arXiv:2602.04614v1 [math.PR] 4 Feb 2026

经典系综的光滑多迹统计：大 N 展开、累积量与矩阵积分。

BENOÎT COLLINS 和 MANASA NAGATSU

摘要。我们考虑形如 $\mathbb{E}[\mathrm{tr}\, h_1(X_1^N)\cdots \mathrm{tr}\, h_r(X_r^N)]$, 的期望，其中 X_i^N 是若干相互独立的经典随机矩阵中的自伴多项式， h_i 是光滑测试函数。借助 Chen、Garza-Vargas、Tropp 和 van Handel 最近建立的多项式逼近与伯恩斯坦型不等式框架，我们得到这些量的大 N 展开。作为上述结果的应用，我们证明了光滑线性统计量的累积量的高阶渐近消失，建立了中心极限定理，并展示了具有光滑势的矩阵积分的自由能和可观测量存在形式渐近展开。

目录

1. 引言 1 论文结构 3 致谢 3 2. 预备知识 3 2.1. 记号与代数预备知识 3 2.2. 随机矩阵的定义与渐近自由性 4 2.3. 技术预备结果 6 3. 多迹高斯系综的渐近展开 7 3.1. 多迹GUE情形 7 3.2. 多迹GOE与GSE的渐近展开 15 4. 紧矩阵群上Haar分布随机变量的渐近展开 16 4.1. Haar酉情形 16 4.2. 正交与辛情形 22 5. 渐近展开的应用 23 5.1. 累积量的高阶渐近消失 23 5.2. 中心极限定理 26 5.3. 矩阵积分 29 参考文献 32

1. 引言

维数 N 趋于无穷时，大型随机矩阵的渐近行为是现代概率论和数学物理中的核心课题。许多矩阵系综的一个基本特征是，迹的期望存在拓扑展开（或 $1/N$ 展开）。具体而言，对于这些随机矩阵 $X_1^N,\ldots,X_d^N$，形如 $\mathbb{E}[\mathrm{tr}\ P(X^N)]$ 的量通常可按 N^{-1}（对于高斯酉系综，或 N^{-2}

由于对称性，Haar 分布的酉矩阵可按相应变量展开），其中各系数与图的计数有关。矩阵模型与物理模型或统计模型之间的这一联系已有研究，例如 [tH74,BIPZ78, HZ86]。

这些展开的存在性对于多项式测试函数而言早已确立。在多项式情形下，这些展开主要通过组合技巧推导得出，其中包括 Weingarten 演算，它为计算紧群（如酉群）上的积分提供了一种系统方法。Weingarten 演算理论最初是在理论物理背景下发展起来的 [Wei78], ，后来才得到数学上的形式化，参见例如[Col03、CS06]。

然而，将这些结果推广到更广泛的测试函数类别（例如光滑（C^∞）函数）面临着重大的分析挑战。对于具有光滑势的随机矩阵配分函数，Ercolani 和 McLaughlin [EM03] 运用黎曼–希尔伯特方法建立了配分函数的渐近性质。近年来，在随机矩阵强收敛的背景下，光滑测试函数渐近展开的研究取得了显著进展，参见例如文献 [Sch05、HTr12、Par23b、Par23a、CGVTvH25、CGVvH24]。特别是，Parraud 首先针对高斯酉系综建立了光滑函数统计量的渐近展开 [Par23b] ，随后又将结果推广至 Haar 分布的酉矩阵 [Par23a], ，成功弥合了代数组合结果与函数演算之间的鸿沟，并证明诸如 $\mathbb{E}[\mathrm{tr}\ f(P(\boldsymbol{X}^N))]$ 这样的量对于光滑 f均存在渐近展开。随后，Chen、Garza-Vargas、Tropp 和 van Handel 提出了一种基于多项式不等式和针对 $1/N$样本的最优插值界的新方法，用于研究渐近展开和强收敛 [CGVTvH25、CGVvH24]。他们的工作主要聚焦于大维数矩阵系数下多项式范数的强收敛，但其基础技术功能强大，也能得出渐近展开结果。

尽管这些研究聚焦于单迹 情形，我们将分析扩展到多重迹情形，处理如下形式的迹乘积的期望：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\, h_1(X_1^N)\cdots \mathrm{tr}\, h_r(X_r^N)\right],$$

其中，每个 $X_i^N = P_i$（独立随机矩阵）都是自伴多项式，而 h_i 是光滑测试函数。这类多迹可观测量对于分析系综的涨落性质不可或缺，包括协方差结构和高阶累积量；它们刻画了谱统计量的渐近独立性。

本文聚焦于相互独立的标准高斯系综和 Haar 分布矩阵。我们的分析主要依托 [CGVTvH25、CGVvH24], 所建立的强大框架，该框架主要基于尖锐的伯恩斯坦型不等式和基于“软”论证的插值方法。将分析扩展到多重迹情形，需要仔细追踪多线性结构，以及多个相互独立的随机矩阵与测试函数之间的相互作用。

通过将这些技术调整到我们的情形，我们建立了一种统一的方法，该方法：

(1) 通过广义多项式逼近，自然地处理多重迹 可观测量。(2) 在统一框架下同时处理无界（高斯系综）和有界 （按 Haar 分布的矩阵）两种情况，并利用近期文献中建立的有理伯恩斯坦不等式，处理酉群的有理结构。

作为主定理的应用，我们推导出三个关键结果：

（1）我们证明了光滑测试函数对应的累积量的高阶渐近消失，从而推广了二阶自由性的普适性。（2）我们为这些光滑线性统计量的涨落建立了中心极限定理（CLT）。（3）我们将结果应用于具有光滑势的矩阵积分，证明这类模型的自由能和可观测量存在形式渐近展开。

论文结构。 本文结构如下。第2节介绍必要的记号和定义，并回顾 [CGVvH24], 中的关键工具，包括伯恩斯坦不等式。第 3.1 节专门讨论高斯酉系综情形；我们建立先验界，并证明光滑多迹统计量的渐近展开。第 4.1 节讨论Haar酉情形，介绍期望的有理表达式，并应用有理伯恩斯坦不等式。最后，第5节展示主定理的应用，包括累积量的渐近消失、中心极限定理，以及具有光滑势的矩阵积分的形式展开。

致谢。 作者获得了JSPS科研资助基金（A类）第25H00593号，以及挑战性研究（探索性）第20K20882号和第23K17299号资助。他们感谢Ramon van Handel对本文初稿提出的宝贵意见。

2. 预备知识

2.1. 记号与代数预备知识。 本节中，我们将介绍所用的记号，并回顾一些有用的事实，特别是关于关联代数的内容，因为后文讨论累积量和矩阵积分时会用到这些知识。

全文中，我们使用记号 $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \ldots\}$，对于$N \in \mathbb{N}$，记作 $[N] := \{1, \ldots, N\}$。由 N 个字母组成的对称群记为 S_N，由 d 个生成元生成的自由群记为 F_d。我们用 $\mathbf{M}_N(\mathbb{C})$ 表示 $N \times N$ 阶复矩阵构成的空间。对于矩阵 M，我们用 $\mathrm{Tr}\ M$ 表示其迹，用 $\mathrm{tr}\ M := \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\ M$ 表示其归一化迹，并用 $\|M\|$ 表示其算子范数。除非另有说明，$C, c > 0$ 表示普适常数，其值可能随上下文而变。

我们回顾集合划分的定义，并参见 [Zvo97], [Rot64], [Sta97]。若 Z 是有限集，则 Z 的一个划分是由 $\pi = \{B_1, \ldots, B_r\}$ 组成的集合，其中各个子集 B_j 都是 Z 的非空两两不相交子集，且它们的并集为整个 Z。这些集合 B_j 称为划分的块，而 π 的块数记作 $\#\pi$。整数集 $[k] = \{1, \ldots, k\}$ 的所有划分构成的集合记作 $\mathrm{Part}(k)$，它关于偏序构成一个格；交运算 $\wedge$ 和并运算 $\vee$ 定义如下。

- 偏序 $\leq$：对于 $\pi_1,\ \pi_2 \in \mathrm{Part}(k)$，当且仅当 π_1 的每个块都包含于 π_2 的某个块中时，我们称 $\pi_1 \leq \pi_2$。最大划分记作 $1_k = \{\{1, \ldots, k\}\}$，最小划分记作 $0_k = \{\{1\} \ldots, \{k\}\}$。
- 交运算 $\wedge$：对于 $\pi_1,\ \pi_2 \in \mathrm{Part}(k)$，$\pi_1 \wedge \pi_2$ 是 π_1 和 π_2 的最大下界。
- 并运算 $\vee$：对于 $\pi_1,\ \pi_2 \in \mathrm{Part}(k)$，$\pi_1 \vee \pi_2$ 是 π_1 和 π_2 的最小上界。

我们在格 $\mathrm{Part}(k)$ 上定义关联代数，

$$I(\mathrm{Part}(k)) = \{f : \mathrm{Part}(k) \times \mathrm{Part}(k) \to \mathbb{C} \mid f(\pi_1, \pi_2) = 0 \text{ if } \pi_1 \not\leq \pi_2\}$$

其配备结合卷积 *，对于任意 $\pi_1,\ \pi_2 \in \mathrm{Part}(k)$,

$$f * g\left(\pi_1, \pi_2\right) := \sum_{\pi_3 : \pi_1 \leq \pi_3 \leq \pi_2} f\left(\pi_1, \pi_3\right) g\left(\pi_3, \pi_2\right).$$

$I(\mathrm{Part}(k))$ 的单位元为 δ，克罗内克δ,

$$\delta(\pi_1, \pi_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } \pi_1 = \pi_2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们将ζ函数 ζ 定义为

$$\zeta\left(\pi_1, \pi_2\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \pi_1 \leq \pi_2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对于 $\pi_1,\ \pi_2 \in \mathrm{Part}(k)$。

我们还引入莫比乌斯函数 Moeb。首先定义

$$\mathrm{Moeb}(0_k, 1_k) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

对于任意 $\pi_1,\ \pi_2 \in \mathrm{Part}(k)$，当我们假设 $\pi_2 = \{B_1, \ldots, B_{\#\pi_2}\}$，且每个块 B_i ofπ_2 被划分为 λ_i 个块（属于 π_1）时，格 $\mathrm{Part}(k)$ 中的区间 $[\pi_1, \pi_2]$ 同构于 $[0_{\lambda_1}, 1_{\lambda_1}] \times \cdots \times [0_{\lambda_{\#\pi_2}}, 1_{\lambda_{\#\pi_2}}]$。现在我们定义

$$\mathrm{Moeb}\left(\pi_1, \pi_2\right) = \prod_{i=1}^{\#\pi_2} \mathrm{Moeb}(0_{\lambda_i}, 1_{\lambda_i}) = \prod_{i=1}^{\#\pi_2} (-1)^{\lambda_i - 1}(\lambda_i - 1)!.$$

我们需要用到这样一个事实：莫比乌斯函数 Moeb 与ζ函数 ζ 的卷积积等于克罗内克δ δ,

$$\mathrm{Moeb} * \zeta = \delta. \tag{2.1}$$

我们称之为莫比乌斯反演公式。（参见 [Sta97] 第 3.7 节）

最后，我们使用多重指标记法$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$，$\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k)$。对于多重指标$\mathbf{i} = (i_1, \ldots i_k) \in \{1, \ldots, N\}^k$，我们将 $\mathbf{i}$ 视为一个层划分 $\Pi_{\mathbf{i}} \in \mathrm{Part}(k)$，使得 $1 \leq l,\ m \leq k$ 属于 $\Pi_{\mathbf{i}}$ 的同一个块，当且仅当 $i_l = i_m$。

2.2. **随机矩阵的定义与渐近自由性**。我们首先定义经典随机矩阵系综。

定义 2.1。高斯正交系综（GOE）和高斯酉系综（GUE）分别是定义在 $N \times N$ 实对称矩阵与复厄米矩阵空间上的概率测度，其相对于勒贝格测度的密度正比于：

$$\exp\left(-\frac{N}{4}\operatorname{Tr}(H^2)\right) \quad \text{(GOE)} \quad \text{and} \quad \exp\left(-\frac{N}{2}\operatorname{Tr}(H^2)\right) \quad \text{(GUE)}.$$

对于高斯辛系综（GSE），我们不直接处理四元数，而是将其表示为 2×2 复矩阵。我们将斜域 $\mathbb{H}$ 与以下基底张成的矩阵子代数对应起来：

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

在此等同下，$N \times N$ 四元数厄米矩阵的空间映射到 $2N \times 2N$ 复厄米矩阵的空间，H 由大小为 2×2的 N^2 分块组成，其中每个分块是{**1**、**i**、**j**、**k**}的线性组合。我们将这一自对偶矩阵空间记为 $\mathcal{H}_{2N}^{\mathrm{sp}}$。

定义2.2. 高斯辛系综定义为$\mathcal{H}_{2N}^{\mathrm{sp}}$ 上的概率测度，其相对于勒贝格测度的密度正比于：

$$\exp\left(-\frac{N}{2}\operatorname{Tr}(H^2)\right),$$

其中的迹是在 $2N$ 维表示上取的。

这些归一化方式经过选择，使得极限谱测度为支撑在 $[-2,2]$ 上的维格纳半圆律。这些高斯系综的一个基本性质是，其分布在相应对称群的共轭作用下保持不变。

我们还引入定义在经典紧群 U(N)、O(N) 和 Sp(N) 上的 Haar 分布随机矩阵（它们分别是酉矩阵、正交矩阵和辛矩阵群）。众所周知，这些群各自都存在唯一的左不变且右不变的概率测度，称为归一化 Haar 测度。

接下来，我们定义在随机矩阵模型的大-N 极限中出现的算子代数对应物。本文采用 C^*-概率空间（$\mathcal{A}$ τ）的框架，它由一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 和一个忠实迹 τ 构成。

定义 2.3。设（$\mathcal{A}$ τ）是一个 C^*-概率空间。

- 若一族元素 s_1，…， $s_d \in \mathcal{A}$ 彼此自由独立，且每个 s_i 都服从支撑于 $[-2,2]$ 上的标准半圆律，则称其为一个自由半圆族。
- 若一族元素 u_1，…， $u_d \in \mathcal{A}$ 彼此自由独立，且每个 u_i 都是谱分布为单位圆上的均匀测度的酉算子，则称其为一族自由 *Haar* 酉元。

关于自由独立性的全面论述，参见 [NS06], [MS17]。我们还要指出，这些抽象变量与经典随机矩阵之间的基本联系是由沃伊库列斯库建立的 [Voi91], ，他证明了相互独立的经典随机矩阵具有渐近自由性。现在我们重新表述渐近自由性在高斯酉系综和 Haar酉矩阵（或更一般地，由相互独立的 Haar酉旋转的常数矩阵）情形下的一个简单结果。

定理 2.4 （GUE 与 Haar 酉矩阵的渐近自由性）。 设 $\boldsymbol{G}^N = (G_1^N, \ldots, G_d^N)$ 为相互独立的 $N\times N$*GUE*矩阵，且 $\boldsymbol{U}^N = (U_1^N, \ldots, U_d^N)$ 为 $\mathrm{U}(N)$中的相互独立 *Haar* 分布随机矩阵。设 $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ 和 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ 分别为 （$\mathcal{A}$ τ）中的自由半圆族和自由 *Haar* 酉元族。

那么，对于任意非交换多项式 $P \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$，归一化迹按期望收敛如下：

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[\operatorname{tr} P(\boldsymbol{G}^N)\big] = (\operatorname{tr}\otimes\tau)\big[P(\boldsymbol{s})\big], \tag{2.2}$$

并且，对于任意非交换多项式 $P \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_d, x_1^*, \ldots, x_d^*\rangle$，我们还有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[\operatorname{tr} P(\boldsymbol{U}^N, \boldsymbol{U}^{N*})\big] = (\operatorname{tr}\otimes\tau)\big[P(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^*)\big]. \tag{2.3}$$

渐近自由性结果可以推广到一般的高斯随机矩阵，也可以使用 Weingarten 演算推广到其他 Haar 分布随机矩阵（参见 [Col03、CS06]）；关于这些渐近自由性的全面论述，参见 [NS06]。

2.3. **技术预备结果**。我们首先介绍一些记号和泛函分析约定，后文将反复使用这些内容。

设 $\mathcal{P}_q$ 为次数至多为 q 的实多项式空间 $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，并设 $\mathcal{P}$ 表示所有实多项式构成的空间。对于单变量函数 h，我们用 $h^{(m)}$ 表示其第 m 阶导数。设 K 为 $\mathbb{R}^r$的一个紧子集。我们用 $C^m(K)$表示函数 $\phi\colon K\to\mathbb{R}$构成的空间，这些函数可以延拓为 $\mathbb{R}^r$中 K 某个开邻域上的 C^m函数。对于 $\phi\in C^m(K)$，我们定义范数：

$$\|\phi\|_{C^m(K)} := \sum_{0\le|\boldsymbol{\alpha}|\le m}\sup_{\boldsymbol{x}\in K}|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(\boldsymbol{x})|,\qquad \|\phi\|_K := \|\phi\|_{C^0(K)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in K}|\phi(\boldsymbol{x})|. \tag{2.4}$$

这里，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r$是一个多重指标，$|\boldsymbol{\alpha}|=\sum_{j=1}^r\alpha_j$，且 $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_r}^{\alpha_r}$.

