取 $\lambda \to 0^+$ 和 $\lambda \to \infty$，得到条件 (1.3)。

固定一个 $v \in C_c^\infty(B_1(0)) \setminus \{0\}$，我们考虑 $u(x) := v(x - x_0)$，其中 $|x_0| = R$ 较大。于是$u \in C_c^\infty(B_1(x_0))$，在支集上 $|x| \sim R$，而 (1.10) 推出

$$R^{\gamma_1} \lesssim R^{\theta\gamma_2+(1-\theta)\gamma_3},$$

由此得到 (1.4)，其中 $R \to \infty$。 □

4. 条件的充分性

We 现在证明定理 1.2 的充分性部分。策略如下： s:
(1) 利用逐点不等式 (1.13) 将 $|f|$ 估计为 $I_1(|\nabla f|)$。(2) 应用第 2 节中关于分数阶积分的弱型估计。(3) 利用马尔可夫插值处理插值参数 θ。

4.1. **带幂权的分数阶积分的乘子弱型估计**。回顾一下， $\mathbb{R}^d$ 中的标准二进网格由立方体组成

$$[0, 2^{-k})^d + 2^{-k} j, \qquad k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^d.$$

将标准二进网格记为 $\mathscr{D}$。

我们所说的一般二进网格 $\mathscr{D}$ 是指由立方体组成的集合，并具有以下性质：(i) 对任意 $Q \in \mathscr{D}$，其边长 l_Q 的形式为 $2^k, k \in \mathbb{Z}$；(ii) $Q \cap R \in \{Q, R, \varnothing\}$ 对任意Q， $R \in \mathscr{D}$；(iii) 固定边长 2^k 的立方体构成 $\mathbb{R}^d$的一个划分。

根据 [8]， I_α 可以被此类算子 $\mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}}$逐点控制。具体而言，以下两个命题成立。

命题 4.1 ([8], 命题 3.6)。 存在二进格 $\mathcal{D}^1, \ldots, \mathcal{D}^{3^d}$，使得对任意非负、有界、紧支撑的可测函数 f,

$$\mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{D}^j} f(x) \lesssim_{d,\alpha} I_\alpha(f)(x) \lesssim_{d,\alpha} \sum_{j=1}^{3^d} \mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{D}^j} f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

命题 4.2 ([8], 命题 3.9)。 设 $\mathcal{D}$ 为一个二进格， $\alpha \in (0, d)$，且设 $f \geq 0$为一个有界、紧支撑的可测函数。则可以找到一个稀疏族$\mathcal{S} = \mathcal{S}(f) \subseteq \mathcal{D}$，使得

$$\mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}} f(x) \leq \mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{D}} f(x) \lesssim_{d,\alpha} \mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}} f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

这些结果使我们能够将所需的估计归结为获得稀疏算子 $\mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}}$ 的双权范数不等式。

定理 4.3. 设 $0 < \alpha < d$、 $1 \leq p \leq q < \infty$，并假设

$$\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{q} = \frac{b}{p} - \frac{a}{q} \geq 0, \qquad a \geq -d.$$

and

$$b < d(p-1) \ \ for\ p > 1, \qquad b \leq 0 \ \ for\ p = 1.$$

Then

$$\left\| |x|^{\frac{a}{q}} I_\alpha f \right\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \left\| |x|^{\frac{b}{p}} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

证明。令 $f_N = \min\{f, N\}\chi_{B(0,N)}$。由命题 4.1 和 4.2，我们有

$$I_\alpha(f_N)(x) \lesssim_{d,\alpha} \sum_{j=1}^{3^d} \mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}^j}(f_N)(x),$$

其中每个 $\mathcal{S}^j \subseteq \mathcal{D}^j$ 是一个稀疏族。因此，

$$\begin{aligned}\big\|\mu^{\frac{1}{q}} I_\alpha(f_N)\big\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} &\lesssim \sum_{j=1}^{3^d} \big\|\mu^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^\alpha_{\mathcal{S}^j}(f_N)\big\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{3^d} \big\|w^{\frac{1}{p}} f_N\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \big\|w^{\frac{1}{p}} f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

最后，利用拟范数在弱 $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)$意义下的下半连续性，我们得到

$$\big\|\mu^{\frac{1}{q}} I_\alpha(f)\big\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \le \liminf_{N\to+\infty} \big\|\mu^{\frac{1}{q}} I_\alpha(f_N)\big\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \big\|w^{\frac{1}{p}} f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

结合定理 2.1、定理 2.4 和引理 6.1，我们得出定理 4.3 在除以下情况外的所有情形中均成立： $p = 1$, $\mu(x) = |x|^{-d}$, 且 $w(x) = |x|^{\alpha-d}$。

现在我们着手证明这一剩余情形下的结果。根据弱勒贝格空间的定义，只需证明对于任意非负函数 f,

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^d : |x|^{-\frac{d}{q}} I_\alpha(f)(x) > \lambda\}\big| \lesssim \lambda^{-q} \big\||x|^{\alpha-d} f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.1}$$

对每个整数 k，定义

$$G_k = \{2^k \le |x| < 2^{k+1}\}, \qquad H_k = \{|x| \le 2^{k-1}\},$$
$$I_k = \{2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2}\}, \qquad J_k = \{|x| > 2^{k+2}\}.$$

