arXiv:2602.04658v1 [math-ph] 4 Feb 2026

Courant 代数丛的小平–斯宾塞理论

JULIAN KUPKA、INGMAR SABERI、CHARLES STRICKLAND-CONSTABLE、FRIDRICH VALACH

摘要。研究微分分次环化流形上的 Courant 代数丛时，我们观察到，相关的 Roytenberg–Weinstein L_∞ 代数具有一种局部结构，令人联想到移位接触结构。在带有 n定向的微分分次环化流形上，其辛化产生一个由 $(2-n)$-移位辛形式形式模问题构成的层，我们称之为 Courant 接触模型。只要 n 为奇数，这一构造便可解释为一种（按 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次的）Batalin–Vilkovisky 形式理论。在阐述约化与标量扩张的过程后，我们展示了 I 型超引力中的扭曲背景如何自然地导出 Dolbeault 复形上的 Courant 代数丛。对于 Calabi–Yau 五维流形的情形，我们证明，该 Courant 代数丛的 Courant 接触模型等价于极小 I 型 BCOV 理论的一个中心扩张。受此启发，我们拓展 Costello 和 Li 的猜想，并将其置于广义几何的框架之中，进而猜想如何在一般扭曲背景下描述 I 型超引力的 BV 表述。

目录

1. 引言 1 2. 背景 5 3. Courant代数丛 9 4. 两种构造 14 5. Courant 接触模型 18 6. 扭曲超引力背景 21 7. I 型最小 BCOV 理论与广义 G-结构 25 参考文献 27

1. 引言

我们首先简要介绍两种彼此独立的动机，以便将我们的工作置于更广阔的背景中——第一种从移位辛几何的角度出发，第二种则从扭曲超引力的视角出发。相关术语的定义请参阅正文。

1.1. **第一种动机：Courant代数丛与移位辛结构和接触结构**。Courant代数丛可以视为二次李代数（即带有不变配对的李代数）的“水平范畴化”，因为一点上的 Courant代数丛恰好是有限维二次李代数 [LWX97]。从现代视角来看，李代数上的不变配对 $\mathfrak{g}$ 定义了其无穷小分类空间上的一个 2-移位辛结构 $B\mathfrak{g}$。

因此，Courant代数丛也与2移位辛几何密切相关，这并不令人意外。给定一个Courant代数丛 $E \to M$，有一种众所周知的构造方法，可以从 E [得到一个（有限维）2移位辛微分分次流形Roy02; Šev05]。它可以被识别为丛 $T^*[2]M \oplus E[1] \to M$的全空间（尽管这种识别并非典范的）。对一个带有 [AKSZ构造97] 的空间 Σ 应用该构造，若其具有 n定向，便可得到一个 $(2-n)$ 移位映射空间。当 $n=3$时，这便是在 Σ上的 BV形式体系中的场论，称为 *Courant σ模型* [Ike03; Roy07]。

本文关注一种不同的构造，尽管其中许多要素与标准理论中的要素相同。关键区别在于，我们希望将 E 视为 M上的一种局部结构。许多 Courant代数丛确实以一种使这种视角显得自然的方式出现；例如，gerbe 的 Atiyah代数丛的适当类比是 Courant代数丛，或者

更准确地说，是由 Courant代数丛构造出的某种 L_∞ 代数层，见 Roytenberg 和 Weinstein [Š98; RW98; BS23]。我们将 Roytenberg 和 Weinstein 的局部李代数的截面视为无穷小广义微分同胚。我们自然会想到，应该能够在 M上构造一个模空间层，作为广义微分同胚的无穷小分类空间，或者说，是对上文示例 $B\mathfrak{g}$ 进行水平范畴化。

一个具有指导意义的例子如下。在正维流形M上，若Courant代数丛的锚映射为零，则它是 M 上的二次李代数丛，带有取值于光滑函数的一个不变配对。若再为 M 赋予一个体积形式，则 BE——在此情形下定义良好，因为 E 是一个局部李代数——具有局部2移位辛结构。

一般而言，这一过程行不通，因为 BE 并无意义。我们需要扩充模型，将 E 嵌入一个局部李代数中，使反对称化Courant括号的雅可比恒等式失效之处变得正合。Roytenberg和Weinstein的局部李代数 [RW98], 记作$\mathrm{RW}(E)$，便提供了这一构造。直观地说，若考虑 E 为广义切丛 $TM \oplus T^*M$的例子，则新增的生成元使我们能够将 T^*M的截面视为1-形式，并将恰当1-形式视为平凡元，这正是自然的规范不变性关系。

Roytenberg–Weinstein局部李代数上并不存在自然的2移位辛结构，因为参数化这一高阶规范不变性的生成元并不自然地与任何对象配对。但我们在上文已经看到，即便要在 E 的截面上定义配对，也需要引入一个体积形式。若将这一选择视为一个额外的模，则存在一种自然配对，使该体积形式与高阶规范不变性对偶。我们可以用如下口号来概括：

模　　空间在广义微分同胚下的体积形式自然是*2*移位辛的　　.

非零函数通过重新标度体积形式，在描述该模空间的局部李代数上具有自然作用。相对于这一作用，辛形式是权为一的正合形式。在经典情形中，相对于自由 $\mathbb{R}^\times$-作用而言权为一的齐次辛结构对应于商上的接触结构。因此，人们期望一种局部版本的2-移位接触结构，它位于由Roytenberg–Weinstein局部李代数定义的模空间上。关于移位接触结构的先前工作包括Grabowski于 [Gra13], , 随后是Berktav [Ber24a; Ber24b; Ber24c] 在导出代数几何的框架中，以及Maglio、Tortorella和Vitagliano [MTV24; Mag25]在光滑导出几何中。本文并不详细发展局部移位接触结构的理论，而是选择在辛框架中工作。尽管如此，我们将所构造的局部形式模问题称为*Courant* 接触模型。

另一个可能的名称体现在论文标题中。经典的小平–斯宾塞映射将复结构模空间的切空间与全纯向量场层的一次上同调联系起来。广义几何的一种经典观点提出，可以用广义切丛替代切丛；我们对其截面层与自然模空间之间关系的研究，促使我们选择了这个标题。

