arXiv:2602.04628v1 [cs.CC] 4 Feb 2026

将顶点分裂为区间图的复杂度*

Faisal N. Abu-Khzam[1], Dipayan Chakraborty[12], Lucas Isenmann[13], 和 Nacim Oijid[14]**

[1] 黎巴嫩美国大学，贝鲁特，黎巴嫩。[2] 地中海中央理工大学，LIS，艾克斯-马赛大学，马赛，法国[3] 斯特拉斯堡大学，法国[4] 于默奥大学，于默奥，瑞典

摘要。 顶点分裂是一种图修改操作，在该操作中，一个顶点被替换为多个顶点，使得这些顶点的邻居集合的并集等于原顶点的邻居集合。我们将顶点分裂作为一种图修改操作引入并加以研究，用于将图转换为区间图。给定一个图 G 和一个整数k，我们研究判定 G是否可以通过至多 k 次顶点分裂转换为区间图的问题。我们证明，即使将输入限制为次三次平面二分图，该问题仍然是NP困难的。我们进一步观察到，当目标是获得弦图时，即使对于最大独立集大小至多为二的图，顶点分裂也从根本上不同于顶点删除和边删除这两种图修改操作。另一方面，我们给出了一种多项式时间算法，可以通过最少数量的顶点分裂，将给定图转换为路径的不交并；此外，将无三角形图分裂为单位区间图的问题也可以在多项式时间内求解。

1 引言

区间图是交图中的一个基础子类，在调度、遗传学和计算生物学等广泛应用中自然出现 [4,5,12,13,18,23]。区间图是实数直线上若干区间的交图。这类图具有鲜明的结构特征，并支持高效算法：识别区间图并构造区间表示可以在线性时间内完成 [5]。

从算法角度看，区间图因其一维结构而颇具吸引力，这种结构使许多在一般图上计算难解的图问题能够得到高效求解。一旦获得区间表示，诸如图着色、最大

* 本研究项目由黎巴嫩美国大学校长校内研究基金 PIRF0056 资助。**第四位作者的部分研究经费由肯佩基金会资助，资助编号为 JCSMK24-515（瑞典）。

团、最大独立集和最小顶点覆盖均存在线性时间算法 [12],，并且对于哈密顿路径、支配变体以及各类调度与资源分配问题，也已知存在高效解法 [5,18]。与此同时，正是这种刚性结构使得难以从任意图得到区间图。经典的图修改问题，如转化为区间图、单位区间图或弦图的顶点删除或边删除，即使在对输入图施加很强限制的情况下，也已知是NP完全的 [14,15,19]。

在本文中，我们研究一种基于顶点分裂的替代修改机制。给定图 $G = (V, E)$，一次顶点分裂将顶点$v \in V$替换为两个新顶点 v_1 和 v_2，二者各自继承 v的邻居的一个（可能不相交的）子集。顶点分裂并非删除顶点或边，而是重新分配邻接关系，使单个顶点可由多个区间表示。该操作在保留信息的同时放宽了局部结构约束。

我们提出并研究如下问题：给定图 G 和整数 k，能否通过至多 k 次顶点分裂将 G 变换为区间图？我们认为，该问题给出了到区间图类的距离的一种更细粒度刻画，并与基于删除的修改问题有本质区别。特别地，我们证明，将图变换为弦图所需的顶点分裂次数，可能不同于达成同一目标所需的顶点删除次数，即便输入图的独立数为2（即最大独立集的大小为2）。这一分离进一步表明，关于通过顶点删除得到弦图或区间图的已知结果并不能直接迁移到顶点分裂，基于分裂的修改需要单独分析。

需要指出的是，通过一系列 k 顶点分裂操作将图转化为区间图，可以视为将其转化／修改为由区间构成的多重交图；这与 [17]中定义的 k-区间图问题所采用的表示方式略有不同。在后一个问题中，目标是用 k 多个区间表示每个顶点...
...

顶点分裂还在其他若干领域中得到研究，包括平面化和图厚度 [8,16], 刚性理论 [21], 流与分解问题 [22],以及聚类和图编辑，在这些领域中，它有助于对重叠结构进行建模 [1,2,3,10]。然而，顶点分裂作为一种用于强制形成经典交图结构的机制，其作用至今仍鲜有研究。

我们的贡献可概括如下。我们首次系统地研究了将顶点分裂作为一种图修改操作，以将图转化为区间图。我们证明，即使对输入施加严格限制，使用有界数量的顶点分裂将图转化为区间图仍是NP困难的。我们表明，顶点分裂的复杂度特征与顶点删除有根本区别，其中包括弦图顶点删除与弦图顶点分裂之间的严格分离。与此同时，我们也找到了易处理的情形：我们证明，判断能否将任意图分裂为路径的不交并可在多项式时间内完成。事实上，我们证明，将给定的

次三次无三角形图分裂为区间图是NP困难的，但将无三角形图分裂为单位区间图则可在多项式时间内解决。

2 预备知识

设 $G = (V, E)$ 为一个图，并设 v 为 G 的一个顶点。在本文中，我们使用标准图论记号，并假设所考虑的图均为简单、无权且无向的。集合 $V(= V(G))$ 与 $E(= E(G))$ 分别表示 G 的顶点集与边集。我们用 $N(v)$ 表示顶点 v 的开邻域。G 的色数记为 $\chi(G)$，且 G 表示 G 的补图，即 $V(G) = V(G)$ 且 $E(G) = \{(xy) \in V(G) | x \neq y$ 与 $(xy) \notin E(G)\}$。

在不致歧义时，我们将顶点子集 $S \subseteq V(G)$ 与由 S诱导的子图等同，并记作 $\chi(S)$而非 $\chi(G[S])$。我们用 $\alpha(G)$ 表示 G 的最大独立集的大小。