给定 $\lambda > 0$，我们将式 (4.1) 中的集合分解为三部分：

$$A_1 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big|G_k \cap \big\{|x|^{-\frac{d}{q}} I_\alpha(f\chi_{H_k})(x) > \lambda/3\big\}\Big|,$$
$$A_2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big|G_k \cap \big\{|x|^{-\frac{d}{q}} I_\alpha(f\chi_{I_k})(x) > \lambda/3\big\}\Big|,$$
$$A_3 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big|G_k \cap \big\{|x|^{-\frac{d}{q}} I_\alpha(f\chi_{J_k})(x) > \lambda/3\big\}\Big|.$$

接下来只需用 (4.1) 右侧的量来估计 A_1、A_2 和 A_3。

对于 $x \in G_k$，注意到当 $y \in H_k$ 时，$|x-y| \ge |x|/2$。因此，

$$I_\alpha(f\chi_{H_k})(x) \le 2^{\delta_1}|x|^{\delta_1} \int_{|y|\le|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha+\delta_1}}\,dy \le 2^{\delta_1}|x|^{\delta_1} I_{\alpha-\delta_1}(f)(x),$$

其中 $0 < \delta_1 < \min\{\alpha, d/q\}$。因此，$A_1$ 中出现的集合包含于

$$\big\{|x|^{-\frac{d}{q}+\delta_1} I_{\alpha-\delta_1}(f)(x) > \lambda/(3\cdot 2^{\delta_1})\big\}.$$

and

$$A_1 \le \Big(\frac{3\cdot 2^{\delta_1}}{\lambda}\Big)^q \big\||x|^{-\frac{d}{q}+\delta_1} I_{\alpha-\delta_1}(f)\big\|^q_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

根据定理 2.4 以及 $(|x|^{-d+q\delta_1}, |x|^{\alpha-d}) \in A_1^{\alpha-\delta_1,q}$ 这一事实，右侧有界于 $C\lambda^{-q}\big\||x|^{\alpha-d} f\big\|^q_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, 这正是所需的界。

取 $0<\delta_2<d/q$。对于 $x\in G_k$，我们有 $|x|\geq 2^k$。因此，

$$|x|^{-\frac{d}{q}}I_\alpha(f\chi_{I_k})(x)\leq 2^{-k\delta_2}|x|^{-\frac{d}{q}+\delta_2}I_\alpha(f\chi_{I_k})(x)\leq 2^{-(k-1)\delta_2}|x|^{-\frac{d}{q}+\delta_2}I_\alpha(f\chi_{I_k})(x).$$

因此，定义 A_2 的集合包含于

$$\bigcup_k\big\{x\in\mathbb{R}^d:|x|^{-\frac{d}{q}+\delta_2}I_\alpha(f\chi_{I_k})(x)>\lambda\cdot 2^{(k-1)\delta_2}/3\big\}.$$

对$(|x|^{-d+q\delta_2},|x|^{\alpha-d-\delta_2})\in A^\alpha_{1,q}$应用定理 2.4，可得

$$A_2\leq\sum_k\Big(\frac{3}{\lambda\cdot 2^{(k-1)\delta_2}}\int_{I_k}f(y)|y|^{\alpha-d-\delta_2}\,dy\Big)^q.$$

由于对 $y\in I_k$有 $|y|\leq 2^{k+2}\leq 8\cdot 2^{k-1}$，故有 $2^{(k-1)\delta_2}\geq(|y|/8)^{\delta_2}$。因此，

$$A_2\leq C\lambda^{-q}\sum_k\Big(\int_{I_k}f(y)|y|^{\alpha-d}\,dy\Big)^q\leq C\lambda^{-q}\Big(\sum_k\int_{I_k}f(y)|y|^{\alpha-d}\,dy\Big)^q\leq C\lambda^{-q}\big\||x|^{\alpha-d}f\big\|^q_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

因为每个点至多属于三个集合 I_k。

对于 $x\in G_k$和 $y\in J_k$，我们有 $|y|\geq 2|x|$ 和 $|x-y|\geq|y|/2$。因此，

$$I_\alpha(f\chi_{J_k})(x)\leq 2^{d-\alpha}\int_{J_k}\frac{f(y)}{|y|^{d-\alpha}}\,dy\leq 2^{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|y|^{\alpha-d}\,dy.$$

因此，

$$A_3\leq\sum_k\Big|G_k\cap\big\{2^{d-\alpha}|x|^{-\frac{d}{q}}\big\||y|^{\alpha-d}f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}>\lambda/3\big\}\Big|.$$

由于集合 G_k 互不相交且覆盖 $\mathbb{R}^d$，这等于

$$\Big|\big\{x\in\mathbb{R}^d:2^{d-\alpha}|x|^{-\frac{d}{q}}\big\||y|^{\alpha-d}f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}>\lambda/3\big\}\Big|.$$

该集合是半径为$\big(3\cdot 2^{d-\alpha}\lambda^{-1}\big\||y|^{\alpha-d}f\big\|_{L^1\ (\mathbb{R}^d)}\big)^{q/d}$的球，于是

$$A_3\leq C\lambda^{-q}\big\||x|^{\alpha-d}f\big\|^q_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