上述讨论可以推广到下文定义的光滑微分分次环化流形上的 Courant 代数丛结构。在这一设定中，体积形式由一个 n-定向的选择取代，从而得到局部的 $(2-n)$-移位辛结构。当 n 为奇数时，我们在 M 上得到一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 BV 理论，它与 Courant代数丛相关；在最简单的例子中，其基本场是一个带有联络结构的 O-gerbe 和一个 O-定向。与 Chern–Simons 理论一样，当且仅当 $n = 3$ 时，这一构造给出一个 $\mathbb{Z}$-分次理论。不过， n 的所有奇数取值都会给出有趣的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次理论。本文将聚焦于 $n = 5$ 的情形及其与 I 型超引力全纯扭曲的关系。[1]

[1]我们注意到，Courant代数丛的表述同样适用于任意规范群，因此我们不再进一步指定。与此一致，我们将交替使用 I 型超引力和 $D = 10, \mathcal{N} = 1$ （更准确地说，是 $\mathcal{N} = (1, 0)$）超引力这两个术语。

1.2. **第二个动机：扭曲超引力**。 在超引力理论中，存在一些特殊背景，其中局部超对称变换的幽灵场取非零的背景值。这类背景的存在与 Killing旋量的存在有关，因而会约束其他背景场：例如，度量通常必须是卡拉比–丘度量，或者具有约化的全纯性。这类背景可以在 Batalin–Vilkovisky 形式中得到有效研究，但极大或半极大超引力理论的完整表述——即纳入所有费米子并求解经典主方程的表述——在文献中几乎没有出现。对于十维 I 型超引力，最近已借助广义几何中的技术解决了这一问题 [KSCV25a; KSCV25b]。

在 [CL15], Costello 和 Li 提出了一种理论，称为“$(1,\ 0)$ BCOV 理论”，定义在卡拉比–丘三维流形上。该理论是他们最初提出的“BCOV 理论”的一种变体，后者以 Bershadsky、Cecotti、Ooguri 和 Vafa 研究的“引力小平–斯宾塞理论”为基础并将其推广 [BCOV94]。在此基础上，Costello 和 Li 将他们的理论推广，提出了如今所称的 *I* 型 *BCOV* 理论，见 [CL19], ，该理论运用了拓扑弦理论中的无定向B模型。Costello 和 Li 猜想，I 型 BCOV 理论应与 I 型弦理论的靶空间全纯扭曲有关；将其限制在无质量扇区后，他们的猜想意味着，一个称为极小 *I* 型 *BCOV* 理论 的子扇区应当是十维 I 型超引力（不含额外规范场）的全纯扭曲，可能还需经过少量修改，以允许存在完全非退化的(-1)-移位辛结构。

综合过去几年的各项成果，已经接近证实这一猜想：

- 借助纯旋量超场形式， [SW24]在平坦背景下的自由极限中，严格计算了十一维和 IIB 型超引力多重态的扭曲。结合对 IIA 型和 IIB 型超引力的描述，由此计算出全纯 I 型超引力的自由极限，并将其识别为某种极小 *I* 型 *BCOV* 理论的势理论的场。（这正是上文提到的细微修正。）

- 在 [RSW23]中构造了扭曲的十一维超引力的候选相互作用，并证明它们通过了各种一致性检验。特别是，证明在区间上紧化后，其中构造的 BV 理论在完整的非线性层面上与某种极小 I 型 BCOV 理论的势理论相匹配。

- 最后， [HS25] 证明十一维超空间自然带有泊松结构，并且十一维超引力（按照 Cederwall 在纯旋量形式中的描述 [Ced10a; Ced10b]）是由哈密顿向量场局部李代数支配的模问题。利用这一结果，他们将十一维超引力所有扭曲的纯旋量描述构造为泊松陈–西蒙斯理论，这与 Costello [Cos16] 的另一系列成果相一致。

要完成这条链，只需证明 [HS25]的泊松–切恩–西蒙斯理论与 [RSW23] 的十一维超引力理论等价，而这归结为运用同伦传递定理进行计算。

在本文中，我们将采取一种不同的方法，该方法与近期的 [KSCV25a; KSCV25b] 的发展相关。由于其中提出的完整超引力理论的构造是在广义几何的语言中进行的，因此自然可以预期，扭曲背景下的理论也应当能够用 Courant代数丛来描述。我们通过将 I 型 BCOV 理论直接与 Courant代数丛理论联系起来，证实了这一预期：当输入数据取为 Calabi–Yau 流形上的全纯 Courant algebroid 的（Dolbeault 分解）时，我们在此构造的 Courant 接触模型在 BV形式体系中给出一个自然的理论，其中该 Calabi–Yau 流形具有奇复维数。将其专门化到 Calabi–Yau 五维流形上的标准全纯 Courant 锚丛，我们证明（定理7.6），Courant 接触模型等价于

在 [RSW23]中研究的极小 I 型 BCOV 理论。因此，我们的模型将 I 型 BCOV 理论扩展到了广义几何领域，尤其涵盖了通量背景。

我们将此视为一条独立的第二条路径的基础，以严格确立扭曲背景下 I 型超引力的 Costello–Li 猜想；从某种意义上说，这条路径更为直接。上述结果表明，可以在底层 Courant代数丛的层面描述扭曲。我们在下文中给出一个精确表述（§7.1中的主要猜想），将 Costello 和 Li 的猜想加以推广。这里先简述其内容：一个扭曲超引力背景确定了一个对合各向同性子丛 $L \subset E \otimes \mathbb{C}$；反过来，这样的数据通过约化确定了一个全纯 Courant algebroid [Gua14，附录 A]。我们猜想，在这样的背景下，I 型超引力等价于（Dolbeault 分解的）全纯 Courant algebroid 的 Courant 接触模型；该全纯 Courant algebroid 是沿 $E \otimes \mathbb{C}$ 约化得到的： L。

我们已经在线性化层次证明了这一猜想。尽管 Courant代数丛的表述大大简化了两方面的问题，但要在一般的扭曲背景上证明相互作用层次的结果——虽然已十分接近完成——仍是一项不容小觑的任务。因此，我们将此留待第二篇论文处理，目前该论文仍在撰写中。为便于阐述，我们也将在那篇论文中呈现线性化层次的结果。

1.3. **概要**。 本文大致分为两部分：第一部分完全独立于扭曲超引力（对应于 §1.1中的第一个研究动机）；第二部分从 §6开始，讨论与 BCOV 理论和扭曲超引力的联系（因此对应于 §1.2）。