为后续使用，我们回顾几个体现 [CGVvH24]的一些关键思想的结果。

引理 2.5（伯恩斯坦不等式，[CGVvH24]中的引理 2.1）。对于任意 $h\in\mathcal{P}_q$ 和 $\delta>0$，有

$$|h^{(m)}(x)|\le\left(\frac{2q}{\delta\sqrt{1-(x/\delta)^2}}\right)^m\|h\|_{[-\delta,\delta]}\quad \textit{for all } x\in(-\delta,\delta).$$

引理 2.6（从 $\frac{1}{N}$ 个样本插值，[CGVvH24]中的命题 3.1）。我们有

$$\|h\|_{[0,\delta]}\le C\sup_{\frac{1}{N}\le 2\delta}|h(\tfrac{1}{N})|$$

对于每个 $q\in\mathbb{N}$、$h\in P_q$ 和 $0\le\delta\le\frac{1}{24q}$，其中 C 是一个普适常数。

与上述关注多项式的引理不同，下面的引理使我们能够控制有理函数；当需要借助 Weingarten 演算时，这将很有用。

引理 2.7（有理伯恩斯坦不等式，[CGVvH24]中的引理 7.5）。设 p，$q\in\mathbb{N}$ 满足 $p\ge q$，令 $f\in\mathcal{P}_p$，并定义有理函数 $r:=\frac{f}{g_q}$ 其中 g_q 如（4.4）中所定义。则

$$\frac{1}{m!}\|r^{(m)}\|_{[-\frac{1}{cp},\frac{1}{cp}]}\le\left(\mathrm{e}^{-p}(Cp)^m+\frac{(Cp)^{2m}}{m!}\right)\|r\|_{I_q}, \tag{2.5}$$

对于所有 $m\ge 1$，其中 c、C 是普适常数，且 $I_q:=\left\{\frac{1}{N}:\ N\in\mathbb{Z},\ |N|>q\right\}$。

本文的许多结果都依赖于 k-线性形式的连续性，以及它们在稠密子空间（通常是多项式向量空间）上的逼近。下面这个初等引理对线性映射而言是经典结果，它阐明了在各种巴拿赫空间中反复使用的技巧。

引理 2.8（有界多重线性映射的延拓）。设 H 是一个范数为$\|\cdot\|$的巴拿赫空间。设 V是 H 的稠密向量子空间。设 $\nu\colon V^k\to\mathbb{C}$ 是一个 k线性映射，使得对于任意 $x_1,\ldots,x_k\in V$，

$$|\nu(x_1,\ldots,x_k)|\le\prod_{i=1}^k\|x_i\|.$$

于是，ν 可唯一延拓为连续的 k线性映射 $\tilde{\nu}\colon H^k\to\mathbb{C}$，并满足相同的界：

$$|\tilde{\nu}(x_1,\ldots,x_k)|\le\prod_{i=1}^k\|x_i\|\quad \textit{for all } x_1,\ldots,x_k\in H.$$

特别地，若 $\nu\colon V^k\to\mathbb{C}$ 是一个 k-线性映射，使得对任意 $x_1,\ldots,x_k\in V$，$\nu(x_1,\ldots,x_k)=0$，则 $\nu=0$ 是它到 H^k的唯一有界 k-线性延拓

证明。 由于 V 在 H中稠密，积空间 V^k 关于积拓扑在 H^k 中稠密。因为 H^k 是度量空间且 $\mathbb{C}$ 是豪斯多夫的，任意两个在稠密子集上一致的连续函数在整个空间上必定相同。因此，若连续延拓存在，则它是唯一的。

设 $x_1, \dots, x_k$ 是 H 中的任意向量。由于 V 在 H 中稠密，对于每个指标 $i \in \{1, \dots, k\}$，都存在一个序列 $(x_i^{(n)})_n \subset V$，使得其范数中的 $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$。

我们定义标量序列 $S_n = \nu(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)})$。我们声称 (S_n) 是 $\mathbb{C}$ 中的柯西序列。考虑其差：

$$|\nu(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) - \nu(x_1^{(m)}, \dots, x_k^{(m)})|$$

利用裂项求和论证，我们可以将该差表示为：

$$\nu(x_1^{(n)}, \dots) - \nu(x_1^{(m)}, \dots) = \sum_{j=1}^{k} \nu\left(x_1^{(m)}, \dots, x_{j-1}^{(m)}, x_j^{(n)} - x_j^{(m)}, x_{j+1}^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}\right).$$

利用 ν 在 V 上的有界性：

$$|S_n - S_m| \le \sum_{j=1}^{k} \left(\|x_1^{(m)}\| \cdots \|x_{j-1}^{(m)}\| \cdot \|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\| \cdot \|x_{j+1}^{(n)}\| \cdots \|x_k^{(n)}\|\right).$$

由于收敛序列有界，存在 $M > 0$，使得对所有 i 和 n，都有 $\|x_i^{(n)}\| \le M$。因此：

$$|S_n - S_m| \le M^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|.$$

由于每个序列 $(x_i^{(n)})_n$ 都收敛，因此它在 H 中是柯西序列，所以 $\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\| \to 0$ 当 $n, m \to \infty$。因此，(S_n) 是 $\mathbb{C}$ 中的柯西序列。由于 $\mathbb{C}$是完备的，极限存在。我们将 $\tilde{\nu}$定义为：

$$\tilde{\nu}(x_1, \dots, x_k) = \lim_{n\to\infty} \nu(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}).$$

标准论证表明，该极限与所选的逼近序列无关。 $\tilde{\nu}$ 的 k-线性由 ν 的 k-线性以及极限运算的线性可知。

由于范数是连续函数：

$$|\tilde{\nu}(x_1, \dots, x_k)| = \lim_{n\to\infty} |\nu(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)})| \le \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \|x_i^{(n)}\| = \prod_{i=1}^{k} \|x_i\|.$$

这证实了该延拓满足相同的范数界。 □

3. 多迹高斯系综的渐近展开

3.1. 多迹GUE情形。本节旨在建立由 GUE 矩阵的多项式构成的光滑多迹统计量的渐近展开。该展开的结果将在第 5 节用于证明 GUE 情形下的若干应用结果。

在本节中，我们固定如下设定。设 $\boldsymbol{G}^N = (G_1^N、\ .....、\ G_d^N)$ 为维数为 N 的相互独立的GUE矩阵， $\boldsymbol{s} = (s_1、\ .....、\ s_d)$ 为一个自由半圆族。令 $r \in \mathbb{N}$ 固定。对于每个 $i = 1,...,r$，我们还固定一组次数为 $\tilde{q}_i$ 的自伴非交换多项式 $P_i \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_d\rangle$。我们将使用以下记号：

$$X_i^N := P_i(\boldsymbol{G}^N), \qquad X_i^F := P_i(\boldsymbol{s}) \qquad i = 1, ..., r.$$

我们先给出以下估计，它将用于截断高斯分布。为适用于我们的多重线性情形，这一步是对 [CGVvH24] 中的引理 4.3（“先验界”）所作的直接修改。

引理 3.1. 存在普适常数 $C, c > 0$，使得对于任意 $i = 1, \ldots, r$,

$$\mathbb{P}\left[\|X_i^N\| > K_i\right] \leq Cd\mathrm{e}^{-cN}, \tag{3.1}$$

其中 $K_i := (Cd)^{\tilde{q}_i}\|X_i^F\|$。

$$\left|\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)\right]\right| \leq 2\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]} \tag{3.2}$$

and

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)\cdot 1_{\{\|X_1^N\|>K_1 \text{ or } \cdots \text{ or } \|X_r^N\|>K_r\}}\right]\right| \\ &\quad\leq C\sqrt{dr}\cdot\mathrm{e}^{-cN}\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]},\end{aligned} \tag{3.3}$$

对于任意 $h_1 \in P_{q_1}, \ldots, h_r \in P_{q_r}$，其中 $q_1, \ldots, q_r$ 满足 $\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r \leq N$。

注 3.2. 上述陈述中的常数 $C, c > 0$ 可能依赖于固定的多项式 P_i。不过，由于在本讨论中 P_i 始终固定，我们将省略这种依赖，并将普适常数 C 简称为普适常数。本文后续部分也将采用相同的约定。

证明。第一个不等式 (3.1) 直接由 [CGVvH24] 中的引理 4.3 得出。其余不等式也可由同一引理以及 [CGVvH24] 中的引理 2.2 结合霍尔德不等式得出。我们首先对迹乘积的期望作如下界定：

$$|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)]| \leq \mathbb{E}[\sup_{|x_1|\leq\|X_1^N\|}|h_1(x_1)|\cdots\sup_{|x_r|\leq\|X_r^N\|}|h_r(x_r)|].$$

若 q_i、$(i = 1, \ldots, r)$ 满足 $\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r \leq 2N$，则，$t_i := \frac{2N}{\tilde{q}_i q_i} > 0\,(i = 1, \ldots, r)$ 满足 $\sum_{i=1}^r \frac{1}{t_i} \leq 1$. 因此应用霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\sup_{|x_1|\leq\|X_1^N\|}|h_1(x_1)|\cdots\sup_{|x_r|\leq\|X_r^N\|}|h_r(x_r)|] \\ &\leq \mathbb{E}[\sup_{|x_1|\leq\|X_1^N\|}|h_1(x_1)|^{t_1}]^{\frac{1}{t_1}}\cdots\mathbb{E}[\sup_{|x_r|\leq\|X_r^N\|}|h_r(x_r)|^{t_r}]^{\frac{1}{t_r}}.\end{aligned}$$

这里，根据 [CGVvH24] 中引理 4.3 的证明（注意到 $q_i \leq \frac{2N}{\tilde{q}_i t_i}$，并结合 [CGVvH24] 中的引理 2.2），对于每个 $i = 1, \ldots, r$,

$$\mathbb{E}[\sup_{|x_i|\leq\|X_i^N\|}|h_i(x_i)|^{t_i}] \leq 2\|h_i\|_{[-K_i,K_i]}^{t_i}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)]| \\ &\leq \prod_{i=1}^r\left(2\|h_i\|_{[-K_i,K_i]}^{t_i}\right)^{\frac{1}{t_i}} \leq 2\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]}.\end{aligned}$$

最后，我们假设 $h_i \in \mathcal{P}_{q_i}$ 和 q_i，$(i = 1, \ldots\ldots, r)$ 满足 $\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r \le N$。由柯西-施瓦茨不等式、(3.1) 和 (3.2)，注意到 $q_i \le \frac{N}{\tilde{q}_i t_i}$ 我们有，

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N) 1_{\{\|X_1^N\| > K_1 \text{ or} \cdots \text{or } \|X_r^N\| > K_r\}}]\right| \\
&\le \left|\mathbb{E}\left[\left(\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)\right)^2\right]\right|^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left[\|X_1^N\| > K_1 \text{ or} \cdots \text{or } \|X_r^N\| > K_r\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(2\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}^2 \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(r \cdot C d \mathrm{e}^{-cN}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

由此完成证明。 □

在本节余下部分中，对每个 $i = 1, \ldots, r$，我们固定如引理 3.1 中的 K_i。接下来，我们为多项式测试函数 $h_i \in \mathcal{P}(i = 1, \ldots, r)$ 建立渐近展开。

命题 3.3 (多项式测试函数的渐近展开)。对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，存在一个 r-线性泛函 $\nu_m : \boldsymbol{P}^r \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $q_i \in \mathbb{N}$ 和 $h_i \in \boldsymbol{P}_{q_i} (i = 1, \ldots, r)$，

$$
|\nu_m(h_1, \ldots, h_r)| \le \frac{(C(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r))^{2m}}{m!} \|h_1\|_{[-K_1,K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}, \tag{3.4}
$$

此外，对于满足 $N \ge C(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r)$ 的 $q_1, \ldots, q_r$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(h_1, \ldots, h_r)}{N^k}\right| \\
&\quad \le \frac{(C(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r))^{2m}}{m! N^m} \|h_1\|_{[-K_1,K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

这里 C 是一个普适常数，而对于 $i = 1, \ldots, r$，$K_i := (Cd)^{\tilde{q}_i} \|X_i^F\|$。

此外，对于任意奇数 m，我们有 $\nu_m = 0$。

注 3.4。对于所有奇数 m，ν_m 的消失反映了与高斯酉系综或Haar酉矩阵相关的代数结构，这源于其复对称性。具体而言，命题 3.3 及下文其他定理中给出的高斯酉系综或Haar酉矩阵的 $1/N$- 展开可化简为 $1/N^2$- 展开，即

$$
\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_{2k}(h_1, \ldots, h_r)}{N^{2k}} + O\left(N^{-2m}\right),
$$

其中，对于所有 $k \ge 0$，均有 $\nu_{2k+1} = 0$。然而，我们在此指出，这种抵消现象是高斯酉系综或Haar酉矩阵所特有的，并不普遍适用于其他随机矩阵模型；在许多系综中，例如 GOE/GSE/O(N)/Sp(N)，奇数阶项仍然存在。

证明。对于 $h_i \in \mathcal{P}_{q_i} (i = 1, \ldots, r)$，存在一个次数至多为 $\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r$ 的多项式 $\Phi_{h_1,\ldots,h_r}$，使得

$$
\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] = \Phi_{h_1,\ldots,h_r}(\tfrac{1}{N}) = \Phi_{h_1,\ldots,h_r}(-\tfrac{1}{N}).
$$

例如，可通过高斯酉系综的亏格展开验证这一点，参见 [《MS》17]第 1.7 节。现在，定义 $\nu_m(h_1、\ldots\ldots、h_r) := \frac{\Phi_{h_1,\ldots,h_r}^{(m)}(0)}{m!}$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 均成立，则 ν_m 是一个 r-线性泛函，并且根据泰勒定理，我们有

$$
\left|\Phi_{h_1,\ldots,h_r}(\tfrac{1}{N}) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(h_1, \ldots, h_r)}{N^k}\right| \le \frac{\|\Phi_{h_1,\ldots,h_r}^{(m)}\|_{[0,\frac{1}{N}]}}{m! N^m}. \tag{3.6}
$$

这里注意到，对称性 $\Phi_{h_1,\ldots,h_r}(\frac{1}{N}) = \Phi_{h_1,\ldots,h_r}(-\frac{1}{N})$ 意味着 $\Phi_{h_1,\ldots,h_r}$ 中 x 的所有奇次幂系数均为零，因此，对于任意奇数 m，都有 $\nu_m = 0$。

因此，我们的目标是在 N 足够大时估计 $\|\Phi^{(m)}_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[0,\frac{1}{N}]}$。由引理 3.1，对于任意满足 $N \geq \tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r$ 的点 $x \in \{\frac{1}{N} \mid N \in \mathbb{N}\}$，

$$|\Phi_{h_1,\ldots,h_r}(x)| \leq 2\|h_1\|_{[-K_1,K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}.$$

由于 $\Phi_{h_1,\ldots,h_r}$ 是次数至多为 $\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r$ 的多项式，应用插值法（引理 2.6），取 $\delta := \frac{1}{24(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r)}$ 以及某个普适常数 C，

$$\begin{aligned}\|\Phi_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[0,\delta]} &\leq C \sup_{\frac{1}{N} \leq 2\delta} \left|\Phi_{h_1,\ldots h_r}(\tfrac{1}{N})\right| \\ &\leq C\|h_1\|_{[-K_1,K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}.\end{aligned}$$