结合对 A_1、A_2 和 A_3 的估计，即完成了定理 4.3 的证明。 □

4.2. 加权Marcinkiewicz插值。

为处理本设置中的加权估计，我们需要经典 Marcinkiewicz 插值定理的一个加权扩展。其表述如下。

定理 4.4（加权Marcinkiewicz插值）。设 $0<p_0$、$p_1<\infty$ 和 $0<v_0$、$v_1<\infty$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数。对于 $0<\theta<1$，定义

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{\theta}{p_0}+\frac{1-\theta}{p_1},\quad v_\theta=v_0^\theta v_1^{1-\theta}.$$

若 $fv_i\in L^{p_i,\infty}(\mathbb{R}^d)$对 $i=0,1$成立，则 $fv_\theta\in L^{p_\theta,\infty}(\mathbb{R}^d)$成立，其中

$$\|fv_\theta\|_{L^{p_\theta,\infty}(\mathbb{R}^d)}\leq 2\|fv_0\|^\theta_{L^{p_0,\infty}(\mathbb{R}^d)}\|fv_1\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

证明。 由于 $fv_i \in L^{p_i,\infty}(\mathbb{R}^d)$ 对 $i = 0, 1$ 成立，因此我们有

$$M_i := \|fv_i\|_{L^{p_i,\infty}} = \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot \big(m_{fv_i}(\lambda)\big)^{1/p_i} < \infty,$$

其中 $m_g(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| > \lambda\}|$ 表示分布函数 .

固定 $\lambda > 0$。我们将满足 $|f(x)v_\theta(x)| > \lambda$ 的集合分解为

$$\begin{aligned}&\big\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)|v_0(x)^\theta v_1(x)^{1-\theta} > \lambda\big\}\\ &\subset \big\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)|v_0(x) > \epsilon^{\theta-1}\lambda^\alpha\big\} \bigcup \big\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)|v_1(x) > \epsilon^\theta \lambda^\beta\big\},\end{aligned}$$

参数 α， β， $\epsilon > 0$ 稍后选定。定义

$$\alpha = \frac{p_\theta}{p_0}, \qquad \beta = \frac{p_\theta}{p_1}.$$

Then

$$\alpha\theta + \beta(1-\theta) = \frac{p_\theta}{p_0}\theta + \frac{p_\theta}{p_1}(1-\theta) = p_\theta\left(\frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}\right) = p_\theta \cdot \frac{1}{p_\theta} = 1.$$

采用这样的 α 和 β 取值，我们得到

$$m_{fv_\theta}(\lambda) \le m_{fv_0}\big(\epsilon^{\theta-1}\lambda^\alpha\big) + m_{fv_1}\big(\epsilon^\theta\lambda^\beta\big).$$

利用弱 L^{p_i} 界，

$$\begin{aligned}m_{fv_0}\big(\epsilon^{\theta-1}\lambda^\alpha\big) &\le \frac{M_0^{p_0}}{\epsilon^{(\theta-1)p_0}\lambda^{\alpha p_0}} = \frac{M_0^{p_0}}{\epsilon^{(\theta-1)p_0}\lambda^{p_\theta}},\\ m_{fv_1}\big(\epsilon^\theta\lambda^\beta\big) &\le \frac{M_1^{p_1}}{\epsilon^{\theta p_1}\lambda^{\beta p_1}} = \frac{M_1^{p_1}}{\epsilon^{\theta p_1}\lambda^{p_\theta}},\end{aligned}$$

因为 $\alpha p_0 = p_\theta$ 和 $\beta p_1 = p_\theta$。 根据以下条件选取 $\epsilon > 0$

$$\epsilon = \Big(\frac{M_1^{p_1}}{M_0^{p_0}}\Big)^{\frac{p_\theta}{p_0 p_1}}.$$

Then

$$\frac{M_0^{p_0}}{\epsilon^{(\theta-1)p_0}} = \frac{M_1^{p_1}}{\epsilon^{\theta p_1}} = M_0^{\theta p_\theta} M_1^{(1-\theta)p_\theta}.$$

因此,

$$m_{fv_\theta}(\lambda) \le 2M_0^{\theta p_\theta} M_1^{(1-\theta)p_\theta},$$

因此

$$\lambda\left(m_{fv_\theta}(\lambda)\right)^{1/p_\theta} \le 2M_0^\theta M_1^{1-\theta}.$$

对所有 $\lambda > 0$ 取上确界，得到

$$\|fv_\theta\|_{L^{p_\theta,\infty}(\mathbb{R}^d)} \le 2M_0^\theta M_1^{1-\theta} < \infty.$$

因此 $fv_\theta \in L^{p_\theta,\,\infty}(\mathbb{R}^d)$。 □

注 4.5. 当 $v_0 = v_1$ 时，定理 *4.4* 中的不等式恢复了强勒贝格空间中的经典马尔可维奇插值估计:

$$\|fv_\theta\|_{L^{p_\theta}(\mathbb{R}^d)} \le 2\,\|fv_0\|^\theta_{L^{p_0,\infty}(\mathbb{R}^d)} \|fv_1\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

4.3. 定理 1.2 充分性部分的证明。 当 $\theta = 0$ 时，只需应用条件 (1.3) 和弱勒贝格空间版本的 Hölder 不等式。当 $\theta = 1$ 时，我们只需使用条件 (1.3)，并结合定理 4.3。