弦图、区间图与单位区间图。如果一个图不含长度至少为 4 的诱导圈，则称其为弦图。如果一个图是实数直线上若干区间的交图，则称其为区间图。如果一个图是若干单位长度区间的交图，则称其为单位区间图；这类图也称为无差异图。众所周知，区间图是弦图。此外，一项经典结果指出，一个图是单位区间图，当且仅当它是弦图，且不含诱导爪图、网图或帐篷图 [20]（见图 1）。

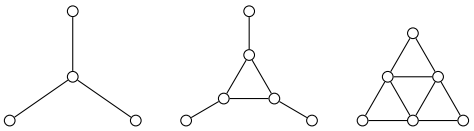


图 1：爪图、网图和帐篷图。

如果顶点 v 的邻域 $G[N(v)]$ 是一个团，则称该顶点为单纯的。Dirac 提出的一项经典刻画指出，一个图是弦图，当且仅当它存在完美消去序，也就是说，存在一个顶点序列 $v_1, \ldots, v_n$，使得对于每个 i [7,12]， v_i 在 $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$ 中都是单纯的。

A (t, d)-$star$ 是由一个中心顶点 v（即星中心）以及t 条长度均为 d 、且各自以 v 为端点的顶点不相交路径组成的图。图 2 展示了一个 (3,2)-星图，本文下文中（为简便起见）将其称为 T_2，它也称为细分爪图。

树是一种连通且无圈的图。毛毛虫树是一种树，移除所有度为一的顶点（即叶子）后会得到一条路径，称为脊柱。令$\mathcal{C}at$ 为毛毛虫树的类。对于整数 k ，令 $\mathcal{C}at_k$ 为最大度为 k的毛毛虫图集合。下面的刻画将在主要结果的证明中使用。

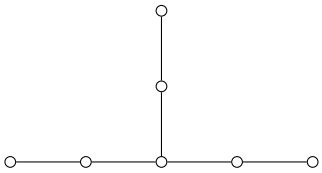


图 2：图 T_2。

引理1。 设 T 为一棵树。当且仅当 T 是一棵毛虫树时， T 是 T_2-自由的。

证明。每个毛毛虫树显然都是 T_2-自由的。现在假设 T 不是毛毛虫树，那么存在一个顶点 v_0 ，它与三个度至少为 2 的顶点相邻。由于T 是一棵树，这三个顶点之间除 v_0 外没有边，也没有公共邻居。因此， v_0 及其三个邻居连同这些邻居的邻居（距 v_0距离为 2）所诱导的子图包含一个 T_2。

顶点分裂。 我们将顶点 $v \in V$（G）的（顶点）分裂 定义为一种图修改操作：将 v 替换为两个新顶点 v_1 和 v_2，使得 v 的每个邻居都与 v_1、 v_2之一或二者相邻。形式化地，分裂 $v \in V$（G）得到图 G'，定义如下。令 $A, B \subseteq N_G$（v）满足$A \cup B = N_G$（v）。那么

$$V(G') = \big(V(G) \setminus \{v\}\big) \cup \{v_1, v_2\},$$
$$E(G') = \big(E(G) \setminus \{vx : x \in N_G(v)\}\big) \cup \{v_1x : x \in A\} \cup \{v_2x : x \in B\}.$$

每次顶点分裂都会使顶点数增加一个。当 $A \cap B = \emptyset$ 时，这一特殊情形尤其值得关注，至少从实际应用的角度来看是如此，因为分裂的目的例如是形成簇，如 [2]。下文将这种情形称为**互斥** 顶点分裂。

弦图、区间图和单位区间图的顶点分裂。设 G为一个图。我们用 $ChVS(G)$表示将 G转化为弦图所需的最短分裂序列的长度。类似地，我们将 $ChVXS(G)$定义为将 G转化为弦图所需的最短互斥分裂序列的长度。对于区间图和单位区间图，我们类似地定义 $IVS(G)$、 $IVXS(G)$、 $UIVS(G)$和 $UIVXS(G)$。

3 区间图顶点分裂的复杂度

我们证明了如下判定问题是NP完全的：给定一个数，判断能否通过至多指定次数的顶点分裂将一个图转化为区间图。我们首先关注顶点分裂的互斥变体，并证明其NP难。

由于包含式分裂与互斥分裂一般并不等价，因此一种变体的困难性不会自动推广到另一种变体。接下来我们将证明，对于无三角形图，任何一系列能够导向区间图（或

单位区间图或弦图）的包含式分裂，都可以转换为长度不更长的一系列互斥分裂。该结论将在引理 2 中形式化，之后我们将据此推导出包含式变体的困难性结果。

引理 2. 设 G 是一个无三角形图，且 σ 是一个由 l 次分裂组成的序列，其结果为一个区间图（分别地，单位区间图或弦图）。那么存在一个至多包含 l 次互斥分裂的序列，其结果为同一类别的图。

证明。 我们对非互斥分裂的数量进行归纳。如果 σ 的所有分裂都是互斥的，那么结论成立。否则，设 k 为 σ 中的非互斥分裂次数，并假设对于非互斥分裂次数少于 $k-1$ 的序列，结论成立。

考虑序列 $\sigma = (s_1, ..., s_l)$ 中最后一次非互斥分裂 $s_i = (v, A, B)$，其中 $A \subseteq N(v)$ 且 $B \subseteq N(v)$，满足 $A \cup B = N(v)$ 且 $A \cap B \neq \emptyset$。设 v_1 和 v_2 是新生成的两个顶点，满足 $N(v_1) = A$ 且 $N(v_2) = B$。