我们首先在 §2 回顾一些必要的背景材料，先介绍 Costello 和 Grady–Gwilliam 所发展的微分分次环化流形概念，随后讨论定向、局部李代数以及移位辛结构和接触结构。在 §3 我们介绍微分分次环化流形上的（严格）Courant代数丛概念，讨论其基本性质和刻画，并给出若干例子。接下来的 §4 将介绍 Courant代数丛上的两种运算，即标量扩张和约化，本文后续部分将用到这两种运算。§5介绍 Courant 接触模型及其与 Roytenberg–Weinstein L_∞ 代数和接触几何的关系。

在倒数第二节6 中，我们将前面的结果应用于超引力的扭曲情形，从而得到一个与给定扭曲数据相关的 Courant代数丛（位于 Dolbeault 复形之上）。特别地，第6.3 节详细阐述了 Calabi–Yau 情形。最后，在第7节中，我们提出关于所得 Courant 接触模型与 I 型超引力的全纯扭曲之间一般等价性的猜想，并证明在 Calabi–Yau 情形下，该模型与极小 I 型 BCOV 理论（的一个中心扩张）一致。这确立了它与 Costello 和 Li 的猜想之间的对应关系。

1.4.**致谢**。 CSC 获得英国工程与自然科学研究委员会新研究员奖资助，资助编号为 EP/X014959/1。FV 获得查理大学 PRIMUS/25/SCI/018 项目资助。本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过项目编号 517493862（超对称性的同调代数：局域性、幺正性、对偶性）资助。IAS 进一步感谢巴伐利亚自由州在本研究开展期间提供支持。部分工作是在 FV 和 IAS 于 2025年驻留尤尔斯霍尔姆的米塔格-莱夫勒研究所期间完成的，当时他们参加了“量子场论的上同调方面”项目；该项目由瑞典研究理事会通过资助编号 2021-06594 提供支持。作者谨向米塔格-莱夫勒研究所及项目组织者致谢，感谢他们提供了有利于合作和推进本研究的良好环境。此外，还要感谢捷克斯尔尼第46届几何与物理年度冬季学校的组织者；FV 和 IAS 在出席该活动期间完成了本研究的一部分。感谢 A. Ashmore、M. Cederwall、O. Gwilliam、F. Hahner、S. Raghavendran、P. Ševera、E. E. Svanes 和 B. Williams 提供宝贵的讨论，也感谢 W. Luciani 对稿件提出有益意见。本研究过程中未收集或生成任何新数据。

1.5. **记号与约定。** 全文中，我们采用向量空间的对称幺半范畴，其分次可取 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。在第一种情形下，整数分次称为“上同调次数”或“鬼数”，而 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 因子称为“费米子宇称”或“内禀宇称”。Π 表示宇称移位函子，方括号表示整数分次的移位；我们遵循约定 $V[i]^j := V^{i+j}$。科斯居尔符号法则由次数与内禀宇称之和模二决定；这个总化称为“奇偶性”，并用符号 $|\cdot|$ 表示。在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次的情形下，只定义（总）奇偶性。为自由模上的交换微分分次代数对象写公式时，我们常将内部科斯居尔符号隐去，显式书写的公式采用适用于模生成元的符号。全文采用上同调约定；每个微分的次数均为 $(+1,\ +)$。对偶会反转分次。函数 X_H 的哈密顿向量场 H 定义为 $i_{X_H}\omega = -dH$。更多约定见 [KSCV25c]。

2. 背景

2.1. **微分分次环化流形。** 在 [Cos10], 中，Costello提出了一种研究导出微分几何的方法，其中一类特别好的空间，称为（光滑）微分分次环化流形，起着重要作用。（该理论在 [GG15；GG20], 中，以密切相关的命名法 L_∞ 空间得到了进一步发展。）在本文中，我们关注在此类空间上定义Courant代数丛。我们快速回顾一些定义，以便铺垫并统一术语。

固定一个基域$\Bbbk = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。回想一下，一个交换微分分次代数是$\Bbbk$上的有单位 $\mathbb{Z}$分次交换代数，配备一个次数为 $+1$的导子，记为 ∂，并称为微分。两个交换微分分次代数之间的态射是同时保持分次与微分的代数态射。若 A 是一个交换微分分次代数，则一个其上的交换微分分次代数A 是配备态射 $A\to B$的交换微分分次代数 B。给定一个交换微分分次代数（$A,\ \partial$），我们可以忘掉微分，从而得到另一个交换微分分次代数，记为 $A^{\#}$。

现在我们回顾 Costello 的定义。

定义 2.1 ([Cos10，定义 1.0.1])。 一个光滑微分分次环化流形（在$\Bbbk$上）由以下数据构成：

- 一个光滑的 d 维流形 M，其光滑$\Bbbk$值函数层记作 C^∞，光滑德拉姆形式层记作 $\Omega^\bullet$；_
- 一个定义在 M 上的交换微分分次代数层 $\mathcal{O}$，其微分记作 ∂，并且还配备映射

$$\Omega^\bullet \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{O} \xrightarrow{\ q\ } C^\infty.$$

交换微分分次代数的。

这些数据须满足以下性质：

- $\mathcal{O}_{\#}$ 是 $\Omega^0 = C^\infty$ 上有限总秩的局部自由模；
- q 的核是 $\mathcal{O}$ 中的幂零理想层；
- 在 U 的任意足够小的开子集上，$\mathcal{O}(U)$ 的上同调都集中在非正次数。

光滑微分分次环化流形之间的映射定义方式与一般环化空间之间的映射相同。现在我们回顾 [Cos 10] 中的一些重要例子。

例 2.2. </style}任意光滑流形 M 都是一个光滑微分分次环化流形：取 $\mathcal{O} = C^\infty$，使其微分为零且集中在零次。映射 j 由对幂零理想层 $\Omega^{\geq 1}\subset\Omega^\bullet$ 取商定义。这个光滑微分分次环化流形仍记为 M。

例 2.3. M上还有另一种自然结构：取 $\mathcal{O} = \Omega^\bullet$，其中 j 是恒等映射，q 是上文所述的商映射。我们将由此得到的光滑微分分次环化流形称为 M_{dR}。

例 2.4. 若 M 是复流形，我们可以赋予它 Dolbeault 形式层 $\Omega^{0,\bullet}$，其中 $\bar{\partial}$是 Dolbeault算子。我们用 $M_{\bar{\partial}}$表示由此得到的光滑微分分次环化流形。注意，全纯庞加莱引理表明，O 与置于零次的全纯函数层 $\mathsf{C}_{\mathrm{hol}}$ 局部准同构。

