arXiv:2602.04629v1 [math.DS] 4 Feb 2026

# 通过非线性双重正则化过程研究一类具有非正则切换曲线的分段光滑 Filippov 系统的局部分岔

CLAUDIO A. BUZZI[1] 和 YAGOR ROMANO CARVALHO[2,3]

谨以此文纪念 *Yagor* 的祖母们

摘要。我们关注一类具有非正则切换集的分段光滑向量场，研究在通过光滑化过程将其近似为光滑向量场时，分岔是否得以保留。我们考察余维保持不变或发生改变的情形，以及分岔的泛性是否得以维持。

## 1. 引言

动力系统领域发展迅速，如今涵盖了许多分支，例如结构稳定性与分岔研究。若一个平面微分系统的定性动力学在小扰动下保持不变，即其相图在拓扑意义下等价，则称其为结构稳定。动力系统结构稳定性方面最具影响力的理论包括安德罗诺夫及其合作者 [2], 以及 Peixoto [50, 51], 提出的理论；他们给出了光滑二维微分系统结构稳定的充要条件。

在理解结构稳定系统之后，研究重点自然转向了分岔。如果一个平面微分系统不是结构稳定的，那么它就属于分岔集。在这种情况下，当系统经过分岔集中的某一点时，解集的定性结构会突然发生变化；例如参见 [28, 53]。此外，分岔可以根据其退化程度进行分类。粗略地说，分岔的余维 是指在分岔集中的某个给定向量场邻域内，描述微分系统所有可能动力学所需的最少参数个数。因此，余维越高，退化程度也越高。

在这一方向上，我们关注通过光滑化过程分析平面分段光滑系统的稳定性与分岔。自范德波尔 [68, 69] 和安德罗诺夫 [2, 3], 的开创性研究以来，人们对这类系统的兴趣显著增加，这主要是因为它们在应用科学的多个领域有着广泛的应用。

运用控制论和微分包含的技术，已有若干关于切换流形上动力学的研究结果；例如，参见 [1,19]。分段光滑微分系统常用于模拟动力学发生突变的现象。这类行为出现在工程学、物理学和生物学等领域的问题中；例如，参见 [16, 24, 29, 31, 43, 43, 45, 56, 70]。

这一背景下微分系统的术语和基本结果由 Filippov [22]确立。因此，按照 Filippov 的约定定义的分段光滑系统称为*Filippov* 系统。

2020年 数学主题分类。 34A34,34A36,34A60,34C23,34D30,37G10。关键词和短语。 结构稳定性、分岔理论、分段光滑向量场、正则化、非正则切换曲线。

受相关研究 [26, 38, 61, 64, 65], 启发， [9], 建立了适用于曲面上 Filippov 系统的通用结构稳定性定理，将 Peixoto 的经典结果推广至此情形 [51]。此外，对于平面Filippov系统，Kuznetsov、Gragnani 和 Rinaldi 在 [29]给出了余维一分岔的完整列表。利用 [58], 中提出的一般方法，Guardia、Seara 和 Teixeira 刻画了 [23]中的通用余维二分岔；更高余维分岔的相关结果另见 [17] 。

由于刚体运动以及库仑摩擦定律 [62] 中存在若干不连续性，因此，采用摩擦对刚体动力学进行建模颇具挑战。近些年来，人们为开发研究这类系统的分析工具付出了大量努力。在这些工具中，值得一提的是光滑化过程，它提供了一种用光滑系统近似分段光滑系统的方法。光滑化过程的一项重要优势是能够应用经典的光滑动力系统理论。文献中应用最广泛的光滑化技术之一是 Sotomayor–Teixeira 正则化 [39, 61]。这主要是因为它与具有正则切换曲线的系统所采用的 Filippov约定有内在联系；参见 [66]。例如，在 [10, 33, 34], 中，作者结合奇异摄动理论、膨胀方法和 Sotomayor–Teixeira 正则化，研究了正则切换流形附近的局部动力学。

Sotomayor–Teixeira 正则化可视为线性正则化 [13, 52]这一类中的典型例子。作为另一种方法，我们可以提及滞回切换 [32]。Jeffrey [25] 研究了一个简单的分段光滑模型，该模型描述了物体在平坦表面上发生黏滑运动的情形，并指出线性正则化可能不足以适用于实际应用。因此，当光滑系统趋近分段光滑动力学时，线性正则化可能会忽略广泛的现象 [25, 47]。

鉴于上述讨论，并假设余维零分岔对应于结构稳定性，研究分岔时自然会产生几个问题。分段光滑系统中的给定余维 $k$ 分岔在光滑化过程中会发生什么？具体而言，分岔的余维会保持不变还是发生改变?

针对这些问题，已有多位作者尝试给出答案。对于定义在二维球面上、由正则切换曲线划分为两个连通分支的Filippov系统，Sotomayor和Teixeira [61] 运用其正则化建立了保证正则化向量场结构稳定的条件。随后，Sotomayor和Machado [60] 将这些条件推广至定义在类似地由正则切换曲线划分的区域中的平面系统。此外，针对 [60] 中描述的平面Filippov系统以及 [23], 中分类的分岔，对Sotomayor–Teixeira 正则化的一项具体应用为余维$k = 1, 2$ [12, 42]提供了新的认识。具体而言，Maciel [42] 证实，分段光滑系统中的余维一分岔在光滑系统中经光滑化后得以保留；而 Buzzi和Santos [12] 则证明了余维二鞍点–折叠分岔的保留。 [7, 8, 27, 48]进一步探讨了分段光滑系统在光滑化过程中、折叠奇点附近的演化。

上一段中引用的所有文献都涉及可应用 Filippov约定的情形。然而，也存在由具有非正则切换曲线 [5, 21, 41, 63] 的分段光滑系统建模的问题。在这些情形下，切换曲线在某些点的余维可能大于一，因此 Filippov约定[22] 并不适用。因此，近年来对此类系统的研究日益增多[11, 15, 40, 46]。例如，在 [35, 36], 中，作者提出了一种系统的方法来

分析这些系统。此外，还应重点介绍有关稳定性和分岔的奠基性工作 [20, 30]。

本文旨在分析一类具有非正则切换曲线的平面分段光滑系统在光滑化过程下的低余维分岔。分析重点是确定光滑化后分岔的余维是否保持不变。由于我们直接使用系统的原始变量进行研究，因此所得结果可直接应用于给定系统。

更具体地说，我们已经看到，分段光滑系统在许多现实应用中自然涌现。受以下形式的方程启发

$$\ddot{x} + a\dot{x} = \operatorname{sgn}\big(x\, f(x,\dot{x})\big), \tag{1}$$

这类方程源于控制论和工程学，参见 [4, 54], ；此外，引入这种不连续性也是为了解决一个镇定问题 [6]。在此背景下， [30]中的作者认识到，有必要为系统 (1) 的分岔理论制定一套系统性方案，尤其是在 $f(x,\ \dot{x}) = x\cdot\dot{x}$ 时。

在此背景下，设 $X, Y\colon \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是定义在原点的一个有界邻域 $\mathcal{U}$ 上的两个足够光滑的向量场。考虑函数 $f:\ \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，其定义为 $f(x_1,x_2) = x_1x_2$。那么，原点是 $f$的一个非退化临界点，而$\Sigma = f^{-1}(0)$是一条非正则曲线，由两条在原点横截相交的直线构成，即 $\Sigma = \Sigma_1\cup\Sigma_2,$ ，其中

$$\Sigma_1 = \{(x_1,x_2)\in\mathcal{U} : x_1 = 0\} \quad \text{and} \quad \Sigma_2 = \{(x_1,x_2)\in\mathcal{U} : x_2 = 0\}.$$

此外，我们将 $\Sigma_1$ 分解为 $\Sigma_1 = \Sigma_1^+\cup\overline{\Sigma_1^-},$ ，其中

$$\Sigma_1^+ = \{(0,x_2)\in\Sigma_1 : x_2 > 0\} \quad \text{and} \quad \Sigma_1^- = \{(0,x_2)\in\Sigma_1 : x_2 < 0\}$$

是正则曲线。类似地，我们可以写作 $\Sigma_2 = \Sigma_2^+\cup\overline{\Sigma_2^-}$。从现在起，令 Ω 表示所有满足以下条件的分段向量场 $Z = (X,Y)$ 构成的集合：

$$Z(p) = X(p) \text{ if } p\in\overline{\mathcal{U}^+} \quad \text{and} \quad Z(p) = Y(p) \text{ if } p\in\overline{\mathcal{U}^-} \tag{2}$$

其中 $\mathcal{U}^+ = \{(x_1,x_2)\in\mathcal{U}:\ f(x_1,x_2) > 0\}$和 $\mathcal{U}^- = \{(x_1,x_2)\in\mathcal{U}:\ f(x_1,x_2) < 0\}$是由 $\Sigma$分隔的开集，且 $\mathcal{U}^\pm = \Sigma_+^\pm\cup\Sigma_-^\pm,$ 满足 $\Sigma_+^\pm = \mathcal{U}^\pm\cap\Sigma_1^+$并且 $\Sigma_-^\pm = \mathcal{U}^\pm\cap\Sigma_1^-$。注意，系统 (2) 是一个平面分段向量场，其切换曲线 $\Sigma = f^{-1}(0)$ 为非正则曲线，见图 1。

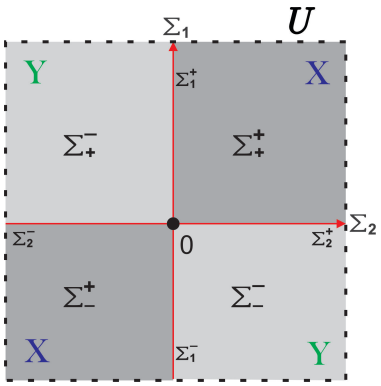



图 1. 集合 $\mathcal{U}$ 的分解。

考虑 $\Sigma\setminus\{(0,0)\}$上的Filippov约定，选择一种定义以消除穿过原点的轨道的歧义，并运用Ω (2)中诸系统开折的局部 $\Sigma$-等价与弱等价概念，Larrosa、M-Seara、

以及Teixeira [30] 在原点附近建立了局部Σ-结构稳定向量场集合的泛型条件，记为Ω$_0 \subset \Omega$。他们还对在原点处呈现余维一泛型分岔的向量场进行了分类，$\Xi_1 \subset \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$。更多细节见第2节。

我们的目标是研究族 $\Omega_0$ 和 $\Xi_1$的光滑化。在介绍我们的结果之前，我们先说明将要采用的光滑化过程。一般而言，对式 (2) 中的分段光滑向量场 $Z$ 进行正则化，就是得到一个由参数 $k$参数化的光滑向量场族 $Z_\epsilon^R$，其中 $\epsilon \in \mathbb{R}^k$，使得 $Z_\epsilon^R$在 $U \setminus \Sigma$ 中相对于给定拓扑逐点收敛到 $Z$。$Z$ 及其每个 $Z_\epsilon^R$的特征都可能呈现复杂而迷人的行为。Utkin [67] 以及后来 Panazzolo 和 Silva [49] 观察到，不同的正则化过程可能导致不同的滑动动力学。

如前所述，正则化 $Z_\epsilon^R$的行为为理解 $Z$的动力学提供了宝贵信息；另请参见 [37], ，其中平均理论被用于这一问题。正则化已被用于研究这样一类分段光滑向量场的动力学：其非正则切换曲线包含余维为二的点，并由两条正则曲线的并集构成 [18]。受此启发，我们采用 Sotomayor–Teixeira 双重正则化 [14, 49], ，它是对 Sotomayor–Teixeira 正则化进行两次应用的一种推广。

这样，令 $X_{+,+} = X_{-,-} = X$ 和 $X_{-,+} = X_{+,-} = Y$。那么，对于式 (2) 中定义的向量场，Sotomayor–Teixeira 双重正则化为

$$\begin{aligned} Z^R_{\varepsilon,\eta}(p) = \sum_{\alpha,\beta\in\{+,-\}} \frac{1}{4}\,(1+\alpha\,\varphi_\varepsilon(x_1))\,(1+\beta\,\psi_\eta(x_2))\; X_{\alpha,\beta}(p) = \\ = \frac{1}{2}\,(1+\varphi_\varepsilon(x_1)\,\psi_\eta(x_2))\; X(p) + \frac{1}{2}\;(1-\varphi_\varepsilon(x_1)\,\psi_\eta(x_2))\; Y(p), \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\varphi_\varepsilon(x_1) = \varphi(x_1/\varepsilon)$，且 $\psi_\eta(x_2) = \psi(x_2/\eta)$。这里，$\varepsilon$ 和 $\eta$ 是足够小的正则化参数，$\varphi$ 和 $\psi$ 是足够光滑的函数，称为过渡函数，满足 $\varphi(s) = \psi(s) = \operatorname{sgn}(s)$（当 $|s| \geq 1$ 时），且 $\varphi'(s) = \psi'(s) > 0$（当 $|s| < 1$时）。在方程 (3) 中，当 $x_1 x_2 \neq 0$时，我们得到两个 Sotomayor–Teixeira 正则化，分别对应于 $\eta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$:

$$Z^R_{\pm,\eta}(p) = \sum_{\beta\in\{+,-\}} \frac{1}{2}\,(1 \pm \beta\psi_\eta(x_2))\,X_{\pm,\beta}(p) \text{ and } Z^R_{\varepsilon,\pm}(p) = \sum_{\alpha\in\{+,-\}} \frac{1}{2}\,(1 \pm \alpha\varphi_\varepsilon(x_1))\,X_{\alpha,\pm}(p),$$

其中，$Z^R_{\pm,\eta}$ 和 $Z^R_{\varepsilon,\pm}$ 的切换曲线分别为 $\Sigma_2^\pm$ 和 $\Sigma_1^\pm$。Sotomayor-Teixeira 双重正则化能够实现图2所示的精确构型。

分段向量场 (2) 的双重正则化是一个由光滑向量场组成的双参数族 $Z^R_{\varepsilon,\eta}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$，满足 $Z^R_{\varepsilon,\eta}$ 在 $\mathcal{U} \setminus \Sigma$ 上逐点收敛到 $Z$，当$\varepsilon, \eta \to 0$。记

$$\big[X, Y\big] = \left\{ \frac{1}{2}(1+\lambda)\,X(p) + \frac{1}{2}(1-\lambda)\,Y(p) :\ \lambda \in [-1,1] \right\}$$

向量场 $X$ 和 $Y$在点 $p$处的凸组合。若 (2) 的双重正则化满足线性 条件，则称其为线性双重正则化：

$$Z^R_{\varepsilon,\eta}(p) \in \big[X(p), Y(p)\big], \qquad \text{for all } p \in \mathcal{U}.$$

Sotoma yor–Teixeira 双重正g则化 (3) 是一个例 p线性正则化的g则化。

也可以考虑更一般的正则化。(2) 的一种连续组合是一个由光滑向量场构成的单参数族 $\tilde{Z}^R(\lambda, \cdot)$，其中 $\lambda \in [-1,1]$，满足

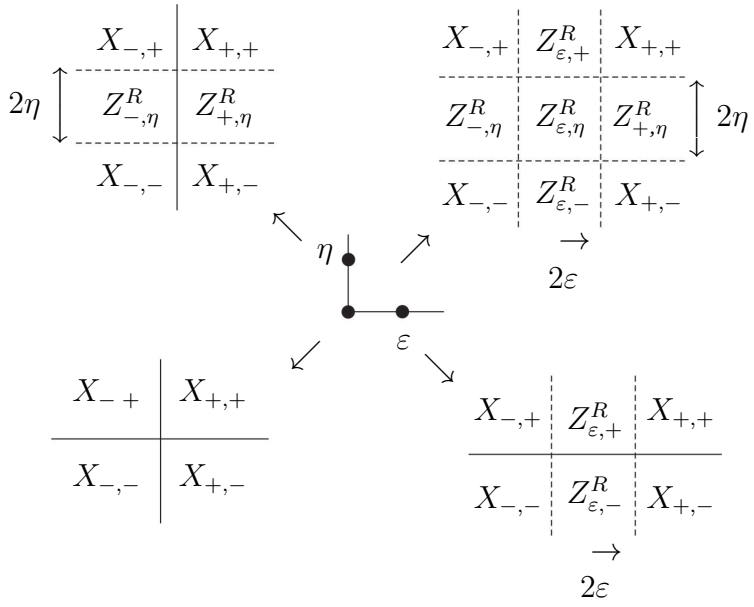



图2. Sotomayor–Teixeira 双重正则化。

对于所有 $p \in \mathcal{U}$，$\tilde{Z}^R(1,\ p) = X(p)$ 且 $\tilde{Z}^R(-1,\ p) = Y(p)$。(2) 的双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 称为非线性，若存在连续组合 $\tilde{Z}^R$，使得

$$Z^R_{\varepsilon,\eta}(p) \in \{\tilde{Z}^R(\lambda, p) : \lambda \in [-1, 1]\}, \qquad \text{for all } p \in \mathcal{U}.$$

在区间（$-1$，1）上，式(3)中使用的过渡函数具有正导数，因此称为单调过渡函数（见图3(a)–(b)）。另一种选择是考虑非单调过渡函数 [52],，它们不满足单调性，如图3(c)所示。因此，我们关注非单调过渡函数。

**定义1.1**。满足以下条件的充分分段光滑函数 $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1, \quad \textit{and} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1 \tag{4}$$