对于分裂序列 σ 中 G 的顶点集合 X， $D(X)$ 表示集合 X 以及 X 中每个顶点的后代，也就是说，由 X 中顶点的分裂序列产生的顶点集合。我们考虑分裂 $s'_i = (v, A, B \setminus A)$。对于 $j > i$ 的每个分裂 $s_j = (v_j, A_j, B_j)$，我们定义 $s'_j = (v_j, A'_j, B'_j)$ 如下：若 $v_j \in D(A \cap B)$，则 $A'_j = A_j \setminus D(v_2)$ 且 $B'_j = B_j \setminus D(v_2)$；若 $v_j \in D(v_2)$，则 $A'_j = A_j \setminus D(A \cap B)$ 且 $B'_j = B_j \setminus D(A \cap B)$；否则为 $A'_j = A_j$ 和 $B'_j = B_j$。我们定义序列 $\sigma' = (s_1, ...s_{i-1}, s'_i, ..., s'_l)$。分裂 s'_i， ...， s'_l 是互斥的。因此，序列 σ' 有 $k-1$ 个互斥分裂。

所得图 $G(\sigma')$ 是 $G(\sigma)$ 的子图，其中移除了 $D(v_2)$ 与 $D(A \cap B)$ 之间的边。

最后，由于无三角形区间图恰好是毛虫树的不相交并，且毛虫树并的任意子图也仍是毛虫树的并，因此，$G(\sigma')$ 是区间图，并且 σ' 所需的非互斥分裂比 σ 少一次。由此通过归纳法得证。

对于单位区间图，结论也相同：无三角形单位区间图这一类是单调的（对任意取子图的操作封闭），因为它就是路径的并这一类。此外，对于弦图，结论也相同：无三角形弦图这一类是单调的，因为它不过就是森林这一类。

推论1。 对于无三角形图 G,

- $ChVS(G) = ChVXS(G)$.-
  $IVS(G) = IVXS(G)$.- $UIVS(G) = UIVXS(G)$.

证明。 一般而言，对于任意图 G，我们有 $ChVS(G) \leq ChVXS(G)$， $IVS(G) \leq IVXS(G)$，以及 $UIVS(G) \leq UIVXS(G)$。根据前面的引理，我们推导出无三角图的等式。

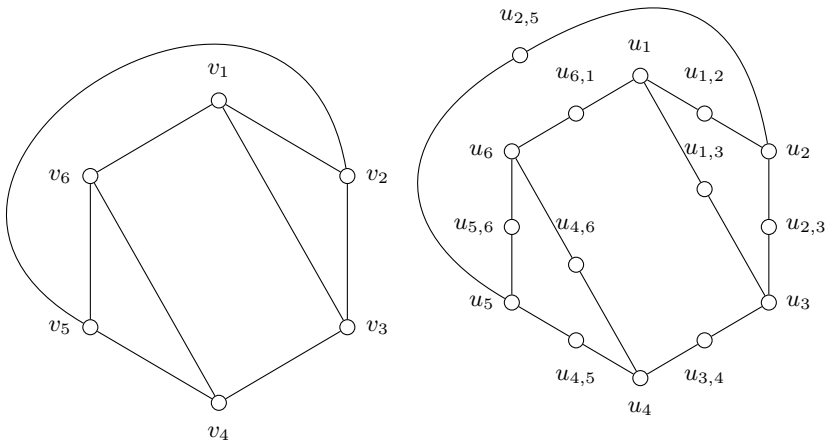
定理 1. 区间图独占顶点拆分是NP完全的，即使限制在平面二分次立方图上。

证明。 该证明是从三次平面图上的 HAMILTONIAN PATH 问题出发的归约，而该问题已知是NP完全的 [11]。

设 G 是一个具有 n 个顶点 $v_1, \ldots, v_n$ 的三次平面图，并设 G' 是通过将 G 的每条边恰好细分一次而得到的图。形式上，按如下方式构造 G'：

– 对于每个顶点 $v_i \in V(G)$，我们在 $V(G')$ 中添加一个顶点 u_i。– 对于每条边 $(v_iv_j) \in E(G)$，其中 $i < j$，我们在 $V(G')$ 中添加一个顶点 u_{ij}，以及两条边 (u_iu_{ij}) 和 $(u_{ij}u_j)$。

构造过程如图 3 所示



(a) 图 G。　　(b) 得到的图 G'。

图 3：平面三次图 G 以及归约后得到的图 G'。

由于 G 是三次的，$|E(G)| = \frac{3}{2}n$。因此 $|V(G')| = \frac{5}{2}n$，且 $|E(G')| = 3n$。注意，G' 的顶点可以划分为两个独立集 $A = \{u_i\}_{1 \le i \le n}$ 和 $B = \{u_{ij} | (v_iv_j) \in G\}$。因此，$G'$ 是平面二分次三图。

令 $k = \frac{n}{2} + 1$。我们证明，G 存在哈密顿路径，当且仅当 G' 可以通过 k 次互斥分裂转化为区间图。

首先，假设 G 中存在一条哈密顿路径。对 G 和 G' 的顶点重新标号后，不妨设这条路径为 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$。考虑以下对 G' 的 k 次互斥分裂：对于每个满足 $i \neq j+1$ 的顶点 $u_{i,j}$，我们将顶点 $u_{i,j}$ 分裂为 v_i 和 v_j，其中 v_i 与 u_i 相邻，且 v_j 与 u_j 相邻。由于满足 $j = i+1$ 的顶点 $u_{i,j}$ 存在，并且总共有 $\frac{3}{2}n$ 个顶点

$u_{i,\ j}$，我们进行了 $\frac{3}{2}n-(n-1)$ 次 $=\frac{n}{2}+1$ 互斥分裂。所得的图如图4所示

根据构造，对于每个 $1<i<n$， u_i 恰有一个邻居被分裂，而 u_1 和 u_n 各自有两个邻居被分裂。这些互斥分裂都将度为2的顶点转化成了两个叶子。此外，对于 $1\leq i\leq n$，顶点 u_i 尚未被分裂。因此， $\{u_1,u_{1,2},u_2,\ldots,u_{n-1},u_{n-1,n},u_n\}$ 是所得图中的一条“支配”路径（即任何其他顶点都与该路径上的某个顶点相邻）。最后，所得图是一棵毛虫树，而毛虫树是区间图。