我们将研究微分分次环化流形上的 dg O-模层。回顾一下，交换微分分次代数 A 上的微分分次模是一个 $\mathbb{Z}$-分次上链复形 N，连同一个保持次数的上链映射 $A \otimes_{\mathbb{k}} N \to N$，使得 $N^{\#}$ 成为左 $A^{\#}$-模。微分分次 A-模上的一个内积，是从该模到其对偶的自对偶 A-线性同构。在本文中，我们只处理这样的模层：忘却微分后，它们在 Ω^0 上局部自由且为有限秩；这类微分分次模称为**半自由**。作为例子，我们指出，Der O 在任意微分分次环化流形上都自然地构成这样的 O-模层。

注 2.5。 虽然上述定义中的所有条件都适用于本文所处理的例子，但我们并未实质性地使用 Costello 所施加的若干限制。特别是，定义2.1中的第三个条件要求正次数上的上同调局部消失，这对我们不起作用；有限秩条件也只出现在技术层面。我们完全预期，在作出适当的细微修改后，我们的结果将适用于这样的情形：去除第三个条件，并将第一个条件弱化为仅要求 Ω^0-模 $\mathcal{O}^{\#}$按次数有限。

从形式上说，同一定义也可以作必要的修改后应用于任意局部环化空间$(M, \mathcal{C})$，其中$\mathcal{C}$ 取代光滑函数，而$\Omega^{\bullet}$ 则解释为代数 de Rham 复形$\Omega^{\bullet}_{\mathcal{C}/\mathbb{k}}$ （例如，定义见 [Stacks，§17.30]）。一般而言，这一概念通常不会那么有用——尤其是因为$\mathcal{C}$ 未必是细层。需要强调的是，我们并未将 Costello 从微分分次环化流形构造导出栈的方法推广到这种情形。

不过，我们仍会研究这种推广的一些实例。最重要的是，我们将复微分分次环化流形（必然定义在 $\mathbb{C}$上）定义为满足定义2.1，但其中 M 是复流形，且$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{hol}}$ 是全纯函数层。于是，我们可以重复例 2.2 ，将$(M, \mathcal{C}_{\mathrm{hol}})$ 视为复微分分次环化流形，并记作 M_{hol}。

我们使用这一例子本质上是出于技术原因。事实上，Dolbeault 分解定义了一个从复微分分次环流形到 $\mathbb{C}$上的光滑微分分次环化流形的函子；该函子将M_{hol} 映到 $M_{\bar{\partial}}$。为了讨论全纯 Courant algebroid 的 Dolbeault 分解——这是我们在后续工作中的目标之一——我们将需要这两个概念。

由于超流形是局部环化空间，上述观察同样使我们能够定义光滑微分分次环超流形这一概念。取 M 为光滑超流形，则例2.2与2.3 可直接适用。若 M 配备了超共形结构，则相应的纯旋量超空间，如 [HRSW24，§2], 中所定义，自然是一个光滑微分分次环超流形，它扮演 $M_{\bar{\partial}}$ 的角色（若略去定义2.1 中的第三条限制，如注记2.5中所讨论的那样）。

关于相关背景材料的其他更详尽论述，我们请读者参阅 [Car23，§2] （不过请注意，那里的讨论侧重于非正分次情形）中关于微分分次流形的讨论，以及 [Nui18]。

2.2. **定向。** 我们将需要一种定向概念，至少粗略地说，它是$\mathcal{O}$-定向这一概念的一个简单特例，该概念引入于 [PTVV13，定义 2.4]。（亦可比较 Ginzburg 的 Calabi–Yau n-代数 [Gin06]。）

回顾一下，我们要求对于任意光滑微分分次环化流形，$\mathsf{O}^{\#}$ 是有限秩 C^{∞}-模的局部自由层。这样的对象就是有限维（分次）向量丛的光滑截面。对于光滑流形 M 上的任意向量丛 E，都与一个丛相关联

$$E^{!} := E^{\vee} \otimes \mathrm{Dens}(M),$$

其中 $E^\vee$ 是 M 上向量丛范畴中的对偶，而 Dens(M) 是密度丛，在此情形下它是对偶化复形（按 Verdier 对偶的意义）。 $E^!$ 称为 E的*shriek* 对偶，其特征是： E 的截面与 $E^!$ 上取值于基域$\Bbbk$的紧支撑分布截面互为对偶。这一构造可推广到向量丛的上链复形，从而也可推广到 O。

定义 2.6。 设 (M,O) 是一个光滑微分分次环化流形。一个 n-定向 是指以下拟同构：

$$\omega\colon \mathcal{O}[n] \to \mathcal{O}^!$$

微分分次 O-模层。若一个 n-定向是上链复形的同构，则称其为严格的 。

例 2.7。 在一个光滑流形 (M, C^∞) 上，我们看到 O$^!$ 是集中在零次的密度层。因此，一个定向（此处为 0-定向）对应于选择一个处处不为零的全局密度（其总是存在）。

例 2.8。 对于一个定向光滑 d-流形的 de Rham 空间 M_{dR} ，我们注意到

$$(\Omega^\bullet)^! \cong \Omega^\bullet[d].$$

因此， M_{dR} 具有一个严格的 d-定向，它由选择一个处处不为零的函数构成。事实上，单位元给出了一个规范的选择。

例 2.9. 设 M 是一个实维数为 $d = 2n$的复流形。那么

$$\left(\Omega^{0,\bullet}\right)^! = \Omega^{n,\bullet}[n].$$

因此， $M_{\bar\partial}$ 具有 n-定向，当且仅当 M 是 Calabi–Yau 流形；而该定向的数据就是选取一个处处不为零的全纯顶形式。

注 2.10. 在本文中，*Calabi–Yau* 流形 指配备了n-定向（全纯体积形式）的复 n流形。Ricci 平坦 Kähler 度量的概念不会直接发挥作用，而“Calabi–Yau 结构”也不涉及对此类度量的选取。

纯旋量超空间具有定向，当且仅当超平移代数中的平方为零元素簇是 Gorenstein [EHSW22]；一般而言，这一定向并非严格定向。

2.3. **局部李代数**。 CG 中给出的 局部李代数 （或者对我们而言，同义地说，局部 L_∞ 代数）这一概念 [CG21] 使我们能够研究光滑流形上的形式模问题层 M（“局部模问题”）。这一概念适用于研究经典微扰场论、无穷小对称、背景场的扰动等：它将局部性这一物理要求与对（形式）模空间几何的导出方法结合起来。我们在此回顾这一概念的定义，并稍作修改，将其置于 §2.1的框架中。