将称为广义过渡函数。

根据定义1.1，Sotomayor-Teixeira双重正则化并不总能产生图2所示的精确构型。在某些情况下，图2必须结合在范数较大的点（即无穷远附近）处求值的向量场 $X_{\pm,\pm}$ 来理解。这些方面在第5节给出的例子中会更加清晰。此外，转换函数有时并非单调。因此，Sotomayor-Teixeira双重正则化（3）可能取值于 $X$ 和 $Y$的凸组合之外，也可能不满足 $X$ 和 $Y$的连续组合条件。换言之，我们需要一个比线性或非线性正则化更一般的定义。就本文而言，（2）的广义连续组合 是指由光滑向量场 $\tilde{Z}^R_g(\lambda, \cdot)$构成的单参数族，使得

$$\lim_{\lambda\to1} \tilde{Z}^R_g(\lambda, p) = X(p) \quad \text{and} \quad \lim_{\lambda\to-1} \tilde{Z}^R_g(\lambda, p) = Y(p), \quad \text{for all } p \in \mathcal{U}.$$

因此，如果存在广义连续组合 $\tilde{Z}^R_g$，使得（2）的双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 满足该条件，则称其为广义非线性正则化。

$$Z^R_{\varepsilon,\eta} \in \tilde{Z}^R_g(\lambda, p) \quad \text{for some } \lambda \in [-1, 1] \text{ and all } p \in \mathcal{U}.$$

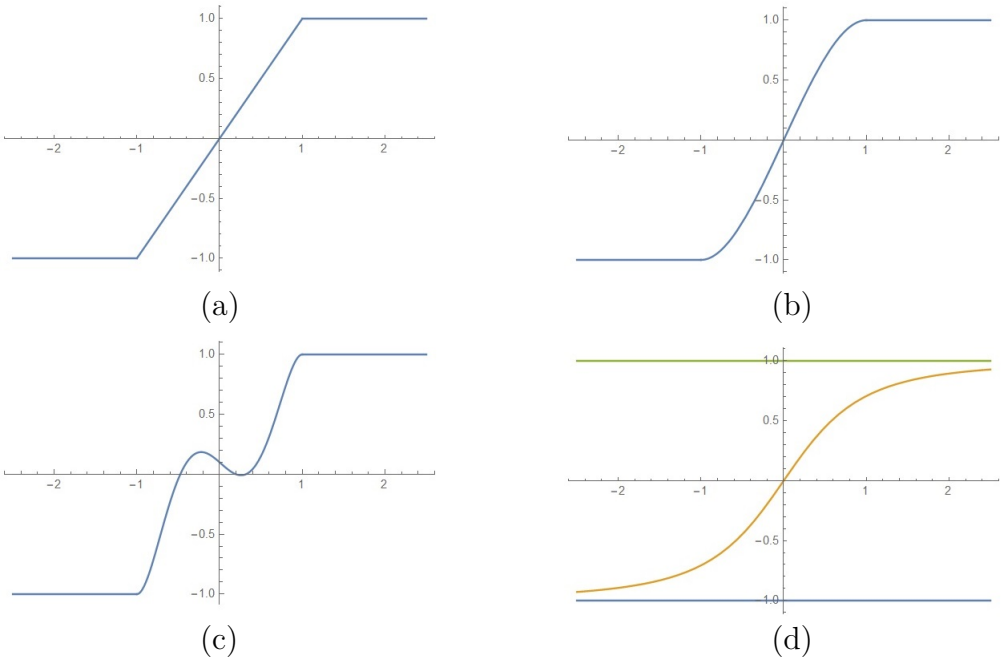



图3. (a)-(b) 单调过渡函数；(c) 非单调过渡函数；(d) 广义过渡函数。

受文献 [13, 47], 假设 $X_{+,\,+} = X_{-,\,-} = X = (X_1,\ X_2)$ 以及 $X_{-,\,+} = X_{+,\,-} = Y = (Y_1,\ Y_2)$ 的启发，对于分段向量场（2），我们考虑以下一类非线性双重正则化：

$$Z^R_{\varepsilon,\eta}(p_0) = \left(Z^{R_1}_{\varepsilon,\eta}(p), Z^{R_2}_{\varepsilon,\eta}(p)\right).$$

$$\begin{aligned} Z^R_{\varepsilon,\eta}(p) &= \sum_{\alpha,\beta\in\{+,-\}} \frac{1}{4}\left(1+\alpha\,\varphi_\varepsilon(x_1)\right)\left(1+\beta\,\psi_\eta(x_2)\right)\, X_{\alpha,\beta}(p) + \xi\, G(\varphi_\varepsilon(x_1),\psi_\eta(x_2)) = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_1(p) & Y_1(p) \\ X_2(p) & Y_2(p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\varphi_\varepsilon(x_1)\,\psi_\eta(x_2) \\ 1-\varphi_\varepsilon(x_1)\,\psi_\eta(x_2)\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} G_1(\varphi_\varepsilon(x_1),\psi_\eta(x_2)) \\ G_2(\varphi_\varepsilon(x_1),\psi_\eta(x_2))\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\xi$ 是一个充分小的参数，$\varphi_\varepsilon(x_1) = \varphi(x_1/\varepsilon)$ 和 $\psi_\eta(x_2) = \psi(x_2/\eta)$ 是广义过渡函数，而 $G = (G_1,\ G_2)$ 是定义在适当定义域上的连续实函数，使得 $G(\pm 1,\ \pm 1) = 0$。与之前一样，$\varepsilon$ 和 $\eta$ 是足够小的正则化参数。此外，对于 $\eta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，我们还有两个非线性正则化：

$$\begin{aligned} Z^R_{\pm,\eta}(p) &= \sum_{\beta\in\{+,-\}} \frac{1}{2}\left(1 \pm \beta\psi_\eta(x_2)\right) X_{\pm,\beta}(p) + \xi\, G(\pm 1,\psi_\eta(x_2)) \ \text{ and} \\ Z^R_{\varepsilon,\pm}(p) &= \sum_{\alpha\in\{+,-\}} \frac{1}{2}\left(1 \pm \alpha\varphi_\varepsilon(x_1)\right) X_{\alpha,\pm}(p) + \xi\, G(\varphi_\varepsilon(x_1),\pm 1), \end{aligned}$$

其中，$Z^R_{\pm,\,\eta}$ 和 $Z^R_{\varepsilon,\,\pm}$ 分别是 $\Sigma^\pm_2$ 和 $\Sigma^\pm_1$。此外，考虑 $p = (x_1,\ x_2)$，对于每个 $x_1 \neq 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们有 $x_1/\varepsilon \to \text{sgn}(x_1)\cdot\infty$，这意味着 $\varphi(x_1/\varepsilon) \to \text{sgn}(x_1)$。类似地，对于每个 $x_2 \neq 0$，当 $\eta \to 0$时，$\psi(x_2/\eta) \to \text{sgn}(x_2)$。因此，非线性双重正则化 (5) 满足 $Z^R_{\varepsilon,\,\eta} \to X_{\pm,\,\pm} \in \{X,\ Y\}$，当

$\varepsilon$，$\eta \to 0$。例如，将 $G_1$ 和 $G_2$ 分别视为次数为 $m_1$ 和 $m_2$的多项式，即可构造非线性双重正则化 (5) 的简单示例。正如我们将看到的，关于平衡点存在性的结果也适用于以下形式的齐次函数

$$G_i(r,s)=\sum_{j=0}^{m_i} a_j\,|r|^{\alpha_i}\,|s|^{\beta_i}, \quad \text{or} \quad G_i(r,s)=\sum_{j=0}^{m_i} a_j\,sgn(r)\,|r|^{\alpha_i}\,sgn(s)\,|s|^{\beta_i}, \tag{6}$$

其中 $m_i \in \mathbb{N}$和 $0 \le \alpha_i,\ \beta_i < 1$对于 $i = 1,\ 2$，参见第5节。

本文的主要目标是分析在原点邻域内，采用光滑化过程 (5) 时，具有非正则切换曲线的一类分段光滑向量场中余维较低的分岔；这些分岔已在 [30], 中分类。原点是切换曲线失去正则性的点。我们旨在研究所选正则化在该邻域内可能出现的现象。此外，对于其他邻域，相应情形已在文献中得到描述并引用。借助光滑化过程 (5)，我们表明，在光滑系统的范畴中，分岔的余维并不总是保持不变，也并非总是一般的。据我们所知，目前尚无这方面的研究结果。

由此，我们可以陈述本文的一个主要结果。令 $det[Z](p) = (X_1\,Y_2 - X_2\,Y_1)(p)$ 且 $H_i(x_1,\ x_2) = \varphi_\varepsilon(x_1)\ \psi_\eta(x_2)(X_i - Y_i)(x_1,\ x_2) + (X_i + Y_i)(x_1,\ x_2)$，其中 $i = 1,\ 2$。首先，我们考虑非线性双重正则化存在平衡点的条件。

**定理 1.1**。考虑 Ω，如 (2) 所示。则其非线性双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\,\eta}$ 存在平衡点，当且仅当存在 $p_0 = (p_{10},\ p_{20}) \in \mathcal{U}$，使得 $\det[Z](p_0) = 0$ 且 $H_i(p_0) = 0$，其中某个 $i = 1,\ 2$。此外，若 $\xi \neq 0$，则对任意充分小的 $\xi$，$G\big(\varphi_\varepsilon(p_{10})\ \psi_\eta(p_{20})\big) = (0,\ 0)$。

最后一个定理给出了我们的非线性双重正则化中平衡点存在的重要条件。因此，考虑光滑分段系统 (2) 的非线性双重正则化 (5)，当上述条件不满足时，不存在平衡点。从某种意义上说，这促使我们分析结构稳定性。基于这一点，令 $G$ 为充分光滑的实函数，并考虑 $Z = (X,\ Y)$ 的以下几类：

($A_0$) 对于 $i = 1,\ 2,\ \ X_i\,Y_i(0) > 0$；($B_0$) 对于 $i = 1,\ 2,\ \ X_i\,Y_i(0) < 0$，且 $\det Z(0) \neq 0$；($C_0$) 对于 $i,\ j = 1,\ 2,\ \ i \neq j,\ \ X_i\,Y_i(0) > 0,\ \ X_j\,Y_j(0) < 0$，并且如果 $X_1\,X_2(0) < 0$，则 $\big(X_1\,Y_2/X_2\,Y_1\big)^2(0) \neq 1$。

如 [30], 中所证明的，Ω 中的 Σ-结构稳定集对应于 $\Omega_0 = (A_0)\cup(B_0)\cup(C_0)$（见第2节）。由此得到以下结果。

**定理 1.2**。若 $Z$ 在 Ω 中是 Σ-结构稳定的，即若 $Z \in \Omega_0$，，则存在实数 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\eta_0 > 0$，使得其非线性双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\,\eta}$ (5) 在原点附近对 $(\varepsilon,\eta) \in (0,\varepsilon_0) \times (0,\eta_0)$是结构稳定的；并且对任意充分小的 $\xi$，只要满足以下条件之一：

(i) $Z$ 满足 $(B_0)$ 或$(C_0)$；(ii) $Z$ 满足 $(A_0)$，且过渡函数满足 $\varphi\,\psi(0) \in [-1,1]$。

在这种情况下，结构稳定性得以保持。

因此，我们看到 Sotomayor-Teixeira 过渡函数能够保证结构稳定性的保持。回顾一下，Sotomayor-Teixeira 过渡函数将 $u$ 映射为 sgn($u$)，其中 $|u| \ge 1$，且当 $|u| < 1$时导数为正，即

$\varphi\psi(0) \in (-1, 1)$。正如我们将在定理 1.2 的证明中看到的，对过渡函数施加的条件仅与结构稳定系统的其中一个子类有关。对于其他子类，可以去掉这一条件，从而使这些情况下的结果更加一般。另一方面，对于更一般的过渡函数，也就是说，允许 $\varphi\psi(0) \notin [-1, 1]$，相应子类中就可能在原点出现平衡点。在这种情况下，如果该平衡点是双曲的，则根据 Hartman-Grobman定理，结果仍然成立。然而，如果该平衡点是非双曲的，结果便不成立，余维也无法保持。在第5节中，我们给出一些例子，其中原点是结构稳定向量场 $Z \in \Omega_0$ 的非线性双重正则化的非双曲平衡点。更多细节见第4节。

在通过非线性双重正则化过程研究集合Ω之后，我们现在将以类似的方式关注在原点处呈现余维一泛型分岔的分段光滑向量场， $Z \in \Xi_1$。对于 $Z = (X, Y)$，我们考虑以下几类：

($A_1$) $X_i(0) = 0$, $X_j(X_i)^{x_j}(0) \neq 0$，且 $Y_i(0) \neq 0$对于 $i = 1、2$，或 $Y_i(0) = 0$, $Y_j(Y_i)^{x_j}(0) \neq 0$，且 $X_i(0) \neq 0$ 对于 $i = 1、2$；($B_1$) $X_i Y_i(0) < 0$，$\det Z(0) = 0$，且 $(\det Z)^{x_i}(0) \neq 0$对于 $i = 1、2$；($C_1$) $X_i Y_i(0) > 0$, $X_j Y_j(0) < 0$对于 $i, j = 1、2、 i \neq j$，且 $X_1 X_2(0) < 0$。此外，如果$X_1 X_2(0) < 0$且 $(X_1 Y_2/X_2 Y_1)(0) = -1$，那么存在 $\beta_Z \neq 0$ 和 $\eta_Z \neq 0$使得

$$\phi_Z(x) = \alpha_Z^2 x + (\alpha_Z + \alpha_Z^2)\beta_Z x^2 + \eta_Z x^3 + \mathcal{O}(x^4), \quad x \in \Sigma_2^-,$$

是与 $Z$相关的首次回归映射。

更多详情见第2节，该节基于 [30], 给出了在原点具有一般余维一分岔的$\Omega \setminus \Omega_0$ 中分段向量场的分类，由集合 $\Xi_1 = (A_1) \cup (B_1) \cup (C_1)$给出。因此，我们可以陈述以下结果。

**定理 1.3.** 如果 $Z$ 在原点具有一般余维一分岔，即$Z \in \Xi_1$，那么存在实数 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\eta_0 > 0$ ，使得其非线性双重正则化$Z^R_{\varepsilon,\eta}(5)$ 在原点附近，对于$(\varepsilon, \eta) \in (0, \varepsilon_0) \times (0, \eta_0)$ 以及任意充分小的 $\xi$，都是结构稳定的，前提是满足以下条件之一：

(i) $Z$ 满足$(A_1)$ 或$(C_1)$；(ii) $Z$满足$(B_1)$，且过渡函数满足 $\varphi\psi(0) \notin [-1, 1]$。

在这种情况下，余维一性质无法保持。

因此，正如前文所述，定理 1.3 的证明将表明，对于在原点处表现出一般余维一分岔的某个向量场子类而言，关于过渡函数的假设十分重要。然而，当考虑满足 $\varphi\psi(0) \in (-1, 1)$ 的过渡函数时，例如 Sotomayor-Teixeira 过渡函数，对于相应的子类，非线性双重正则化中可能存在平衡点。与之前一样，如果平衡点是双曲的，则根据 Hartman-Grobman定理，该结果仍然成立。然而，如果存在非双曲平衡点，则该定理不成立。例如，对于 $\alpha$ 充分小的情形，我们得到以下结果。

**Theo注 1.4.** 设 $Z = (X, Y) \in \Omega$ 满足条件$(B_1)$，并考虑该族 $s$

$$\widetilde{Z}_\alpha = (\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{Y}) \quad and \quad \widehat{Z}_\beta = (\widehat{X}_\beta, \widehat{Y})$$

在Ω中，定义为

$$\widetilde{X}_{\alpha}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} a-b\,c_2\,x_1 \\ b+a\,\alpha \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{Y}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} -a \\ -b+a\,c_1\,x_2 \end{pmatrix}, \tag{7a}$$

$$\widehat{X}_{\beta}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} a-b\,c_1\,x_1-b\,c_2\,x_2 \\ b+a\,\beta \end{pmatrix}, \qquad \widehat{Y}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} -a \\ -b+y^2 \end{pmatrix}. \tag{7b}$$

其中 $a=\operatorname{sgn}(X_1(0))$， $b=\operatorname{sgn}(X_2(0))$，以及 $c_i=\operatorname{sgn}\big((\det[Z])_{x_j}(0)\big)$，且 $i$、 $j\in\{1、\ 2\}$和 $i\neq j$。若取 $\xi=0$ ，并考虑(5) 中满足 $\varphi(0)=0$的*Sotomayor–Teixeira*过渡函数，则：

(i) 存在参数值 $\alpha_0=\alpha_0(\varepsilon,\eta)$ ，使得族(7a) 在$(0,-\alpha/c_1)$处发生跨临界分岔，对于$(\varepsilon,\eta)$*2* $(0,\varepsilon_0)\times(0,\eta_0)$。在此情形下，余维得以保持，而一般性条件则不然。(ii) 若 $\psi(0)=0$，则族(7b) 在(0,0,0)处发生鞍结分岔，对于$(\varepsilon,\eta)$*2* $(0,\varepsilon_0)\times(0,\eta_0)$。在此情形下，余维与一般性条件均得以保持。