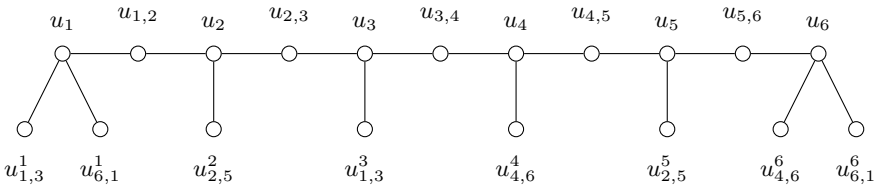


图4：翻转序列之后得到的图。

反过来，假设经过 k 次互斥分裂后， G' 可以变为区间图 T 。首先注意，由于 G' 是二分图，其所有环的长度都是偶数。又由于分裂产生的任何圈都必须是原图的诱导圈，我们可推知 T 必须是森林。此外，由于顶点的互斥分裂不会改变边数，却恰好使顶点数增加1，并且$|V(G')|+k=|E(G')|+1$，这意味着 $|E(T)|=|V(T)|-1$，因此我们得出结论： T 必定是一棵树，因为它不含任何圈。因此，根据引理1， T 是一棵毛虫树。

现在令 $P=(w_1、\ldots\ldots、w_m)$ 为毛虫树的一条支配路径。首先，我们注意到，附着在 P 内部结点上的叶不能是顶点 u_i。事实上， u_i 的所有邻居的度都为2，因此，如果 u_i 是叶，那么它在 P 中的邻居只能有另一个邻居。所以它不是 P 的内部结点。通过将 P 中附着在 P 两端的叶子 u_i 加入 P'，从而改变 P，我们可以假设所有 u_i 都在 P 中。现在，通过收缩作为 P 内部顶点的所有顶点 $u_{i、\ j}$，我们得到一条包含所有 u_i 的路径，它对应于 G 的一条哈密顿路径。

推论2。 即使将范围限制在平面二分次立方图上，分裂成区间图仍然是NP完全问题。

证明。 由于二分图是无三角形图，这可由推论1得出。

4 分裂为路径的不交并

由于分裂成毛毛虫图已经是NP困难的，因此研究分裂成路径的不交并似乎很自然。下文中，我们用 $\mathcal{P}$表示由路径的不交并构成的图类。

图中长度为 k的迹是由 k条不同的边 $\{e_1, \dots e_k\}$组成的集合，使得对所有 $1 \leq i \leq k-1$都有 $|e_i \cap e_{i+1}| = 1$。对于图 G，我们用 $tp(G)$表示将 G 的边集划分为不相交路径所需的最少迹数。下面的引理将 $tp(G)$与 G 中奇度顶点的数目联系起来，其本身也可能值得关注。

引理3. 设 G 是具有 $2p$ 个奇度顶点的连通图。则当 $p \geq 1$ 时$tp(G) = p$，且当 $p = 0$时 $tp(G) = 1$。若 G 不连通，则有$tp(G) = \sum_{C \in cc(G)} tp(C)$，其中 $cc(G)$是 G的连通分量集合。

证明。 $cc(G)$ 是 G 的连通$_{(G)}$分量的集合这一事实显而易见。证明采用关于 p 的归纳法。如果 $p = 0$（分别为 $p = 1$），则 G 是欧拉（分别为半欧拉）图。因此，它包含一条欧拉回路（分别为迹），即一条覆盖其所有边的迹。因此，其所有边都可以由一条迹覆盖。

若 $p \geq 2$，设 G 的同一连通分量 C 中有两个奇度顶点 u, v。如果 C 仅包含两个奇度顶点，我们可以用一条欧拉迹 P 覆盖 C 的所有边。否则，考虑任意一条从 u 到 v 的迹 P。如果移除组成 P 的边会使 C 不连通，并且我们有 $C \setminus P$ 的一个欧拉连通分量 C'，那么我们取 C' 的一条欧拉巡回，并按如下方式将其插入 P：设 P 中属于 C' 的一个顶点为 x。我们将一条以 x 为起点和终点的巡回与 P 合并，从而得到一条更长的迹。对 $C \setminus P$ 的每个（可能存在的）欧拉分量，我们都进行相同的操作。此过程结束后，我们将 P 加入边的划分中。此后，$G \setminus P$ 中的奇度顶点减少了两个（即 P 的端点，因为它们各自恰好失去一条边），并且不会产生新的仅包含偶度顶点的连通分量，由归纳法即可得证。

定理 2。 设 $G = (V, E)$ 为一个图。将 G 转化为路径的不交并所需的最少分裂次数为

$$\sum_{v \in V} \left(\left\lceil \frac{d(v)}{2} \right\rceil - 1 \right) + r,$$

其中 r 是 G 中不含奇度顶点的连通分量的数量。

证明。 由于顶点分裂可独立地作用于各个连通分量，且 $\mathcal{P}$ 对不交并封闭，因此只需对连通图证明该命题，然后对各个连通分量求和。故假设 G 是连通的。于是 $r \in \{0, 1\}$。