定义 2.11 （比较 [CG21，定义 3.1.3。1]）。设 $(M,\mathcal{O})$ 是一个光滑微分分次环化流形。一个$\mathcal{O}$ 上的局部李代数$\mathcal{O}$ 由以下部分组成：

- 一个微分分次 O-模的层 L，其中 L$_\#$ 在 C^∞ 上局部自由且具有有限秩；
- 一组分次反对称多微分算子

$$\mu_n\colon \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}[2-n]$$

对于 $n \geq 2$，这些算子连同微分一起赋予 L 一个 L_∞ 代数层的结构。

根据对 $\mathcal{O}$ 的假设，任何 $\mathcal{O}$ 上的局部李代数都自动是 C^∞ 上的局部李代数，因此符合 [CG21] 的定义。此定义经适当调整后（*mutatis mutandis*） 适用于任何具有 Cfine 的情形；例如，适用于光滑超流形。

注 2.12。 我们强调，在应用于场论的语境中，局部李代数的定义要求其由无约束的自由场呈现。所有规范对称性和约束都必须通过引入幽灵场、反场或其他类似的非零上同调次数生成元，得到适当消解。此要求确保场论能够正确地推广到任意时空，而无需处理与层上同调相关的问题。

注 2.13。 导出变形理论基本定理给出了形式模问题与 L_∞ 代数之间的等价。（参见 [Pri10；Lur11], ，该理论建立在 Deligne 和 Drinfeld 等人早期思想的基础之上。）这种等价性构成了 [CG17；CG21]中所发展的微扰场论及其对称性研究方法的基础。此处不作完整回顾，仅简要介绍相关内容，以明确下文将使用的术语和记号；更多细节可参见 [CG21，附录 A],以及后续文献。

按照 [BY16附录 A], 中的论述，对于任意导出栈 X 以及任意选定的点 $x \in X$，我们可以用一个图表概括该定理的基本要素：

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{(formal derived stack)} & \widehat{X}_x \underset{B}{\overset{\mathbb{T}[-1]}{\rightleftarrows}} \mathbb{T}_x[-1]X & (L_\infty \text{ algebra}) \end{array} \tag{1}$$

在 -1处的 x移位切复形 $\mathbb{T}_x[-1]X$携带一个自然的 L_∞ 代数结构。根据定义，形式导出栈具有唯一的点，因此，将形式导出栈映射到其基点处的-1移位切复形是规范的。这就是（1）底行中从左到右的箭头。

从右向左推导时，我们使用*Maurer–Cartan*元函子（此处记为 B），如 [Hin01; Get09]所研究的那样。以下构造的技术细节对我们并不重要，读者完全可以忽略；不过，我们提及这些细节，是为了指出分次约定中的一个微妙之处。形式导出栈由其点函子表示，这是一个从微分分次阿廷代数到满足某些下降性质的单纯集合的函子。对于一个极大理想为 A 的阿廷代数$\mathfrak{m}$，Maurer–Cartan元函子 $B\mathfrak{g}$ 赋予其如下单纯集合： n-单纯形是标准 n-单纯形上的局部常值Maurer–Cartan方程解：

$$x \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m} \otimes \Omega^\bullet(\Delta^n) \colon \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mu_n(x, \ldots, x) = 0.$$

线性化 $\mathbb{T}(B\mathfrak{g})$是BV形式体系中场论的场空间，并与 $\mathfrak{g}[1]$有典范同一。相应地，这类场论的可观测量——即定义在场空间 $\mathfrak{g}[1]$ 上并配备BV微分的函数——可识别为Chevalley–Eilenberg上链$C^\bullet(\mathfrak{g})$。也可以按照自己的偏好，将 $C^\bullet(\mathfrak{g})$视为配备同调向量场的分次流形。在下文中可能会用到这两种约定，但我们会尽量始终采用此处确立的记号和术语，以免产生歧义。

我们还需要局部模问题上的向量丛这一概念。给定 M 上的局部李代数 L，这样的向量丛由以下数据构成： M 上一个由微分分次 O-模组成的局部半自由层 $\mathcal{V}$ ，以及一组多微分算子

$$\rho^{(n)} \colon \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

对于 $n \geq 1$，它们与微分一起使 $\mathcal{V}$ 成为 L 上的 L_∞-模层。在任意开集 U 上，取系数于该模的 Chevalley–Eilenberg微分使 $C^\bullet$(L $\mathcal{V}$) 成为 $C^\bullet$(L) 上的半自由微分分次模，我们将其视为 U 上模问题对应丛的截面。例如，局部模问题的切丛和余切丛分别

通过取 $\mathcal{V} = \mathcal{L}[1]$ 或 $\mathcal{V} = \mathcal{L}^!$[−1]来表示。更多细节请参阅 [BY16，§2] 。

场论中的任何对称性都可以由一个局部李代数 G 来表示。相应的耦合使我们能够将该理论视为形式空间层 BG 上的一个族，并将其理解为“与背景场耦合”。此外，任何采用 Batalin–Vilkovisky 形式的微扰场论都包含一个局部李代数 L；于是，壳上场构型的模空间为 BL，而 BV 场的空间为 L[1]。总之，微扰（拉格朗日）场论由某些具有一项额外结构的特殊局部李代数来描述，下面我们将转而讨论这一结构。

2.4. **移位辛结构与接触结构。** 在导出代数几何背景下对移位辛结构的形式研究始于 [PTVV13], ，但这类结构的首个实例是 反括号 ，它出现于 Batalin–Vilkovisky 形式 [BV81；BV84], 此外，物理学文献中已有大量相关先行研究，我们无法在此一一完整列举。

尽管移位辛结构的概念与模型无关，但在物理学背景下，人们通常研究场空间 L[1] 上的（局部版本的）严格的移位辛结构。这种结构由一个分次交错同构定义

$$\omega\colon \mathcal{L}[1] \to (\mathcal{L}[1])^![-1] \cong \mathcal{L}^![-2]$$

它是 M 上的微分分次 O-模层之间的同构。这正是本文所需的全部内容，因此我们不全面回顾这一概念。不过需要指出的是，这一概念存在许多弱化形式。 ω 可以是一个在上链层面不可逆的拟同构；也可以是一个微分算子；或者可以由移位预辛结构或泊松结构等退化程度更高的对象取代。