定理 1.3表明，余维并未保持不变，而定理 1.4则证明了还可能存在这样的情形：余维得以保持，但一般性却丧失了。

在第5节中，我们给出了一个例子（见图14）：在光滑化过程中可能出现一条平衡曲线，但它并不会对所有光滑化参数值都持续存在。此外，与前一个例子一样，在对 $Z\in\Omega$ 进行双重非线性正则化时，也可能存在这样的情形：取一个固定的正则化参数，该参数足够小且依赖于分岔参数。也就是说，尽管系统（5）充分接近 $Z$，但关于正则化参数的逐点收敛并未发生。为了对族（15）确立这一事实，考虑（5）中的Sotomayor–Teixeira过渡函数，使得 $\varphi(0)\neq0$。于是，存在满足 $\psi(p_0)=0$ 的 $p_0\in(-\eta,\eta)$。因此，取 $\xi=0$，我们将在第5节末尾证明，存在一个参数值 $\alpha_0=-\eta\,c_1\,p_0$，使得族（15）在 $(0,-\alpha_0/c_1)$ 处对固定的 $\eta=\eta_0$ 和$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 发生鞍结分岔。在这种情况下，余维和一般性均得以保持。

第4节详细分析了平衡点可能满足的某些双曲性条件。本文的目的并非全面研究所有可能的平衡点；相反，正如前文所述，我们主要关注正则化过程之后余维是否保持不变。因此，我们给出了这方面的结果。由于平滑向量场的导数表达式相当复杂，我们将分析限制在一阶导数上；这些导数对于构造本文中的示例以及指导未来研究都至关重要。

本文结构安排如下。第2节介绍Filippov条件，并回顾与所研究对象相关的已有结果。第3节给出主要结果的证明。第4节对原点处平衡点的双曲性进行分析，最后，第5节展示一些说明性示例。

## 2. Filippov系统、局部结构稳定性与余维一分岔

Filippov 并不关注向量场在各个孤立点处的取值，而是考察向量场在每个点邻域内的行为，并为其赋予一个

集值映射 [22] 和微分包含 [57]。这种方法称为 Filippov约定；当分段光滑向量场 (2) 的解满足 Filippov约定时，我们称其为 Filippov系统。因此，在有关 Filippov 系统的文献中，可以找到对轨道 [9, 22, 23]的几种不同定义。由于轨线到达切换曲线时，Filippov 系统的解存在选择上的歧义，不同作者会根据各自的具体研究目的采用相应的轨道概念。

因此，本节首先给出原点邻域内分段光滑向量场 (2) 的局部流定义。这些定义基于 [30], 的工作，而该工作建立在[22, 23]引入的轨线概念之上。接下来，我们在族 Ω 的背景下介绍 Σ-结构稳定性和余维一分岔的概念。随后，我们介绍 Larrosa、Teixeira 和 M-Seara 在 [30], 中得到的分类，该分类与我们的目标直接相关。最后，我们简要讨论光滑向量场的结构稳定性和余维一分岔。这一讨论将有助于后续分析分段光滑向量场 (2) 的正则化。

在 $\mathcal{U} \setminus \Sigma$中，连续微分方程定义了解，因此主要问题是解在 Σ邻域内的行为。由于 Σ 可视为两个正则流形的并集， $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, 我们可以将 $\Sigma_1 = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_1^-$, 分解为，其中

$$\Sigma_1^+ = \{p = (0, x_2) \in \Sigma_1 : x_2 > 0\} \quad \text{and} \quad \Sigma_1^- = \{p = (0, x_2) \in \Sigma_1 : x_2 < 0\},$$

它们本身是正则流形。类似地，我们可以写出 $\Sigma_2 = \Sigma_2^+ \cup \Sigma_2^-$. 在此情形下，Filippov 约定 [22] 消除了在切换集上定义解时的歧义。因此，对于 $i = 1$，2，可以在$\Sigma_i^{\pm}$ 上识别出穿越区域、滑动区域和逃逸区域。

（CR）穿越区域:

$$\Sigma_i^c = \{p \in \Sigma_i^{\pm} : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\} = \{p \in \Sigma_i^{\pm} : X_i \cdot Y_i(p) > 0\},$$

（SR）滑动区域:

$$\begin{aligned}\Sigma_i^d &= \{p \in \Sigma^{\pm} : Xf(p) < 0,\ Yf(p) > 0\} = \\ &= \{p \in \Sigma_i^+ : X_i(p) < 0,\ Y_i(p) > 0\} \cup \{p \in \Sigma_i^- : X_i(p) > 0,\ Y_i(p) < 0\},\end{aligned}$$

（ER）逃逸区域:

$$\begin{aligned}\Sigma_i^e &= \{p \in \Sigma^{\pm} : Xf(p) > 0,\ Yf(p) < 0\} = \\ &= \{p \in \Sigma_i^+ : X_i(p) > 0,\ Y_i(p) < 0\} \cup \{p \in \Sigma_i^- : X_i(p) < 0,\ Y_i(p) > 0\},\end{aligned}$$

其中， $Xf(p) = \langle \nabla f(p)\ X(p) \rangle$。因此，每个 $\Sigma_i$都可以分解为穿越区域（CR）、滑动区域（SR）和逃逸区域（ER）的闭包。 Σ 中的穿越区域、滑动区域和逃逸区域分别由 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$中相应区域的并集给出。在区域 $\Sigma^{s,\ _i}{}^{e}$ 中，对于 $i = 1$，2，存在一种良好定义的过程，用于描述系统沿切换曲线的行为。在这种情况下，选取两个向量场的凸组合，使其与切换流形相切。相应的Filippov滑动向量场 $Z^{\Sigma_i}$ 定义为:

$$Z_i^s(p) = (1 - \alpha(p))X(p) + \alpha(p)Y(p) = \frac{1}{Y_i(p) - X_i(p)} \left[Y_i\, X_j(p) - X_i\, Y_j(p)\right]_{|\Sigma_i}, \qquad (8)$$

其中 $\alpha(p) = \left[\frac{Xf}{X - Y}\right](p)$，且 $i$，$j = 1$，2 和 $i \neq j$。此外，点 $p \in \Sigma^{s,\ _i}{}^{e}$ 称为伪平衡点，若 $Z_i^s(p) = 0$；若 $DZ_i^s(p) \neq 0$，则称其为双曲 。

若 $Xf(p) = 0$或 $Yf(p) = 0$，则称点 $p \in \Sigma \setminus \{0\}$为切触点。容易看出，切触点出现在穿越区域、滑动区域和

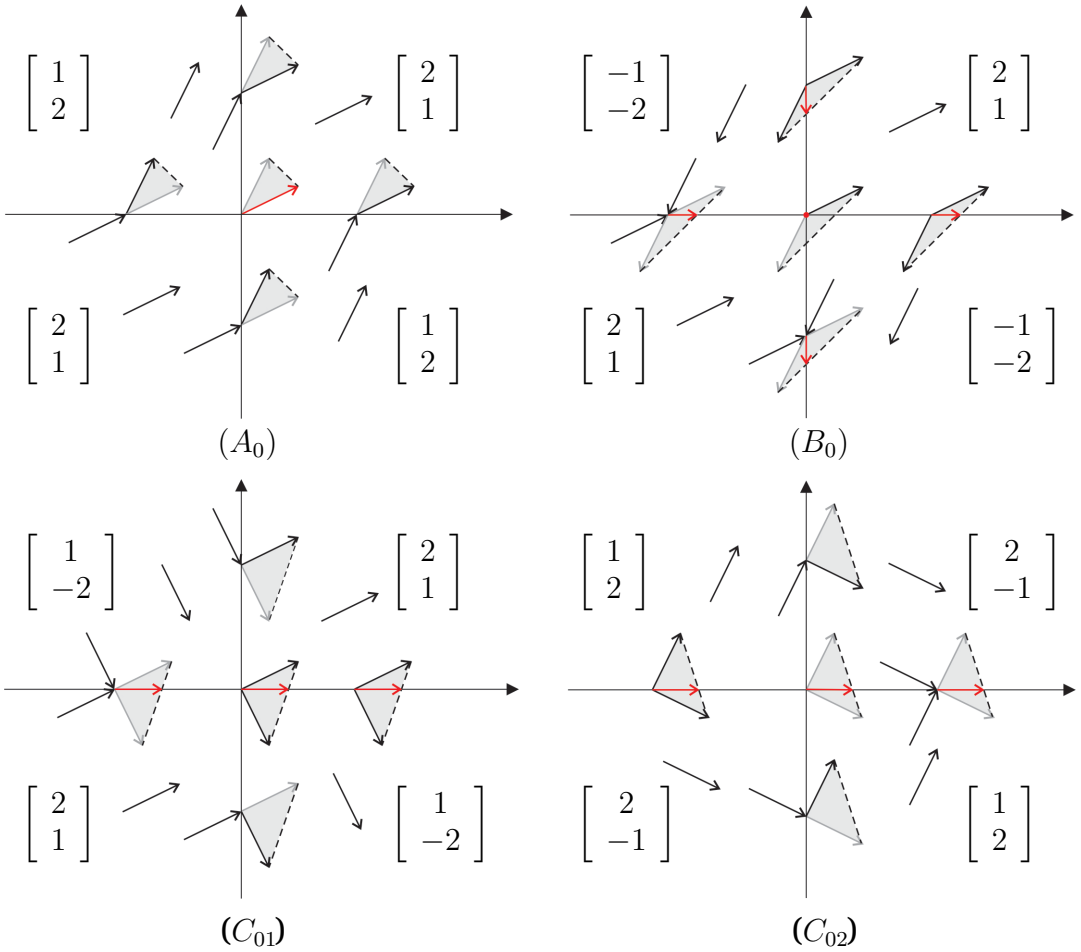



图4. 原点处Filippov约定和轨道的示例。

逃逸区域的边界处。此外，若切触为二次切触，则称该切触点为折叠点；也就是说，当其中任一

$$Xf(p)=0 \quad \text{and} \quad X(Xf)(p)=\langle \nabla(Xf)(p), X(p)\rangle \neq 0,$$

or

$$Yf(p)=0 \quad \text{and} \quad Y(Yf)(p)=\langle \nabla(Yf)(p), Y(p)\rangle \neq 0.$$

由于我们关注的是低余维奇点，因此只需考虑折叠点。为了将折叠点的概念扩展到原点，我们将 $\Sigma$ 视为两个正则流形的并集，并分别分析它们上的切触点。

**定义2.1**。 点 $p\in\Sigma_i$ 称为 $X$ (分别为 $Y$) 在 $\Sigma_i$中的一个折叠点 *if*

$$X_i(p)=0 \quad (resp.\ Y_i(p)=0) \quad and \quad X_j\,(X_i)_{x_j}(p)\neq 0 \quad (resp.\ Y_j\,(Y_i)_{x_j}(p)\neq 0),$$

对于 $i,j=1,2$ 且 $i\neq j$。此外，若点 $p\in\Sigma$ 是 $X$（分别为 $Y$）在 $\Sigma_i$ 中的一个折叠点，且向量场 $Y$（分别为 $X$）在原点处横截于 $\Sigma$，则称其为 $X$（分别为 $Y$）在 $\Sigma_i$ 中的一个正则折叠；也就是说，$Y_k(0)\neq 0$（（分别为 $X_k(0)\neq 0$））， $k=1,2$。

令 $\varphi_X(t;p)$（分别为 $\varphi_Y(t;p)$）表示向量场 $X$（分别为 $Y$）的流。考虑一点 $p\in\mathcal{U}^{\pm}$。若曲线

$$\{\varphi_X(t;p):t\in\mathbb{R}\} \quad \text{or} \quad \{\varphi_Y(t;p):t\in\mathbb{R}\}$$

与 $\Sigma^s$, $^e$横截，我们假设 $X$ 和 $Y$ 经过 $p$ 的轨线不会在有限时间内到达 $\Sigma^s\cup\Sigma^e$。接下来，按照 [23], 定义这些轨线

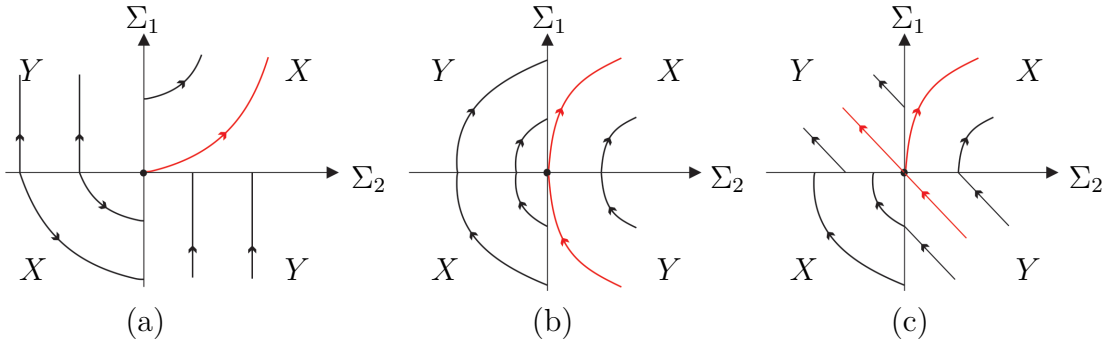



图5。在情况 (a) 和 (b) 中，原点是 $X$ 和 $Y$ 的折叠点。在情况 (c) 中，原点是 $X$的正则折叠点。

分段光滑向量场 $Z$ 经过 $\mathcal{U} \setminus \{0\}$中各点的轨线。用 $\partial$ 表示一个集合的边界，并考虑 $i = 1, 2$，我们得到：

(i) 若 $p \in \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-,$，其轨迹分别由 $X$或 $Y$的轨迹给出；(ii) 若 $p \in \Sigma^c = \Sigma_1^c \cup \Sigma_2^c,$，其轨迹由 $\mathcal{U}^+$ 和 $\mathcal{U}^-$中相应轨迹的拼接给出；(iii) 若 $p \in \Sigma_i^s \cup \Sigma_i^e,$，其轨迹由 $\varphi_{Z_i^s}(t;\, p)$ 给出，其中 $Z_i^s$在 (8) 中定义；(iv) 若 $p \in \partial\Sigma_i^e \cup \partial\Sigma_i^s \cup \partial\Sigma_i^c$ 且满足

$$\lim_{q \to p^+} \varphi_Z(t; q) = \lim_{q \to p^-} \varphi_Z(t; q),$$

则其轨迹定义为

$$\varphi_Z(t; p) = \lim_{q \to p} \varphi_Z(t; q).$$

这类点称为正则相切点；

(v) 若 $p \in \partial\Sigma_i^e \cup \partial\Sigma_i^s \cup \partial\Sigma_i^c$ 且不满足第 (iv) 项中的条件，则 $\varphi_Z(t;\, p) = \{p\}$. 这类点称为奇异相切点。

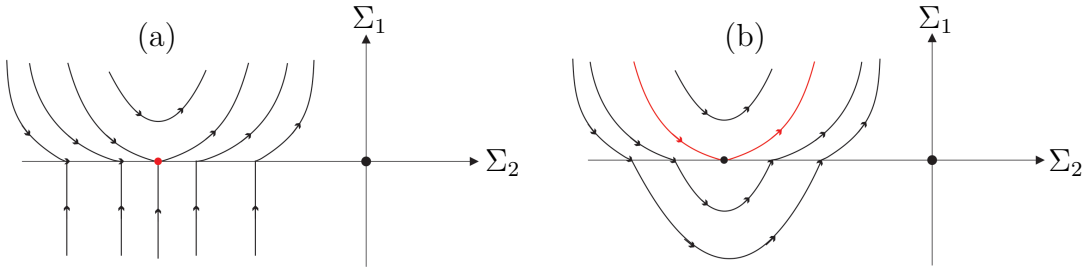



图6。（a）表现出正则相切的轨迹；（b）表现出奇异相切的轨迹。

另一方面，当向量场在原点处横截时，对于 $i,\ j = 1, 2$，轨迹 $\varphi_Z(t,\ 0)$ 定义如下，沿着 [30], :

($i_0$) 若 $\{0\} \in \Sigma = \overline{\Sigma^c} = \overline{\Sigma_1^c \cap \Sigma_2^c}$，则存在一条唯一的 $X$ 或 $Y$轨迹经过原点。在这种情况下，$\varphi_Z(t; 0)$ 定义为这条轨迹；见图4（$A_0$）。

($ii_0$) 如果 $\{0\} \in \overline{\Sigma_i^e \cup \Sigma_i^s} \cap \Sigma_j^c$且 $i \neq j$，则 $\varphi_Z(t; 0) = \varphi_{Z_i^s}(t; 0)$，其中 $Z_i^s$定义见式（8）；参见图4（$C_{0i}$）。在这种情况下，原点是式（8）中定义的Filippov滑动向量场的正则点。（~~$iii_0$) 如果~~ $\{0\} \in \bigcap_{i=1}^2 \Sigma_i^e \cup \Sigma_i^s,$则 $\varphi_Z(t; 0) = \{0\}$；参见图4（$B_0$）。

A 正则轨道 是一条轨道

$$\gamma = \{\varphi_Z(t,p) : t \in \mathbb{R}\}$$

完全包含在区域 $\mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^- \cup \Sigma^c$ 中。伪周期 （也称为闭合轮廓）定义为有限个正则轨道 $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ 的闭包，其中每条轨道 $\gamma_i$ 的端点（到达点和离开点）都与 $\gamma_{i+1}$ 的端点重合，包括 $\gamma_n$ 与 $\gamma_1$之间的连接。这些连接构成一条与 $\mathbb{S}^1$同胚的曲线，并且至少有一个点对应于两个离开点或两个到达点。