根据 $\Phi_{h_1,\ldots,h_r}$ 的对称性，同样的界也适用于 $\|\Phi_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[-\delta,0]}$。现在我们应用伯恩斯坦不等式（引理 2.5）来界定

$$\begin{aligned}\|\Phi^{(m)}_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]} &\leq (\tfrac{96}{\sqrt{3}}(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r))^{2m} \|\Phi_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[-\delta,\delta]} \\ &\leq (C(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r))^{2m} \|h_1\|_{[-K_1,K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

f对于所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 C 为某个普适常数，由此完成了 (3.4) 的证明。

最后，为完成 (3.5) 的证明，我们将界 (3.7) 与 (3.6) 结合，得到对于 $\frac{1}{N} \leq \frac{\delta}{2}$，即 $N \geq 48(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r)$，

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right| \\ &\quad \leq \frac{(C(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r))^{2m} \|h_1\|_{[-K_1,K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r,K_r]}}{m! N^m}.\end{aligned}$$

□

现在给出本节的结果——定理 3.5，它表明该展开不仅适用于多项式测试函数，也适用于任意有界光滑测试函数。为陈述该定理，我们引入以下记号。对于 $i = 1,\ldots,r$，定义 $K_i = (Cd)^{\tilde{q}_i} \|X_i^F\|$。给定任意 r 元光滑函数组 $h_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ $(i = 1,\ldots,r)$，令 $f_i(\theta) := h_i(K_i \cos\theta)$，并定义 $F(x_1,\ldots,x_r) := f_1^{(1)}(x_1) \cdots f_{(1)r}(x_r)$。

定理 3.5（高斯酉系综的光滑渐近展开）。对于某些普适常数 $C, c > 0$，以下结论成立。对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个 r-线性泛函 $\nu_m : C^\infty(\mathbb{R})^r \to \mathbb{R}$，它扩展了命题 3.3 中的映射，使得对于每个满足 $m \leq \frac{N}{2}$ 的 $m, N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right| \\ &\leq \frac{C^{2m+r}(\tilde{q}_1 + \cdots + \tilde{q}_r)^{2m}}{m! N^m} \|F\|_{C^{2m}([0,2\pi]^r)} \\ &\quad + Cdr\mathrm{e}^{-cN}(\|h_1\|_{(-\infty,\infty)} \cdots \|h_r\|_{(-\infty,\infty)} + \|F\|_{[0,2\pi]^r}),\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，$\|F\|_{C^{2m}([0,2\pi]^r)}$ 在公式 (2.4) 中定义。此外，对于任意奇数 m，我们有 $\nu_m = 0$。

定理 *3.5* 的证明。 我们回顾一下，第一类切比雪夫多项式 T_n 是由 $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$定义的 n次多项式。我们将 $h_1 \in \mathcal{P}_{q_1}, \dots, h_r \in \mathcal{P}_{q_r}$表示为

$$h_1(x_1) = \sum_{j=0}^{q_1} a_j^{(1)} T_j(K_1^{-1}x_1), \dots, h_r(x_r) = \sum_{j=0}^{q_r} a_j^{(r)} T_j(K_r^{-1}x_r), \tag{3.9}$$

对于某些实系数 $a_0^{(i)}, ..., a_{q_i}^{(i)} (i = 1,..., r)$。

我们将证明分为两个主要步骤。在步骤 1 中，我们证明 ν_m $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 作为 $C^\infty(\mathbb{R})^r$ 上的 r-线性泛函是良定义的。在步骤 2 中，我们验证 ν_m 满足方程 (3.8)。

步骤 1。

设 ν_m $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 为命题 3.3 中定义的 r-线性泛函。固定多项式$h_1 \in \mathcal{P}_{q_1}, \dots, h_r \in \mathcal{P}_{q_r}$，并令 $a_0^{(i)}, ..., a_{q_i}^{(i)} (i = 1,..., r)$ 为如 (3.9) 所示的切比雪夫系数。

我们暂且固定 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。根据命题 3.3，由于对所有$j$都有 $\|T_j(K^{-1}\cdot)\|_{[-K,K]} = 1$，我们有

$$\begin{aligned} |\nu_m(h_1, \dots, h_r)| &\leq \sum_{j_1=0}^{q_1} \cdots \sum_{j_r=0}^{q_r} \left| a_{j_1}^{(1)} \cdots a_{j_r}^{(r)} \right| \left| \nu\left(T_{j_1}(K_1^{-1}\cdot), \dots, T_{j_r}(K_r^{-1}\cdot) \right) \right| \\ &\leq C \sum_{j_1=0}^{q_1} \cdots \sum_{j_r=0}^{q_r} \left| a_{j_1}^{(1)} \cdots a_{j_r}^{(r)} \right| (j_1 + \cdots + j_r)^{2m}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中有某个常数 C，它可能依赖于 m。这里，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1=0}^{q_1} \cdots \sum_{j_r=0}^{q_r} \left| a_{j_1}^{(1)} \cdots a_{j_r}^{(r)} \right| (j_1 + \cdots + j_r)^{2m} \\ &= \sum_{\substack{m_1,\dots,m_r \geq 0 \text{ s.t.} \\ m_1+\cdots+m_r=2m}} \frac{(2m)!}{m_1! \cdots m_r!} \left(\sum_{j_1=0}^{q_1} |a_{j_1}^{(1)}| j_1^{m_1} \right) \cdots \left(\sum_{j_r=0}^{q_r} |a_{j_r}^{(r)}| j_r^{m_r} \right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

这里，对任意 $i = 1, \dots\dots r$，注意到在坐标变换 $x_i = K_i \cos\theta$下， h_i 的切比雪夫展开变为 f_i 的傅里叶余弦级数，即 $f_i(\theta) = \sum_{j=0}^{q_i} a_j^{(i)} \cos(j\theta)$。先应用柯西-施瓦茨不等式，再对第$(m_i+1)$阶导数应用帕塞瓦尔恒等式，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{j_i=0}^{q_i} |a_{j_i}^{(i)}| j_i^{m_i} &\leq \left(\sum_{j_i=1}^{q_i} \frac{1}{j_i^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{j_i=1}^{q_i} j_i^{2m_i+2} |a_{j_i}^{(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|f_i^{(m_i+1)}\|_{L^2([0,2\pi])} \leq \bar{C} \|h_i\|_{C^{m_i+1}([-K_i,K_i])}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中某个普适常数 C，以及另一个常数 C，它可能依赖于 m_i。现在我们将(3.10)与(3.11)和(3.12)结合起来，得到

$$\begin{aligned} |\nu_m(h_1, \dots, h_r)| &\leq C \sum_{\substack{m_1,\dots,m_r \geq 0 \text{ s.t.} \\ m_1+\cdots+m_r=2m}} \frac{(2m)!}{m_1! \cdots m_r!} \|h_1\|_{C^{m_1+1}([-K_1,K_1])} \cdots \|h_r\|_{C^{m_r+1}([-K_r,K_r])} \\ &\leq C \|h_1^{(1)}(x_1) \cdots h_r^{(1)}(x_r)\|_{C^{2m}([-K_1,K_1]\times\cdots\times[-K_r,K_r])}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中常数 C 取决于 m， r。

由界 (3.13)，现在可以得出，利用引理 2.8 以及多项式在 $C^\infty(\mathbb{R})$ 中关于紧集上的导数一致收敛拓扑稠密这一事实， ν_m 可以在 $(h_1, \ldots\ldots, h_r) \in C^\infty(\mathbb{R})^r$ 上唯一延拓，并且对任意 $h_1, \ldots\ldots, h_r \in C^\infty(\mathbb{R})$，延拓后仍满足相同的界。

这里我们注意到，由上述延拓的连续性可知，扩展后的泛函 ν_m 在 $C^\infty(\mathbb{R})^r$ 上对任意奇数 m仍满足 $\nu_m = 0$ 。

步骤 2。

现在固定有界函数 h_1、……、 $h_r \in C^\infty(\mathbb{R})$，它们在 $[-K_i, K_i]$ $(i = 1$、……、 $r)$ 上的切比雪夫展开写作

$$h_1(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(1)} T_j(K_1^{-1} x_1), \ldots, h_r(x_r) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(r)} T_j(K_r^{-1} x_r), \tag{3.14}$$

对任意 $x_i \in [-K_i, K_i]$ $(i = 1$、……、 $r)$。由于上述 h_i 在 $[-K_i, K_i]$ 上的切比雪夫展开是函数 $f_i(\theta) = h_i(K_i \cos\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的傅里叶余弦展开，因此对于每个 $i = 1$、……、 r，级数 (3.14) 在 $[-K_i, K_i]$ 上一致收敛。

得益于期望和泛函 μ_k 的多重线性，并利用关于因子 r 数目的归纳法，我们可以将问题归结为每个 h_i 都具有零常数项的情形。事实上，若 h_i 为常数，则项 $\operatorname{tr} h_i(X_i^N)$ 是确定性的，可以从期望中提出，从而将问题化简为涉及 $r - 1$ 个测试函数的情形。因此，不失一般性，我们假设对于所有 $i = 1$、……、 r，都有 $a_0^{(i)} = 0$ 。

令 A 为由下式定义的集合

$$A := \{(q_1, \ldots, q_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid C(\tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r) \leq N\},$$

也就是说， A 是使 (3.5) 成立的参数集合。我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(h_1, \ldots, h_r)}{N^k} \right| \\
&\leq \left| \sum_{(q_1,\ldots,q_r)\in A} \left(\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(a_{q_1}^{(1)} T_{q_1}(K_1^{-1} X_1^N)) \cdots \operatorname{tr}(a_{q_r}^{(r)} T_{q_r}(K_r^{-1} X_r^N)) \right] \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k\left(a_{q_1}^{(1)} T_{q_1}(K_1^{-1}\cdot), \ldots, a_{q_r}^{(r)} T_{q_r}(K_r^{-1}\cdot) \right)}{N^k} \right) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(h_1, \ldots, h_r) - \sum_{(q_1,\ldots,q_r)\in A} \nu_k(a_{q_1}^{(1)} T_{q_1}(K_1^{-1}\cdot), \ldots, a_{q_r}^{(r)} T_{q_r}(K_r^{-1}\cdot))}{N^k} \right| \\
&\quad + \left| \mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N) - \sum_{(q_1,\ldots,q_r)\in A} \operatorname{tr} a_{q_1}^{(1)} T_{q_1}(K_1^{-1} X_1^N) \cdots \operatorname{tr} a_{q_r}^{(r)} T_{q_r}(K_r^{-1} X_r^N) \right] \right| \\
&= \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

现在我们估计右侧的三项 (I)、(II) 和 (III)。

第一项 (I)：应用多项式测试函数的渐近展开 (3.5)，可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) &\le \sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A} |a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}| \Bigg| \mathbb{E}\left[\operatorname{tr} T_{q_1}(K_1^{-1}X_1^N)\cdots \operatorname{tr} T_{q_r}(K_r^{-1}X_r^N)\right] \\ &\qquad\qquad - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu_k(T_{q_1}(K_1^{-1}\cdot),\dots,T_{q_r}(K_r^{-1}\cdot))}{N^k}\Bigg| \\ &\le \sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A} |a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}| \frac{(C(\tilde q_1 q_1+\cdots+\tilde q_r q_r))^{2m}}{m!N^m},\end{aligned}$$

其中我们用到了这样一个事实：$\|T_j(K^{-1}\cdot)\|_{[-K,K]}=1$ 对所有 j 都成立。

第二项（II）：利用（3.4），我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{II}) &\le \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{N^k}\left|\nu_k(h_1,\dots,h_r) - \sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}\nu_k(a_{q_1}^{(1)}T_{q_1}(K_1^{-1}\cdot),\dots,a_{q_r}^{(r)}T_{q_r}(K_r^{-1}\cdot))\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!N^k}\sum_{(q_1,\dots,q_r)\notin A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|(C(\tilde q_1 q_1+\cdots+\tilde q_r q_r))^{2k} \\ &\le \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!N^{m-k}}\sum_{(q_1,\dots,q_r)\notin A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\frac{(C(\tilde q_1 q_1+\cdots+\tilde q_r q_r))^{2m}}{N^m},\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们应用了这样一个事实：$(q_1,\dots,q_r)\notin A$，也就是说，$C(\tilde q_1 q_1+\cdots+\tilde q_r q_r)>N$，这意味着

$$(C(\tilde q_1 q_1+\cdots+\tilde q_r q_r))^{2k} \le \frac{(C(\tilde q_1 q_1+\cdots+\tilde q_r q_r))^{2m}}{N^{2m-2k}}.$$

第三项（III）：根据（3.14），我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{III}) &= \left|\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N) - \sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}\operatorname{tr} a_{q_1}^{(1)}T_{q_1}(K_1^{-1}X_1^N)\cdots\operatorname{tr} a_{q_r}^{(r)}T_{q_r}(K_r^{-1}X_r^N)\right]\right| \\ &\le \Bigg|\mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N) - \sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}\operatorname{tr} a_{q_1}^{(1)}T_{q_1}(K_1^{-1}X_1^N)\cdots\operatorname{tr} a_{q_r}^{(r)}T_{q_r}(K_r^{-1}X_r^N)\Bigg) \\ &\qquad\qquad \cdot 1_{\{\|X_1^N\|\le K_1,\dots,\|X_r^N\|\le K_r\}}\Bigg]\Bigg| \\ &\quad + \left|\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)\cdot 1_{\{\|X_1^N\|>K_1 \text{ or}\cdots\text{or } \|X_r^N\|>K_r\}}\right]\right| \\ &\quad + \left|\mathbb{E}\left[\sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}\Big(\operatorname{tr} a_{q_1}^{(1)}T_{q_1}(K_1^{-1}X_1^N)\cdots\operatorname{tr} a_{q_r}^{(r)}T_{q_r}(K_r^{-1}X_r^N)\Big)\cdot 1_{\{\|X_1^N\|>K_1 \text{ or}\cdots\text{or } \|X_r^N\|>K_r\}}\right]\right| \\ &\le \sum_{(q_1,\dots,q_r)\notin A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}| \\ &\quad + Cdr\mathrm{e}^{-cN}\|h_1\|_{(-\infty,\infty)}\cdots\|h_r\|_{(-\infty,\infty)} \\ &\quad + C\sqrt{dr}\cdot\mathrm{e}^{-cN}\sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|,\end{aligned}$$

其中有一些普适常数 C, $c>0$, 最后一个不等式中我们应用了引理 3.1。

结合上述 (I)–(III) 中的估计，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{(I)}+\mathrm{(II)}+\mathrm{(III)}\\
&\leq \sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\frac{(C(\tilde q_1q_1+\cdots+\tilde q_rq_r))^{2m}}{m!N^m}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!N^{m-k}}\sum_{(q_1,\dots,q_r)\notin A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\frac{(C(\tilde q_1q_1+\cdots+\tilde q_rq_r))^{2m}}{N^m}\\
&\quad+\sum_{(q_1,\dots,q_r)\notin A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|+Cdr\mathrm{e}^{-cN}\Big(\|h_1\|_{(-\infty,\infty)}\cdots\|h_r\|_{(-\infty,\infty)}+\sum_{(q_1,\dots,q_r)\in A}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\Big)\\
&\leq\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!N^{m-k}}\sum_{q_1,\dots,q_r}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\frac{(C(\tilde q_1q_1+\cdots+\tilde q_rq_r))^{2m}}{N^m}\\
&\quad+Cdr\mathrm{e}^{-cN}\Big(\|h_1\|_{(-\infty,\infty)}\cdots\|h_r\|_{(-\infty,\infty)}+\sum_{q_1,\dots,q_r}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\Big)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

这里我们注意到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q_1,..,q_r}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|(\tilde q_1q_1+\cdots+\tilde q_rq_r)^m\\
&=\sum_{\substack{m_1,\dots,m_r\ \text{s.t.}\\ m_1+\cdots+m_r=m}}\frac{m!}{m_1!\cdots m_r!}\tilde q_1^{m_1}\cdots\tilde q_r^{m_r}\sum_{q_1,..,q_r}|a_{q_1}^{(1)}|q_1^{m_1}\cdots|a_{q_r}^{(r)}|q_r^{m_r}\\
&\leq C^r\sum_{\substack{m_1,\dots,m_r\ \text{s.t.}\\ m_1+\cdots+m_r=m}}\frac{m!}{m_1!\cdots m_r!}\tilde q_1^{m_1}\cdots\tilde q_r^{m_r}\|f_1^{(m_1+1)}\|_{[0,2\pi]}\cdots\|f_r^{(m_r+1)}\|_{[0,2\pi]}\\
&\leq C^r(\tilde q_1+\cdots+\tilde q_r)^m\|F\|_{C^m([0,2\pi]^r)},
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