现在考虑 $0 < \theta < 1$ 的情形。取 $p_0 \geq p$ 和 $\gamma_0 \leq \gamma_2$，使得

$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{q}, \qquad \gamma_1 = \theta\gamma_0 + (1-\theta)\gamma_3.$$

由于条件 (1.3) 和 (1.4)，这样的数 p_0 和 γ_0 存在。此外，条件 (1.3) 蕴含恒等式

$$1 - \frac{d}{p} + \frac{d}{p_0} = \gamma_2 - \gamma_0, \tag{4.2}$$

条件 (1.9) 蕴含

$$\gamma_0 \geq -\frac{d}{p_0}. \tag{4.3}$$

结合条件 (4.2) 和 (4.3)，逐点估计 (1.13) 与定理 4.3 可得

$$\big\||x|^{\gamma_0} f\big\|_{L^{p_0,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \big\||x|^{\gamma_0} I_1(|\nabla f|)\big\|_{L^{p_0,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \big\||x|^{\gamma_2}\nabla f\big\|_{L^{p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.4}$$

应用指数为 θ 的定理 4.4，得到

$$\big\||x|^{\gamma_1} f\big\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \big\||x|^{\gamma_0} f\big\|^{\theta}_{L^{p_0,\infty}(\mathbb{R}^d)} \big\||x|^{\gamma_3} f\big\|^{1-\theta}_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.5}$$

最后，结合 (4.4) 和 (4.5) 即得所需的不等式。 □

5. Further results

本节探讨弱型 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 插值不等式的不同形式。

定理 5.1. 假设 $s, p, q, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \theta$ 满足 $s, p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2}{d} < 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d} > 0, \qquad \frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d}\Big),$$

and

$$\gamma_1 \leq \frac{\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_3}{2}.$$

那么存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\big\| |x|^{\gamma_1} f \big\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \big\| |x|^{\gamma_2}\nabla f \big\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \big\| |x|^{\gamma_3} f \big\|^{\frac{1}{2}}_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

and

$$\big\| |x|^{\gamma_1} f \big\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \big\| |x|^{\gamma_2} f \big\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \big\| |x|^{\gamma_3}\nabla f \big\|^{\frac{1}{2}}_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

定理 5.2. 假设 $s, p, q, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \theta$ 满足 $s, p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2}{d} < 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d} \geq 0, \qquad \frac{1}{s} + \frac{\gamma_1}{d} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} + \frac{\gamma_2 - 1}{d}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{q} + \frac{\gamma_3}{d}\Big),$$

and

$$\gamma_1 \leq \frac{\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_3}{2}.$$

于是存在常数 $C > 0$，使得

$$\big\| |x|^{\gamma_1} f \big\|_{L^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq C \big\| |x|^{\gamma_2} f \big\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \big\| |x|^{\gamma_3} \nabla f \big\|^{\frac{1}{2}}_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

为证明定理 5.1 和 5.2，我们必须首先建立双线性分数阶积分的有界性。令 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $0 < \alpha < md$，多线性分数阶积分定义为

$$\mathcal{I}_{\alpha,m}(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^m} \frac{f_1(y_1) \cdots f_m(y_m)}{\big(|x - y_1|^2 + \cdots + |x - y_m|^2\big)^{\frac{md-\alpha}{2}}} dy_1 \cdots dy_m.$$

给定二进网格 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}$ 中的稀疏族 $\mathcal{S}$。定义关于 $\mathcal{S}$ 的二进分数阶积分为

$$\mathcal{I}^{\mathcal{S}}_{\alpha,m}(\vec{f})(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} |Q|^{\frac{\alpha}{d} - m} \prod_{i=1}^{m} \int_Q f_i(y_i) dy_i \cdot \chi_Q(x).$$

在 [19], 中，Moen 证明了对于由非负函数组成的任意向量 $\vec{f}$，以下结论成立:

$$\mathcal{I}_{\alpha,m}(\vec{f})(x) \leq C \sum_{Q \in \mathscr{D}} \frac{l(Q)^\alpha}{|3Q|^m} \int_{(3Q)^m} f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) d\vec{y} \chi_Q(x).$$

存在 2^d 个稀疏族 $\{\mathcal{S}_t\}_{t \in \{0,1/3\}^d}$，使得

$$\mathcal{I}_{\alpha,m}(\vec{f})(x) \lesssim \sum_{t \in \{0,1/3\}^d} (\mathcal{I}^{\mathcal{S}_t}_{\alpha,m})(\vec{f})(x). \tag{5.1}$$

为了证明定理 5.1 和定理 5.2，引入以下两类权函数。

定义 5.3。 设 $0 \leq \alpha < d$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $0 < p, q < \infty$ 和 $\vec{p} = (p_1, p_2)$ 满足 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$。若向量权$(u, \vec{w}) = (u, w_1, \ldots, w_m)$ 属于类 $\mathcal{A}^\alpha_{\vec{p},q} := \mathcal{A}^\alpha_{\vec{p},q}(\mathbb{R}^d)$，则

$$[\mu, \vec{w}]_{\mathcal{A}^\alpha_{\vec{p},q}} = \sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\mu \chi_Q\|^{\frac{1}{q}}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1(y_1)^{1 - p_1'} \, dy_1 \right)^{\frac{1}{p_1'}} \|w_2^{-\frac{1}{p_2}} \chi_Q\|_{L^{p_2',1}(\mathbb{R}^d)},$$