伪周期并非真正的闭轨道；然而，在 Larrosa、M-Seara 和 Teixeira 于 [30] 中所考虑的等价关系下，伪周期保持不变。此外，伪周期是余维一分岔展开中唯一包含原点的递归行为类型。关于周期行为的其他概念，如正则周期轨道 和周期环，请参见 [23, 30]。请注意，任何类型的周期轨道要存在，都需要在不同象限或区域之间发生转移。因此，有必要对这类转移作出精确定义。

**定义 2.2**。我们称 $Z \in \Omega$ 在 $\mathcal{U}^{\pm}$ 中是暂态的，如果对于任意 $p \in \mathcal{U}^{\pm}$，都存在时刻 $t_i(p) \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$，使得

$$\varphi_Z(t_i(p);p) \in \Sigma_i,$$

*and*

$$\varphi_Z(t;p) \in \mathcal{U}^{\pm} \quad \textit{for all} \quad t \in \big[\min\{t_1(p),t_2(p)\}, \max\{t_1(p),t_2(p)\}\big].$$

此外，如果 $Z$ 在 $\mathcal{U}^+$ 和 $\mathcal{U}^-$中均为暂态的，则称 $Z$ 是暂态的。

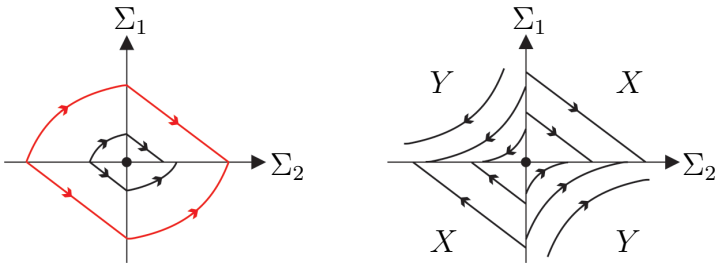



图 7。（a）伪周期示意图；（b）暂态向量场示意图。

为了分析某类周期轨道的稳定性，我们需要定义一种庞加莱映射，称为首次回归映射。设 $Z \in \Omega$ 为暂态的。那么，对每个$p \in \Sigma_1$，都存在唯一的 $t_X(p) \in \mathbb{R}$，使得

$$\varphi_X(p;t) \in \overline{\mathcal{U}^+} \quad \text{for all} \quad t \in [\min\{0,t_X(p)\}, \max\{0,t_X(p)\}],$$

且满足 $\varphi_X(t_X(p)\ p) \in \Sigma_2$。于是我们定义

$$\phi_X : p \in \Sigma_1 \mapsto \phi_X(p) = \varphi_X(p;t_X(p)) \in \Sigma_2,$$

该映射是一个微分同胚，因为它由 $X$ 的流给出，而函数 $t: p \in \Sigma_1 \mapsto t_X(p) \in \mathbb{R}$ 根据隐函数定理是可微的。类似地，我们定义

$$\phi_Y : p \in \Sigma_2 \mapsto \phi_Y(p) = \varphi_Y(p;t_Y(p)) \in \Sigma_1.$$

最后， $Z$ 的首次回归映射 定义为

$$\begin{aligned} \phi_Z : \Sigma_2^- &\to \Sigma_2^-, \\ p &\mapsto \phi_Z(p) = \phi_X \circ \phi_Y \circ \phi_X \circ \phi_Y(p), \end{aligned} \tag{9}$$

这显然是一个一维微分同胚。选择 $X$ 和 $Y$ 的流方向，以确保复合映射定义良好。在方程（9）中，$\phi_Z$的定义域选为 $\Sigma_2^-$；然而，任何满足 $i=1$，2的 $\Sigma_i^\pm$ 都可用于定义相应的首次回归映射。

在这种情况下，首次回归映射 可能没有直接的动力学解释；也就是说，经过点 $p\in\Sigma_i^\pm$，$i=1$，2 的轨线可能不会再次与截面 $\Sigma_i^\pm$ 相交，无论是在过去还是将来（见图7(b)）。即使在这种情况下，$\phi_Z$ 对于检测伪周期的存在性仍然很重要。最后，在 [30], 中，作者证明，若 $Z\in\Omega$ 满足

$$X_i\,Y_i(0)>0,\quad X_j\,Y_j(0)<0,\quad \text{and}\quad X_1\,X_2(0)<0,\quad \text{for } i,j=1,2,\ i\neq j,$$

则 $Z$ 是暂态的。此外，他们证明，与 $Z$相关联的首次回归映射 可表示为

$$\phi_Z(x)=\alpha_Z^2x+(\alpha_Z+\alpha_Z^2)\beta_Z x^2+\eta_Z x^3+\mathcal{O}(x^4),\ x\in\Sigma_2^- \tag{10}$$

其中 $\alpha_Z=(X_1\,Y_2/X_2\,Y_1)(0)<0$。其他常数未予说明，因为它们与我们的讨论无关。更多详情请参见 [30]中的第4.2节。

就我们的目的而言，有必要对这些向量场的结构稳定性和余维一分岔进行分类。首先，我们在族 Ω 的背景下给出 Σ-结构稳定性和余维一分岔的定义。然后，我们介绍 Larrosa、Teixeira 和 M-Seara 在 [30] 中所做的这方面的分类。

**定义 2.3.** 设 $Z$，$Z\in\Omega$ 定义在 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}$中，它们是原点的有界邻域，分别具有切换曲线 $\Sigma$ 和 $\Sigma$。如果存在原点的邻域 $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$，以及一个保向同胚 $h:\mathcal{U}_0\to\mathcal{U}_0$，将 $Z$ 的轨线映射到 $Z$ 的轨线，并将 $\Sigma$ 映射到 $\Sigma$，则称 $Z$ 和 $Z$ 是局部 Σ-等价的。如果存在一个邻域 $\mathcal{V}_Z\subset\Omega$，使得对任意 $Z\in\mathcal{V}_Z$，$Z$ 都与 $Z$局部 Σ-等价，则称 $Z\in\Omega$ 在原点处是局部 Σ-结构稳定的。

值得注意的是，前述定义是良定的，因为众所周知，在原点的有界邻域上定义的、带有 $\mathcal{C}^r$-拓扑的 $\mathcal{C}^r$ 向量场 $r\geq 1$的芽的集合 $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^r(\mathcal{U})$，$\mathcal{U}$ 紧，是一个巴拿赫空间。因此，$\Omega=\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ 也是一个巴拿赫空间。

我们用$\Omega_0$ 表示Ω中所有局部 Σ结构稳定的分段系统所构成的集合。当 $Z$ 在原点处不是局部 Σ结构稳定时，就称 $Z$ 属于分岔集$\Omega_1=\Omega\setminus\Omega_0$.

**定义 2.4.** 设 $Z\in\Omega$。$Z$ 的单参数展开是一个光滑映射

$$\gamma:\delta\in(-\delta_0,\delta_0)\mapsto Z_\delta\in\Omega,$$

其中 $\delta_0\ll 1$，且 $\gamma(0)=Z_0=Z$。展开 $Z$ 通常记作 $Z_\delta$。

**定义 2.5.** 设 $Z$、$Z\in\Omega$。$Z$ 的两个单参数展开 $Z_\delta$ 和 $Z$的展开 $Z_{\hat{\delta}}$，若存在一个同胚参数变换$\mu(\delta)$，使得对每个 $\delta$，向量场 $Z_\delta$ 和 $Z_{\mu(\delta)}$ 局部 Σ等价，则称它们局部弱等价。此外，若 $Z$ 的单参数展开 $Z_\delta$ 与 $Z$ 的任意其他展开 $Z_\alpha$ 局部弱等价于 $Z_\delta$，则称 $Z_\delta$ 为万能单参数展开。

分岔是指动力系统的参数变化时，其相图拓扑发生改变。因此，分岔可以根据参数变化时结构稳定性的丧失来定义。分岔的展开（或万能展开）

是一个简化系统，能够捕捉 $\delta$ 取足够小值时，在小扰动下出现的所有可能的结构稳定相图。分岔的余维定义为展开该分岔所需的参数空间维数。

**定义 2.6.** 如果分段光滑向量场 $Z \in \Omega_1$ 在诱导拓扑下具有相对的 $\Sigma$-结构稳定性，则称其在原点具有余维一奇点。也就是说，存在一个开集 $\mathcal{V}_Z \subset \Omega$，满足 $Z \in \mathcal{V}_Z$，使得对于任意 $Z \in \mathcal{V}_Z \cap \Omega_1$，$Z$ 与 $Z$ 局部 $\Sigma$-等价，并且 $Z$ 和 $Z$ 的任意单参数展开都局部弱等价。我们用 $\Xi_1$ 表示 $\Omega$ 中所有余维一分岔组成的集合。

根据上述定义，Larrosa、M-Seara 和 Teixeira [30] 对 $\Omega$ 和 $\Omega_1$ 中结构稳定的分段光滑系统集合进行了分类，结果总结如下。

**定理 2.1** ([30])。($\Sigma$-结构稳定性，$\Omega$) 用 $\Omega_0 \subset \Omega$ 表示在原点附近局部 $\Sigma$-结构稳定的所有向量场的集合。设 $Z \in \Omega$；则 $Z \in \Omega_0$ 当且仅当 $Z$ 满足以下条件之一：

($A_0$) $X_iY_i(0) > 0$，对于 $i = 1,2$；($B_0$) $X_iY_i(0) < 0$，对于 $i = 1,2$，且 $\det Z(0) = (X_1Y_2 - X_2Y_1)(0) \neq 0$；($C_0$) $X_iY_i(0) > 0$ 且 $X_jY_j(0) < 0$，对于 $i, j = 1, 2$, $i \neq j$。此外，如果 $Z$ 是暂态的，也就是说，如果 $X_1X_2(0) < 0$，那么 $\alpha_Z^2 = (X_1Y_2/X_2Y_1)^2(0) \neq 1$.

此外，子集 $\Omega_0$ 在 $\Omega$ 中是开且稠密的。因此，$\Omega$ 中的局部 $\Sigma$-结构稳定性是一个泛性质。

**定理 2.2** ([30]). ($\Sigma$-结构稳定性在 $\Omega_1$) 设 $Z \in \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$。那么 $Z \in \Xi_1$，也就是说，$Z$ 在 *oring* 处有一个余维一奇点（见定义 *2.5*），当且仅当 $Z$ 满足以下条件之一：

($A_1$)（正则–折叠分岔）原点是 $Z$ 的正则折叠；参见定义*2.1*。($B_1$)（双重伪平衡分岔）$X_iY_i(0) < 0$，$\det Z(0) = 0$，且$(\det Z)_{x_i}(0) \neq 0$，其中 $i = 1, 2$。($C_1$)（伪霍普夫分岔）$X_iY_i(0) > 0$ 且 $X_jY_j(0) < 0$，其中 $i, j = 1, 2$，$i \neq j$，并且 $X_1X_2(0) < 0$。在这种情况下，$Z$ 是暂态的，首次回归映射（*10*）的系数 $\alpha_Z$ 满足 $\alpha_Z = -1$。此外，其余系数满足 $\beta_Z \neq 0$ 和 $\eta_Z \neq 0$。

此外，子集 $\Xi_1$ 在$\Omega_1$中是开且稠密的。因此，局部 $\Sigma$结构稳定性是$\Omega_1$中的一个泛性质。

作者指出族 $\Omega$ 中系统的一个有趣特征：余维一奇点的开折不会在该奇点的邻域内产生周期轨道，这与具有正则切换流形的 Filippov 系统中余维一奇点的开折所出现的情形形成对比。对于每种情形 $Z \in \Omega_0$, ，作者构造了 $Z$ 与相应的 标准形 之间的 $\Sigma$-等价，以刻画其局部动力学。此外，对于每种余维一情形，他们证明：对任意 $Z \in \Xi_1$，$Z$ 的每一个万能展开都与一个单参数族局部弱等价。特别地，在此设定下也可以定义相应的 标准形 。

在介绍了 $\Omega$ 和 $\Omega_1$，中结构稳定的分段光滑系统的分类（本研究将始终用到该分类）之后，现给出若干结果和注记，它们将有助于分析对 $\Omega$ 中由方程 (2) 定义的向量场应用光滑化过程后所得到的光滑向量场的结构稳定性和余维一分岔。

如果两个光滑微分系统在某个邻域内存在一个同胚，将一个系统的轨线映射到另一个系统的轨线上，同时保持其方向，则称这两个系统局部拓扑轨道等价。从这个意义上说，一个系统的解可以连续变形成另一个系统的轨线。如果一个光滑微分系统与其定义方程的所有充分小扰动都局部拓扑轨道等价，则称该系统局部结构稳定。因此，为了确定原点邻域内无平衡点的光滑微分系统的局部结构稳定性，我们将依据经典的流盒定理（见 [59]）。

如前所述，在分岔点，微分系统不再是结构稳定的。局部分岔是指通过分析微分系统在平衡点或闭轨邻域内的行为即可检测到的分岔。在本研究中，分岔的余维定义为产生该分岔所需改变的参数个数。因此，下面给出平面上若干余维一局部分岔发生的条件，这些条件将在后续分析中用到。这些条件陈述于Sotomayor定理中（见 [53]）。在介绍该定理之前，我们假设映射 $g(u,\ \mu)$ 足够光滑，使陈述中出现的所有导数均连续。我们用 $Dg$ 表示 $g$ 关于变量$u$的雅可比矩阵，用 $g_\mu$ 表示 $g$ 关于参数 $\mu$的偏导数向量。

**定理 2.3** ([53])。 ***(Sotomayor*定理*)*** 考虑一个依赖于一维参数 $\mu$ 的二维微分系统，即我们考虑满足 $u\in\mathbb{R}^2, \mu\in\mathbb{R}$ 且 $g$ 是 $U\subset\mathbb{R}^{2+1}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射的 $\dot{u}=g(u,\mu)$ 。假设对于定义域中的某个 $(u_0,\mu_0)$，有 $g(u_0,\mu_0)=0$，且矩阵 $2\times2, A\equiv Dg(u_0,\mu_0)$ 有一个单特征值 $\lambda=0$，其对应的特征向量为 $v$； $A^T$ 有一个特征向量 $w$，对应于其特征值 $\lambda=0$。此外，假设 $A$ 还有另一个特征值，其实部为负或为正，并且满足以下条件。

$$w^T g_\mu(u_0,\mu_0)\neq 0 \ and\ w^T[D^2g(u_0,\mu_0)(v,v)]\neq 0, \tag{11}$$

那么，系统 $\dot{u}=g(u,\mu)$ 会在平衡点 $u_0$ 处发生鞍结分岔，当参数 $\mu$ 经过分岔值 $\mu=\mu_0$ 时。如果将 (11) 中的条件改为

$$w^T g_\mu(u_0,\mu_0)=0,\ w^T[Dg_\mu(u_0,\mu_0)v]\neq 0,\ e\ w^T[D^2g(u_0,\mu_0)(v,v)]\neq 0 \tag{12}$$

那么，随着参数 $\mu$ 经过分岔值 $\mu=\mu_0$ 发生变化，系统 $\dot{u}=g\ (u,\ \mu)$ 在平衡点 $u_0$ 处发生跨临界分岔。

我们强调，鞍结分岔是泛型的，因为对其定义方程施加小扰动不会改变其展开的定性行为。相比之下，跨临界分岔不是泛型的，因为对其方程施加任意小的扰动，都可能改变展开的定性结构，进而改变相关微分方程的动力学。对于二维微分系统，跨临界分岔和鞍结分岔的简单示例（分岔点为 $(x,\ y,\ \mu)=(0,\ 0,\ 0)$）分别如下：

$$\dot{x_1}=\mu\, x_1-x_1^2,\quad \dot{x_2}=-x_2 \qquad \text{and} \qquad \dot{x_1}=\mu-x_1^2,\quad \dot{x_2}=-x_2 \tag{13}$$

## 3. Proofs of Theorems 1.1, 1.2, 1.3 and 1.4.

***定理 1.1*** 的证明。 我们只讨论一个方向，因为反向可通过类似论证立即得到。假设 $Z^R_\varepsilon$, $\eta(p_0)=0$。首先，我们考虑

情形 $\xi = 0$；那么，在此假设下，

$$Z^R_{\varepsilon,\eta}(p_0) = \begin{pmatrix} X_1(p_0) & Y_1(p_0) \\ X_2(p_0) & Y_2(p_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varphi_\varepsilon(p_{01})\,\psi_\eta(p_{02}) \\ 1 - \varphi_\varepsilon(p_{01})\,\psi_\eta(p_{02}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

若对每个 $p_0 \in \mathcal{U}$，$\det[Z](p_0) \neq 0$，则存在 $p_0$ 的一个邻域，使得这一性质得以保持；因此，

$$1 + \varphi_\varepsilon(x_1)\,\psi_\eta(x_2) = 0 \text{ and } 1 - \varphi_\varepsilon(x_1)\,\psi_\eta(x_2) = 0.$$

这会导致矛盾，因为这意味着 $\mathcal{U}$中不存在平衡点，这与假设相矛盾。另一方面，若存在 $p_0 \in \mathcal{U}$ 使得 $\det[Z](p_0) = 0$，则式（14）中的 $2 \times 2$ 矩阵的各行成比例，因此只需考虑以下方程之一：

$$Z^{R_i}_{\varepsilon,\eta}(p_0) = H_i(p_0) = \varphi_\varepsilon(p_{10})\,\psi_\eta(p_{20})\,(X_i - Y_i)(p_{10}, p_{20}) + (X_i + Y_i)(p_{10}, p_{20}).$$