Grabowski 在 [Gra13], 中定义了移位接触结构的概念，文中还研究了接触 *Courant* 锚丛的概念。Grabowski 证明，他的概念源于如下等价关系的推广：在 $E \to M$ 上的 Courant 代数丛结构与由2移位辛微分分次流形上的哈密顿同调向量场之间的等价关系；该流形由 E 构造而成。推广到接触情形后，这一概念归结为对通常 Courant algebroid 公理的推广，其中配对取值于 M上的一个线丛。此前 [Bar13], 也研究过这一结构，并称之为“共形 Courant 锚丛”。我们预计，本文的构造可以直接推广到这一情形，但此处不作明确探讨。

近来，移位接触结构在导出代数几何的背景下得到了研究 [Ber24a；Ber24b；Ber24c], ，并且在光滑导出几何的背景下也得到了研究 [MTV24；Mag25]。导出栈 X 上的这类结构可以有多种呈现方式，但可以将其理解为一个映射：从 X 的切复形 m到 X上的一个 m移位线丛 X，并满足适当的非退化条件。下文中，我们会将自己的构造视为与这些构造的某种版本密切相关，但同样将其设定为局部于某个光滑时空 M。不过，我们强调，我们的结果并不依赖于这种解释，而且本文不发展关于这类局部接触结构的任何基础理论。

3. Courant代数丛

3.1. **微分分次环化流形上的 Courant代数丛。** 我们首先引入我们所关注的核心结构。首先，回顾一下存在一个自然映射 $d_{\mathcal{O}}\colon\ \mathcal{O} \to (\mathrm{Der}\,\mathcal{O})^\vee$，其中 $\mathrm{Der}\mathcal{O}$ 表示$\mathcal{O}$-模 $\mathcal{O}$的导子。[2] 这可以通过要求以下关系成立来定义：

$$i_X d_{\mathcal{O}} f = (-1)^{|X|} X f$$

[2]我们对 O 所作的上述假设，使 Der O 在我们考虑的例子中成为切复形的一个模型，因此这里无需担心导出方面的微妙问题。

对所有 $f \in \mathcal{O}$ 和 $X \in \mathrm{Der}\mathcal{O}$，这与 [KSCV25c]的约定一致。映射 $d_{\mathcal{O}}$ 可扩张为 $(\mathrm{Der}\mathcal{O})^{\vee}$ 上的外代数关于 $\mathcal{O}$的一个导子。

定义 3.1. 设 (M,O) 是一个微分分次环化流形。O 上的一个（严格）*Courant*代数丛由以下数据给出：

- 一个微分分次 O-模层 E（其中 $\mathsf{E}_{\#}$ 在 Ω^0 上局部自由且有限秩）；
- 一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，记作 η，视为自对偶同构 $\mathsf{E} \to \mathsf{E}^{\vee}$；
- 一个 O-线性映射 $\rho\colon \mathsf{E} \to \mathrm{Der}\,\mathsf{O}$，称为锚映射；
- 一个向量空间映射 $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathsf{E} \otimes_{\mathbb{k}} \mathsf{E} \to \mathsf{E}$。

The这些数据须对所有齐次的 $u, v, w \in \mathsf{E}$，$f \in$满足以下性质 $\mathcal{O}$:

(1) “莱布尼茨：”

$$[u, fv] = (-1)^{|f||u|} f[u, v] + (-1)^{u}(\rho(u)f)v.$$

(2) “反对称性失效：”

$$[u, v] + (-1)^{|v||u|}[v, u] = \mathcal{D}\langle u, v\rangle,$$

其中 $\mathsf{D} : \Omega^0 \to \mathsf{E}$ 是由复合映射 $\eta^{-1}\rho^{\vee}d_{\mathcal{O}}$ 给出的映射，因此 $\langle u, \mathsf{D}f\rangle = \rho(u)$ f.

(3) “配对相容性：”

$$\rho(u)\langle v, w\rangle = \langle [u, v], w\rangle + (-1)^{|u||v|}\langle v, [u, w]\rangle.$$

(4) “雅可比恒等式：”

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{|u||v|}[v, [u, w]].$$

也就是说, E 中元素在左侧通过括号运算所给出的伴随作用，本身就是括号的一个导子 t.

注意，我们的定义是 [Roy09中定义 2 的一个小变体。8], 该文在环化空间上定义了 Courant 代数丛的概念。在 Roytenberg 的定义中，研究的是 $\mathcal{O}$ 上的 Courant–Dorfman 代数层，并不要求 $\mathcal{E}$ 局部自由，也不要求 η 非退化。这里，我们允许 $\mathcal{O}$ 是微分分次环，且 $\mathcal{E}$ 是微分分次模，但要求 η 非退化且局部半自由。在更广泛的文献中，“Courant 代数丛”通常指向量丛，而非其截面层；不过，Serre–Swan 定理表明，这一区别无关紧要 [Swa62], 而且，无论如何，Roytenberg 的定义都更为一般。

注 3.2. 本文只采用严格意义上的 Courant 代数丛概念，并使用显式模型。这里我们不给出任何显然与模型无关的 Courant 锚丛结构定义。不过，本文主要研究的是与此类 Courant 代数丛相关的各种局部 L_∞ 代数，它们所需的基础理论已相当完善。因此，我们允许自己隐式地使用局部 L_∞ 代数之间的等价；例如，当 M 是复流形时，我们不会区分 $\mathrm{Der}\,\Omega^{0,\bullet}(M)$ 与 $\Omega^{0,\bullet}(M, T^{1,0}M)$。同样可以合理地设想，反过来采取这样的观点：带有适当移位辛结构或移位接触结构的形式模问题，可以用来定义 一种与模型无关的 Courant 代数丛概念。

显然存在一个与之平行的概念，即 O 上的李上同向量丛，我们将在后文中自由地引用它。

例 3.3. 对任意微分分次环化流形 (M,O)，存在一个 标准 *Courant* 锚丛，定义为取

$$\mathcal{E} \coloneqq \mathrm{Der}\,\mathcal{O} \oplus (\mathrm{Der}\,\mathcal{O})^{\vee}.$$

我们赋予其 Courant代数丛结构，该结构通过以下公式定义于齐次元素上；我们将这些元素记为 $x + \alpha$（与 $|x| = |\alpha|$一起）或类似形式。配对和锚映射分别为

$$\langle x + \alpha, y + \beta\rangle = (-1)^{|x||y|}\alpha(y) + \beta(x), \qquad \rho(x + \alpha) = (-1)^{|x|}x,$$

括号为

$$[x+\alpha, y+\beta] = L_x^{\mathcal{O}} y + L_x^{\mathcal{O}} \beta - (-1)^{(|x|+1)|y|} i_y d_{\mathcal{O}} \alpha.$$