设 σ 是一个将 G 变换为 $H \in \mathcal{P}$ 的分裂序列。考虑一个原始顶点 $v \in V(G)$，并设 $D(v)$ 为 H 中源自 v 的顶点集合（即应用 σ 后 v 的后代）。G 中与 v 相 incident 的每条边在 H 中仍然存在，且恰好与 $D(v)$ 中的一个顶点相 incident；因此

$$\sum_{x \in D(v)} d_H(x) = d_G(v).$$

由于 $H \in \mathcal{P}$，H 的每个顶点的度至多为 2，因此 $\sum_{x \in D(v)} d_H(x) \leq 2|D(v)|$。于是 $d_G(v) \leq 2|D(v)|$，即 $|D(v)| \geq \lceil d_G(v)/2 \rceil$。每次分裂都会使顶点总数增加 1，并且在对 v 的后代进行任何分裂之前，$|D(v)| = 1$。因此，至少需要 $|D(v)| - 1 \geq \lceil d_G(v)/2 \rceil - 1$ 次分裂，“因为 v”。对所有 $v \in V(G)$ 求和，得到无条件下界

$$|\sigma| \geq \sum_{v \in V(G)} \left(\left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil - 1 \right). \qquad (*)$$

如果 $r = 0$，则下界部分的证明已经完成。现在假设 $r = 1$，即 G 没有奇度顶点（因此 G 是欧拉图）。若 $(*)$ 中取等号，则对每个 v，必有 $|D(v)| = \lceil d_G(v)/2 \rceil$，且每个后代的度恰为 2（因为 $D(v)$ 上的度数和恰为 $d_G(v)$，而度的最大值为 2）。因此，H 的每个顶点的度都恰为 2，所以 H 的每个连通分量都是一个圈。特别地，$H \notin \mathcal{P}$，除非 $E = \emptyset$。因此，在欧拉连通情形下，除了 $(*)$ 所给出的下界之外，还至少需要一次额外分裂，下界为

$$|\sigma| \geq \sum_{v \in V(G)} \left(\left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil - 1 \right) + 1.$$

为证明上界，设 $T = \{P_1, \ldots, P_k\}$ 是将 $E(G)$划分为迹的一个划分（如 $tp(G)$的定义中所述）。我们构造一个分裂序列，将这些迹实现为顶点不相交路径。

固定一个顶点 $v \in V(G)$，并设 T 的各条迹按出现次数计总共使用 v 达 $t(v)$次（因此一次内部出现在 v处对该迹贡献2条关联边，而一次端点出现贡献1条关联边）。于是 v 的 $d_G(v)$条关联边被分组为 $t(v)$个块，每个块的大小均为2，除非 v 是某条迹的端点时可能有一个大小为1的块。因此对所有 v，有$t(v) \geq \lceil d_G(v)/2 \rceil$。

现在进行分裂，使 v 恰好被替换为 $t(v)$个后代，每个块对应一个后代，且该后代恰好与该块的各条边相邻。此后，每个后代的度为2（对于内部块）或度为1（对于端点块）。对所有顶点同时执行此操作，会使每条迹 P_i 在所得图中成为一个真正的路径分量，且不同的迹彼此顶点不相交。因此所得图属于 $\mathcal{P}$。

“在 v”处使用的分裂次数恰好为 $t(v) - 1$。因此，分裂总次数为

$$\sum_{v \in V(G)} (t(v) - 1).$$

若 $r = 0$（存在奇度顶点），选择 T，使得每个奇度顶点在整体中恰好作为端点出现一次；那么每个 $t(v)$都可以取为 $\lceil d_G(v)/2 \rceil$，从而恰好得到 $\sum_v (\lceil d_G(v)/2 \rceil - 1)$ 次分裂。

若 $r = 1$（欧拉连通），则任何迹划分都必须至少包含一条迹，因此必有两个端点。这意味着恰有一个顶点贡献一个端点块（大小为 1），与处处将顶点理想地配对成大小为 2 的块相比，这会使 $\sum_v t(v)$ 恰好增加 1。等价地，我们可以使所有顶点都具有 $t(v) = d_G(v)$，但在一个选定的顶点处采用 $t(v) = d_G(v)/2 + 1$。由此恰好得到 $\sum_v (\lceil d_G(v)/2 \rceil - 1) + 1$ 次分裂。

因此，在这两种情况下，所述数量的分裂都可以实现。结合下界，这就证明了当 G 是连通图时，该结果是最优的。对所有连通分量求和，即可得到带有额外 $+r$ 的一般公式。

注意，定理 2 的证明中的构造给出了一个多项式时间算法，该算法可输出一个明确的分裂序列，将任意图变为路径的不交并。

推论 3. 将图变为路径的不交并所需的最少分裂次数，以及相应的分裂序列，均可在时间 $O(|E(G)||V(G)|)$ 内计算得出。

证明. 定理 2 中得到的值可在线性时间内计算；由于迹划分可在时间 $O(|E(G)||V(G)|)$ 内计算，因此分裂序列也可在（相同的）多项式时间内得到。

推论 4. 如果 G 是无三角形图，则将 G 转换为单位区间图所需的最少（互斥或非互斥）分裂次数可在多项式时间内计算得出。

证明. 如果 G 是无三角形的单位区间图，那么 G 就是路径的不交并。根据定理 2，对于无三角形图，将顶点独占分裂为单位区间图这一问题可在多项式时间内求解。由推论1（因为我们有 $UIVS(G) = UIVXS(G)$），即可完成证明。

5 分裂与删除

现在我们考虑（更一般的）弦图类。我们的证明聚焦于区间图的（子）类，因此人们可能会猜测这个问题在这种情况下也是 NP困难的。然而，目前这仍然只是一个猜想，因此我们将其作为一个开放问题提出。请注意，定理 1 的证明无法应用，因为无三角形弦图恰好对应于森林，而将图分裂成森林已知可以在多项式时间内解决 [9]。

我们注意到，当编辑操作为边删除或顶点删除时，修改为弦图的问题已得到充分研究。当然，尽管顶点分裂与删除关系密切，它仍可能带来额外的挑战。例如，

若分裂 k 个顶点后得到的图属于遗传类 Π，则删除同一组顶点也会产生相同效果，但反之未必成立。在本节中，我们研究以得到弦图为目标时，顶点分裂与两种删除操作之间的关系。我们分别用 $ChED(G)$和 $ChVD(G)$表示将 G变换为弦图所需的最少边删除数和顶点删除数。