若对任意 $p_0$，$H_i(p_0) \neq 0$，则不存在平衡点。反之，若 $H_i(p_0) = 0$，则 $p_0$ 是一个平衡点。

现在我们分析 $\xi \neq 0$的情形。因此，对于充分小的 $\xi$，不存在平衡点的情形仍然成立。对于剩余情形，存在 $p_0 \in \mathcal{U}$ 使得 $\det[Z(p_0)] = 0$，且 $H_i(p_0) = 0$。在这种情况下，我们定义

$$F_i(x_1, x_2, \xi) = H_i(x_1, x_2) + \xi\, G_i\big(\varphi_\varepsilon(x_1), \psi_\eta(x_2)\big),$$

由此可得 $F_i(p_{01},\ p_{02},\ \xi) = \xi\, G_i\big(\varphi_\varepsilon(p_{01})\ \psi_\eta(p_{02})\big)$，这就证明了该结论。

□

定理 *1.2* 的证明。现在，我们针对定理 2.1 中的每种情形分析非线性双重正则化，并假设 $Z$ 是结构稳定的（$Z \in \Omega_0$）。我们的目标是证明，在每种情形下，非线性双重正则化在原点都没有平衡点。然后应用流盒定理即可完成证明。

在向量场 $Z$ 满足条件（$B_0$）的情形下，我们有 $\det Z(0) \neq 0$。此外，对于满足条件（$C_0$）的向量场 $Z$，若假设 $\det Z(0) = 0$，则

$$\operatorname{sgn}(X_1(0)\,Y_1(0)) = \operatorname{sgn}(X_1(0)/Y_1(0)) = \operatorname{sgn}(X_2(0)/Y_2(0)) = \operatorname{sgn}(X_2(0)\,Y_2(0)),$$

这会导致矛盾。因此，我们得出结论：无论该向量场是否为暂态的，均有 $\det Z(0) \neq 0$。

最后，设 $Z$ 是满足条件 $(A_0)$ 的向量场。若 $\det Z(0) = 0$，则对某个 $i = 1, 2$，考虑表达式 $H_i(0) = \varphi_\varepsilon(0)\ \psi_\eta(0)\,(X_i - Y_i)(0, 0) + (X_i + Y_i)(0, 0)$。若$\varphi_\varepsilon(0)\ \psi_\eta(0)\,(X_i - Y_i)(0, 0) = 0$，则 $H_i(0) = (X_i + Y_i)(0, 0) \neq 0$，因为 $X_i(0)\ Y_i(0) > 0$。另一方面，若 $\varphi_\varepsilon(0)\ \psi_\eta(0)\,(X_i - Y_i)(0, 0) \neq 0$，则 $H_i(0) = 0$ 当且仅当$\varphi\,\psi(0) = \varphi_\varepsilon(0)\ \psi_\eta(0) = -(X_i(0) + Y_i(0))/(X_i(0) - Y_i(0))$。在这些假设下，这将意味着 $X_i(0)\,(X_i - Y_i)^{-1}(0) > 0$ 且 $Y_i(0)\,(X_i - Y_i)^{-1}(0) < 0$，这与假设矛盾。因此，$H_i(0) \neq 0$。

因此，对于属于族 $\Omega_0$（即 $\Sigma$-结构稳定）的每种向量场情形，要么 $\det Z(0) \neq 0$，要么 $H_i(0) \neq 0$。因此，定理 1.1 保证所有情形下原点处均不存在平衡点。此外，存在一个足够小的原点邻域，其中不包含任何平衡点。由流盒定理可知，该邻域内的结构稳定性得以保证。实数 $\varepsilon_0$ 和 $\eta_0$ 的选取使得非线性双重正则化仍处于此邻域内。此外，对于任意参数 $\xi$，所有情形下该分岔均表现出零余维保持。

□

定理 *1.3* 的证明。证明思路与定理 1.2 的证明相同。情形 $(C_1)$ 与情形 $(C_0)$ 类似。对于正规–折叠分岔，情形 $(A_1)$ 根据假设，当 $i,\ j=1,\ 2$ 且 $i\neq j$ 时，

$$(A_1^a)\ X_i(0)=0,\ X_j(p)\,\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(p)\neq 0,\ \text{and}\ Y_i(0)\neq 0,\ \text{for}\ i=1,2,\ \text{or}$$
$$(A_1^b)\ Y_i(0)=0,\ Y_j(p)\,\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(p)\neq 0,\ \text{and}\ X_i(0)\neq 0,\ \text{for}\ i=1,2.$$

注意到

$$\det Z(0)=(X_1Y_2-X_2Y_1)(0)=\big((-1)^jX_iY_j-(-1)^jY_iX_j\big)(0),$$

我们考虑情形（$A_1^a$）。由此可得

$$\det Z(0)=-(-1)^jY_iX_j(0)\neq 0.$$

另一方面，若向量场满足（$A_1^b$），则

$$\det Z(0)=(-1)^jX_iY_j(0)\neq 0.$$

反过来，情形（$B_1$）与情形（$A_0$）类似。此处，（$X_2-Y_2$)(0) 恒不为零，由假设可得

$$X_i(0)\,(X_i-Y_i)^{-1}(0)<0\quad\text{or}\quad Y_i(0)\,(X_i-Y_i)^{-1}(0)>0,$$

这就导致矛盾。

因此，在这三种情况下，都不存在平衡点。

□

定理 *1.4* 的证明。 (i) 考虑将非线性双重正则化应用于式 (7a) 中给出的$\widetilde{\ }$族 $Z_\alpha$，

$$Z^R_{\varepsilon,\eta,\alpha}=\phi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{x_2}{\eta}\right)\left(\frac{\widetilde{X_\alpha}-\widetilde{Y}}{2}\right)+\left(\frac{\widetilde{X_\alpha}+\widetilde{Y}}{2}\right).\tag{15}$$

在假设 $\phi(0)=0$ 下，对于所有 $\alpha$，$(0,-\alpha/c_1)$ 都是系统 (15) 的奇异点。系统 (15) 在 $(0,-\alpha/c_1)$ 处的线性化为

$$\begin{pmatrix} a\,\phi'(0)\,\psi(-\alpha/(c_1\eta))/\varepsilon-b\,c_2/2 & 0\\ * & a\,c_1/2\end{pmatrix}.$$

我们选择 $\alpha_0$ 作为方程的解

$$\psi\left(-\frac{\alpha}{c_1\eta}\right)=\frac{b\,c_2\varepsilon}{2\,a\,\phi'(0)}.\tag{16}$$

注意，方程 (16) 仅在 $0<\varepsilon<2\phi'(0)$ 时有解。现在我们进行变量变换 $x_1=r$，$x_2=s-(\mu+\alpha_0)/c_1$ 和 $\alpha=\mu+\alpha_0$。系统 (15) 变为

$$Z^R_{\varepsilon,\eta,\mu}=\begin{pmatrix} A_1\,\mu & 0\\ A_2+A_3\,\mu-A_1\,\mu^2 & a\,c_1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\\ s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_4\,r^2+\cdots\\ \cdots\end{pmatrix},\tag{17}$$

其中

$$A_1=-a\,\phi'(0)\,\psi'(-\alpha_0/c_1\eta)/(c_1\varepsilon\eta),\quad A_2=b\,c_2\,(\alpha_0\,a+b)/(2\,a),$$
$$A_3=b\,c_2/2-\phi'(0)\,\psi'(-\alpha_0/c_1\eta)\,(\alpha_0 a+b)/(c_1\varepsilon\eta),\quad A_4=-a/4+b\,c_2\,\phi''(0)/(4\,\phi'(0)\,\varepsilon).$$

为了将 $Z^R_{\varepsilon,\eta,0}$ 在 $(r,s)=(0,0)$ 处的线性部分化为 Jordan标准形，我们应用线性坐标变换 $r=-a\,c_1\,x_1/2$ 和 $s=(c_2/(2\,a)+b\,c_2\,\alpha_0/2)\;x_1+x_2$。于是系统 (35) 变为

$$Z^R_{\varepsilon,\eta,\mu}=g(x_1,x_2,\mu)=\begin{pmatrix} A_5\,x_1\mu+A_6\,x_1^2+\cdots \\ a\,c_1\,x_2/2+\cdots \end{pmatrix}, \tag{18}$$

其中

$A_5=-a\,\phi'(0)\,\psi'(-\alpha_0/c_1\eta)/(c_1\,\varepsilon\,\eta)\phi''(0)/(4\,\phi'(0)\,\varepsilon),$

$A_6=c_1/8+c_2\,\phi'(0)\;\psi'(-\alpha_0/(c_1\,\eta))(1+a\,b\,\alpha_0)/(2\,\varepsilon\,\eta)\;-a\,b\,c_1\,c_2\,\phi''(0)/(8\,\phi'(0)\;\varepsilon)$

按照定理 2.3 的记号，方程 (18) 的线性部分中与特征值 0 对应的特征向量为 $v^T=w^T=(1,0)$。由此可得

$$\begin{aligned} &w^T g_\mu(0,0,0)=0,\\ &w^T Dg_\mu(0,0,0)(v)=A_5\neq 0,\\ &w^T[D^2g(0,0,0)(v,v)]=A_6\neq 0, \end{aligned} \tag{19}$$

当 $\varepsilon$ 和 $\eta$ 充分小时，即存在 $0<\varepsilon_0<2\,\phi'(0)$ 和 $\eta_0>0$，使得对于所有 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 和 $0<\eta<\eta_0$，条件 (19) 均成立。根据定理 2.3，我们得出结论：系统 (18) 在点 $(x_1,x_2,\mu)=(0,0,0)$ 处发生跨临界分岔。因此，系统 (15) 在点 $(x_1,x_2,\alpha)=(0,-\alpha_0/c_1,\alpha_0)$ 处发生跨临界分岔。

(ii) 现在考虑对式 (7b) 中给出的族 $Z_\beta$ 应用非线性双重正则化。在附加假设 $\psi(0)=0$ 下，证明与前一个证明类似。因此，在定理 2.3 的条件下，我们有

$$\begin{aligned} &w^T g_\mu(u_0,\mu_0)=\frac{a}{2}\neq 0,\\ &w^T\big[D^2g(u_0,\mu_0)(v,v)\big]=\frac{-2b\,c_2\,\varphi'(0)\,\psi'(0)}{c_1\,\varepsilon\,\eta}\neq 0. \end{aligned}$$

□

## 4. 原点处平衡点的若干性质

由于需要分析与分段光滑系统足够接近时的双重非线性正则化，因此我们关注在所有足够小的 $\eta$ 和 $\varepsilon$ 下都持续存在的平衡点。

从现在起，我们分析原点是非线性双重正则化 (5) 的平衡点的情形。因此，根据定理 1.1，必须有 $\det=0$，且 $H_2(0)=0$。此外，定理1.2和定理1.3的证明表明，只有当分段光滑向量场 $Z$ 属于子类 $(A_0)\subset\Omega_0$，或者属于子类 $(B_1)\subset\Xi_1\subset\Omega_1=\Omega\setminus\Omega_0$ 时，原点才可能成为非线性双重正则化的平衡点。因此，由 $\det[Z](0)=0$ 以及 $Z$ 必须满足的条件可知，

$$(X_1(0),Y_1(0))=f(0)\,(X_2(0),Y_2(0))\quad\text{with } f(0)\neq 0.$$

此外，若 $Z\in(A_0)$ 或 $Z\in(A_1)$，且原点是 $Z^R_{\varepsilon,\,\eta}$ 的平衡点，则必然有

$$\varphi_\varepsilon(0)\,\psi_\eta(0)\,(X_2-Y_2)(0,0)\neq 0\quad\text{or}\quad(X_2-Y_2)(0,0)\neq 0,$$

分别。此外，我们有

$$\varphi\,\psi(0)=\varphi_\varepsilon(0)\,\psi_\eta(0)=-\frac{X_2(0)+Y_2(0)}{X_2(0)-Y_2(0)}.$$

最后，回顾一下，对于 $Z=(X,Y)$，我们可以记

$$Z^T=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}.$$

这样，考虑到 $G(W,\ T)=G(\varphi_\varepsilon(x_1)\ \psi_\eta(x_2))$，记 $\nabla G_i$ 为关于变量 $(W,\ T)$ 的梯度，对每个 $i=1,\ 2$，并令 $v=(v_1,\ v_2)$ 为一个具有正交向量 $v^\perp=(-v_2,\ v_1)$ 的向量，我们计算 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 在原点处平衡点的雅可比矩阵的行列式和迹的表达式，得到

$$det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]=\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\frac{\varphi'\,\psi}{2\,\varepsilon}-\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_1}\,\frac{\varphi\,\psi'}{2\,\eta}+det_0+det_1\,\xi+det[DG]\,\frac{\varphi'\,\psi'}{\varepsilon\,\eta}\,\xi^2, \tag{20}$$

使得

$$det_0=\frac{Y_2^2\,det[DX]+Y_2\,X_2\,(det[DX]-det[D(X+Y)]+det[DY])+X_2^2\,det[DY]}{(X_2-Y_2)^2},$$

$$det_1=(X_2-Y_2)\,det_{11}\,\frac{\varphi'\,\psi'}{2\,\varepsilon\,\eta}+\frac{1}{(X_2-Y_2)}\,det_{12}\,\frac{\psi'}{\varepsilon}-\frac{1}{(X_2-Y_2)}\,det_{13}\,\frac{\varphi'}{\eta},$$

with

$$det_{12}=\left\langle\frac{\partial\, G}{\partial\, W}\,,\,\left((Y_2,-X_2)\ \ \frac{\partial\, Z^T}{\partial\, x_1}\right)^\perp\right\rangle,\qquad det_{13}=\left\langle\frac{\partial\, G}{\partial\, T}\,,\,\left((Y_2,-X_2)\ \ \frac{\partial\, Z^T}{\partial\, x_2}\right)^\perp\right\rangle,$$

$$det_{11}=\left\langle f\,\nabla\, G_2-\nabla\, G_1\,,\,(\psi,\varphi)^\perp\right\rangle,$$

and

$$tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]=f\,(X_2-Y_2)\,\frac{\varphi'\,\psi}{2\,\varepsilon}+(X_2-Y_2)\,\frac{\varphi\,\psi'}{2\,\eta}+tr_0+tr_1\,\xi, \tag{21}$$

with

$$tr_0=\frac{X_2\,tr[DY]-Y_2\,tr[DX]}{(X_2-Y_2)},\qquad tr_1=\frac{\partial\, G_1}{\partial\, W}\,\frac{\varphi'}{\varepsilon}+\frac{\partial\, G_2}{\partial\, T}\,\frac{\psi'}{\eta}.$$

当其雅可比矩阵的特征值的实部均非零时，原点是一个双曲平衡点。给定原点处的雅可比矩阵，考虑其行列式“$det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}](0)$”和迹“$tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}](0)$”，相应的特征多项式为

$$\lambda^2-tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}](0)\,\lambda+det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}](0). \tag{22}$$

因此，通过直接计算并结合表1–4，可得出以下结果。每个表中的 (a.e.p.) 表示几乎处处，也就是说，在三维参数空间$(\varepsilon,\ \eta,\ \xi)$中存在一个超曲面，使得相应条件不成立。

**命题4.1.** 考虑 $Z\in(A_0)\ \subset\Omega_0$，满足 $det[Z](0)\ =0$ 且$(X_2-Y_2)(0)\ \neq 0$；或者 $Z\in(B_1)\ \subset\Xi_1\subset\Omega_1=\Omega\ \setminus\Omega_0$。若 $\varphi\,\psi(0)\ \notin[-1,1]$，或者相应地，$\varphi\,\psi(0)\,2\,(-1,1)$，则式*(5)*中的非线性双重正则化$Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 具有以下性质：

(i) 当下列陈述成立时，原点是双曲平衡点：$(i_1)$ 若 $DZ^R_{\varepsilon,\ \eta}(0)$ 具有实特征值，且满足$(2_d)$ 或$(3_d)$ 在表*1*中，或$(1.2_d)$或$(1.3_d)$ 在表*3*中 ***(a.e.p.)***；$(i_2)$ 若 $DZ^R_{\varepsilon,\ \eta}(0)$ 具有复特征值，且满足$(2_t)$ 或$(3_t)$ 在表 *2*中，或$(1.2_t)$ 或$(1.3_t)$ 在表 *4*中 ***(a.e.p.)***。

(ii) 在以下条件下，原点是一个非双曲平衡点：$(ii_1)$ 若 $DZ^R_{\varepsilon,\eta}(0)$ 具有实特征值，且满足表*1*中的 $(1_d)$，其中 $\xi=0$；或满足表*3*中的 $(1.1_d)$，其中 $det[DG](0)\,\varphi'\,\psi'=0$；

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_1}\,\varphi\,\psi' = 0$ | $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\varphi'\,\psi = 0$ | $det_0 = 0$ | $det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}] = \mathcal{O}(\xi)$ | $(1_d)$ |
| | | $det_0 \neq 0$ | $det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}] \neq 0$ | $(2_d)$ |
| | $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\varphi'\,\psi \neq 0$ | | | |
| $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_1}\,\varphi\,\psi' \neq 0$ | $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\varphi'\,\psi = 0$ | | | |
| | $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\varphi'\,\psi \neq 0$ | $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_1}\,\varphi\,\psi'\,\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\varphi'\,\psi < 0$ | | |
| | | $\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_1}\,\varphi\,\psi'\,\frac{\partial\, det[Z]}{\partial\, x_2}\,\varphi'\,\psi > 0$ | $det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}] \neq 0$ (a.e.p) | $(3_d)$ |