这里， $L_x^{\mathcal{O}} y$ 是导子的交换子，而 $L_x^{\mathcal{O}} \beta$ 的定义要求 Der O 与 (Der O)$^\vee$ 之间的配对保持不变。

定义 3.4. 给定 O 上的 Courant代数丛 E 和 $u \in$E，我们通过其在 O 或 E 的截面上的作用定义广义李导数$\mathcal{L}_u$，如下：

$$\mathcal{L}_u f = \rho(u) f, \qquad \mathcal{L}_u v = [u, v], \qquad \forall f \in \mathcal{O}, \quad v \in \mathcal{E}.$$

它自然 地延拓为张量积和（shriek）对偶上的导子；在后一种情况下，通过要求 g

$$\int_M f \mathcal{L}_u \mu = -(-1)^{|f|\cdot|u|} \int_M (\mathcal{L}_u f) \mu,$$

对所有 $\mu \in$ O$^!$ 以及紧支撑的 $f \in$O,

注记 3.5. 在本文余下部分，我们只考虑生成元集中于零次的 O-Courant 代数丛。因此，为了便于阅读，今后我们总是假设公式中出现的所有对象都是偶的。推广到任意奇偶性是直接的。

引理 3.6. 设 $\mathcal{E}$ 是 *O* 上的 *Courant*代数丛。那么 ρ 保持括号，即

$$\rho([u, v]) = [\rho(u), \rho(v)], \qquad \forall u, v \in \mathcal{E}.$$

此外，下面是一个 $\mathcal{O}$-模的（自对偶）复形：

$$0 \longrightarrow \operatorname{Der} \mathcal{O}^\vee \xrightarrow{\eta^{-1}\rho^\vee} \mathcal{E} \xrightarrow{\rho} \operatorname{Der} \mathcal{O} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

证明. 第一个断言是标准结果，可通过在 u、 v 和 fw 的雅可比恒等式中反复使用莱布尼茨性质得出。将 ρ 应用于 $[u, v] + [v, u] =$D$\langle u, v\rangle$，我们便得到 $\rho \circ$D $= 0$。由于它可经由导子 $d_{\mathcal{O}}$ 分解为

$$\rho \circ \mathcal{D} = \rho \eta^{-1} \rho^\vee d_{\mathcal{O}},$$

因此我们得出线性映射 $\rho \eta^{-1} \rho^\vee$ 为零。 □

Roytenberg 将该序列称为 $\mathcal{E}$ [Roy09 中的切复形 (2.4)]。

定义 3.7。 如果序列 (2) 是正合的，我们称该 Courant代数丛为正合。更一般地，如果锚映射 ρ 是满射，则称 Courant代数丛是传递的。

注释 3.8。 回顾一下，如果向量子空间 $C \subset (E, \eta)$ 满足 余各向同性 条件 $C^\perp \subset C$。取q: $E \to E/C$ 为商映射，该条件可改写为 $\operatorname{im}(\eta^{-1} q^\vee) \subset \ker(q)$，即$q\eta^{-1} q^\vee = 0$。应用第一同构定理，引理 3.6的第二个陈述因此等价于

$$\ker \rho \text{ is coisotropic.}$$

例 3.9。 如果 $\mathcal{O}$ 是流形上 C^∞ 的 $\mathbb{R}$值光滑函数的层，那么定义 3.1就恢复了标准的（光滑）*Courant* 代数丛 [LWX97]定义。换言之，$\mathcal{E}$ 对应于实向量丛 $E \to M$的截面，并进一步配备纤维内积、一个向量丛映射 $E \to TM$以及 $\Gamma(E)$ 上的括号，满足公理 (1)–(4)。

一种光滑 Courant代数丛结构的简单例子，可以从 M 上的平坦主 G-丛构造而来，其中实李代数 $\mathfrak{g} =$ Lie(G) 配备了非退化不变内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$。将伴随向量丛记作 ad$_G$，则该 Courant代数丛为

$$\mathcal{E} = \Gamma(TM \oplus T^*M \oplus \mathrm{ad}_G), \qquad \langle x+\alpha+s, y+\beta+t\rangle = \alpha(y) + \beta(x) + \langle s, t\rangle_{\mathfrak{g}}, \qquad \rho(x+\alpha+s) = x,$$

其括号为

$$[x+\alpha+s, y+\beta+t] = L_x y + (L_x\beta - i_y d\alpha + \langle \nabla s, t\rangle_{\mathfrak{g}}) + (\nabla_x t - \nabla_y s + [s,t]_{\mathfrak{g}}),$$

其中 L 表示李导数。事实上，每个传递Courant代数丛在局部都具有这种形式 [Š98]。确实，由于这一结论是局部的，且主丛在局部平凡，因此只需考虑平凡的主 G-丛作为局部模型。如果 G 是平凡的，这就归结为标准光滑*Courant*代数丛在 M 上的情形，参见例 3.3。

例 3.10. 稍作修改，我们可以令$\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 和 $\mathsf{O} = C^\infty_{\mathbb{C}}$为 M 上取值于 $\mathbb{C}$ 的光滑函数层。于是，O 上的Courant代数丛由一个复向量丛描述，该丛配备一个取值于 $\mathbb{C}$ 的配对、其截面层上的一个 $\mathbb{C}$-双线性映射，以及一个锚映射 $E \to TM \otimes \mathbb{C}$，并满足通常的公理。

例 3.11. 若 $\mathcal{O}$ 是复流形上的全纯函数层，则定义3.1还原了全纯 *Courant algebroid* [Gua14], ，即复流形上的全纯向量丛 $E \to M$，其配备了纤维内积、全纯映射 $E \to T^{1,0}M$，以及定义在层 $\mathcal{E}$ （ E 的全纯截面层）上的括号，满足公理（1）–（4）。

全纯 Courant algebroid 的一个例子[3] 可以从一个平坦全纯主 G-丛出发构造，其中（复李代数）$\mathfrak{g}$ 带有不变内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$。层 $\mathcal{E}$ 于是由 $T^{1,0}$的全纯截面组成$M \oplus T^{*1,0}M \oplus \mathrm{ad}_G$，其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 并且 ρ 的形式与例 3.9中相同，且括号为

$$[x+\alpha+s, y+\beta+t] = L_x y + (L_x\beta - i_y \partial\alpha + \langle \nabla s, t\rangle_{\mathfrak{g}}) + (\nabla_x t - \nabla_y s + [s,t]_{\mathfrak{g}}).$$