我们证明，对于任意图 G, $ChVD(G) \leq ChVS(G) \leq ChED(G)$，并且这些界并不紧。

我们还重点关注具有 $\alpha(G) \leq 2$ 的图，因为它们不包含长度至少为6的任何诱导圈。因此，要将这样的图转化为弦图，我们只需消除长度为4或5的圈。

5.1 顶点分裂与弦图的边删除

我们首先考察其与弦图边删除问题的关系，该问题已知为NP完全 [15]。

定理3. 对于每个图 G, $ChVS(G) \leq ChED(G)$。此外， $ChVS(G)$不能以下界 $ChED(G)$ 为界，即使对于具有 $\alpha(G) \leq 2$ 的图也是如此。

证明。 令 G 为一个图。假设我们有一系列边删除操作，将 G 转变为一个弦图。对于每次边删除操作 xy，用将 x 分裂为两个副本来替代该操作：一个副本仅与 y 相连（因此成为一片叶），另一个副本则与 x的其他邻居相连。这一系列对 G 的分裂操作与边删除序列长度相同，并将该图转变为弦图。事实上，每个叶副本都是一个单纯顶点，可以将其移除或忽略（这不会影响图的弦性）。剩余的图与删除这些边后得到的图相同。于是 $ChVS(G) \leq ChED(G)$。

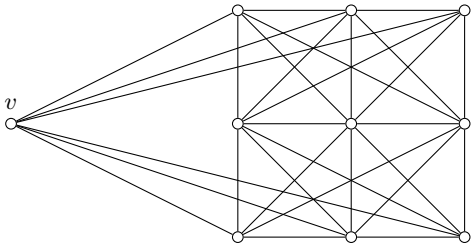


图5：对于 $k = 3$的图 G_k。该图满足 $ChVS(G_k) = 1$ 且$ChED(G_k) \geq k$，并且 $\alpha(G_k) = 2$。

对于任意整数 k，我们考虑如下定义的图 G_k：考虑顶点 v， $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$， $c_1, \ldots, c_k$。令 $\{a_1, \ldots, a_k\}, \{b_1, \ldots, b_k\}$ 和

$\{c_1, \ldots, c_k\}$ 团，并为每个 i 和 $j \in [k]$ 添加边 va_i, a_ib_j, b_ic_j 和 c_jv。

只需进行一次分裂，我们就能通过将顶点 v 分裂成两个副本 v_1 和 v_2，把这个图变成弦图，使得 v_1 与顶点$a_1, \ldots, a_k$相邻，而 v_2与顶点 $c_1, \ldots, c_k$相邻。顶点消去序为 $v_1, v_2, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k$。

这个图至少需要 k 次边删除，因为存在 k 个边不相交的诱导 C_4：v, a_i, b_i, c_i，每个 $i \in [k]$对应一个。因此 $ChVS(G_k) = 1$且$ChED(G_k) \geq k$。

5.2 弦图中的顶点分裂与顶点删除

现在我们来讨论与顶点删除的关系。已知问题 $ChVD$ 是 NP完全 [14]。

定理4. 设 Π 是一个遗传图类。对于任意图 G, $\Pi VD(G) \leq \Pi VS(G)$。特别地，对于任意图 G, $ChVD(G) \leq ChVS(G)$。

证明。考虑在 G 上进行的一系列 σ，长度为 $k = ChVS(G)$，这些分裂将该图转化为一个 Π 图 G_σ。我们用 S 表示所有被分裂的 G 顶点的集合。于是 $G - S$ 是 G_σ 的一个诱导子图。现在，由于 G_σ 属于 Π，且 Π 是遗传的，我们得出 $G - S$ 属于 Π，并且 $\Pi VD(G) \leq \Pi VS(G)$。

定理5. 参数 $ChVD$ 和 $ChVS$ 并不等价。

证明。我们证明，对于任意 $k \geq 1$，存在一个图 G_k，使得 $ChVD(G_k) = 1$ 且 $ChVS(G_k) \geq k$。令 G_k 为由一个具有 $k+1$ 个顶点的星图，将其每条边替换为一个四阶圈而得到的图。我们有 $ChVD(G_k) = 1$，因为移除星图的中心顶点后，该图会变为若干个 P_3 的并。

现在我们证明，至少需要 k 次分裂，才能将 G_k 变为弦图。该图有 $3k + 1$ 个顶点和 $4k$ 条边。设 σ 是在 G_k上进行的至多 $k-1$ 次分裂构成的序列。我们将得到的图记为 G_σ。该图至多有 $3k+1+k-1 = 4k$ 个顶点。边数没有减少（更准确地说，如果这些分裂是互斥的，边数保持不变）。因此，G_σ 至少有 $4k$ 条边。因此，G_σ 不是无环的，故包含一个圈。考虑 G_σ的一个诱导圈。该圈的长度不可能为 3，因为 G_k 是无三角形的，而且分裂不会降低图的围长。由此我们得出，$ChVS(G_k) \geq k$。

现在我们关注补图无三角形的图：换言之，即满足 $\alpha(G) \leq 2$ 的图 G。在这种情况下，我们可以证明，与一般情形相比，弦图顶点删除与弦图顶点分裂更为“接近”。下一个引理用于证明定理 6。

引理 4. 对于任意图 G，若 $\alpha(G) \leq 2$ 且 $\chi(G) \geq 3$，则 $\overline{G}$ 包含一个诱导 C_4 或一个诱导 C_5。

证明。 反证法：设 G是不满足引理 4 的顶点数最少的图。

由于 $\chi(\overline{G}) \geq 3$，存在 $k \geq 1$ 和顶点 $v_1, \ldots v_{2k+1}$，使得$\{v_1, \ldots, v_{2k+1}\}$ 是 G中的一个圈。此外，由于 $\alpha(G) \leq 2$，因此 $k \geq 2$。