其中，上确界取遍所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^d$，而 $L^{p_2',1}(\mathbb{R}^d)$ 表示洛伦兹空间。

定义 5.4。 设 $0 \le \alpha < d$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $0 < p, q < \infty$ 和 $\vec{p} = (p_1, p_2)$ 满足 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$。若向量权 $(u, \vec{w}) = (u, w_1, \dots, w_m)$ 属于类 $\mathcal{A}^{\alpha}_{\vec{p},q} := \mathcal{A}^{\alpha}_{\vec{p},q}(\mathbb{R}^d)$ ，则

$$[\mu, \vec{w}]_{\mathcal{A}^{\alpha,*}_{\vec{p},q}} = \sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|\mu \chi_Q\|^{\frac{1}{q}}_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1(y_1)^{1-p_1'} \, dy_1 \right)^{\frac{1}{p_1'}} \|w_2^{-\frac{1}{p_2}} \chi_Q\|_{L^{p_2',1}(\mathbb{R}^d)}.$$

定理 5.5. 设 $0 \le \alpha < d$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $p_1 \le q < \infty$, $\vec{p} = (p_1, p_2)$ 满足 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$。若 $(\mu, \vec{w}) \in \mathcal{A}^{\alpha}_{(p_1,p_2)\, q}$ 满足 $\mu, w_1^{1-p_1'} \in A_\infty$，则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|\mu^{\frac{1}{q}} \mathcal{I}_{\alpha,2}(f_1, f_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \le C \|w_1^{\frac{1}{p_1}} f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d)} \|w_2^{\frac{1}{p_2}} f_2\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

证明。 我们的方法与 [27], 类似，不过需要指出的是，他们的方法仅适用于一类特定的权函数。

令 $\rho_1 = (p_1' r_1)'$，其中 r_1 是权 $w_1^{1-p_1'} \in A_\infty$ 的精确反向 Hölder 不等式中的指数。类似地，令 $\rho = (qr)'$，其中 r 是权 $\mu \in A_\infty$ 的精确反向 Hölder 不等式中的指数。

利用对偶性和 $\mathcal{I}^{\mathcal{S}}_{\alpha,2}$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\mu^{\frac{1}{q}} \mathcal{I}^{\mathcal{S}}_{\alpha,2}(f_1, f_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \\
&= \sup_{\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}=1} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}^{\mathcal{S}}_{\alpha,m}(f_1, f_2)(x) h(x) \mu(x)^{\frac{1}{q}} \, dx \Big| \\
&= \sup_{\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}=1} \sum_{Q \in \mathcal{S}} |Q|^{\frac{\alpha}{d}-2} \Big(\prod_{i=1}^2 \int_Q |f_i(y_i)| \, dy_i \Big) \Big| \int_Q h(x) \mu(x)^{\frac{1}{q}} \, dx \Big|.
\end{aligned}$$

对每个积分应用 Hölder 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{Q \in S} |Q|^{\frac{\alpha}{d}+1} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)|^\rho \, dx \Big)^{\frac{1}{\rho}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \mu(x)^{\frac{\rho'}{q}} \, dx \Big)^{\frac{1}{\rho'}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1(y_1)^{\frac{\rho_1}{p_1}} |f_1(y_1)|^{\rho_1} \, dy_1 \right)^{\frac{1}{\rho_1}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1(y_1)^{-\frac{\rho_1'}{p_1}} \, dy_1 \right)^{\frac{1}{\rho_1'}} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{\|w_2^{\frac{1}{p_2}} f_2 \chi_Q\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}}{|Q|^{\frac{1}{p_2}}} \frac{\|w_2^{-\frac{1}{p_2}} \chi_Q\|_{L^{p_2',1}(\mathbb{R}^d)}}{|Q|^{\frac{1}{p_2'}}} \right].
\end{aligned}$$

利用 ρ 和 ρ_1 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\lesssim [\mu]_{A_\infty}^{\frac{1}{q}}[w_1^{1-p_1'}]_{A_\infty}\sum_{Q\in S}|Q|^{\frac{\alpha}{d}+1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|h(x)|^\rho\,dx\Big)^{\frac{1}{\rho}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\mu(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\times\left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y_1)^{\frac{\rho_1}{p_1}}|f_1(y_1)|^{\rho_1}\,dy_1\right)^{\frac{1}{\rho_1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y_1)^{1-p_1'}\,dy_1\right)^{\frac{1}{p_1'}}\right]\\
&\quad\times\left[\frac{\|w_2^{\frac{1}{p_2}}f_2\chi_Q\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}}{|Q|^{\frac{1}{p_2}}}\frac{\|w_2^{-\frac{1}{p_2}}\chi_Q\|_{L^{p_2',1}(\mathbb{R}^d)}}{|Q|^{\frac{1}{p_2'}}}\right].
\end{aligned}$$