表1. 行列式为零或非零的情形。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi\,\psi' = 0$ | $\varphi'\,\psi = 0$ | $X_2\,tr[DY] - Y_2\,tr[DX] = 0$ | $tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}] = \mathcal{O}(\xi)$ | $(1_t)$ |
| | | $X_2\,tr[DY] - Y_2\,tr[DX] \neq 0$ | $tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}] \neq 0$ | $(2_t)$ |
| | $\varphi'\,\psi \neq 0$ | | | |
| $\varphi\,\psi' \neq 0$ | $\varphi'\,\psi = 0$ | | | |
| | $\varphi'\,\psi \neq 0$ | $\varphi\,\psi'\,\varphi'\,\psi < 0$ | | |
| | | $\varphi\,\psi'\,\varphi'\,\psi > 0$ | $tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}] \neq 0$ (几乎处处成立) | $(3_t)$ |

表 2. 迹为零或不为零的情形。

$(ii_2)$ 若 $DZ^R_{\varepsilon,\eta}(0)$ 具有复特征值，且满足表*2*中的 $(1_t)$ ，其中 $\xi = 0$；或满足表*4*中的 $(1.1_t)$ 。

**注 4.1.**注意，在命题*4.1*中表 *3* 和表 *4* 的情形下，参数 $\xi$ 必须为零。此外，在*(a.e.p.)*的情形下，总可以选择 $\xi$ ，使得相应的表达式不为零。

## 5. 正则化的例子

我们从若干注记开始。利用定理 2.1，我们确定了四类在Ω上 Σ-结构稳定的系统。因此，为了证明定理 1.2，我们需要逐一分析这些类。

对过渡函数没有任何限制，只要它们满足定义条件即可；也就是说，它们至少必须连续，并满足条件 (4)。因此，下一步是将非线性双重正则化 (5) 应用于图4中的向量场，并始终突出显示经过原点的轨迹。我们将使用不同类型的过渡函数来说明定理 1.2，并了解这一光滑化过程如何发生。首先，考虑 Sotomayor–Teixeira 的两个过渡函数，将非线性双重正则化应用于图4中的情形 (A)。更

<table>
<tr><td rowspan="2">$det_{12}\,\psi'=0$</td><td rowspan="2">$det_{13}\,\varphi'=0$</td><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'=0$</td><td>$det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]=\mathcal{O}(\xi^2)$</td><td>$(1.1_d)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\neq 0$</td><td rowspan="6">$det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]\neq 0$</td><td rowspan="6">$(1.2_d)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$det_{13}\,\varphi'\neq 0$</td><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\,det_{13}\,\varphi'<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$det_{12}\,\psi'\neq 0$</td><td rowspan="2">$det_{13}\,\varphi'=0$</td><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\,det_{12}\,\psi'>0$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">$det_{12}\,\psi'\,det_{13}\,\varphi'<0$</td><td colspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\neq 0$</td><td>$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\,det_{12}\,\psi'>0$</td><td rowspan="4">$det[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]\neq 0$ (a.e.p)</td><td rowspan="4">$(1.3_d)$</td></tr>
<tr><td>$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\,det_{12}\,\psi'<0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$det_{12}\,\psi'\,det_{13}\,\varphi'>0$</td></tr>
<tr><td>$det_{12}\,\psi'\neq 0$</td><td>$det_{13}\,\varphi'=0$</td><td>$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\,det_{12}\,\psi'<0$</td></tr>
<tr><td>$det_{12}\,\psi'=0$</td><td>$det_{13}\,\varphi'\neq 0$</td><td>$det_{11}\,\varphi'\,\psi'\,det_{13}\,\varphi'>0$</td></tr>
</table>

表3. 行列式（取决于 $\xi$）为零或不为零的情形。

<table>
<tr><td rowspan="2">$\dfrac{\partial G_1}{\partial W}\varphi'=0$</td><td colspan="2">$\dfrac{\partial G_2}{\partial T}\psi'=0$</td><td>$tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]=0$</td><td>$(1.1_t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{\partial G_2}{\partial T}\psi'\neq 0$</td><td rowspan="3">$tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]\neq 0$</td><td rowspan="3">$(1.2_t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\dfrac{\partial G_1}{\partial W}\varphi'\neq 0$</td><td colspan="2">$\dfrac{\partial G_2}{\partial T}\psi'=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\dfrac{\partial G_2}{\partial T}\psi'\neq 0$</td><td>$\dfrac{\partial G_1}{\partial W}\varphi'\dfrac{\partial G_2}{\partial T}\psi'>0$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\partial G_1}{\partial W}\varphi'\dfrac{\partial G_2}{\partial T}\psi'<0$</td><td>$tr[DZ^R_{\varepsilon,\eta}]\neq 0$ (渐近稳定平衡点)</td><td>$(1.3_t)$</td></tr>
</table>

表 4. 迹（取决于 $\xi$）为零或不为零的情形。

确切地说，考虑以下函数：

$$\varphi(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(x), & \text{if } |x|\geq 1,\\ x, & \text{if } |x|\leq 1,\end{cases}\quad\text{and}\quad \psi(y)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(y), & \text{if } |y|\geq 1,\\ 3\frac{y}{2}-\frac{y^3}{2}, & \text{if } |y|\leq 1.\end{cases}\tag{23}$$

这里，$\varphi$ 是一个 $C^0$ （连续）函数，其在图3(a)中的图像在原点的某个邻域内光滑；$\psi$ 是一个 $C^1$ 函数，其图像如图3(b)所示。

这种正则化提供了一个具体且结构稳定的无平衡点实例，展示了图2所描绘的情形，另见图8。

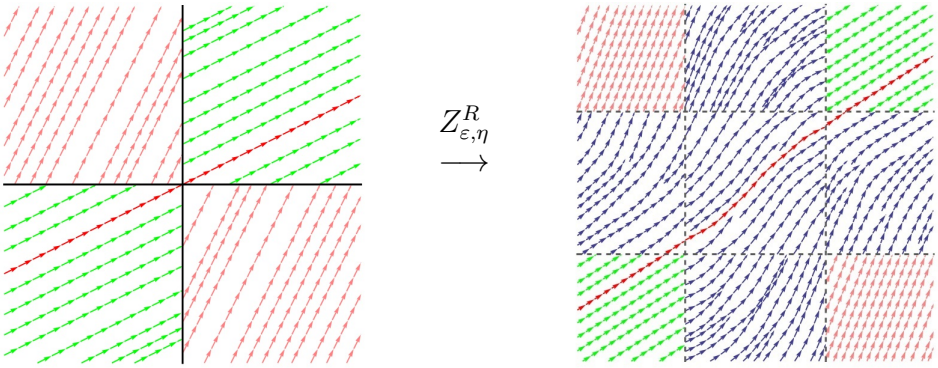



图8。向量场 $Z$ 如图4(A)所示，同时展示了其非线性双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\eta}$ 其中 $\varepsilon = 0.015$、 $\eta = 0.012$、 $\xi = 0$，以及式（23）中给出的过渡函数。

为说明所考虑的正则化过程中可能出现的其他情况，我们选择两个非Sotomayor–Teixeira 型的过渡函数，并将非线性双重正则化（5）应用于图4的情形（B）。具体而言，我们分别考虑一个单调过渡函数和一个非单调过渡函数，它们分别定义如下:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - 1, & \text{if } x \le -1/2, \\ 1, & \text{if } x \ge -1/2, \end{cases} \quad \text{and} \quad \psi(y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y), & \text{if } |y| \ge 1, \\ \widetilde{\psi}(y), & \text{if } |y| \le 1, \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\widetilde{\psi}(y) = \frac{1}{10} - \frac{349}{576}\,y - \frac{y^2}{5} + \frac{1069}{288}\,y^3 + \frac{y^4}{10} - \frac{1213}{576}\,y^5.$$

函数 $\varphi_B$ 的图像如图9所示， $\psi$ 的图像如图3(c)所示，其中两个函数在原点的某个邻域内均为光滑函数。在这种情况下，正则化向量场是结构稳定的，且没有平衡点。这也提供了一个例子，其中向量场 $X_{\pm,\,\pm}$ 仅出现在大范数点处；见图9，即:

$$\begin{array}{ccc} Z^R_{\varepsilon,+} \text{ if } x_1 \le -\varepsilon/2,\ x_2 \ge \eta; & Z^R_{\varepsilon,\eta} \text{ if } x_1 \le -\varepsilon/2,\ |x_2| \le \eta; & Z^R_{\varepsilon,-} \text{ if } x_1 \le -\varepsilon/2,\ x_2 \le -\eta; \\ X \text{ if } x_1 \ge -\varepsilon/2,\ x_2 \ge \eta; & Z^R_{+,\eta} \text{ if } x_1 \ge -\varepsilon/2,\ |x_2| \le \eta; & Y \text{ if } x_1 \ge -\varepsilon/2,\ x_2 \le -\eta. \end{array}$$

对于图4（$C_{01}$）所示的非线性双重正则化，我们选择过渡函数，使得向量场$X_{\pm,\,\pm}$仅在大范数点处出现。考虑过渡函数

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ and } \psi_{C1}(y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y), \text{ if } |y| \ge 1, \\ \widetilde{\psi}_{C_{01}}(y), \text{ if } y \in [0,1], \\ y, \text{ if } y \in [-1,0], \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\widetilde{\psi}_{C_{01}}(y) = (3/2)\ y - y^3/2$。 $\varphi(x)$ 的图像见图3(d)， $\psi_{C_{01}}(y)$ 的图像见图10。所得正则化向量场是结构

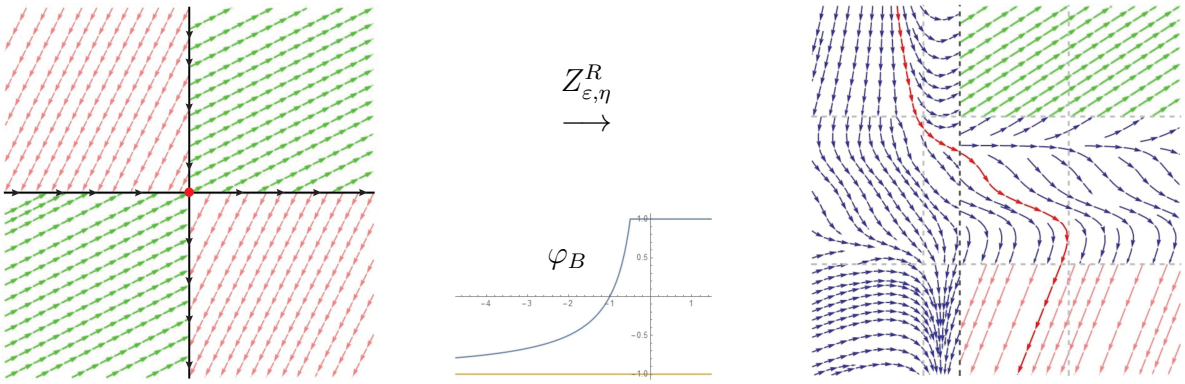



图9. 向量场 $Z$ 如图4(B)所示，并与其非线性双重正则化$Z^R_{\varepsilon,\eta}$一同给出，其中 $\varepsilon = 0.015$、 $\eta = 0.012$、 $\xi = 0$，过渡函数由(24)给出。

稳定的，且没有平衡点。此外，如前所述，在这种非线性双重正则化中只会出现以下向量场：

$$Z^R_{\varepsilon,+} \text{ if } x_2 \geq \eta; \quad Z^R_{\varepsilon,\eta} \text{ if } |x_2| \leq \eta; \quad Z^R_{\varepsilon,-} \text{ if } x_2 \leq -\eta.$$

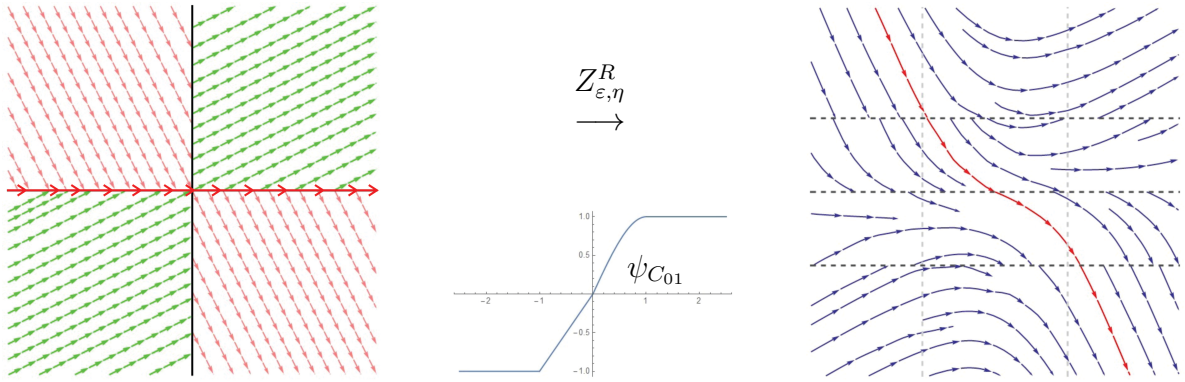



图10. 图4（$C_{01}$）中所示的向量场 $Z$ 及其非线性双重正则化$Z^R_{\varepsilon,\eta}$，其中 $\varepsilon = 0.015$、 $\eta = 0.012$、 $\xi = 0$，过渡函数由(28)给出。

为结束图4中所示的、保持余维的Ω内结构稳定情形（零余维），我们给出图4中情形（$C_{02}$）的双重正则化。我们选择过渡函数，使得仅出现向量场$Z^R_{\varepsilon,\eta}$；也就是说，在平面的所有区域中定义同一向量场（见图11）。因此，为此我们选择如下过渡函数：

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{and} \quad \psi_{C_{02}}(y) = -\text{sgn}(y)e^{-\text{sgn}(y)y} + \text{sgn}(y). \tag{26}$$

$\psi_{C_{02}}(y)$的图像如图11所示。

现在我们给出一些例子，其中原点是结构稳定向量场 $Z \in A_0 \subset \Omega_0$ 的非线性双重正则化的平衡点。第一个例子展示了余维至少为一的 Hopf分岔 [44, 55]。Hopf

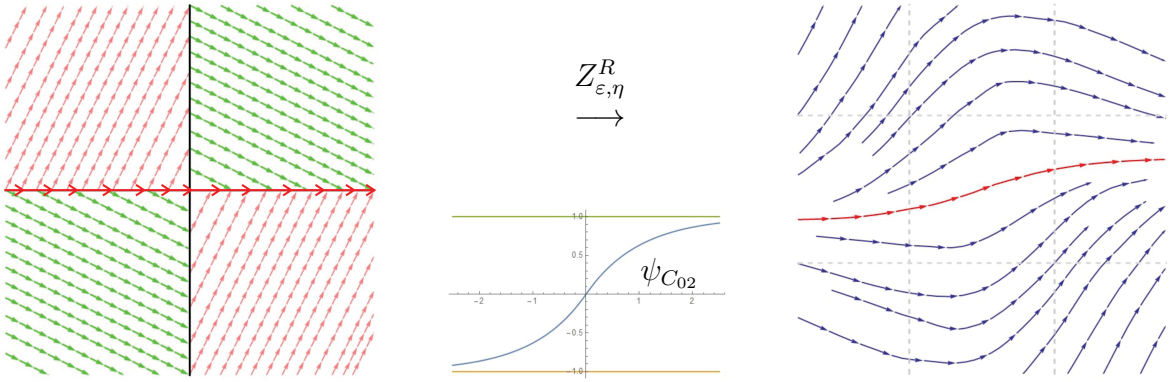



图11. 图4中所示的向量场 $Z$ （$C_{02}$）及其非线性双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 其中 $\varepsilon = 0.015$、 $\eta = 0.012$、 $\xi = 0$，过渡函数如式（26）所示。

分岔发生于平衡点处线性化系统的一对共轭复特征值变为纯虚数时，这会导致至少一个极限环产生。当线性化系统矩阵的迹从零变为一个很小的非零值时，极限环便会出现。

受范德波尔振子的启发，并结合第4节中的讨论，我们来考虑式（2）中的分段向量场 $Z = (X,\ Y)$，其中 $\mu \in \mathbb{R}$，

$$X(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 + (\mu - x_2^2)\, x_1 + 5/9 \\ x_1 + 5/9 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad Y(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

根据命题4.1，取 $\xi = 0$ 时，式（27）的非线性双重正则化关于 $\mu$ 在原点发生 Hopf分岔。我们采用以下过渡函数：

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1, \text{ if } x \geq 1, \\ \widetilde{\varphi}_1(x), \text{ if } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{x} - 1, \text{ if } x \leq -1, \end{cases} \quad \text{and} \quad \psi_1(y) = \begin{cases} 1, \text{ if } y \geq 1, \\ \widetilde{\psi}_1(y), \text{ if } |y| \leq 1, \\ -\frac{1}{y} - 1, \text{ if } y \leq -1, \end{cases} \tag{28}$$

其图像如图12所示，其中 $\widetilde{\varphi}_1(x) = 2 - (3/2)\, x^2 + (5/2)\ x^3 + \backsim x^4/2 - (3/2)\ x^5$ 以及 $\psi_1(y) = 7/4 - (9/4)\, y^2 + y^3 + y^4 - y^5/2$。这样，对于 $\xi = 0$，可知 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 在原点有一个平衡点，其线性化系统的特征值为

$$\frac{9}{8}\left(\mu \pm \sqrt{-4 + \mu^2}\right).$$

对于 $\mu = 0$，利用 [2, Chap. IX]，中提出的经典方法，可以计算第一李雅普诺夫系数：

$$u_3(2\pi) = \frac{\pi}{2916}\left(-\frac{98 + 945\varepsilon}{\varepsilon^4} - \frac{9\,(-32 + 48\eta + 81\eta^4)}{\eta^4}\right).$$