其中 C 为某个普适常数；在倒数第二个不等式中，我们应用了以下事实：对于任意形如 (3.14) 的光滑 h_i，都有

$$
\sum_{q_i=0}^{\infty}|a_{q_i}^{(i)}|q_i^n\leq C\|f_i^{(n+1)}\|_{L^2([0,2\pi])}\quad\text{for any } n\in\mathbb{N},\quad i=1,...,r,
$$

其中 C 为某个普适常数，这一点可由以下事实得到：式 (3.12) 与多项式 h_i 的次数无关。

因此，将 (3.17) 与 (3.15) 和 (3.16) 结合起来，

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}[\operatorname{tr}h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr}h_r(X_r^N)]-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\nu_k(h_1,\dots,h_r)}{N^k}\Big|\\
&\leq\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!N^{m-k}}\sum_{q_1,\dots,q_r}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\frac{(C(\tilde q_1q_1+\cdots+\tilde q_rq_r))^{2m}}{N^m}\\
&\quad+Cdr\mathrm{e}^{-cN}\Big(\|h_1\|_{(-\infty,\infty)}\cdots\|h_r\|_{(-\infty,\infty)}+\sum_{q_1,\dots,q_r}|a_{q_1}^{(1)}|\cdots|a_{q_r}^{(r)}|\Big)\\
&\leq\Big(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!N^{m-k}}\Big)\frac{C^{2m+r}(\tilde q_1+\cdots+\tilde q_r)^{2m}}{N^m}\|F\|_{C^{2m}([0,2\pi]^r)}\\
&\quad+Cdr\mathrm{e}^{-cN}\Big(\|h_1\|_{(-\infty,\infty)}\cdots\|h_r\|_{(-\infty,\infty)}+\|F\|_{[0,2\pi]^r}\Big).
\end{aligned}
$$

将此估计与我们已知的事实结合起来，

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!N^{m-k}}\leq\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{N}^{m-k}\leq\frac{2}{m!},$$

对于 $m\leq\frac{N}{2}$，便给出所需结论，从而完成证明。

□

注记 3.6. 尽管在定理 3.5 的证明中我们假设测试函数为 C^∞，但这一假设可以放宽。更确切地说，泛函 ν_m 可唯一延拓至 $C^{2m+1}(\mathbb{R})^r$，且渐近展开(3.8)对测试函数 $h_1,\ldots\ldots,h_r\in C^{2m+1}(\mathbb{R})$ 仍然成立。

3.2. **多迹GOE与高斯辛系综的渐近展开**。在本节中，我们简要讨论将渐近展开结果定理 3.5 推广到高斯正交系综与高斯辛系综随机矩阵的情形。高斯酉系综情形中的大部分论证只需稍作修改即可适用于这些情形，这是因为高斯正交系综与高斯辛系综被视为一种“对偶”，亦即超对称对偶，见于 [CGVvH24]。因此，我们在此仅陈述结果，而不深入证明。

设 $\boldsymbol{G}^N=(G_1^N,\ldots\ldots,G_d^N)$ 和 $\boldsymbol{H}^N=(H_1^N,\ldots\ldots,H_d^N)$ 分别为维数为 N 的相互独立的高斯正交系综和高斯辛系综矩阵，并设 $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots\ldots,s_d)$ 为自由半圆族。令 $r\in\mathbb{N}$ 为固定值。我们还将固定每个 $i=1,\ldots\ldots,r$ 对应的次数为 $\tilde{q}_i$ 的自伴非交换多项式 $P_i\in\mathbb{C}\langle x_1,\ldots\ldots,x_d\rangle$。为简便起见，我们采用以下记号，

$$X_i^N:=P_i(\boldsymbol{G}^N),\qquad Y_i^N:=P_i(\boldsymbol{H}^N),\qquad X_i^F:=P_i(\boldsymbol{s})\qquad i=1,...,r.$$

在此设定下，超对称对偶使我们得到如下结论。对于任意多项式测试函数 $h_i\in\mathcal{P}_{q_i}(i=1,\ldots\ldots,r)$，存在某个次数至多为 $\tilde{q}_1q_1+\cdots+\tilde{q}_rq_r$ 的多项式 $\Phi_{h_1,\ldots\ldots,h_r}$，使得

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr}h_r(X_r^N)\right]=\Phi_{h_1,\ldots,h_r}\left(\tfrac{1}{N}\right),$$
$$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}h_1(Y_1^N)\cdots\operatorname{tr}h_r(Y_r^N)\right]=\Phi_{h_1,\ldots,h_r}\left(-\tfrac{1}{2N}\right).$$

这可通过 [BP09] 中关于高斯正交系综和高斯辛系综的亏格展开验证。

经过上述修改，我们现在可以陈述以下结果，它们是定理 3.5 的类似结果。

定理3.7（高斯正交系综和高斯辛系综的多重迹渐近展开）。对于任意 $m\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，存在一个作用在 $C^\infty(\mathbb{R})^r$ 上的 r-线性泛函 ν_m，使得对于某些普适常数 C、$c>0$，以下结论成立：

固定任意一组有界的 r 元组光滑函数 $h_i\in C^\infty(\mathbb{R})$ $(i=1,\ldots,r)$，并定义

$$f_i(\theta):=h_i(K_i\cos\theta)\quad with\quad K_i=(Cd)^{\tilde{q}_i}\|X_i^F\|,\quad i=1,...,r,$$
$$and\quad F(x_1,\ldots,x_r):=f_1^{(1)}(x_1)\cdots f_r^{(1)}(x_r);$$

那么，对于每个满足 $m\leq\frac{N}{2}$ 的 m、$N\in\mathbb{N}$，我们有

$$\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr}h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr}h_r(X_r^N)]-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right|\vee\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr}h_1(Y_1^N)\cdots\operatorname{tr}h_r(Y_r^N)]-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{(-2N)^k}\right|$$
$$\leq\frac{C^{2m+r}(\tilde{q}_1+\cdots+\tilde{q}_r)^{2m}}{m!N^m}\|F\|_{C^{2m}([0,2\pi]^r)}+Cdre^{-cN}(\|h_1\|_{(-\infty,\infty)}\cdots\|h_r\|_{(-\infty,\infty)}+\|F\|_{[0,2\pi]^r}).\tag{3.18}$$

4. 紧矩阵群上 Haar 分布随机变量的渐近展开

4.1. Haar 酉情形。本节将重点讨论 Haar 分布的酉矩阵。证明的整体策略与高斯酉系综情形相同，不过也存在若干差异。不同于高斯酉系综的设定，Haar 酉矩阵天然有界，因此无需截断。不过，我们现在必须处理 $\frac{1}{N}$ 中的有理函数，而不是多项式。

在本小节中，$\boldsymbol{U}^N = (U_1^N, \ldots, U_d^N)$ 是一组 d 元组，由维数为 N、属于 U(N) 的独立 Haar分布酉矩阵构成；$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ 则是自由 Haar 酉元。令 $r \in \mathbb{N}$ 为固定值。我们还固定一组自伴非交换多项式 $P_i \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_d, x_1^*, \ldots, x_d^* \rangle$，对每个 $i = 1, \ldots, r$，其次数为 $\tilde{q}_i$。仿照高斯酉系综的设定，我们采用以下记号

$$X_i^N := P_i(\boldsymbol{U}^N, \boldsymbol{U}^{N*}), \qquad X_i^F := P_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^*) \qquad i = 1, \ldots, r.$$

我们为 $i = 1, \ldots\ldots, r$ 引入如下记号：

$$K_i := \|P_i\|_{C^*(F_d)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{W_1, \ldots, W_d \in \mathrm{U}(n)} \|P_i(W_1, \ldots, W_d, W_1^*, \ldots, W_d^*)\|,$$

表示 P_i 在自由群 F_d 的、具有 d 个自由生成元的完整C*-代数中的范数。算子范数与在酉矩阵上的上确界之间的等式源于如下事实：$C^*(F_d)$ 是剩余有限维的（见 [Cho80]）。因此，我们有 $\|X_i^N\| \leq K_i$ 几乎必然地对任意 N成立。

我们首先通过建立命题 3.3 针对 Haar 分布酉矩阵的类似结果来着手 s.

命题 4.1（多项式测试函数的渐近展开，Haar酉情形）。对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个 r-线性泛函 μ_m，其定义在$\mathcal{P}^r$ 上，使得对任意 $q_i \in \mathbb{N}$ 以及$h_i \in \mathcal{P}_{q_i} (i = 1, \ldots\ldots, r)$，

$$|\mu_m(h_1, \ldots, h_r)| \leq \left((C\bar{p})^m + \frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!} \right) \|h_1\|_{[-K_1, K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r, K_r]}, \tag{4.1}$$

并且此外，对所有 $N \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N) \right] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(h_1, \ldots, h_r)}{N^k} \right| \\ &\quad \leq \frac{1}{N^m} \left((C\bar{p})^m + \frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!} \right) \|h_1\|_{[-K_1, K_1]} \cdots \|h_r\|_{[-K_r, K_r]}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

这里 C 是一个普适常数，我们定义

$$p := \tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r, \quad \bar{p} := p(1 + \log p).$$

此外，对于任意奇数 m，我们有 $\mu_m = 0$。

注记 4.2. 尽管本稿的主要兴趣在于研究 $\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\ h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)\right]$，但在这项工作的较早阶段，我们还曾作为预备步骤考察$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\ h_1(X_1^N) \cdots\ h_r(X_r^N)\right]$ 的展开，作为一个稍简单的预备步骤。对于该模型，存在定理 4.4 的一个明显变体，其中采用不同的 r-线性函数。我们感谢 Ramon van Handel 指出一种方法，可将多迹问题化为 [CGVvH24] 中所处理的单迹设定。关键观察是，所考虑的多迹统计量

在命题 4.1 中可以写成单迹情形。确切地说，对任意多项式 h_1，..... h_r，可以表示

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)\right]=\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(U_{d+1}h_1(X_1^N)U_{d+1}^*U_{d+2}h_2(X_2^N)U_{d+2}^*\cdots U_{d+r}h_r(X_r^N)U_{d+r}^*)\right],$$

其中 $U_{d+1},...,U_{d+r}$ 是维数为 N的其他相互独立的 Haar酉矩阵，它们也与 $\boldsymbol{U}^N=(U_1^N,...,U_d^N)$ 相互独立。无论哪种情况，将 [CGVvH24]的线性结果推广到 r-线性情形都不可或缺，因此我们选择研究$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\ h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr}\ h_r(X_r^N)\right]$。

在证明命题 4.1 之前，我们需要证明，对于多项式 $h_i(i=1,...,r)$，量 $\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)]$ 是关于 $\frac{1}{N}$ 的有理函数——而不是像高斯酉系综情形那样是多项式。

引理 4.3 (有理表达式)。 对于任意 $q_i\in\mathbb{N}\,(i=1,...,r)$，定义 $p:=\tilde{q}_1q_1+\cdots+\tilde{q}_rq_r$。那么对于 $h_i\in\boldsymbol{P}_{q_i}\,(i=1,...,r)$，存在一个有理函数

$$\Psi_{h_1,...,h_r}:=\frac{f_{h_1,...,h_r}}{g_p},$$

其中包含多项式 $f_{h_1,\ .....,\ h_r}$、 $g_p\in\boldsymbol{P}_{\lfloor 3p(1+\log p)\ \rfloor}$，因此

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)\right]=\Psi_{h_1,...,h_r}(\tfrac{1}{N})=\Psi_{h_1,...,h_r}(-\tfrac{1}{N}) \tag{4.3}$$

对于满足 $N>p$ 的任意 $N\in N$，其中我们对任意 $q\in\mathbb{N}$ $\boldsymbol{a}$ 定义一个多项式 g_q s

$$g_q(x):=\prod_{j=1}^{q}(1-(jx)^2)^{\lfloor\frac{q}{j}\rfloor}. \tag{4.4}$$

证明。 该证明与 [CGVvH24]，中利用 Weingarten 演算证明引理 7.1 的方法类似。对于每个 $i=1,$ ... ..., r，令 w_i（U_1^N，.....，U_d^N）表示由 Haar 分布的酉矩阵 U_1^N，.....，U_d^N及其伴随矩阵 U_1^{N*}，.....，U_d^{N*}组成的一个约化字。

令 k 表示这些字 w_1，.....，w_r 的总长度。我们首先假设这些字中没有一个 w_i（$i=1,$ .....，r）是恒等元，并且对于任意 $l=1,$ .....，d，U_l^N 和 U_l^{N*} 中的每一个在字 w_1，.....，w_r 中出现的总次数都相同，记为 k_l。注意 $k=2(k_1+\cdots+k_d)$。存在一个置换 $\pi\in S_k$，它取决于 w_1，.....，w_r；若将这些多重指标记为

$$\boldsymbol{i}=(i_n)_{n=1,...,k}:=(i_m^{(l)},\bar{i}_m^{(l)})_{\substack{l=1,...,d,\\ m=1,...,k_l}}\in[N]^k,$$
$$\boldsymbol{j}=(j_n)_{n=1,...,k}:=(j_m^{(l)},\bar{j}_m^{(l)})_{\substack{l=1,...,d,\\ m=1,...,k_l}}\in[N]^k,$$

我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\operatorname{tr} w_1(U_1^N,...,U_d^N)\cdots\operatorname{tr} w_r(U_1^N,...,U_d^N)\right]\\&=\sum_{\substack{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in[N]^k\\ \text{s.t. } i_n=j_{\pi(n)}\ (\forall n=1,...,k)}}\left(\mathbb{E}\left[(U_1^N)_{i_1^{(1)}j_1^{(1)}}\cdots(U_1^N)_{i_{k_1}^{(1)}j_{k_1}^{(1)}}(U_1^{N*})_{\bar{i}_1^{(1)}\bar{j}_1^{(1)}}\cdots(U_1^{N*})_{\bar{i}_{k_1}^{(1)}\bar{j}_{k_1}^{(1)}}\right]\right.\\&\qquad\left.\cdots\mathbb{E}\left[(U_d^N)_{i_1^{(d)}j_1^{(d)}}\cdots(U_d^N)_{i_{k_d}^{(d)}j_{k_d}^{(d)}}(U_d^{N*})_{\bar{i}_1^{(d)}\bar{j}_1^{(d)}}\cdots(U_d^{N*})_{\bar{i}_{k_d}^{(d)}\bar{j}_{k_d}^{(d)}}\right]\right).\end{aligned}$$

通过对 Haar酉矩阵应用 Weingarten 演算，对于每个 $l=1$、……、d，我们有

$$\mathbb{E}\left[(U_l^N)_{i_1^{(l)}j_1^{(l)}}\cdots(U_l^N)_{i_{k_l}^{(l)}j_{k_l}^{(l)}}(U_l^{N*})_{\bar{i}_1^{(l)}\bar{j}_1^{(l)}}\cdots(U_l^{N*})_{\bar{i}_{k_l}^{(l)}\bar{j}_{k_l}^{(l)}}\right] \tag{4.5}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma,\tau\in S_{k_l}\text{ s.t.}\\ i_m^{(l)}=\bar{i}_{\sigma(m)}^{(l)},j_m^{(l)}=\bar{j}_{\tau(m)}^{(l)}(\forall m=1,..,k_l)}} \mathrm{Wg}_{k_l}^{\mathcal{U}}(\sigma^{-1}\tau,N), \tag{4.6}$$

利用酉矩阵的 Weingarten 函数 $\mathrm{Wg}^{\mathcal{U}}$。由上述方程可知，$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\ w_1(U_1^N,\ \ldots\ldots,\ U_d^N)\cdots\mathrm{tr}\ w_r(U_1^N,\ \ldots\ldots,\ U_d^N)\right]$ 是若干个形如 $\mathrm{Wg}_{k'}^{\mathcal{U}}(\sigma,\ N)$ 的函数之和，其中$k'\le k$ 和 σ 为作用于 k' 个元素上的置换。对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma\in S_n$，Weingarten 函数 $\mathrm{Wg}_n^{\mathcal{U}}(\sigma,\ N)$ 满足

$$\mathrm{Wg}_n^{\mathcal{U}}(\sigma,N)=\frac{1}{n!}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{f^\lambda}{C_\lambda(N)}\chi^\lambda(\sigma), \tag{4.7}$$