注意到 $|Q|\le 2|E(Q)|$，则

$$\begin{aligned}
&\lesssim [\mu]_{A_\infty}^{\frac{1}{q}}[w_1^{1-p_1'}]_{A_\infty}[\mu,\vec{w}]_{A^\alpha_{(p_1,p_2),q}}\|w_2^{\frac{1}{p_2}}f_2\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\times\sum_{Q\in S}|E(Q)|^{\frac{1}{q'}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|h(x)|^\rho\,dx\Big)^{\frac{1}{\rho}}\\
&\quad\times|E(Q)|^{\frac{1}{p_1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y_1)^{\frac{\rho_1}{p_1}}|f_1(y_1)|^{\rho_1}\,dy_1\right)^{\frac{1}{\rho_1}}.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q'}\ge 1$，我们应用 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned}
&\lesssim [\mu]_{A_\infty}^{\frac{1}{q}}[w_1^{1-p_1'}]_{A_\infty}[\mu,\vec{w}]_{A^\alpha_{(p_1,p_2),q}}\|w_2^{\frac{1}{p_2}}f_2\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\times\left\{\sum_{Q\in S}|E(Q)|\Big[\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|h(x)|^\rho\,dx\Big)^{\frac{1}{\rho}}\Big]^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}}\\
&\quad\times\left\{\sum_{Q\in S}|E(Q)|\Big[\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y_1)^{\frac{\rho_1}{p_1}}|f_1(y_1)|^{\rho_1}\,dy_1\Big)^{\frac{1}{\rho_1}}\Big]^{p_1}\right\}^{\frac{1}{p_1}}.
\end{aligned}$$

由极大算子 M 的有界性，我们得出

$$\begin{aligned}
&\|\mu^{\frac{1}{q}}\mathcal{I}^{\mathcal{S}}_{\alpha,2}(f_1,f_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\\
&\lesssim\sup_{\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}=1}\|w_2^{\frac{1}{p_2}}f_2\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}\,\|M(|h|^\rho)\|^{\frac{1}{\rho}}_{L^{\frac{q'}{\rho}}(\mathbb{R}^d)}\,\|M(w_i^{\frac{\rho_1}{p_1}}|f_1|^{\rho_1})\|^{\frac{1}{\rho_1}}_{L^{\frac{p_1}{\rho_1}}(\mathbb{R}^d)}\\
&\lesssim\|w_2^{\frac{1}{p_2}}f_2\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}\|w_1^{\frac{1}{p_1}}f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

定理的证明完成。 □

定理 *5.1* 的证明。由引理 6.2 可得

$$\||x|^{\gamma_1}\mathcal{I}^{\mathcal{S}}_{\alpha,2}(f_1,f_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim\||x|^{\gamma_2}f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d)}\||x|^{\gamma_3}f_2\|_{L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.2}$$

设 ∇_{2n} 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的梯度。根据 [26,第 125], 页中的论证可得

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\nabla_{2n}\big(f(x-y)g(x-z)\big)}{\big(|y|+|z|\big)^{2n-1}}dydz\\ &\lesssim \mathcal{I}_{1,2}(|\nabla f|,|g|)(x)+\mathcal{I}_{1,2}(|f|,|\nabla g|)(x).\end{aligned}$$

也就是说,

$$|f(x)|^2 \lesssim \mathcal{I}_{1,2}(|\nabla f|,|f|)(x). \tag{5.3}$$

结合估计式 (5.2) 和 (5.3), 证明得证。 □

注 5.6. 定理 *5.1* 和定理 *5.2* 的证明类似, 因此我们省略后者的证明。

6. 幂权的技术引理

众所周知, 对于 $1<p<\infty$, $|x|^a\in A_p$ 当且仅当 $-d<a<d(p-1)$, 并且$|x|^a\in A_\infty$ 当且仅当 $-d<a<\infty$。

现在我们来考察哪些实数 a,b 使包含关系 $(|x|^a,|x|^b)\in A^\alpha_{p,q}$ (或 $A^{\alpha,p}{}^*_{,q}$) 成立。

引理 6.1. 设 $\alpha,a,b\in\mathbb{R}$ 和 $1\le p,q<\infty$。对于幂权 $\mu(x)=|x|^a$ 和$w(x)=|x|^b$, 以下结论成立:

(1) $(\mu,w)\in A^\alpha_{p,q}$ 当且仅当

$$\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q}=\frac{b}{p}-\frac{a}{q}\ge 0,\qquad a>-d,$$

and

$$b<d(p-1)\ \ for\ p>1,\qquad b\le 0\ \ for\ p=1.$$

(2) $(\mu,w)\in A^{\alpha,p}{}^*_{,q}$ 当且仅当

$$\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q}=\frac{b}{p}-\frac{a}{q}\ge 0,\qquad a\ge -d,$$

and

$$b<d(p-1)\ \ for\ p>1,\qquad b\le 0\ \ for\ p=1.$$

证明。 我们只证明 (1) 中的情形 $p=1$ 和 (2) 中的情形 $p>1$; 其余情形可用类似论证得出。

对于 $p=1$ 的 (1) 的证明。 设 $1\le q<\infty$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$。我们需要刻画满足以下条件的三元组 (a,b,α):

$$\sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{d}-1}\Big(\int_Q |x|^a\,dx\Big)^{1/q}\big\||\cdot|^{-b}\chi_Q\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}<\infty.$$

局部可积性要求 $a>-d$ 和 $b\le 0$。只需在球上取上确界, 而不必在立方体上取上确界。沿用 [12], 中的思路, 我们将球分为两种类型。若球 $B=B(x_0,\ r)$ 满足 $2r<|x_0|$, 则称其为*I* 型; 若满足 $2r\ge|x_0|$, 则称其为*II* 型。