除正则化参数空间中的一条曲线外，该系数均不为零。换言之， $u_3(2\pi) \neq 0$ 几乎处处成立 (a.e.p.)，这意味着原点是一个弱焦点。因此，当 $\mu$ 足够小时，几乎处处都会发生 Hopf 分岔，如图13所示。

由于 Hopf 分岔的余维至少为一，这个例子表明，在非线性双重正则化下，Ω 中的结构稳定性不一定得以保持

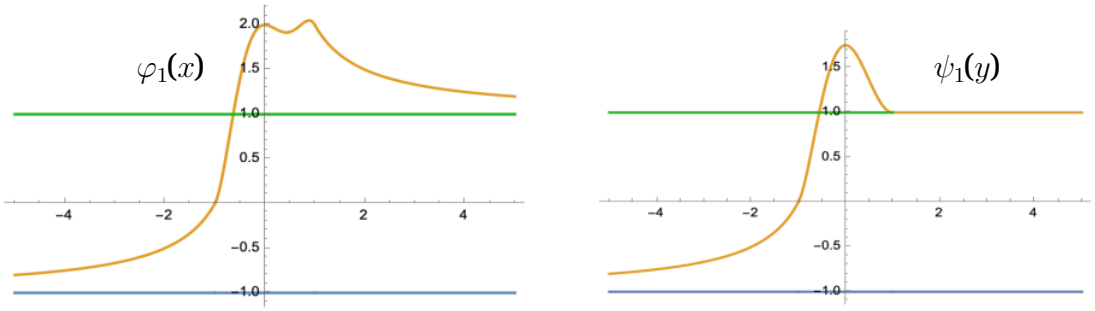



图12. 经历 Hopf分岔的(27)的非线性双重正则化所对应的非单调过渡函数。

（5）。此外，即使对于 $\xi = 0$，平衡曲线也可能存在，并且在所有充分小的正值 $\varepsilon$ 和 $\eta$ 下持续存在。考虑向量场

$$X(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad Y(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

以及在(24)中定义的过渡函数 $\varphi_B(x)$，和

$$\psi_2(y) = \begin{cases} -\frac{1}{y} - 1, & \text{if } y \geq 1, \\ -y^2 + x + 2, & \text{if } |y| \leq 1, \\ \frac{1}{y} + 1, & \text{if } y \leq -1. \end{cases} \tag{30}$$

在此配置下，正则化过程中可能会出现额外的平衡曲线，例如 $x = 1/40$；而其他曲线则对任意光滑参数保持不变，例如，

$$x = 0 \quad \text{and} \quad y = \frac{1 + 20x - 800x^2}{100\left(-1 - 10x + 400x^2\right)}, \tag{31}$$

如图14所示。

到目前为止，我们的例子都是针对 $\xi = 0$构造的。现在我们将注意力转向 $\xi \neq 0$的情形。在此背景下，我们考虑与函数 $G$相关联的非线性双重正则化，该函数在每个坐标上都定义为齐次多项式，其形式为

$$G(r, s) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m_1} a_{m_1-i,i}\, r^{m_1-i}\, s^i \\ \sum_{i=0}^{m_2} b_{m_2-i,i}\, r^{m_2-i}\, s^i \end{pmatrix},$$

其系数满足

$$a_{m_1,0} = -\sum_{i=1}^{m_1} a_{m_1-i,i}, \qquad a_{m_1-1,1} = -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m_1}\left(1 + (-1)^{-i-1}\right) a_{m_1-i,i},$$

$$b_{m_2,0} = -\sum_{i=1}^{m_2} b_{m_2-i,i}, \qquad b_{m_2-1,1} = -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m_2}\left(1 + (-1)^{-i-1}\right) b_{m_2-i,i}.$$

在先前的方法中，我们在每个坐标上考虑了一个齐次多项式。由于任何给定次数的多项式都可以分解为齐次多项式之和，因此，只要按照（5）采取适当的处理，这种方法就可以推广到任意多项式。

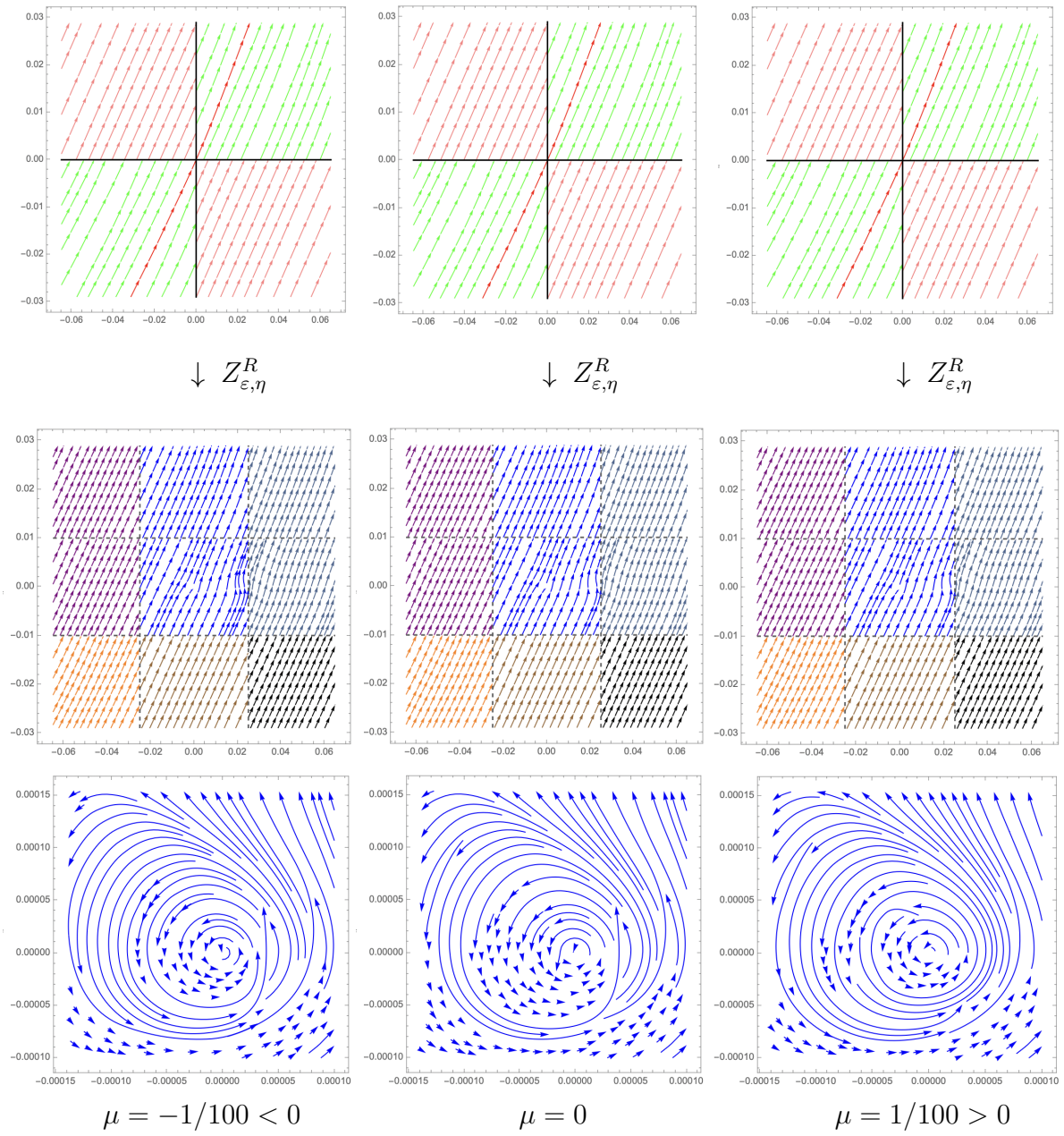



图13. 式（27）中给出的向量场 $Z$ 及其非线性双重正则化 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta}$ 在原点处发生Hopf分岔，其中 $\mu = 0$，且$\varepsilon = 0.025$、 $\eta = 0.01$、 $\xi = 0$以及过渡函数如式（12）所示。

根据（5）采取适当的处理。例如，考虑连续函数。

$$G(r,s) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{2} a_{2-i,i}\, r^{2-i} s^i + 2 + a_{3,1}\, r^3 s \\ \sum_{i=0}^{3} b_{m_2-i,i}\, r^{3-i} s^i + \frac{7}{4} + b_{2,6}\, r^2 s^6 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

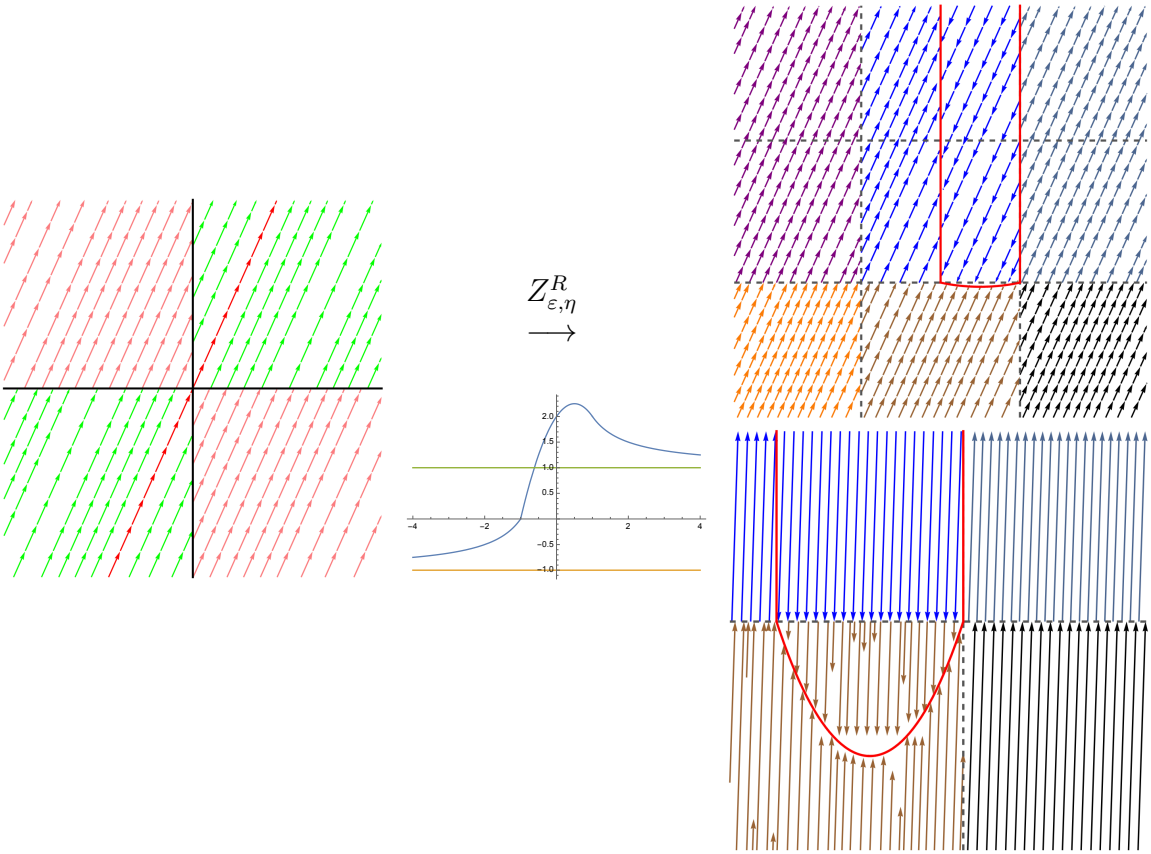



图14. 式(29)中的向量场 $Z$ 及其非线性双重正则化$Z^R_{\varepsilon,\eta}$当 $\varepsilon = 0.025$, $\eta = 0.01$, $\xi = 0$时，采用式(30)中的过渡函数以及式(24)中给出的 $\varphi_B$ ，展示了式(31)中的平衡曲线和在 $x = 1/40$处的平衡曲线，以及式(30)中过渡函数的图像。

它满足关于其系数的以下条件:

$$a_{2,0} = -a_{1,1} - a_{0,2} - 2 - a_{3,1}, \qquad a_{1,1} = -a_{3,1},$$
$$b_{3,0} = -b_{0,3} - b_{1,2} - b_{2,1} - \frac{7}{4} - b_{2,6}, \qquad b_{2,1} = -b_{0,3}, \qquad b_{2,6} = -\frac{7}{4}.$$

由此，采用式(28)中的过渡函数以及式(32)中给出的函数 $G$ ，并满足以下条件，对式(27)进行非线性双重正则化，

$$a_{0,2} = \frac{8}{5}\left(-4 + 7\, a_{3,1}\right), \qquad b_{0,3} = \frac{1}{448}\left(-54425 - 512\, b_{1,2}\right),$$

当 $\xi$充分小时，在原点处存在一个平衡点；如前所述，该平衡点还会在 $\mu = 0$处经历Hopf分岔。

函数 $G = (G_1,\ G_2)$ 也可以通过不同的配置来定义，例如，将坐标视为以下形式的排列:

$$G_i(r,s) = \sum_{j=0}^{m_1} a_j\, |r|^{\alpha_j}\, |s|^{\beta_j} \quad \text{or} \quad G_i(r,s) = \sum_{j=0}^{m_2} b_j\ \mathrm{sgn}(r)\, |r|^{\alpha_j}\ \mathrm{sgn}(s)\, |s|^{\beta_j}, \tag{33}$$

其中 $\alpha_j$ 和 $\beta_j$ 是负实数。在这种情况下，系数必然满足

$$a_0 = -\sum_{i=1}^{m_1} a_i, \qquad b_0 = -\sum_{i=1}^{m_2} b_i.$$

由于这种情形可视为多项式情形的推广，因此只要适当谨慎，我们也可以考虑同时包含多项式和最后一类函数的和。需要注意的是，函数 $G$ 在原点处可能不可微。尽管如此，仍然可以验证平衡点的存在性。例如，考虑

$$G(r,s) = \begin{pmatrix} a_0\,|r|^{1/2} + a_1\,|s|^{7/2} + a_2\,|r|^{10/3} + 2 + a_3\,r^3\,s \\ b_0\,\mathrm{sgn}(r)\,|r|^4\,\mathrm{sgn}(s)\,|s|^{7/2} + b_1\,\mathrm{sgn}(r)\,|r|^4\,\mathrm{sgn}(s)\,|s|^6 + \dfrac{7}{4} + b_2\,r^2\,s^6 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

使得系数满足以下条件：

$$a_0 = -a_1 - a_2 - 2 - a_3, \quad a_3 = 0, \quad b_0 = -b_1 - \frac{7}{4} - b_2, \quad b_2 = -\frac{7}{4}.$$

这样，利用式 (28) 中的过渡函数以及式 (34) 中给出的函数 $G$ 构造的式 (27) 的非线性双重正则化，在系数选取满足

$$a_1 = -\frac{128\left(2\left(-1+\sqrt{2}\right) + 2^{1/3}\left(-8 + 2^{1/6}\right)a_2\right)}{128\sqrt{2} - 343\sqrt{7}}, \qquad b_1 = -\frac{116625}{784\left(-343 + 32\sqrt{7}\right)},$$

时，当 $\xi$ 足够小时，原点处存在一个平衡点。若 $a_0 \neq 0$，则 $G$ 在原点处不可微。另一方面，若 $a_0 = 0$，即

$$a_2 = \frac{-256 + 686\sqrt{7}}{1024\,2^{1/3} - 343\sqrt{7}},$$

当 $\xi$ 足够小时，原点仍是一个平衡点，并且如前所述，系统在 $\mu = 0$ 处发生 Hopf分岔，其中 $G$ 在原点处是一个 $C^3$ 映射。

作为本节的总结，我们着重指出光滑化过程中可能出现的另一种现象，除了上文讨论的平衡曲线的出现之外。在分段光滑系统的双参数正则化中，可能会遇到这样的情况：一个正则化参数固定为足够小的值，并依赖于分岔参数。然而，正则化向量场的动力学可能无法充分捕捉原分段光滑系统的行为；也就是说，只有当两个参数同时趋于零时，正则化才会趋近于分段光滑系统。在当前情形中，只有一个参数趋于零。因此，尽管正则化向量场与分段光滑向量场足够接近，但相对于正则化参数的逐点收敛并不会发生。

为说明前述评论，考虑固定值 $\eta = \eta_0$ 时族 (15) 的正则化。然而，对于我们的分析而言，这类分岔的意义有限，因为只有当 $\varepsilon$ 和 $\eta$ 同时趋于零时，正则化才会趋近于分段光滑系统；而在此情形下，只有 $\varepsilon$ 趋于零。从某种意义上说，这意味着此类分岔与分段光滑系统相距甚远。因此，对于 $\xi = 0$，与该

族 (15) 相关的非线性双重正则化可表示为

$$Z^R_{\varepsilon,\eta,\alpha} = \phi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{x_2}{\eta}\right)\left(\frac{\widetilde{X_\alpha}-\widetilde{Y}}{2}\right)+\left(\frac{\widetilde{X_\alpha}+\widetilde{Y}}{2}\right). \tag{35}$$