其中求和遍历所有 λ 的 n的划分。这里，χ^λ 表示 S_n 的不可约特征标，$f^\lambda:=\chi^\lambda(\mathrm{id}_n)$，而 $C_\lambda(N)$ 是关于 N 的多项式，定义为

$$C_\lambda(N):=\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+j-i), \tag{4.8}$$

详情请参阅 [CS06], [Mat13] 。特别地，多项式 $C_\lambda(N)$ 也可写为

$$C_\lambda(N)=\prod_{s=-n}^{n}(N+s)^{\omega_s(\lambda)},$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_s(\lambda)&:=\#\{(i,j)\in\lambda\mid i-j=s\}\\ &\le\#\{(i,j)\in[n]^2\mid ij\le n, i-j=s\}\\ &\le\#\{j\in[n]\mid (j+|s|)j\le n\}\le\left\lfloor\frac{n}{|s|+1}\right\rfloor.\end{aligned}$$

结合关于 Weingarten 函数的这一观察，由 (4.5) 可知，存在某个关于 N 的多项式 $b_{w_1,\ \ldots\ldots,\ w_r}$，使得

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\,w_1(U_1^N,...,U_d^N)\cdots\mathrm{tr}\,w_r(U_1^N,...,U_d^N)\right]=\frac{b_{w_1,...,w_r}(N)}{N^k\prod_{j=1}^k(N^2-j^2)^{\lfloor\frac{k}{j}\rfloor}}.$$

令 Σ表示右侧分母的次数。以下估计成立:

$$\deg b_{w_1,...,w_r}\le\Sigma=k+2\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{k}{j}\right\rfloor\le 3k(1+\log k).$$

将分子和分母同时除以 N^Σ，我们发现存在一个多项式$f_{w_1,...,w_r}$，使得

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\,w_1(U_1^N,...,U_d^N)\cdots\mathrm{tr}\,w_r(U_1^N,...,U_d^N)\right]=\frac{f_{w_1,...,w_r}(\frac{1}{N})}{g_k(\frac{1}{N})} \tag{4.9}$$

对所有 $N>k$，当 $f_{w_1,...,w_r},g_k\in\mathcal{P}_\Sigma$ 时，均成立。

如果对于某个 $1\le l\le d$，U_l^N与 U_l^{N*}在诸字w_1，…… w_r 中出现的总次数并不相同，则(4.9)的左端为零，等式(4.9)仍然成立。此外，

如果其中一个字 w_i 是恒等元，我们可以将所述命题化归为含有 $r-1$ 个字的情形，并注意到当所有字均为恒等元时，左端等于1，因此由归纳法，(4.9)在一般情况下成立。

接下来，注意到 $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\ h_1(U_1^N,\ \ldots\ldots,\ U_d^N)\cdots\mathrm{tr}\ h_r(U_1^N,\ \ldots\ldots,\ U_d^N)\right]$ 可以写成如下形式各项的线性组合： $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\ w_1(U_1^N,\ \ldots\ldots,\ U_d^N)\cdots\mathrm{tr}\ w_r(U_1^N,\ \ldots\ldots,\ U_d^N)\right]$，其中各字 $w_1,\ \ldots\ldots,\ w_r$ 的总长度至多为 $k=\tilde{q}_1q_1+\cdots+\tilde{q}_rq_r=:\ p$。因此， $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\ h_1(X_1^N)\cdots\mathrm{tr}\ h_r(X_r^N)\right]=\Psi_{h_1,\ \ldots\ldots,\ h_r}(\frac{1}{N})$可由 (4.9) 得出。

此外，由于酉对称性（详见 [CS06], [Mat13] ），我们有

$$\Psi_{h_1,\ldots,h_r}(\tfrac{1}{N})=\Psi_{h_1,\ldots,h_r}(-\tfrac{1}{N}),\tag{4.10}$$

这表明 $\Psi_{h_1,\ \ldots\ldots,\ h_r}$ 的幂级数展开只包含 $\frac{1}{N}$ 的偶次幂，由此证明完成。□

现在开始证明命题 4.1，即关于 $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\ h_1(X_1^N)\cdots\mathrm{tr}\ h_r(X_r^N)\right]$的渐近展开，其中 $h_1,\ldots,h_r\in\mathcal{P}$为多项式测试函数；这代表了 Haar 分布的酉矩阵情形下命题 3.3 的对应结果。和之前一样，证明的结构基本遵循与 $r=1$情形相同的思路，详见 [CGVvH24]。

利用引理 2.7，我们现在可以证明命题 4.1 中关于 $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\ h_1(X_1^N)\cdots\mathrm{tr}\ h_r(X_r^N)\right]$的渐近展开，其中测试函数为多项式。请注意，在 Haar 情形下不需要截断，因为随机矩阵模型本身就是有界的；这与高斯情形不同。

命题 *4.1* 的证明。 设 $\Psi_{h_1,\ldots,h_r}$如引理 4.3 所示。定义 $\mu_m(h_1,\ldots,h_r):=\frac{\Psi^{(m)}_{h_1,\ldots,h_r}(0)}{m!}$对所有 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$成立，则 μ_m 是一个 r-线性泛函，并注意到，由于式（4.3）的对称性，对于任意奇数 m 都有 $\mu_m=0$。根据泰勒定理，我们有

$$\left|\Psi_{h_1,\ldots,h_r}(\tfrac{1}{N})-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\mu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right|\leq\frac{\|\Psi^{(m)}_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[0,\frac{1}{N}]}}{m!N^m}.\tag{4.11}$$

由于 $\|X_i^N\|\leq K_i(i=1,\ldots,r)$ 几乎必然成立，

$$\left|\Psi_{h_1,\ldots,h_r}(\tfrac{1}{N})\right|=\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\,h_1(X_1^N)\cdots\mathrm{tr}\,h_r(X_r^N)\right]\right|\leq\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]},$$

对任意 $N\in\mathbb{N}$。由于引理 4.3 得到表达式 $\Psi_{h_1,\ldots,h_r}\left(\frac{1}{N}\right)=\frac{f_{h_1,\ldots,h_r}\left(\frac{1}{N}\right)}{g_p\left(\frac{1}{N}\right)}$，其中$f_{h_1,\ldots,h_r},g_p\in\mathcal{P}^{[3\bar{p}]}$，应用有理伯恩斯坦不等式（引理 2.7），可得对所有$m,N\in\mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\|\Psi^{(m)}_{h_1,\ldots,h_r}\|_{[-\frac{1}{c\bar{p}},\frac{1}{c\bar{p}}]}&\leq\left(\mathrm{e}^{-\bar{p}}(C\bar{p})^m+\frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!}\right)\|\Psi_{h_1,\ldots,h_r}\|_{\{\frac{1}{N}\ |\ N\in\mathbb{Z},|N|>p\}}\\&\leq\left((C\bar{p})^m+\frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!}\right)\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]},\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中 $C,c>0$ 为某些普适常数。这对 $m=0$ 也成立，因为我们有

$$|\mu_0(h_1,\ldots,h_r)|\leq\limsup_{N\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\,h_1(X_1^N)\cdots\mathrm{tr}\,h_r(X_r^N)\right]\right|\leq\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]},$$

由此完成了 (4.1) 的证明。

现在将界 (4.12) 与 (4.11) 结合起来，便可得出，对于 $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{c\bar{p}}$ 也就是说 $N \geq c\bar{p}$,

$$\left|\Psi_{h_1,\ldots,h_r}(\tfrac{1}{N}) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right| \leq \frac{1}{N^m}\left((C\bar{p})^m + \frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!}\right)\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]},$$

这证明了 $N \geq c\bar{p}$ 情形下的 (4.2)。在 $N < c\bar{p}$ 情形下，(4.1) 表明

$$\begin{aligned}\left|\Psi_{h_1,\ldots,h_r}\left(\tfrac{1}{N}\right) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right| &\leq \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{N^k}\left((C\bar{p})^k + \frac{(C\bar{p})^{2k}}{k!}\right)\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]} \\ &\leq \frac{(C\bar{p})^m}{N^m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{(C\bar{p})^k}{k!}\right)\|h_1\|_{[-K_1,K_1]}\cdots\|h_r\|_{[-K_r,K_r]}.\end{aligned}$$

现在，如果 $C\bar{p} \leq m$,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{(C\bar{p})^k}{k!}\right) \leq \sum_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{m^k}{k!}\right) \leq C^m,$$

而如果 $C\bar{p} > m$,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{(C\bar{p})^k}{k!}\right) \leq \sum_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{(C\bar{p})^m}{m!}\right) = m\left(1+\frac{(C\bar{p})^m}{m!}\right),$$

因此，每种情形下 (4.2) 均成立，证明至此完成。 □

现在我们继续证明本节的主定理，即任意光滑测试函数的渐近展开，它对应于 Haar 分布的酉矩阵情形下定理 3.5 的类似结果。

定理 4.4 （光滑渐近展开，Haar酉情形）。 对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个 r-线性泛函 μ_m *on* $C^\infty(\mathbb{R})^r$，使得在某个普适常数 $C > 0$ 下，以下结论成立：

任取由 r 个光滑函数组成的元组 $h_i \in C^\infty(\mathbb{R})(i = 1, \ldots, r)$，并定义

$$\begin{aligned} f_i(\theta) &:= h_i(K_i\cos\theta) \quad with \quad K_i = \|P_i\|_{C^*(F_d)}, \quad i = 1,\ldots,r, \\ and \quad F(x_1,\ldots,x_r) &:= f_1^{(1)}(x_1)\cdots f_r^{(1)}(x_r); \end{aligned}$$

那么，对于每个 m、$N \in \mathbb{N}$，以及任意 $u \in (0, 1)$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right| \\ &\leq \frac{C^{m+r}}{N^m}\left(\frac{(\tilde{q}_1+\cdots+\tilde{q}_r)^{\lceil m'\rceil}}{u^m}\|F\|_{C^{\lceil m'\rceil}([0,2\pi]^r)} + \frac{(\tilde{q}_1+\cdots+\tilde{q}_r)^{\lceil 2m'\rceil}}{m!u^{2m}}\|F\|_{C^{\lceil 2m'\rceil}([0,2\pi]^r)}\right), \quad (4.13)\end{aligned}$$

其中 $m' := (1+u)m$。

此外，对于任意奇数 m，我们有 $\mu_m = 0$ 。

证明。 证明的思路与定理 3.5 相同，只需用命题 4.1 替代命题 3.3。首先注意，对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，根据命题 4.1，存在一个$r$-线性泛函 μ_m，定义在 $\mathcal{P}^r$ 上，满足 (4.1) 和 (4.2)；并且可以按照定理 3.5 证明中步骤 1 的相同方式，将其延拓到 $C^\infty(\mathbb{R})^r$ 。由于延拓的连续性，对于任意奇数 m，我们也有 $\mu_m = 0$ 。

现在固定任意一个由函数 $h_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ 组成的 r-元组（$i = 1,...,r$），它们在 $[-K_i, K_i]$ ($i = 1,...,r$) 上的切比雪夫展开式为

$$h_1(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(1)} T_j(K_1^{-1}x_1), ..., h_r(x_r) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(r)} T_j(K_r^{-1}x_r), \tag{4.14}$$

对于任意 $x_i \in [-K_i, K_i]\,(i = 1, ..., r)$。这里需要指出，与定理 3.5 的证明中相同的推理表明，在证明余下部分时，我们不妨假设 $a_0^{(i)} = 0\,(i = 1,...,r)$。

于是，对于任意 $m, N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N) \cdots \operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(h_1, \ldots, h_r)}{N^k} \right| \\
&= \left| \sum_{q_1,\ldots,q_r} \left(\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(a_{q_1}^{(1)} T_{q_1}(K_1^{-1} X_1^N)) \cdots \operatorname{tr}(a_{q_r}^{(r)} T_{q_r}(K_r^{-1} X_r^N)) \right] \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k\left(a_{q_1}^{(1)} T_{q_1}(K_1^{-1}\cdot), \ldots, a_{q_r}^{(r)} T_{q_r}(K_r^{-1}\cdot) \right)}{N^k} \right) \right| \\
&\le \sum_{q_1,\ldots,q_r} |a_{q_1}^{(1)}| \cdots |a_{q_r}^{(r)}| \left| \mathbb{E}\left[\operatorname{tr} T_{q_1}(K_1^{-1} X_1^N) \cdots \operatorname{tr} T_{q_r}(K_r^{-1} X_r^N) \right] \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(T_{q_1}(K_1^{-1}\cdot), ..., T_{q_r}(K_r^{-1}\cdot))}{N^k} \right| \\
&\le \frac{1}{N^m} \sum_{q_1,\ldots,q_r} |a_{q_1}^{(1)}| \cdots |a_{q_r}^{(r)}| \left((C\bar{p})^m + \frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!} \right),
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式应用了命题 4.1，取 $p = \tilde{q}_1 q_1 + \cdots + \tilde{q}_r q_r$ 和 $\bar{p} = p(1 + \log p)$。

现在注意，对于任意 $u \in (0,1)$，观察到对所有 $x > 0$，$\log x \le x$，

$$\bar{p} = p(1 + \log p) = p \cdot \frac{1}{u} \log((\mathrm{e}p)^u) \le \frac{\mathrm{e}^u}{u} p^{1+u}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^m} \sum_{q_1,\ldots,q_r} |a_{q_1}^{(1)}| \cdots |a_{q_r}^{(r)}| \left((C\bar{p})^m + \frac{(C\bar{p})^{2m}}{m!} \right) \\
&\le \frac{1}{N^m} \sum_{q_1,\ldots,q_r} |a_{q_1}^{(1)}| \cdots |a_{q_r}^{(r)}| \left(\frac{(C\mathrm{e}^u)^m}{u^m} p^{\lceil (1+u)m \rceil} + \frac{(C\mathrm{e}^u)^{2m}}{m! u^{2m}} p^{\lceil 2(1+u)m \rceil} \right) \\
&\le \frac{C^{m+r}}{N^m} \left(\frac{(\tilde{q}_1 + \cdots + \tilde{q}_r)^{\lceil (1+u)m \rceil}}{u^m} \|F\|_{C^{\lceil (1+u)m \rceil}([0,2\pi]^r)} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{(\tilde{q}_1 + \cdots + \tilde{q}_r)^{\lceil 2(1+u)m \rceil}}{m! u^{2m}} \|F\|_{C^{\lceil 2(1+u)m \rceil}([0,2\pi]^r)} \right),
\end{aligned}$$

其中 $C > 0$ 是某个新的普适常数；在最后一个不等式中，我们使用了 (3.17)。证明至此完成。

□

注 4.5。 按照定理 3.5 和注 3.6 中的相同推理，还可以验证，只要将 u 选取得足够小，使得 $\lceil 2(1+u)m\rceil = 2m+1$，就可以得到

$$|\mu_m(h_1,...,h_r)| \leq C\|h_1^{(1)}(x_1)\cdots h_r^{(1)}(x_r)\|_{C^{2m+1}([-K_1,K_1]\times\cdots\times[-K_r,K_r])}, \tag{4.15}$$

其中， C 是一个仅依赖于 m， r的常数。因此， μ_m 在 $C^{2m+2}(\mathbb{R})^r$上定义良好，并且定理 4.4 中的渐近展开 (4.13) 对 h_1，……， h_r 在 C^{2m+2} 类中也成立。

4.2. **正交与辛情形**。 本节简要讨论将渐近展开结果（定理 4.4）推广到服从 Haar 分布的正交矩阵与辛矩阵情形。证明策略与酉情形完全相同——通过将多迹情形归约为 [CGVvH24] 中处理的单迹情形，可得到针对多项式测试函数的渐近展开，即命题 4.1 的一个类似结果；随后再通过切比雪夫展开用多项式逼近光滑测试函数，从而将结果推广到光滑测试函数。因此，我们在此仅陈述结果，不展开证明。