I 型 球。对于 $x \in B$，我们有 $\frac{1}{2}|x_0| \le |x| \le \frac{3}{2}|x_0|$，因此 B 上的 $|x| \sim |x_0|$。于是

$$|B|^{\frac{\alpha}{d}-1}\Big(\int_B |x|^a\,dx\Big)^{1/q}\big\||\cdot|^{-b}\chi_B\big\|_{L^\infty} \sim r^{\alpha-d+\frac{d}{q}}\,|x_0|^{\frac{a}{q}-b}.$$

固定 $x_0 \neq 0$ 并令 $r \to 0^+$，得到必要条件

$$\alpha - d + \frac{d}{q} \ge 0. \tag{6.1}$$

取 $r = |x_0|/4$，得到第二个条件

$$\alpha - d + \frac{d}{q} + \frac{a}{q} - b = 0. \tag{6.2}$$

若 (6.1) 和 (6.2) 均成立，则对 I 型球取上确界是有限的。

*II*型球。对于这样的球 $B(x_0,\ r)$，我们有 $B(x_0,\ r) \subset B(0,\ 3r)$；因此只需考虑以原点为中心的球。对于 $B(0,\ R)$，我们计算

$$\begin{aligned}&|B(0,R)|^{\frac{\alpha}{d}-1}\Big(\int_{B(0,R)} |x|^a\,dx\Big)^{1/q}\big\||\cdot|^{-b}\chi_{B(0,R)}\big\|_{L^\infty}\\ &\sim R^{\alpha-d}\Big(\int_0^R \rho^{a+d-1}\,d\rho\Big)^{1/q} R^{-b} \sim R^{\alpha-d+\frac{a+d}{q}-b}.\end{aligned}$$

这恰好在 (6.2) 成立时对所有 $R > 0$ 保持有界。汇总所得条件，即可得到针对 $A^{\alpha}_{1,\ q}$的既定刻画。

证明 **（2）对于** $p > 1$。现在令 $1 < p,\ q < \infty$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。我们研究条件

$$\sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{d}-1}\big\||\cdot|^a\chi_Q\big\|^{1/q}_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\Big(\int_Q |x|^{-\frac{bp'}{p}}\,dx\Big)^{1/p'} < \infty.$$

局部可积性要求 $a \ge -d$ 和 $b < d(p-1)$。同样，我们可以将立方体替换为球，并将其分为 I 型和 II 型。

I 型球。 利用 $|x| \sim |x_0|$ 在 $B = B(x_0,\ r)$ 上，我们得到

$$|B|^{\frac{\alpha}{d}-1}\big\||\cdot|^a\chi_B\big\|^{1/q}_{L^{1,\infty}}\Big(\int_B |x|^{-\frac{bp'}{p}}\,dx\Big)^{1/p'} \sim r^{\alpha-d+\frac{d}{q}}\,|x_0|^{\frac{a}{q}-\frac{b}{p}}.$$

令 $r \to 0^+$ 趋于.....且固定 $x_0 \neq 0$，得到

$$\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{q} \ge 0. \tag{6.3}$$

取 $r = |x_0|/4$ 力

$$\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{q} + \frac{a}{q} - \frac{b}{p} = 0. \tag{6.4}$$

*II*型球。和之前一样，我们将问题化归为球 $B(0,\ R)$。直接计算可得

$$|B(0,R)|^{\frac{\alpha}{d}-1}\big\||\cdot|^a\chi_{B(0,R)}\big\|^{1/q}_{L^{1,\infty}}\Big(\int_{B(0,R)} |x|^{-\frac{bp'}{p}}\,dx\Big)^{1/p'} \sim R^{\alpha+\frac{a+d}{q}-\frac{b+d}{p}}.$$

当且仅当满足（6.4）时，这对所有 $R > 0$ 有界。结合局部可积性要求，这给出了 $A^{\alpha,p}{}^{*}_{,\ q}$ 对 $p > 1$ 的刻画。□

采用与上述论证类似的方法，并结合

$$\|\chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}^d)} \sim r^{\frac{d}{p}}, \qquad \big\| |\cdot|^b \chi_{B(0,r)} \big\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}^d)} \sim r^{\frac{d}{p}+b} \quad (b > -\tfrac{d}{p}),$$

我们得到以下引理。

引理 6.2. 设 $\alpha, a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ 和 $1 < p_1, p_2, q < \infty$。对于幂权 $\mu(x) = |x|^a, w_1(x) = |x|^{b_1}$ 和 $w_2(x) = |x|^{b_2}$, , 以下陈述成立：

(1) 权 $(\mu, (w_1, w_2)) \in A^{\alpha}_{(p_1,p_2)\,q}$ 当且仅当

$$\alpha - \frac{d}{p_1} - \frac{d}{p_2} + \frac{d}{q} = \frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} - \frac{a}{q} \geq 0, \quad a > -d, \quad b_1 < d(p_1 - 1), \quad b_2 < d(p_2 - 1).$$

(2) 权 $(\mu, (w_1, w_2)) \in A^{\alpha}_{,*\,(p_1,p_2)\,q}$ 当且仅当

$$\alpha - \frac{d}{p_1} - \frac{d}{p_2} + \frac{d}{q} = \frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} - \frac{a}{q} \geq 0, \quad a \geq -d, \quad b_1 < d(p_1 - 1), \quad b_2 < d(p_2 - 1).$$