若 $|G| = 5$，则必然有 $k = 2$。由于 $\alpha(G) \leq 2$，不可能存在 i 使得 $v_i v_{i+2}$ 是一条非边；否则就会出现一个非三角形v_i，v_{i+1}，v_{i+2}。由此我们推得 G 是 C_5（见图 6），矛盾。

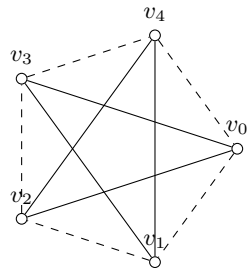


图 6：在 G 有 5 个顶点的情形下，我们证明 G 是 C_5。

否则 $|G| \geq 6$ （见图 7）。考虑由顶点 $\{v_1, v_4, v_2, v_5\}$在 G 中诱导出的子图。根据假设，它不可能是一个 C_4。因此，既然我们已经知道 v_1v_2 和 v_4v_5 是 G中的非边，且 v_2v_4 是 G 中的一条边（否则（v_2，v_3，v_4）将是一个非三角形），那么 $\{v_1v_4, v_2v_5, v_1v_5\}$中必定还有另一条非边。若 v_1v_5是一条非边，则（v_1，v_2，v_3，v_4，v_5）是一个满足引理假设的诱导子图，这与情形 $|G| = 5$不可能的结论相矛盾。因此，v_1v_4 （分别为 v_2v_5 ）是一条非边，于是由 $\{v_1, v_4, v_5, \ldots v_{2k+1}\}$ （分别为 $\{v_1, v_2, v_5, v_6, \ldots v_{2k+1}\}$）诱导出的子图是一个更小的反例，这与 G 的极小性矛盾。矛盾。

我们得出结论：不存在最小的反例。

定理 6. 设 G 是一个图，使得 $\alpha(G) \leq 2$。则 $ChVD(G) = 1 \Longleftrightarrow ChVS(G) = 1$。

证明. 若 $ChVS(G) = 1$，则通过删除拆分顶点可得 $ChVD(G) = 1$ 。

现设 $ChVD(G) = 1$。存在一个顶点 v，使得 $G \setminus \{v\}$是弦图。由于 $\alpha(G \setminus \{v\}) \leq 2$，我们由引理 4 推得 $\chi(G \setminus \{v\}) \leq 2$。因此$G \setminus \{v\}$ 可划分为两个完全子图 A 和 B。

我们通过将 v 分裂为 v_1 和 v_2 来定义 G' ，使得 v_1 与$N(v) \cap A$相连，且 v_2与 $N(v) \cap v_2$相连，顶点 v_1和 v_2是单纯的。我们通过删除这两个顶点来开始 G' 的消去序。然后，由于$G \setminus \{v\}$ 是弦图，我们将 $G \setminus \{v\}$的消去序拼接上去，从而完成 G' 的这一消去序。因此 $ChVS(G) = 1$。

现在我们证明，前述等价关系的推广是错误的。

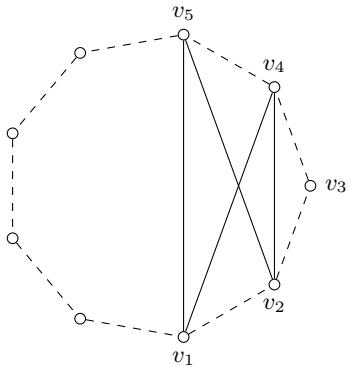


图 7：在非环部分的所有内部边都存在的情况下，存在一个诱导 C_4 于 G中。

定理 7。 在具有 $\alpha(G) \leq 2$ 的图 G 中，参数 $ChVD$ 和 $ChVS$ 各不相同。更确切地说，存在一个图 G，使得 $ChVD(G) < ChVS(G)$，且 $\alpha(G) = 2$。

证明。 我们考虑图 8 中所描述的、含 9 个顶点的图 G 。

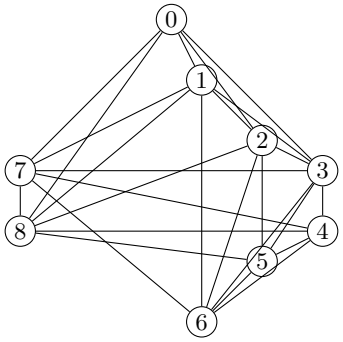


图 8：图 G 的一个例子，它具有 $ChVD(G) = 2$ 和 $ChVS(G) > 2$，且$\alpha(G) = 2$。顶点0,1, 2, 3和4, 5, 6构成团。

我们可以验证 $\alpha(G) = 2$，因为其补图是无三角形的。注意，环(7, 0, 2, 6)和(8, 1, 3,4)是诱导的。由于这些环不相交，故$ChVD(G) \geq 2$。诱导子图 $G \setminus \{7, 8\}$ 是弦的，因为存在一个消去序，即为0, 1, 2, 3, 4, 5,6。

我们通过计算机穷举法验证了 $ChVS(G) \geq 3$： 尝试对圈 (7，0、2、6) 上的一个顶点以及圈 (8、1、3、4) 上的一个顶点进行所有可能的分裂。

6 总结

我们开始研究将顶点分裂作为一种图修改操作，以将图转化为区间图。我们证明，判断一个图能否通过至多 k 次顶点分裂转化为区间图是 NP完全问题，即使输入限制为次三次平面二分图也是如此。我们还表明，对于无三角图，在弦图、区间图和单位区间图（目标）上，包含式分裂与互斥分裂是等价的。

积极的一面是，我们提出了一种多项式时间算法，可以计算将一个图变换为路径的不交并所需的最少分裂次数，并给出相应的分裂序列。因此，将无三角形图分裂成单位区间图可以在多项式时间内解决。