令 $\boldsymbol{U}^N = (U_1^N, \ldots\ldots, U_d^N)$ 和 $\boldsymbol{V}^N = (V_1^N, \ldots\ldots, V_d^N)$ 分别为维数为 N 的 $\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{Sp}(N)$ 中相互独立且服从 Haar 分布的正交矩阵与辛矩阵，并令$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots\ldots, u_d)$ 为自由 Haar 酉元。令 $r \in \mathbb{N}$为固定值。对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, r$，我们还将固定次数为 $\tilde{q}_i$ 的自伴非交换多项式 $P_i \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots\ldots, x_d, x_1^*, \ldots\ldots, x_d^*\rangle$。为简便起见，我们采用以下记号，

$$X_i^N := P_i(\boldsymbol{U}^N, \boldsymbol{U}^{N*}), \qquad Y_i^N := P_i(\boldsymbol{V}^N, \boldsymbol{V}^{N*}), \qquad X_i^F := P_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^*) \qquad i = 1, ..., r.$$

我们还按照第 4.1 节中的定义定义 $K_i (i = 1, \ldots\ldots, r)$。

对于 $\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{Sp}(N)$ 矩阵，均可得到与定理 4.4 类似的渐近展开，也就是说，分别对 $\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)]$ 和 $\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(Y_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(Y_r^N)]$，都可以得到渐近展开。然而，正如 [CGVvH24] 指出的，根据超对称对偶（见 [MP24]），X_i^N 和 Y_i^N 的渐近展开可以同时得到控制，因此，我们不分别陈述各自的估计，而是记录以下联合界。

定理 4.6 （多重迹的渐近展开 O（N）和 Sp（N）矩阵）。 对于任意$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个定义在 C^∞（$\mathbb{R}$）^{r} 上的 r-线性泛函 μ_m，使得对于某个普适常数 $C > 0$，以下结论成立：

任取 r个光滑函数组成的元组 $h_i \in C^\infty$（$\mathbb{R}$） （$i = 1$、…、 r），并定义

$$f_i(\theta) := h_i(K_i\cos\theta) \quad with \quad K_i = \|P_i\|_{C^*(F_d)}, \quad i = 1, ..., r,$$
$$and \quad F(x_1, \ldots, x_r) := f_1^{(1)}(x_1)\cdots f_r^{(1)}(x_r);$$

那么，对每个 m、 $N \in \mathbb{N}$以及任意 $u \in$ （0，1），我们有

$$\left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(X_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(X_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{N^k}\right| \vee \left|\mathbb{E}[\operatorname{tr} h_1(Y_1^N)\cdots\operatorname{tr} h_r(Y_r^N)] - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\nu_k(h_1,\ldots,h_r)}{(-2N)^k}\right|$$
$$\leq \frac{C^{m+r}}{N^m}\left(\frac{(\tilde{q}_1+\cdots+\tilde{q}_r)^{\lceil m'\rceil}}{u^m}\|F\|_{C^{\lceil m'\rceil}([0,2\pi]^r)} + \frac{(\tilde{q}_1+\cdots+\tilde{q}_r)^{\lceil 2m'\rceil}}{m!u^{2m}}\|F\|_{C^{\lceil 2m'\rceil}([0,2\pi]^r)}\right), \tag{4.16}$$

其中 $m' :=$ （$1+u$）m。

5. 渐近展开的应用

5.1. 累积量的高阶渐近消失。本节将应用渐近展开结果（例如定理 3.5、定理 4.4），证明经典随机矩阵系综中函数的迹的累积量具有高阶渐近消失性质。

我们先回顾累积量的定义，参见 [Zvo97], [Rot64], [Sta97]。对于随机变量 $Y_1, \dots, Y_r$ 以及一个划分 $\pi = \{B_1, ..., B_\pi\} \in \mathrm{Part}(r)$，经典累积量$C_\pi(Y_1, \dots, Y_r)$ 定义为

$$C_\pi(Y_1, \dots, Y_r) := \sum_{\pi' \leq \pi} \mathbb{E}_{\pi'}[Y_1, \dots, Y_r] \, \mathrm{Moeb}(\pi', \pi),$$

对于 $\pi = 1_r$，我们记作 $C_r(Y_1, \dots, Y_r) := C_{1_r}(Y_1, \dots, Y_r)$，其中

$$\mathbb{E}_\pi[Y_1, \dots, Y_r] := \prod_{j=1}^{\#\pi} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in B_j} Y_i\right].$$

于是我们得到矩-累积量公式

$$\mathbb{E}_\pi[Y_1 \cdots Y_r] = \sum_{\pi' \leq \pi} C_{\pi'}(Y_1, \dots, Y_r).$$

累积量有几种不同的定义方式，例如通过生成函数定义，其中一种方式为

$$C_l(Y_{i(1)}, ..., Y_{i(l)}) = \frac{\partial^l}{\partial t_{i(1)} \cdots \partial t_{i(l)}} \log \mathbb{E}\left[\exp\left(t_1 Y_1 + \cdots + t_r Y_r\right)\right]\Big|_{t_1 = \cdots = t_r = 0},$$

对于任意 $l \in \mathbb{N}$ 以及任意指标 $i(1) ..., i(l) \in \{1,..., r\}$。根据此定义，可以通过形式生成函数来表示矩与累积量之间的关系：

$$\log \mathbb{E}[\exp(tY)] = \log\left(\sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[Y^k] \frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k \geq 1} C_k(Y, ..., Y) \frac{t^k}{k!}, \tag{5.1}$$

我们也有上述关系的多元版本：

$$\begin{aligned} \log \mathbb{E}\left[\exp\left(t_1 Y_1 + \cdots + t_r Y_r\right)\right] &= \log\left(\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \mathbb{E}[Y_1^{k_1} \cdots Y_r^{k_r}] \frac{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \setminus \{\boldsymbol{0}\}} C_{\boldsymbol{k}}(Y_1, ..., Y_r) \frac{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，对于 $\boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} := t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r}$，$\boldsymbol{k}! := k_1! \cdots k_r!$，而 $C_{\boldsymbol{k}}(Y_1, ..., Y_r)$ 是由下式定义的累积量

$$C_{\boldsymbol{k}}(Y_1, ..., Y_r) := C_{k_1 + \cdots + k_r}(\underbrace{Y_1, ..., Y_1}_{k_1 \text{ times}}, ..., \underbrace{Y_r, ..., Y_r}_{k_r \text{ times}}).$$

此定义与前文通过矩-累积量公式给出的定义等价，因为对矩母函数取对数并展开即可得到矩-累积量关系。（有关计算细节，请参见例如 [RS00] 中的第 6 节。）

现在，我们将关注前几节讨论的经典随机矩阵（GUE/GOE/GSE）以及 U(N)、O(N)、Sp(N) 中 Haar 分布随机矩阵的函数迹的高阶渐近消失。众所周知，对于这些矩阵，由这些随机矩阵的多项式构成的未归一化迹的 r 阶累积量会衰减

其阶数为 N^{2-r}，当 $N \to \infty$时；在此我们针对当前情形重述这一事实。关于下述结果的证明，请参见 [Col03], [MS06b]，其中讨论了高斯、正交与辛情形；关于酉情形中更系统的处理（高阶自由性），请参见 [CMSS07]。请注意，与不受对称类（酉、正交、辛）影响的一阶渐近性（始终表现为渐近自由性）不同，高阶累积量在很大程度上取决于对称类，参见 [Red14] 和 [MP13]。

定理 5.1 (多项式测试函数的累积量渐近消失)。 取第 *3.1*、*3.2*、*4.1* 或 *4.2* 节中的相同设定和记号，并令 $X_1^N, ..., X_r^N$ 为以下对象的自伴多项式：高斯酉系综、高斯正交系综、高斯辛系综，或 $\mathrm{U}(N)$、$\mathrm{O}(N)$、$\mathrm{Sp}(N)$ 中的 *Haar* 分布矩阵。对于任意多项式 $h_i \in \boldsymbol{P}\ (i = 1, ..., r)$，我们定义 $h_i(X_i^N)\ (i = 1, ..., r)$。那么，极限

$$\lim_{N\to\infty} N^{-2} C_r(N \operatorname{Tr} h_1(X_1^N), ..., N \operatorname{Tr} h_r(X_r^N)) \tag{5.3}$$

存在。

现在，我们利用渐近展开的结果，将其推广到光滑测试函数的情形。

定理 5.2 (光滑测试函数的累积量高阶渐近消失)。 取第 *3.1*、*3.2*、*4.1* 或 *4.2* 节中的相同设定和记号，并令 $X_1^N, ..., X_r^N$ 为以下对象的自伴多项式：高斯酉系综、高斯正交系综、高斯辛系综，或 $\mathrm{U}(N)$、$\mathrm{O}(N)$、$\mathrm{Sp}(N)$ 中的 *Haar* 分布矩阵。在高斯系综的情形下，对于任意有界光滑函数 $h_i \in C^{4r-1}\ (i = 1, ..., r)$；而在 *Haar* 分布矩阵的情形下，对于任意光滑函数 $h_i \in C^{4r}\ (i = 1, ..., r)$，我们定义 $h_i(X_i^N)\ (i = 1, ..., r)$。那么，极限

$$\lim_{N\to\infty} N^{-2} C_r(N \operatorname{Tr} h_1(X_1^N), ..., N \operatorname{Tr} h_r(X_r^N)) \tag{5.4}$$

存在。

注5.3。我们只给出高斯酉系综情形的证明，因为不同对称类（正交、辛）的高斯系综，以及 Haar 分布系综（酉、正交、辛）都可以用同样的方法证明。但请注意，与迹的期望不同，高阶累积量依赖于定理 5.1 中的对称类，因此定理 5.2 中的情形也如此。极限由高阶自由性（实、正交、辛）所支配。详情请参阅 [Red14] 和 [MP13]。

证明。根据累积量的定义，我们有

$$\begin{aligned} &N^{-2} C_r(N \operatorname{Tr} h_1(X_1^N), ..., N \operatorname{Tr} h_r(X_r^N)) \\ &= N^{2r-2} C_r(\operatorname{tr} h_1(X_1^N), ..., \operatorname{tr} h_r(X_r^N)) \\ &= N^{2r-2} \sum_{\pi \in \mathrm{Part}(r)} \mathbb{E}_\pi \left[\operatorname{tr} h_1(X_1^N), ..., \operatorname{tr} h_r(X_r^N)\right] \mathrm{Moeb}(\pi, 1_r). \end{aligned} \tag{5.5}$$

令 $\nu_l\ (0 \le l \le m-1)$ 为命题 3.3 和定理 3.5 中给出的 $C^{2m+1}(\mathbb{R})^r$ 或 $\mathcal{P}^r$ 上的 r-线性泛函。对于任意 $B \subset \{1, \ldots, r\}$，我们定义 $a_l^B (0 \le l \le m-1)$ 为

$$a_l^B(h_1, ..., h_r) := \nu_l(g_1, \ldots, g_r), \tag{5.6}$$

其中 $g_i = h_i$ 对于 $i \in B$，并且 $g_i = 1$ 对于 $i \notin B$。

对于任意划分 $\pi=\{B_1,\ldots\ldots,B_{\#\pi}\}\in\mathrm{Part}(r)$，由命题 3.3 和定理 3.5 可知，对于一个 r-元组 $h=(h_1,\ldots\ldots,h_r)$，其中的元素要么是 $C^{2m+1}(\mathbb{R})^r$ 中的有界光滑函数，要么是 $\mathcal{P}^r$ 的元素，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\pi\left[\operatorname{tr}h_1(X_1^N),\ldots,\operatorname{tr}h_r(X_r^N)\right]\\
&=\prod_{j=1}^{\#\pi}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in B_j}\operatorname{tr}h_i(X_i^N)\right]\\
&=\prod_{j=1}^{\#\pi}\left(\sum_{l=0}^{m-1}\frac{a_l^{B_j}(h_1,\ldots,h_r)}{N^l}+\frac{a_m^{B_j}(h_1,\ldots,h_r)(N)}{N^m}\right)\\
&=\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{N^l}\sum_{\substack{0\le l_1,\ldots,l_{\#\pi}\le m-1\\ l_1+\cdots+l_{\#\pi}=l}}\prod_{j=1}^{\#\pi}a_{l_j}^{B_j}(h_1,\ldots,h_r)+\sum_{l=m}^{m\times\#\pi}\frac{1}{N^l}\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{\#\pi}\ge 0\\ l_1+\cdots+l_{\#\pi}=l}}\prod_{j=1}^{\#\pi}a_{l_j}^{B_j}(h_1,\ldots,h_r),
\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中，$a_m^{B_j}(h_1,\ldots,h_r)(N)$ 是 N 中的有界函数。具体而言，我们有

$$\limsup_{N\to\infty}|a_m^{B_j}(h_1,\ldots,h_r)(N)|\le C\|h_1^{(1)}(x_1)\cdots h_r^{(1)}(x_r)\|_{C^{2m}([-K_1,K_1]\times\cdots\times[-K_r,K_r])},\tag{5.8}$$

其中某个常数 $C>0$ 取决于 m,r，对任意 j 均成立。结合 (5.5)，我们有

$$\begin{aligned}
&N^{-2}C_r(N\operatorname{Tr}h_1(X_1^N),\ldots,N\operatorname{Tr}h_r(X_r^N))\\
&=\sum_{l=0}^{m-1}N^{2r-2-l}\sum_{\substack{\pi=\{B_1,\ldots,B_{\#\pi}\}\\ \in\mathrm{Part}(r)}}\mathrm{Moeb}(\pi,1_r)\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{\#\pi}\ge 0\\ l_1+\cdots+l_{\#\pi}=l}}\prod_{j=1}^{\#\pi}a_{l_j}^{B_j}(h_1,\ldots,h_r)+O\left(N^{2r-2-m}\right).
\end{aligned}\tag{5.9}$$

正如我们在定理 3.5 中看到的 (3.13)，泛函 $\nu_l(0\le l\le m-1)$ 满足

$$|\nu_l(h_1,\ldots,h_r)|\le C\|h_1^{(1)}(x_1)\cdots h_r^{(1)}(x_r)\|_{C^{2l}([-K_1,K_1]\times\cdots\times[-K_r,K_r])},$$

其中 $C>0$ 是仅取决于 l,r 的常数，因此对任意 $B\subset\{1,\ldots,r\}$，a_l^B 也满足相同的界。选取多项式序列 $\{g_{n,i}\}_{n=1}^\infty$，使得对每个 $i=1,\ldots,r$，当 $n\to\infty$ 时，$g_{n,i}\to h_i$ 在 $C^{2m+1}([-K_i,K_i])$ 范数下收敛。于是，结合上述界与多重线性性，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}a_l^B(g_{n,1},\ldots,g_{n,r})=a_l^B(h_1,\ldots,h_r),$$

对任意 $0\le l\le m-1$ 以及任意 $B\subset\{1,\ldots,r\}$。

现在令 m 为 $2r-1$。由定理 5.1可知，对于任意多项式 $g_{n,i}\in\mathcal{P}(i=1,\ldots\ldots,r)$，对于每个 $0\le l\le 2r-3$，(5.9) 中 N^{2r-2-l} 的系数都为零，即

$$\sum_{\substack{\pi=\{B_1,\ldots,B_{\#\pi}\}\\ \in\mathrm{Part}(r)}}\mathrm{Moeb}(\pi,1_r)\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{\#\pi}\ge 0\\ l_1+\cdots+l_{\#\pi}=l}}\prod_{j=1}^{\#\pi}a_{l_j}^{B_j}(g_{n,1},\ldots,g_{n,r})=0.\tag{5.10}$$

因此，通过取极限 $n\to\infty$，（5.10）对任意有界光滑函数 $h_i\in C^{2m+1}(\mathbb{R})$同样成立。或者，可将（5.10）的左端视为一个有界多重线性泛函，从而证明这一推广。由于该泛函在多项式的稠密子空间 $\mathcal{P}$ 上为零，引理 2.8 表明它必在整个光滑函数空间上为零。

因此，我们得出结论：对任意有界光滑函数 $h_i \in C^{2(2r-1)+1}(\mathbb{R})$（$i = 1, \ldots r$），极限

$$\lim_{N\to\infty} N^{-2} C_r(N \operatorname{Tr} h_1(X_1^N), \ldots, N \operatorname{Tr} h_r(X_r^N))$$