致谢

本研究部分得到安徽省高等学校科学研究重点项目（编号：2023AH050145）和国家自然科学基金（编号：12101010）的资助。

参考文献

[1] *H. Bahouri, J.-Y. Chemin* 和 *I. Gallagher*，《更精确的 *Hardy* 不等式》（法文） [更精确的 *Hardy* 不等式], 《巴黎科学院数学报告》*341 (2005), 89–92.*[2] *H. Bahouri, J.-Y. Chemin* 和 *I. Gallagher*，改进的 *Hardy* 不等式，《比萨高等师范学校科学学报》*5 (2006), 375–391.*[3] *M. Badiale* 和 *G. Tarantello*，一种 *Sobolev-Hardy* 不等式及其在天体物理学中一个非线性椭圆方程上的应用，《数学分析与力学档案》*163 (2002), 259–293.*[4] *L. Caffarelli, R. Kohn* 和 *L. Nirenberg*，*Navier–Stokes* 方程适当弱解的部分正则性，《纯粹与应用数学通讯》*35 (1982), 771–831.*[5] *X. Cabré* 和 *X. Ros-Oton*，单项式权下的 *Sobolev* 不等式与等周不等式，《微分方程杂志》*255 (2013), 4312–4336.*[6] *X. Cabré, X. Ros-Oton* 和 *J. Serra*，通过 *ABP* 方法得到的最佳等周不等式，《欧洲数学会杂志》*18 (2016), 2971–2998.*[7] *F. Catrina* 和 *Z. Q. Wang*，关于 *Caffarelli–Kohn–Nirenberg* 不等式：最佳常数、极值函数的存在（与不存在）及对称性，《纯粹与应用数学通讯》*54 (2001), 229–258.*[8] *D. Cruz-Uribe*，分数阶积分算子及交换子的双权不等式，载于：《数学分析进阶课程 *VI*》，第六届国际暑期学校论文集，第 *25–85* 页，世界科学出版社，*2017.*[9] *J. Dolbeault, M. J. Esteban* 和 *M. Loss*，通过圆柱体和欧氏空间上的非线性流探讨刚性与对称性破缺，《数学发明》*206 (2016), 397–440.*[10] *R. Duarte* 和 *J. D. Silva*，加权 *Gagliardo-Nirenberg* 插值不等式，《泛函分析杂志》*285 (2023), 110009.*[11] *S. Fackler, T. P. Hytönen* 和 *N. Lindemulder*，算子值 *Fourier* 乘子的加权估计，《数学汇刊》*71 (2020), 511–548.*[12] *L. Grafakos*，《经典 *Fourier* 分析》，第三版，《数学研究生教材》*249*，*Springer*，*2014.*[13] *T. P. Hytönen* 和 *C. Pérez*，涉及 A_∞ 的锐加权界，《偏微分方程分析》*6 (2013), 777–818.*[14] *A. K. Lerner*，涉及稀疏算子的逐点估计，《纽约数学杂志》*22 (2016), 341–349.*

[15] *A. K. Lerner* 和 *S. Ombrosi*，关于逐点稀疏控制的一些评述，几何分析杂志 *30 (2020), 1011–1027.* [16] *C.-S. Lin*，加权插值不等式，《偏微分方程通讯》*11 (1986), 1515–1538.*[17] *K. Li, S. Ombrosi* 和 *C. Pérez*，证明 *E. Sawyer* 关于加权混合弱型估计猜想的一个推广，《数学年刊》*374 (2019), 907–929.*[18] *Y. Li* 和 *X. Yan*，各向异性 *Caffarelli–Kohn–Nirenberg* 型不等式，《数学进展》*419 (2023), 108958.*[19] *K. Moen*，多线性分数阶积分的加权不等式，《数学汇刊》*60 (2009), 213–238.*[20] *D. S. McCormick, J. C. Robinson* 和 *J. L. Rodrigo*，一个耦合抛物—椭圆模型的存在性与唯一性及其在磁弛豫中的应用，《数学分析与力学档案》*214 (2014), 503–523.*[21] *B. Muckenhoupt*，*Hardy* 极大函数的加权范数不等式，《美国数学会汇刊》*165 (1972), 207–226.*[22] *B. Muckenhoupt* 和 *R. L. Wheeden*，关于 *Hardy–Littlewood* 极大函数和 *Hilbert* 变换的一些加权弱型不等式，《印第安纳大学数学杂志》*26 (1977), 801–816.*[23] *H. Nguyen* 和 *M. Squassina*，分数阶卡法雷利–科恩–尼伦伯格不等式，《泛函分析杂志》*274 (2018), 2661–2672.*[24] *H. Nguyen* 和 *M. Squassina*，关于 *Hardy* 不等式和 *Caffarelli–Kohn–Nirenberg* 不等式，《数学分析杂志》*139 (2019), 773–797.*[25] *B. Sweeting*，关于满足极大算子和分数阶极大算子弱型不等式的那些权，*arXiv:2410.0403, 2024.*[26] *E. Stein*，《奇异积分与函数的可微性》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，*1970.*[27] *D. Wang* 和 *Q. Xue*，多线性分数阶积分的部分多重加权不等式，已投稿。

Dinghuai Wang：中华人民共和国安徽省芜湖市安徽师范大学数学与统计学院，邮编 241002电子邮箱：Wangdh1990@126.com