此外，我们还比较了目标图为弦图时的顶点分裂与边删除和顶点删除。我们证明，弦图顶点分裂总是不超过弦图边删除，而弦图顶点删除也总是不超过弦图顶点分裂。同时，即使对于独立数至多为二的图，这些参数之间也存在显著差异。这些结果表明，到弦图类和区间图类的基于分裂的距离与基于删除的距离表现不同，需要分别进行分析。

最后，我们提出几个尚未解决的问题。一般情况下，弦图顶点分裂和单位区间顶点分裂的复杂度如何？对于区间顶点分裂，是否存在针对自然参数的固定参数可处理算法或近似算法？关于辅助参数，我们指出，以树宽和输入图的分裂次数为参数时，分裂成区间图是固定参数可处理的。这直接由 Courcelle 定理 [6] 得出，因为该问题可以用单子二阶逻辑 [8]表达。然而，以其他辅助参数（例如孪生宽度和模宽）为参数时，这个问题仍然值得研究。

参考文献

1. F. N. Abu-Khzam、T. Davot、L. Isenmann 和 S. Thoumi。关于带顶点分裂的 2 *International Computing and* -簇编辑问题 *Combinatorics Conference* 3 14 2025 的复杂度。载于，第 – 页。施普林格，。2. F. N. Abu-Khzam、J. Egan、S. Gaspers、A. Shaw 和 P. Shaw。带顶点分裂的簇编辑。载于 *International Symposium on Combinatorial Optimization*，第 1–13 页。施普林格，2018年。
3. F. N. Abu-Khzam、L. Isenmann 和 Z. Merchad。带重叠的双簇编辑：一种顶点分裂方法。载于 H. Fernau 和 B. Zhu 编， *CombinatorialAlgorithms - 36th International Workshop, IWOCA 2025, Bozeman, MT, USA, July 21-24, 2025*年， *Proceedings*, *Lecture Notes in Computer Science*第 15885 卷，第 146–159 页。施普林格，2025年。

4. S. Benzer。遗传精细结构的拓扑。 *Proceedings of the National Academy of Sciences* 45 11 1607 1620, 1959 , ( ): –。将区间图引入遗传学。5. K. S. Booth 和 G. S. Lueker。使用 PQ 树算法检验连续 1 性质、区间图和图平面性。*System Sciences* 13 3 335 379, 1976 *Journal of Computer and* , ( ): –。6. B. Courcelle。图的单子二阶逻辑。I. 有限图的可识别集合。 *Information and Computation*, 85(1): 12–75, 1990。7. G. A. Dirac。关于刚性回路图。 *Seminar der Universität Hamburg* 25 71 76, 1961 *Abhandlungen aus dem Mathematischen* , : –。8. D. Eppstein、P. Kindermann、S. Kobourov、G. Liotta、A. Lubiw、A. Maignan、D. Mondal、H. Vosoughpour、S. Whitesides 和 S. Wismath。关于图的平面分裂厚度。 *Algorithmica*, 80(3): 977–994, 2018年。9. A. Firbas。 *Establishing hereditary graph properties via vertex splitting*。博士论文，维也纳工业大学，2023年。10. A. Firbas、A. Dobler、F. Holzer、J. Schafellner、M. Sorge、A. Villedieu 和 M. Wiß- mann。簇顶点分裂等问题的复杂度。 *Discrete Applied Mathematics* 365 190 207, 2025 , : –。11. M. R. Garey、D. S. Johnson 和 R. E. Tarjan。平面哈密顿回路问题是 NP完全问题。 *SIAM Journal on Computing*, 5(4): 704–714, 1976。12. M. C. Golumbic。算法图论与完美图。 *Academic Press*, 1980 5。区间图和调度应用见第 章。13. S. Iwata 和 T. Yamada。具有资源约束和截止期限的调度问题的区间图建模。 *Computers & Operations Research*, 31 10 1675 1687, 2004 ( ): –。14. J. M. Lewis 和 M. Yannakakis。遗传性质的节点删除问题是 NP完全问题。 *Journal of Computer and System Sciences* 20 2 219 230, , ( ): –。1980
15. A. Natanzon、R. Shamir 和 R. Sharan。若干边修改问题的复杂度分类。 *Discrete Applied Mathematics*, 113(1): 109–128, 2001。16. M. N¨ollenburg、M. Sorge、S. Terziadis、A. Villedieu、H.-Y. Wu 和 J. Wulms。通过顶点分裂将图及其绘制平面化。 *Geometry* 16 1 333 372, 2025 *Journal of Computational* , ( ): –。17. W. T. Trotter Jr. 和 F. Harary。关于双区间图和多重区间图。 *Journal of Graph Theory* 3 3 205 211, 1979 , ( ): –。18. A. C. Tucker。若干圆弧图的结构定理。 *Discrete Mathematics* 7 2 167 195, 1974 , ( ): –。19. R. Van Bevern、C. Komusiewicz、H. Moser 和 R. Niedermeier。测量无差异性：单位区间顶点删除。载于 *Concepts in Computer Science* 232 243 2010 *International Workshop on Graph-Theoretic* , 第 – 页。施普林格，。20. G. Wegner。 *Eigenschaften der Nerven homologisch-einfacher Familien im Rn*。1967年。21. W. Whiteley。等静定框架中的顶点分裂。 *Structutal Topology, 1990年*, *núm. 16* 1990 , 。22. C. Q. Zhang。近欧拉图的循环流与顶点分裂。 *Journal of Graph Theory* 40 3 147 161, 2002 , ( ): –。23. J. Zhang 和 P. A. Pevzner。利用区间图进行基因组作图和重排。载于 *Proceedings of the National Academy of Sciences*，第 102 卷，第 17373–17378 页，2005年。