存在，且

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} N^{-2} C_r(N \operatorname{Tr} h_1(X_1^N), \ldots, N \operatorname{Tr} h_r(X_r^N)) \\
&= \sum_{\substack{\pi=\{B_1,\ldots,B_{\#\pi}\} \\ \in \mathrm{Part}(r)}} \operatorname{Moeb}(\pi, 1_r) \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{\#\pi}\geq 0 \\ l_1+\cdots+l_{\#\pi}=2r-2}} \prod_{j=1}^{\#\pi} a_{l_j}^{B_j}(h_1, \ldots, h_r) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\pi=\{B_1,\ldots,B_{\#\pi}\} \\ \in \mathrm{Part}(r)}} \operatorname{Moeb}(\pi, 1_r) \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{\#\pi}\geq 0 \\ l_1+\cdots+l_{\#\pi}=2r-2}} \prod_{j=1}^{\#\pi} a_{l_j}^{B_j}(g_{n,1}, \ldots, g_{n,r}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} N^{-2} C_r(N \operatorname{Tr} g_{n,1}(X_1^N), \ldots, N \operatorname{Tr} g_{n,r}(X_r^N)),
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

5.2. **中心极限定理**。 作为定理 5.2 的推论，我们得到经典矩阵系综的函数迹的中心极限定理（CLT）。关于涉及经典系综的随机矩阵统计量的中心极限定理一直是深入研究的课题。对于单个矩阵模型的线性统计量，这一课题已得到充分研究，例如参见[Joh98], [Gui02], [LP09]。

关于测试函数正则性的尖锐条件已得到广泛研究。对于 Haar 分布矩阵，例如可参见 [Sos00, Sil90, JL21, Sil22, CJ24]。对于 Wigner 矩阵（包括高斯酉系综/高斯正交系综/高斯辛系综），相关课题已在 [Shc11, SW13, BD17, BH23, CES23, Rek24]中得到研究。这些论文中的许多表明，略弱于 C^1（具体而言，是 Sobolev 型 $H^{1/2}$）的正则性条件就已足够。

然而，这些研究主要关注线性谱统计量，或矩阵经常数矩阵修正的模型，而非多个随机矩阵的非交换函数演算。

在非交换多项式和多个随机矩阵的背景下，经典随机矩阵系综的固定次数多项式的收敛性与联合涨落，可由二阶自由性的组合理论推出；例如参见 [MS06c, MSS07, CMSS07, MP13, Red14]。特别是，关于 Wigner 矩阵涨落矩结构的近期结果见 [MMPS22]。

本节将重点讨论如何把这些结果从多项式推广到光滑函数。完成本节的结果后，我们发现 Diaz 和 Mingo 的论文 [DM23] 与我们的手稿相关，因为该文在有界 Fréchet 变差框架下，为多矩阵情形中 C^1-函数的中心极限定理成立确立了判据。据我们所知，尽管某些逼近步骤与我们的结果有相似之处，[DM23]的结果并不能直接用于重新推导我们的结果。

我们从 C^∞ 测试函数开始，并注意到我们的结果还可以进一步推广到有限正则性的情形。

定理 5.4 (光滑测试函数的中心极限定理)。 采用第 *3.1*、*3.2*、*4.1* 或 *4.2* 节中的相同设定和记号，并令 $X_1^N, \ldots, X_r^N$ 为自伴多项式

它们来自高斯酉系综、高斯正交系综、高斯辛系综，或 $\mathrm{U}(N)$、$\mathrm{O}(N)$、$\mathrm{Sp}(N)$ 中的 ***Haar*** 分布矩阵。对于任意光滑函数 $h_i \in C^\infty(\mathbb{R})\,(i = 1, ..., r)$，（对于高斯系综的情形，我们还假设其有界），随机向量

$$\Big(\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N)]\Big)_{i=1}^r$$

当 $N \to \infty$ 时，收敛于一个中心化高斯随机向量 $\boldsymbol{N(0, \Sigma)}$，其协方差由下式给出

$$\Sigma_{i,j} := \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N)]\Big)\cdot\Big(\mathrm{Tr}\, h_j(X_j^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_j(X_j^N)]\Big)\Big].$$

证明。令 Y_1^N、.....、Y_r^N 为由下式定义的随机变量

$$Y_i^N := \mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N)], \quad i = 1, ..., r,$$

其中注意到 Y_i^N 是中心化的。

根据定理 5.2，我们知道，对于任意 $k \geq 3$ 和 $1 \leq i_1$、.....、$i_k \leq r$，k 阶累积量$C_k(Y_{i_1}^N$、.....、$Y_{i_k}^N)$ 当 $N \to \infty$ 时趋于零，

$$\lim_{N\to\infty} C_k(Y_{i_1}^N, ..., Y_{i_k}^N) = 0,$$

并且对于一个 对于 $1 \leq i, j \leq r$，二阶累积量 $C_2(Y_i^N, Y_j^N)$ 收敛到某个有限值 e,

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Cov}(Y_i^N, Y_j^N) = \lim_{N\to\infty} C_2(Y_i^N, Y_j^N) =: \Sigma_{i,j} < \infty.$$

鉴于只有一阶和二阶累积量非零的分布是高斯分布，所需的中心极限定理便得证。□

我们还可以将定理 5.4 推广到测试函数属于某个有限C^L 类的情形。

定理 5.5 (将中心极限定理推广至 C^L-函数**)**。采用第 ***3.1*** 节、第 ***3.2*** 节、第 ***4.1*** 节或第 ***4.2*** 节中的相同设定和记号，并设 $X_1^N, ..., X_r^N$ 是高斯酉系综、高斯正交系综、高斯辛系综或 $\mathrm{U}(N)$、$\mathrm{O}(N)$、$\mathrm{Sp}(N)$ 中 ***Haar*** 分布矩阵的自伴多项式。存在某个正整数 L，使得以下结论成立：

对于任意光滑函数 $h_i \in C^L(\mathbb{R})\,(i = 1, ..., r)$（在高斯系综的情形下，我们还假设其有界），随机向量

$$\Big(\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N)]\Big)_{i=1}^r$$

依分布收敛于一个中心化高斯随机向量 $\boldsymbol{N}$（$\mathbf{0}$，Σ），其协方差由下式给出

$$\Sigma_{i,j} := \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_i(X_i^N)]\Big)\cdot\Big(\mathrm{Tr}\, h_j(X_j^N) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\, h_j(X_j^N)]\Big)\Big].$$

特别地，在高斯系综的情形下，我们可以取 $L = 5$，而在 ***Haar*** 分布的矩阵情形下，可以取 $L = 6$。

证明。对于任意正整数 L 和任意 $\varepsilon > 0$，利用磨光子作标准的稠密性论证，我们可以用光滑函数 $h_i^\varepsilon \in C^\infty$ 逼近 C^L 函数 h_i，使得

$$\|h_i - h_i^\varepsilon\|_{C^L([-K_i, K_i])} < \varepsilon.$$

对于每个 $i = 1$、.....、r。（具体而言，使用适当的磨光子 ρ_δ，观察 $h_i^\varepsilon := h_i * \rho_\delta$即可验证这一事实。我们还注意到，在高斯酉系综情形下，由于 h_i 有界，可以在保持一致界 $\|\cdot\|_{(-\infty,\infty)}$ 的同时完成这一近似。）

我们将由 $\boldsymbol{Y}^N(h_1、\ldots\ldots、h_r)$ 表示如下定义的随机向量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}^N(h_1,...,h_r) &= (Y_1^N(h_1),...,Y_r^N(h_r))\\ &:= (\operatorname{Tr} h_1(X_1^N)-\mathbb{E}[\operatorname{Tr} h_1(X_1^N)],...,\operatorname{Tr} h_r(X_r^N)-\mathbb{E}[\operatorname{Tr} h_r(X_r^N)]).\end{aligned}\tag{5.11}$$

由于我们有

$$\boldsymbol{Y}^N(h_1,...,h_r)-\boldsymbol{Y}^N(h_1^\varepsilon,...,h_r^\varepsilon)=\boldsymbol{Y}^N((h_1-h_1^\varepsilon),...,(h_r-h_r^\varepsilon)),$$

为证明当 $N\to\infty$ 时 $\boldsymbol{Y}^N(h_1,...,h_r)$ 依分布收敛于 $\mathcal{N}(\mathbf{0},\Sigma)$，只需证明以下各项:

(I) 误差项消失,

$$\boldsymbol{Y}^N((h_1-h_1^\varepsilon),...,(h_r-h_r^\varepsilon))\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\mathbf{0}\tag{5.12}$$

依分布，对每个 $i=1,...,r$ 关于 N 一致
(II) 近似向量收敛于一个高斯向量，即,

$$\boldsymbol{Y}^N(h_1^\varepsilon,...,h_r^\varepsilon)\xrightarrow[N\to\infty]{}\mathcal{N}(\mathbf{0},\Sigma_{h_1^\varepsilon,...,h_r^\varepsilon}),\tag{5.13}$$

其中 $\Sigma_{h_1^\varepsilon,...,h_r^\varepsilon}$ 是协方差矩阵，此外，协方差矩阵$\Sigma_{h_1^\varepsilon,...,h_r^\varepsilon}$ 收敛到 Σ，当 $\varepsilon\to 0$时。

(I) 的证明如下。由于对于任意 $\delta>0$ 以及每个 $i=1,...,r$，我们有

$$\limsup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\left(|Y_i^N(h_i-h_i^\varepsilon)|>\delta\right)\le\frac{1}{\delta^2}\limsup_{N\in\mathbb{N}}\operatorname{Var}(Y_i^N(h_i-h_i^\varepsilon)),$$

由切比雪夫不等式可知，只需证明右侧的方差在 $\varepsilon\to 0$ 时关于 N 一致趋于零，对每个 $i=1,...,r$ 均成立。证明方法与定理 5.2 的证明类似。我们只给出高斯酉系综情形的证明，因为具有不同对称类的高斯系综以及 Haar 分布系综都可用相同的方法证明。

当 $h_i\in C^5(\mathbb{R})$（即 $L=5$ 的情形）时，根据定理 3.5 中的 $1/N$-展开，可知方差关于 N 一致有界，如下所示

$$\begin{aligned}&\limsup_{N\in\mathbb{N}}\operatorname{Var}(Y_i^N(h_i-h_i^\varepsilon))=\limsup_{N\in\mathbb{N}}C_2(\operatorname{Tr}(h_i-h_i^\varepsilon)(X_i^N),\operatorname{Tr}(h_i-h_i^\varepsilon)(X_i^N))\\
&=\limsup_{N\in\mathbb{N}}N^2\left\{\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(h_i-h_i^\varepsilon)(X_i^N)\operatorname{tr}(h_i-h_i^\varepsilon)(X_i^N)\right]-\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(h_i-h_i^\varepsilon)(X_i^N)\right]\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(h_i-h_i^\varepsilon)(X_i^N)\right]\right\}\\
&=\limsup_{N\in\mathbb{N}}N^2\left\{\left(\nu_0(h_i-h_i^\varepsilon,h_i-h_i^\varepsilon)+\frac{\nu_1(h_i-h_i^\varepsilon,h_i-h_i^\varepsilon)}{N}+\frac{a_2(h_i-h_i^\varepsilon,h_i-h_i^\varepsilon)(N)}{N^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(\nu_0(h_i-h_i^\varepsilon)+\frac{\nu_1(h_i-h_i^\varepsilon)}{N}+\frac{a_2(h_i-h_i^\varepsilon)(N)}{N^2}\right)^2\right\}\\
&=\limsup_{N\in\mathbb{N}}\left\{\left(\nu_0(h_i-h_i^\varepsilon,h_i-h_i^\varepsilon)-\nu_0(h_i-h_i^\varepsilon)^2\right)N^2\right.\\
&\qquad+\left(\nu_1(h_i-h_i^\varepsilon,h_i-h_i^\varepsilon)-2\nu_0(h_i-h_i^\varepsilon)\nu_1(h_i-h_i^\varepsilon)\right)N\\
&\qquad\left.+a_2(h_i-h_i^\varepsilon,h_i-h_i^\varepsilon)(N)-2\nu_0(h_i-h_i^\varepsilon)a_2(h_i-h_i^\varepsilon)(N)-\nu_1(h_i-h_i^\varepsilon)^2+O(1/N)\right\}\\
&\le C\|(h_i-h_i^\varepsilon)^{(1)}\|^2_{C^4([-K_i,K_i])}\le C\varepsilon^2,\end{aligned}$$

其中，C 是一个与 N,ε 无关的普适常数，而 ν_is 是定理 3.5 中的量，$a_2(h_1,...,h_r)(N):=a_2^{[r]}(h_1,...,h_r)(N)$s 是定理 5.2 证明中的量。这里，最后两个不等式由定理 5.2、N^2 和 N 的系数消失，以及 (3.13) 得出，并且

(5.8) 中，剩余项由 $\|(h_i - h_i^{\varepsilon})^{(1)}\|^2_{C^4([-K_i,K_i])}$ 控制，由此完成了 (5.12) 的证明。

(II) 是定理 5.4 的推论。由定理 5.4 可知，$\boldsymbol{Y}^N(h_1^{\varepsilon}, ..., h_r^{\varepsilon})$ 在 $N \to \infty$ 时依分布收敛于中心化高斯随机向量 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{h_1^{\varepsilon},...,h_r^{\varepsilon}})$。此外，协方差矩阵$\Sigma_{h_1^{\varepsilon},...,h_r^{\varepsilon}}$ 为

$$\begin{aligned}(\Sigma_{h_1^{\varepsilon},...,h_r^{\varepsilon}})_{i,j} &= \lim_{N\to\infty} \operatorname{Cov}(Y_i^N(h_i^{\varepsilon}), Y_j^N(h_j^{\varepsilon})) = \lim_{N\to\infty} C_2(\operatorname{Tr} h_i^{\varepsilon}(X_i^N), \operatorname{Tr} h_j^{\varepsilon}(X_j^N)) \\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \lim_{N\to\infty} C_2(\operatorname{Tr} h_i(X_i^N), \operatorname{Tr} h_j(X_j^N)) =: \Sigma_{i,j} < \infty,\end{aligned}$$

其中，有界性以及当 $\varepsilon \to 0$ 时的收敛性可由上文 (I) 中的同一论证得出，从而完成 (II) 的证明。
□

5.3. **矩阵积分**。 我们考虑如下形式的矩阵积分

$$I_N(V) := \int \mathrm{e}^{N \operatorname{Tr} V(U_1,...,U_d,U_1^*,...,U_d^*)} \mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_d, \tag{5.14}$$

并将自由能定义为

$$F_N(V) := \frac{1}{N^2} \log I_N(V), \tag{5.15}$$

其中 V 是 $2d$ 个非交换不定元上的自伴多项式。积分是关于乘积测度 $\mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_d$ 进行的，其中每个 $\mathrm{d}U_i$ 表示与特定系综相关联的参考概率测度。具体而言，我们考虑 $\mathrm{d}U_i$ 为 $\mathrm{U}(N), \mathrm{O}(N)$, $\mathrm{Sp}(N)$ 中的 Haar 分布矩阵，或高斯酉系综、高斯正交系综、高斯辛系综。（对于这些高斯系综，它们是自伴的，因此 V 对 U_i^* 的依赖等价于对 U_i的依赖。）

注意，由于 $\operatorname{Tr} V$取实值，自由能 $F_N(V)$ 定义良好。若将 V 替换为 tV，其中 t 是实参数，则当 t 足够小时，它关于 t 实解析。

令 μ_V^N 为由下式定义的概率测度

$$\mathrm{d}\mu_V^N(U_1, ..., U_d) := \frac{1}{I_N(V)} \mathrm{e}^{N \operatorname{Tr} V(U_1,...,U_d,U_1^*,...,U_d^*)} \mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_d. \tag{5.16}$$

对于 $2d$ 个非交换不定元中的任意自伴多项式 P，我们定义关于 μ_V^N 的期望为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_V^N}[\operatorname{tr} P] &:= \int \operatorname{tr} P(U_1, ..., U_d, U_1^*, ..., U_d^*) \mathrm{d}\mu_V^N(U_1, ..., U_d) \\ &= \frac{\int \frac{1}{N} \operatorname{Tr} P \mathrm{e}^{N \operatorname{Tr} V} \mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_d}{\int \mathrm{e}^{N \operatorname{Tr} V} \mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_d}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

对于 V 为非交换多项式的各种系综，这些矩阵积分的渐近展开已有研究。这些积分的一个基本性质是自由能 $1/N$ 的 $F_N(V)$ 拓扑展开的存在性。对于高斯矩阵，该展开通过 Schwinger-Dyson 方程和组合技巧得到了证明，见 [MS06a], [GMS06], 。对于 Haar 分布矩阵，则借助 Weingarten 演算得到了该展开，见 [Col03], [CS06]。尽管已有针对多项式的更强结果，证明了这些级数的解析收敛（即具有正的收敛半径） [CGMS09], [GN15], [Bd24], ，本文着重于将拓扑展开存在性的结论推广到光滑势的情形。在下述定理中，我们利用光滑渐近展开定理（例如定理 3.5、定理 4.4）证明