假设（35）中的过渡函数属于 Sotomayor–Teixeira 型，且满足 $\varphi(0) \neq 0$，则可知存在 $p_0 \in (-\eta,\ \eta)$，使得 $\psi(p_0) = 0$。因此，$\big(0,\ -\alpha_0/c_1\big) = (0,\ \eta\, p_0)$ 是系统（15）在参数值$\alpha = \alpha_0 = -\eta\, c_1\, p_0$下的一个平衡点。接下来我们进行变量变换

$$x_1 = r, \qquad x_2 = s + \eta p_0, \qquad \alpha = \mu - \eta\, c_1\, p_0.$$

在此变换下，系统（35）变为

$$Z^R_{\varepsilon,\eta,\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\mu/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\, c_2/2 & B_1/\eta \\ 0 & (B_1\, B_2 + c_1\, B_3\, \eta)/(2\,\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots \\ B_4\, s^2 + \cdots \end{pmatrix}, \tag{36}$$

其中

$$B_1 = \phi(0)\,\psi'(p_0)\,a, \qquad B_2 = \mu + 2\,b\,a,$$
$$B_3 = a - 2\,B_1\,p_0, \qquad B_4 = \frac{\phi(0)\,\psi''(p_0)\,(b - ac_1\,p_0\,\eta)}{\eta^2} - \frac{B_1\,c_1}{2\eta}.$$

由于 我们已固定 $\mu = 0$，因此选择 $\eta_0$ 作为以下方程在 $\eta$ 中的解 :

$$(B_1\, B_2 + c_1\, B_3\, \eta)_{|_{\mu=0}} = 0,$$

也就是说,

$$\eta_0 = \left(\frac{-B_1\, B_2}{c_1\, B_3}\right)_{\Big|_{\mu=0}}, \tag{37}$$

这使得 (36) 的线性部分的行列式在 $\mu = 0$ 处为零，也就是说，当 $\mu = 0$ 时，第二行第二列的元素为零。注意， $\eta_0$ 很小，且其分母非零，因为 $\phi(0) \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$，而且 $\mu$ 也很小。为了将 $Z^R_{\varepsilon,\ \eta_0,\ \mu}$ 在 $(r,\ s) = (0,\ 0)$ 处的线性部分化为其 Jordan标准形，我们进行如下坐标变换

$$r = x_1 + \frac{2\,c_1\,(B_1\,p_0 - 1)}{c_2\,(2\,a + b\,\mu)}\,x_2, \qquad s = x_2.$$

经过这一变换，系统 (36) 化为

$$Z^R_{\varepsilon,\eta,\mu} = g(x_1, x_2, \mu) = \begin{pmatrix} B_0(\mu) - \frac{b\,c_2}{2}x + \cdots \\ \frac{a\,\mu}{2} + B_5(\mu)\,x_2^2 + \cdots \end{pmatrix}, \tag{38}$$

其中

$$B_0(\mu) = \frac{a\,c_1\,B_3\,\mu}{b\,c_2\,B_2},$$
$$B_5(\mu) = \frac{B_3}{2\,B_2} - \frac{a\,\phi'(0)\,B_3^2}{c_2\,b\,\phi(0)\,B_2\varepsilon} + \frac{\phi'(0)\,\psi'(p_0)\,p_0\,B_3}{c_2\,\varepsilon} - \frac{b\,\psi''(p_0)\,B_3^2}{\phi(0)\,(\psi''(p_0))^2\,B_2^2} + \frac{\psi''(p_0)\,B_3}{\psi'(p_0)\,B_2}.$$

按照定理 2.3 的记号，(38) 的线性部分对应于零特征值的特征向量为 $v^T = w^T = (0,\ 1)$。因此，我们有

$$\begin{aligned} &w^T g_\mu(0,0,0) = a/2 \neq 0, \\ &w^T\left[D^2 g(0,0,0)(v,v)\right] = B_5(0) \neq 0, \end{aligned} \tag{39}$$

当 $\varepsilon$ 足够小时。也就是说，存在 $0 < \varepsilon_0$ ，使得对于所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 和 $\eta = \eta_0$，式 (39) 均成立。根据定理 2.3，我们得出系统 (38) 在 $(x_1, x_2, \mu) = (0,\ 0,\ 0)$ 处发生鞍结分岔。因此，系统 (15) 发生

当 $\eta = \eta_0$ 时，在 $(x_1,\ x_2,\ \alpha) = (0,\ -\alpha_0/c_1,\ \alpha_0)$ 处发生鞍结分岔，其中 $\alpha_0 = -\eta_0 c_1 p_0$。在这种情况下，余维和一般性均得以保留。

## 致谢

本研究得到圣保罗研究基金会（FAPESP）资助，资助项目编号为 2016/00242-2、2018/05098-2、2021/14695-7、2022/03800-7、2023/02959-5 和 2024/15612-6；得到巴西联邦教育支持与评估机构（CAPES）资助，资助项目编号为 88881.179491/2025-01；得到巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）资助，资助项目编号为 401974/2025-1 和 307706/2023-0；得到西班牙国家研究署（Agencia Estatal de Investigación）资助，资助项目编号为 PID2022-136613NB-I00；并得到法国国家研究署（Agence Nationale de la Recherche, ANR）资助，资助项目编号为 ANR-23-CE40-0028。

## 参考文献

[1] Alexander, J. C. 和 Seidman, T. I. 相交切换面上的滑动模态，I：混合。《休斯敦数学杂志》*24*，第3期（1998年），545–569。[2] Andronov, A. A.、Leontovich, E. A.、Gordon, I. I. 和 Maĭer, A. G.平面动力系统的分岔理论。Halsted Press [John Wiley & Sons 旗下部门], 纽约—安大略省多伦多；以色列科学翻译计划，耶路撒冷—伦敦，1973年。由俄文译出。[3] Andronov, A. A.、Vitt, A. A. 和 Khaĭkin, S. E. 振荡器理论。Dover Publications, Inc.，纽约，1987年。F. Immirzi 由俄文译出；重印1966年译本。[4] Anosov, D. V. 继电系统平衡态的稳定性。《自动化与远程控制》20（1959年），135–149。[5] Apri, M.、Banagaaya, N.、Van Den Berg, J.、Brussee, R.、Bourne, D.、Fatima, T.、Irzal, F.、Rademacher, J.、Rink, B.、Veerman, F. 等。船舶操纵模型分析。载于第*79*届欧洲产学研研究组会议，*2011*年*1*月*24*日至*28*日，荷兰阿姆斯特丹（2012年），阿姆斯特丹自由大学，第83–116页。[6] Barbashin, E. A. 稳定性理论导论。Transcripta Service 由俄文译出，伦敦。T. Lukes 编。Wolters-Noordhoff Publishing，格罗宁根，1970年。[7] Bonet-Reves, C.、Larrosa, J.、Tere, M. 等。一般余维一折叠-折叠奇点附近的正则化。《微分方程杂志》*265*，第5期（2018年），1761–1838。[8] Bonet-Revés, C. 和 M-Seara, T. Filippov系统局部折叠奇点所引出的滑动全局分岔的正则化。《离散连续动力系统》36，第7期（2016年），3545–3601。[9] Broucke, M. E.、Pugh, C. 和 Simic, S. N. 分段光滑系统的结构稳定性。《计算与应用数学》*20*，第 1–2 期（2001 年），51–89。[10] Buzzi, C. A.、da Silva, P. R. 和 Teixeira, M. A. 平面不连续向量场的奇异方法。《微分方程杂志》231，第2期（2006年），633–655。[11] Buzzi, C. A.、Medrado, J. C. 和 Torregrosa, J. 4重星对称平面分段线性系统中的极限环。《微分方程杂志》268，第5期（2020年），2414–2434。[12] Buzzi, C. A. 和 Santos, R. A. T. 非光滑微分系统中鞍点-折叠奇点的正则化。《数学分析与应用杂志》474，第2期（2019年），1036–1048。[13] da Silva, P. R.、Meza-Sarmiento, I. S. 和 Novaes, D. D. 不连续向量场的非线性滑动与奇异摄动。《微分方程与动力系统》30，第3期（2022年），675–693。[14] da Silva, P. R. 和 Nunes, W. P. 余维二切换流形上的慢快系统与滑动。《动力系统》*34*，第4期（2019年），613–639。[15] di Bernardo, M.、Budd, C. 和 Champneys, A. 角碰撞蕴含边界碰撞分岔。《物理学*D*：非线性现象》*154*，第3–4期（2001年），171–194。[16] di Bernardo, M.、Budd, C. J.、Champneys, A. R. 和 Kowalczyk, P.分段光滑动力系统，第163卷，应用数学科学丛书。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2008年。[17] Di Bernardo, M.、Pagano, D. J. 和 Ponce, E. 平面Filippov系统中的非双曲边界平衡分岔：案例研究方法。《国际分岔与混沌杂志》18，第05期（2008年），1377–1392。

[18] Dieci, L. 和 Elia, C. 余维二不连续流形附近的分段光滑系统：能否预测会发生什么？arXiv预印本 arXiv:1508.02639（2015年）。[19] Dieci, L. 和 Lopez, L. 高余维不连续曲面上的滑动运动：一种选择 Filippov向量场的构造方法。Numerische Mathematik 117（2011年），779–811。[20] dos Santos, M. J. 和 Tonon, D. J. 当切换流形为双重不连续时二维分段光滑向量场的结构稳定性。Journal of Dynamical and Control Systems 29，第4期（2023年），1775–1808。[21] Fan, J.、Xue, S. 和 Chen, G. 周期性受迫双带摩擦振子的间断动力学。Chaos, Solitons & Fractals 109（2018年），280–302。[22] Filippov, A. F.《右端不连续的微分方程》，第18卷，Mathematics and its Applications (Soviet Series)。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1988年。[23] Guardia, M.、Seara, T. M. 和 Teixeira, M. A. 平面Filippov系统的低余维一般分岔。J. Differential Equations 250，第4期（2011年），1967–2023。[24] Henson, M. A. 和 Seborg, D. E.《非线性过程控制》。Prentice Hall PTR，上萨德尔河，新泽西州，1997年。[25] Jeffrey, M. R. 不连续与切换模型中的隐藏动力学。Physica D: Nonlinear Phenomena 273（2014年），34–45。[26] Kozlova, V. S. 不连续系统的结构稳定性。莫斯科大学学报：第1辑，数学与力学，5（1984年），16–20。[27] Kristiansen, K. U. 和 Hogan, S. J. 利用吹胀对平面分段光滑系统的双折分岔进行正则化。SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 14，第4期（2015年），1731–1786。[28] Kuznetsov, Y. A.、Kuznetsov, I. A. 和 Kuznetsov, Y.《应用分岔理论要素》，第112卷。Springer，1998年。[29] Kuznetsov, Y. A.、Rinaldi, S. 和 Gragnani, A. 平面 Filippov系统中的单参数分岔。Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13，第8期（2003年），2157–2188。[30] Larrosa, J.、M-Seara, T. 和 Teixeira, M. A. 具有非光滑切换曲线的平面Filippov系统的局部一般行为。São Paulo Journal of Mathematical Sciences 15（2021年），882–915。[31] Leine, R. I.、Nijmeijer, H.、Leine, R. I. 和 Nijmeijer, H. 非光滑连续系统中的平衡点分岔。《非光滑机械系统的动力学与分岔》（2004年），125–176。[32] Liberzon, D.《系统与控制中的切换》，第190卷。Springer，2003年。[33] Llibre, J.、da Silva, P. R. 和 Teixeira, M. A. 不连续向量场在 $\mathbb{R}^3$ 上的正则化：奇异摄动方法。J. Dynam. Differential Equations 19，第2期（2007年），309–331。[34] Llibre, J.、da Silva, P. R. 和 Teixeira, M. A. 通过慢快系统构造滑动向量场。Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 15，第5期（2008年），851–869。[35] Llibre, J.、Da Silva, P. R. 和 Teixeira, M. A. 通过奇异摄动研究非光滑动力系统中的奇点。SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 8，第1期（2009年），508–526。[36] Llibre, J.、Da Silva, P. R. 和 Teixeira, M. A. 具有相交切换流形的非光滑动力系统的滑动向量场。Nonlinearity 28，第2期（2015年），493。[37] Llibre, J.、Mereu, A. C. 和 Novaes, D. D. 不连续分段微分系统的平均理论。《微分方程杂志》258，第11期（2015年），4007–4032。[38] Llibre, J. 和 Sotomayor, J. 平面控制系统的相图。Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 27，第10期（1996年），1177–1197。[39] Llibre, J. 和 Teixeira, M. A. 三维不连续向量场的正则化。Discrete Contin. Dynam. Systems 3，第2期（1997年），235–241。[40] Llibre, J. 和 Teixeira, M. A. $m$分段不连续多项式Liénard微分方程的极限环。Z. Angew. Math. Phys. 66，第1期（2015年），51–66。[41] Lucero, J. C. 和 Gajo, C. 声带分段光滑模型的振荡区域。[42]Maciel, A. L.《不连续向量场的分岔》，2009年。博士论文，IME-USP, https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45132/tde-16082009-201102/en.php。[43] Makarenkov, O. 和 Lamb, J. S. 非光滑系统的动力学与分岔：综述。Physica D: Nonlinear Phenomena 241，第22期（2012年），1826–1844。[44] Marsden, J. E. 和 McCracken, M.《Hopf分岔及其应用》，第19卷。Springer Science & Business Media，2012年。

[45] Murray, J. D. 数学生物学：I. 导论。跨学科应用数学。《数学生物学》，Springer 17（2002年）。[46] Novaes, D. D. 非退化平面中心的非光滑扰动。《数学出版物》58，增刊（2014年），395–420。[47] Novaes, D. D. 和 Jeffrey, M. R. 分段光滑流中隐藏动力学的正则化。《微分方程杂志》259，9（2015年），4615–4633。[48] Novaes, D. D. 和 Rondón, G. 正则切触奇点及边界极限环附近非光滑微分系统的光滑化。Nonlinearity 34，6（2021年），4202–4263。[49] Panazzolo, D. 和 da Silva, P. R. 不连续叶状结构的正则化：通过爆破和 Fenichel 理论处理滑动条件。J. Differential Equations 263，12（2017年），8362–8390。[50] Peixoto, M. C. 和 Peixoto, M. M. 扩展边界条件下平面上的结构稳定性。An. Acad. Brasil. Ci 31，2（1959年），135–160。[51] Peixoto, M. M. 二维流形上的结构稳定性。Topology 1（1962年），101–120。[52] Perez, O. H.、Rondón, G. 和 da Silva, P. R. 由分段光滑向量场产生的慢快正规形。Journal of Dynamical and Control Systems 29，4（2023年），1709–1726。[53] Perko, L. 微分方程与动力系统，第7卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[54] Perruquetti, W. 和 Barbot, J. P. 工程学中的滑模控制，第11卷。Marcel Dekker，纽约，2002年。[55] Roussarie, R. 和 Roussarie, R. 平面向量场的分岔与希尔伯特第十六问题，第164卷。Springer，1998年。[56] Simpson, D. J. W. 分段光滑连续系统中的分岔，第70卷。世界科学出版社，2010年。[57] Smirnov, G. V. 微分包含理论导论，数学研究生教材第41卷。美国数学学会，普罗维登斯，RI，2002年。[58] Sotomayor, J. 二维流形上向量场的泛型单参数族。《IHÉS数学出版物》43（1974年），5–46。[59] Sotomayor, J. 常微分方程课程，第11卷。纯粹与应用数学研究所，CNPq，1979年。[60] Sotomayor, J. 和 Machado, A. L. F. 平面上的结构稳定不连续向量场。Qual. Theory Dyn. Syst. 3，1（2002年），227–250。[61] Sotomayor, J. 和 Teixeira, M. A. 不连续向量场的正则化。载于：微分方程国际会议（里斯本，1995年）。世界科学出版社，里弗埃奇，NJ，1998年，第207–223页。[62] Stewart, D. E. 带摩擦和碰撞的刚体动力学。SIAM Rev. 42，1（2000年），3–39。[63] Tanelli, M.、Osorio, G.、di Bernardo, M.、Savaresi, S. M. 和 Astolfi, A. 混合防抱死制动系统中极限环的存在性、稳定性与鲁棒性分析。Internat. J. Control 82，4（2009年），659–678。[64] Teixeira, M. A. 带边界流形中的泛型分岔。《微分方程杂志》25，1（1977年），65–89。[65] Teixeira, M. A. 不连续向量场的稳定性条件。《微分方程杂志》88，1（1990年），15–29。[66] Teixeira, M. A. 和 da Silva, P. R. 非光滑系统的正则化与奇异摄动技术。Phys. D 241，22（2012年），1948–1955。[67] Utkin, V. I. 控制与优化中的滑动模态。施普林格科学与商业媒体，2013年。[68] van der Pol, B. 三极管自由振动与受迫振动振幅理论。Radio Rev. 1（1920年），701–710。[69] van der Pol, B. 关于弛张振荡。Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci. 2，7（1926年），978–992。[70] Zhusubaliyev, Z. T. 和 Mosekilde, E. 分段光滑动力系统中的分岔与混沌，第44卷。世界科学出版社，2003年。

圣保罗州立大学数学系，São José do Rio Preto 15054-000，圣保罗州，巴西

电子邮箱： claudio.buzzi@unesp.br

[2] 圣保罗大学数学系，圣卡洛斯，圣保罗州 13566-590，巴西

电子邮箱： yagor.carvalho@usp.br

[3] 巴塞罗那自治大学数学系，08193 贝拉特拉，巴塞罗那，西班牙

电子邮箱： yagor.romano@uab.cat