对于光滑测试函数，渐近系数确实存在；不过，我们并未讨论由此得到的形式级数的解析收敛性。

定理 5.6 (光滑测试函数的矩阵积分)。 设 r 为一个固定的正整数。我们固定自伴非交换多项式 $P_i \in \mathbb{C}\langle x_1, ..., x_d, x_1^*, ..., x_d^*\rangle$ $(i = 1, ..., r)$ 和 $Q \in \mathbb{C}\langle x_1, ..., x_d, x_1^*, ..., x_d^*\rangle$。对于任意光滑函数 $h_1, ..., h_r \in C^\infty(\mathbb{R})$（在高斯系综的情形下，我们还额外假设其有界），定义

$$V = V_{\boldsymbol{t}} = t_1 h_1(P_1) + \cdots + t_r h_r(P_r),$$

对于 $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_r)$。那么，对于上述定义的矩阵积分，以下结论成立：*(1)* 形式幂级数

$$F_N(V) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} a_{\boldsymbol{k}}^N \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}, \tag{5.18}$$

对于每个 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$, 极限

$$\lim_{N \to \infty} a_{\boldsymbol{k}}^N$$

存在且有限，并且只依赖于 V。
(2) 对于任意光滑函数 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$（在高斯系综的情形下，我们还假设其有界），形式幂级数

$$\mathbb{E}_{\mu_{V_{\boldsymbol{t}}}^N}[\operatorname{tr} g(Q)] = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} b_{\boldsymbol{k}}^N \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}, \tag{5.19}$$

对于每个 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$，极限

$$\lim_{N \to \infty} b_{\boldsymbol{k}}^N$$

存在且有限，并且只依赖于 V、 g 和 Q。

证明。 (1) 令 $X_i^N := P_i(U_1^N, ..., U_d^N, U_1^{N*}, ..., U_d^{N*})$ 表示 $\boldsymbol{U}^N = (U_1^N, ..., U_d^N)$。于是，我们有

$$\begin{aligned} F_N(V) &= \frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{N \operatorname{Tr}\left(t_1 h_1(X_1^N) + \cdots + t_r h_r(X_r^N)\right)} \right] \\ &= \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{1}{N^2 \boldsymbol{k}!} C_{\boldsymbol{k}}(N \operatorname{Tr} h_1(X_1^N), ..., N \operatorname{Tr} h_r(X_r^N)) \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

其中，最后一个等式使用了累积量与矩生成函数之间的关系式 (5.2)。注意，自由能 $F_N(V)$ 的收敛半径原则上取决于 N，但上述展开可以视为关于 $\boldsymbol{t}$ 的形式幂级数。因此，对于$\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$，我们可以令

$$a_{\boldsymbol{k}}^N := \frac{1}{N^2 \boldsymbol{k}!} C_{\boldsymbol{k}}(N \operatorname{Tr} h_1(X^N), ..., N \operatorname{Tr} h_r(X^N)), \tag{5.21}$$

根据定理 5.2， $N \to \infty$ 趋于极限且该极限是有限的。
(2) 我们还令 $Y^N := Q(U_1^N, \ldots\ldots, U_d^N, U_1^{N*}, \ldots\ldots, U_d^{N*})$。那么，对于固定的 N，存在 $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ 的一个邻域，使得对于该邻域中的任意 $\boldsymbol{t}$，都有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mu_{V_{\boldsymbol{t}}}^N}[\operatorname{tr} g(Q)] \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\operatorname{Tr} g(Y^N)\mathrm{e}^{N\operatorname{Tr}\left(t_1 h_1(X_1^N)+\cdots+t_r h_r(X_r^N)\right)}\right]}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{N\operatorname{Tr}\left(t_1 h_1(X_1^N)+\cdots+t_r h_r(X_r^N)\right)}\right]} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} F_N(sg(Q)+V) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \sum_{(k_0,\boldsymbol{k})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{N^2} C_{k_0,\boldsymbol{k}}(N\operatorname{Tr} g(Y^N), N\operatorname{Tr} h_1(X^N), \ldots, N\operatorname{Tr} h_r(X^N))\frac{s^{k_0}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}}{k_0!\boldsymbol{k}!} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \frac{1}{N^2\boldsymbol{k}!} C_{1,\boldsymbol{k}}(N\operatorname{Tr} g(Y^N), N\operatorname{Tr} h_1(X^N), \ldots, N\operatorname{Tr} h_r(X^N))\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}, \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

作为形式幂级数，其中在倒数第二个等式中，我们再次使用了 (5.2)。因此，对于$\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$，我们可以令

$$b_{\boldsymbol{k}}^N = \frac{1}{N^2\boldsymbol{k}!} C_{1,\boldsymbol{k}}(N\operatorname{Tr} g(Y^N), N\operatorname{Tr} h_1(X^N), \ldots, N\operatorname{Tr} h_r(X^N)), \qquad (5.23)$$

并且再次由定理 5.2 可知， $N \to \infty$ 的极限存在且有限。 □

注 5.7（形式矩阵积分的正则化）。 最后，我们讨论光滑测试函数对于组合学和理论物理中出现的形式矩阵积分的重要性。以三次矩阵模型为例，其配分函数形式上定义为：

$$I_N(\varepsilon) = \int \mathrm{e}^{-N\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{2}X^2+\varepsilon X^3\right)}\mathrm{d}X.$$

众所周知，对于任意 $\varepsilon \neq 0$，该积分都会发散，且在勒贝格意义下不存在，因为项 εx^3 在无穷远处占主导地位 $-x^2/2$，超过了高斯项。因此，关于 ε 的形式幂级数（其系数枚举地图）不能直接解释为某个良定义积分的渐近展开。在其开创性工作中，Guionnet 和 Maurel-Segala [GMS06]通过将积分限制在一个紧矩阵集上（截断），并证明只要截断值足够大，渐近展开就与截断值无关，从而绕过了这一困难。我们的框架提供了一种替代方法，即“光滑正则化”。我们不再考虑无界的多项式势 $V(x) = x^3$，而是可以用一个光滑的有界函数 $h \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ 取而代之，使得 $h(x) = x^3$ 在 $[-2,2]$ 的一个足够大的邻域内成立（该邻域包含极限谱测度的支撑）。作此替换后，正则化积分

$$\tilde{I}_N(\varepsilon) = \int \mathrm{e}^{-N\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{2}X^2+\varepsilon h(X)\right)}\mathrm{d}X$$

对任意固定的 N，在勒贝格意义下都是良定义的，无需显式截断定义域，因为高斯项支配有界扰动 h。定理 5.2 进而保证˜与 $I_N(\varepsilon)$ 相关联的自由能展开的系数在 $N \to \infty$时具有良定义的极限。由于 h在谱的支撑上与多项式势一致，这些极限与所关注的组合量一致。

参考文献

[BD17] Jonathan Breuer 与 Maurice Duits。双正交系综的中心极限定理及递推系数的渐近。《美国数学会杂志》，30(1):27–66，2017。[Bd24] Thomas Buc-d'Alché。酉积分与地图的拓扑展开，2024。即将发表于《亨利·庞加莱研究所纪事 D》。 https://arxiv.org/abs/2304.12785。[BH23] Zhigang Bao 与 Yukun He。Wigner 矩阵线性特征值统计的定量中心极限定理。《应用概率年刊》，33(6B):5171–5207，2023。[BIPZ78] E. Brézin、C. Itzykson、G. Parisi 与 J. B. Zuber。平面图。《数学物理通讯》，59(1):35–51，1978。[BP09] Włodzimierz Bryc 与 Virgil Pierce。实随机矩阵与四元数随机矩阵的对偶性。《电子概率杂志》，14:第17号，452–476，2009。[CES23] Giorgio Cipolloni、László Erdös 与 Dominik Schröder。Wigner 矩阵的函数型中心极限定理。《应用概率年刊》，33(1):447–489，2023。[CGMS09] Benoît Collins、Alice Guionnet 与 Edouard Maurel-Segala。酉矩阵积分与正交矩阵积分的渐近。《数学进展》，222(1):172–215，2009。[CGVTvH25] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas、Joel A. Tropp 与 Ramon van Handel。强收敛的一种新方法，2025。即将发表于《数学年刊》（2）。 https://arxiv.org/abs/2405.16026。[CGVvH24] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas 与 Ramon van Handel。强收敛的一种新方法 ii. 经典系综，2024。[Cho80] Man Duen Choi。两个生成元的自由群的全 C^*-代数。《太平洋数学杂志》，87(1):41–48，1980。[CJ24] Klara Courteaut 与 Kurt Johansson。正交矩阵与辛矩阵之迹的多元正态逼近。《亨利·庞加莱研究所纪事·概率与统计》，60(1):312–342，2024。[CMSS07] Benoît Collins、James A. Mingo、Piotr Śniady 与 Roland Speicher。二阶自由性与随机矩阵的涨落。III. 高阶自由性与自由累积量。《数学文献》，12:1–70，2007。[Col03] Benoît Collins。酉群上多项式随机变量的矩与累积量、Itzykson-Zuber 积分及自由概率。《国际数学研究通告》，2003(17):953–982，2003。[CS06] Benoît Collins 与 Piotr Śniady。关于酉群、正交群与辛群上 Haar 测度的积分。《数学物理通讯》，264(3):773–795，2006。[DM23] Mario Diaz 与 James A. Mingo。论二阶非交换概率空间的解析结构及有界 Fréchet 变差函数。《随机矩阵：理论与应用》，12(1):论文编号 2250044，26，2023。[EM03] N. M. Ercolani 与 K. D. T.-R. McLaughlin。借助 Riemann-Hilbert 技术研究随机矩阵配分函数的渐近及其在图形计数中的应用。《国际数学研究通告》，(14):755–820，2003。[GMS06] Alice Guionnet 与 Edouard Maurel-Segala。矩阵模型的组合方面。ALEA《拉丁美洲概率与数理统计杂志》，1:241–279，2006。[GN15] Alice Guionnet 与 Jonathan Novak。酉多矩阵模型的渐近：Schwinger-Dyson 格与拓扑递归。《泛函分析杂志》，268(10):2851–2905，2015。[Gui02] Alice Guionnet。高斯大随机矩阵的非交换泛函的大偏差上界与中心极限定理。《亨利·庞加莱研究所纪事·概率与统计》，38(3):341–384，2002。[HTr12] Uffe Haagerup 与 Steen Thorbjø rnsen。高斯酉系综的渐近展开。《无穷维分析、量子概率及相关专题》，15(1):1250003，41，2012。[HZ86] J. Harer 与 D. Zagier。曲线模空间的欧拉示性数。Invent. Math.，85(3):457–485，1986。[JL21] Kurt Johansson 与 Gaultier Lambert。随机酉矩阵之迹的多元正态逼近。《概率年刊》，49(6):2961–3010，2021。[Joh98] Kurt Johansson。论随机厄米矩阵特征值的涨落。《杜克数学杂志》，91(1):151–204，1998。

[LP09] A. Lytova 和 L. Pastur. 独立元素随机矩阵线性特征值统计的中心极限定理. 《概率年刊》, 37(5):1778–1840, 2009.[Mat13] Sho Matsumoto. 与紧致对称空间相关的矩阵系综的 Weingarten 演算. 《随机矩阵：理论与应用》, 2(2):1350001, 26, 2013.[MMPS22] Camile Male、James A. Mingo、Sandrine Péché 和 Roland Speicher. 复 Wigner 矩阵与确定性矩阵的联合整体涨落. 《随机矩阵：理论与应用》, 11(2):论文编号 2250015, 46, 2022.[MP13] James A. Mingo 和 Mihai Popa. 实二阶自由性与 Haar 正交矩阵. 《数学物理杂志》, 54(5):051701, 35, 2013.[MP24] Michael Magee 和 Doron Puder. 矩阵群积分、曲面与映射类群 II：O(n) 和 Sp(n). 《数学年刊》 , 388(2):1437–1494, 2024.[MS06a] Edouard Maurel-Segala. 矩阵模型的高阶展开与地图枚举 . 09 2006.[MS06b] James A. Mingo 和 Roland Speicher. 随机矩阵的二阶自由性与涨落. I. 高斯矩阵、Wishart 矩阵与循环 Fock 空间. 《泛函分析杂志》, 235(1):226–270, 2006.[MS06c] James A. Mingo 和 Roland Speicher. 随机矩阵的二阶自由性与涨落. I. 高斯矩阵、Wishart 矩阵与循环 Fock 空间. 《泛函分析杂志》, 235(1):226–270, 2006.[MS17] James A. Mingo 和 Roland Speicher. 自由概率与随机矩阵，菲尔兹研究所专著第 35 卷. 施普林格，纽约；菲尔兹数学科学研究所，多伦多，安大略省，2017.[MSS07] James A. Mingo、Piotr Śniady 和 Roland Speicher. 随机矩阵的二阶自由性与涨落. II. 酉随机矩阵. 《数学进展》, 209(1):212–240, 2007.[NS06] Alexandru Nica 和 Roland Speicher. 自由概率组合学讲义，伦敦数学会讲义系列第 335 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2006.[Par23a] Félix Parraud. 确定性矩阵与独立同分布的 Haar 酉矩阵中光滑函数的渐近展开及其在矩阵张量积中的应用，2023.[Par23b] Félix Parraud. 确定性矩阵和独立同分布的 GUE 矩阵多项式中光滑函数的渐近展开. 《数学物理通讯》, 399(1):249–294, 2023.[Red14] Catherine Emily Iska Redelmeier. 实二阶自由性与若干实矩阵模型的渐近实二阶自由性. 《国际数学研究通知》, (12):3353–3395, 2014.[Rek24] Jana Reker. Wigner 矩阵的多点函数中心极限定理. 《电子概率杂志》, 29:论文编号 191, 49, 2024.[Rot64] Gian-Carlo Rota. 组合理论基础. I. 莫比乌斯函数理论. 《概率论及其应用领域杂志》, 2:340–368, 1964.[RS00] Gian-Carlo Rota 和 Jianhong Shen. 累积量的组合学. 第 91 卷，第 283–304 页 . 2000. 纪念 Gian-Carlo Rota.[Sch05] Hanne Schultz. 独立高斯随机矩阵的非交换多项式 . 实情形与辛情形 . 《概率论及相关领域》 , 131(2):261–309, 2005.[Shc11] M. Shcherbina. Wigner 矩阵与样本协方差随机矩阵线性特征值统计的中心极限定理. 《数学物理、分析与几何杂志》, 7(2):176–192, 197, 199, 2011.[Sil90] Jack W. Silverstein. 由样本协方差矩阵特征向量定义的随机函数的弱收敛. 《概率年刊》, 18(3):1174–1194, 1990.[Sil22] Jack W. Silverstein. 由高维随机矩阵特征向量定义的一组随机函数的弱收敛. 《随机矩阵：理论与应用》, 11(4): 论文编号 2250033, 33, 2022.[Sos00] Alexander Soshnikov. 经典紧群中的局部线性统计中心极限定理及相关组合恒等式. 《概率年刊》, 28(3):1353–1370, 2000.[Sta97] Richard P. Stanley. 计数组合学. 第 1 卷，剑桥高等数学研究第 49 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，1997. Gian-Carlo Rota 作序；1986 年原版的修订重印本.[SW13] Philippe Sosoe 和 Percy Wong. Wigner 矩阵线性特征值统计中心极限定理中的正则性条件. 《数学进展》, 249:37–87, 2013.[tH74] G. ’t Hooft. 统一规范理论中的磁单极子. 《核物理》, B79:276–284, 1974.

[Voi91] Dan Voiculescu. 随机矩阵与自由积的极限定律. *Invent. Math.*, 104(1):201–220, 1991.[Wei78] Don Weingarten. 无穷秩极限下群积分的渐近行为. *Journal ofMathematical Physics*, 19(5):999–1001, 05 1978.[Zvo97] A. Zvonkin. 矩阵积分与地图枚举：通俗入门. 第 26 卷，第 281–304 页. 1997. 组合学与物理学（马赛，1995）。

京都大学数学系电子邮箱地址:
collins@math.kyoto-u.ac.jp

京都大学数学系电子邮箱地址:
nagatsu.manasa.64s@st.kyoto-u.ac.jp