A所得结果中，在平凡群 G 的情形下，这就是标准全纯 *Courant* 锚丛。

例 3.12。再次设 M 为复流形。其上的标准 Courant 代数丛（即具有 $\mathsf{O} = (\Omega^{0,\bullet}, \bar\partial)$）具有如下形式：

$$\mathcal{E} = (\Omega^{0,\bullet}(T^{1,0}M \oplus T^{*1,0}M), \bar\partial),$$

其中，对于任意 $\zeta,\ \xi,\ \vartheta,\ \kappa \in \Omega^{0,\bullet}$、$y,\ z \in \Gamma(T^{1,0}M)$ 以及 $\alpha,\ \beta \in \Gamma(T^{*1,0}M)$，我们有

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta\otimes y + \xi\otimes\alpha)\vartheta &= \zeta\wedge L_y\vartheta\\
\langle \zeta\otimes y + \xi\otimes\alpha, \vartheta\otimes z + \kappa\otimes\beta\rangle &= \zeta\wedge\kappa\,\beta(y) + \xi\wedge\vartheta\,\alpha(z)\\
[\zeta\otimes y, \vartheta\otimes z] &= \zeta\wedge\vartheta\otimes L_y z + \zeta\wedge(L_y\vartheta)\otimes z - (L_z\zeta)\wedge\vartheta\otimes y\\
[\zeta\otimes y, \kappa\otimes\beta] &= \zeta\wedge\kappa\otimes(\partial i_y + i_y\partial)\beta + \zeta\wedge(L_y\kappa)\otimes\beta + (\mathcal{D}\zeta)\wedge\kappa\,\beta(y)\\
[\xi\otimes\alpha, \vartheta\otimes z] &= \xi\wedge\vartheta\otimes i_z\partial\alpha - (L_z\xi)\wedge\vartheta\otimes\alpha + (\mathcal{D}\xi)\wedge\vartheta\,\alpha(z)\\
[\xi\otimes\alpha, \kappa\otimes\beta] &= 0,
\end{aligned}$$

其中，$\mathcal{D}\vartheta$ 由$(-1)^{\deg\vartheta}\partial\vartheta$ 给出，随后进行自然同一识别$\Omega^{1,\bullet} \cong \Omega^{0,\bullet}\wedge\Omega^{1,0}$。注意，我们用Der $\Omega^{0,\bullet}$替换为准同构局部微分分次李代数$\Omega^{0,\bullet}(T^{1,0})$，如上文备注3.2所示。

3.2. **Courant 代数丛的刻画**。 在实际应用中，验证雅可比恒等式往往是建立 Courant 锚丛结构时最困难的部分。因此，借鉴 [Roy09] 的做法，引入 几乎 *Courant* 代数丛 的概念[4] ，这与定义 3.1 相同，只是去掉了条件（4）。

[3]这一构造由 [GFRT20] 引入，称为弦代数胚。[4]文献中，这一对象更常见的名称是度量代数胚 [Vai12]；我们在此采用不同的名称，以强调该对象与 Courant 代数丛公理弱化形式之间的关系。

有两个障碍可以衡量几乎 Courant 代数丛未能成为 Courant 代数丛的程度。本节将建立确保这些障碍消失的充分条件（引理 3.14）。在后文证明定理 4.5 时，我们将使用此引理。

定义 3.13. 设 E 是一个几乎 Courant 代数丛。雅可比子是定义在 E 的三元截面上的映射，其公式为

$$\mathrm{Jac}\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{E},\qquad (u,v,w)\mapsto [u,[v,w]]-[v,[u,w]]-[[u,v],w].$$

类似地，存在一个映射 R（在 [MR25]中称为曲率），定义在二元截面上，其公式 la

$$R\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to \mathrm{Der}\,\mathcal{O},\qquad (u,v)\mapsto \rho([u,v])-[\rho(u),\rho(v)].$$

显然，R 衡量锚映射作为莱布尼茨代数态射的失效程度，而雅可比子衡量雅可比恒等式的失效程度：当且仅当性质（4）成立时，它才为零。

引理 3.14. 设 $\mathcal{E}$ 是一个几乎 *Courant* 代数丛。

(1) 假设 $\ker(\rho)\subset\mathcal{E}$ 是余各向同性的。那么 R 是反对称的且为 $\mathcal{O}$-双线性的。假设 $R=0$。那么以下结论也成立：

(2) 对任意 $f\in\mathcal{O}$ 和 $u\in\mathcal{E}$，有 $[u,\mathcal{D}f]=\mathcal{D}\rho(u)f$。*(3)* 对任意 $f\in\mathcal{O}$，映射 $[\mathcal{D}f,\cdot]$ 是零映射。*(4)* Jac 是反对称的且为 $\mathcal{O}$-三线性的。

证明。我们依次证明这些结论。

(1) 注意到 R 在第二个自变量上是 O-线性的：

$$R(u,fv)-fR(u,v)=\rho([u,fv])-[\rho(u),f\rho(v)]=\rho(\rho(u)(f)\cdot v)-\rho(u)(f)\cdot\rho(v)=0.$$

对 R进行对称化，可得

$$R(u,v)+R(v,u)=\rho([u,v]+[v,u])=\rho(\mathcal{D}\langle u,v\rangle)=\rho\,\eta^{-1}\rho^{\vee}d_{\mathcal{O}}\langle u,v\rangle=0,$$

从而也确立了 R 关于其第一变元的 O-线性。

(2) 我们注意到

$$\langle[u,\mathcal{D}f],v\rangle=\rho(u)\langle\mathcal{D}f,v\rangle-\langle\mathcal{D}f,[u,v]\rangle=\rho(u)\rho(v)f-\rho([u,v])f=\rho(v)\rho(u)f=\langle\mathcal{D}\rho(u)f,v\rangle.$$

第一个等式来自配对相容性，第三个等式来自 $R(u,\ v)$ 为零，而第二个和第四个等式则由 D 的定义得出。

(3) 为了说明这一点，我们利用性质（2）和引理的第二个结论，注意到

$$[\mathcal{D}f,u]=-[u,\mathcal{D}f]+\mathcal{D}\langle\mathcal{D}f,u\rangle=-\mathcal{D}\rho(u)f+\mathcal{D}\rho(u)f=0.$$

(4) 从引理 3.6 的证明可知，R 为零意味着 Jac 关于第三个变元是线性的。因此只需证明反对称性。对于前两个变元，我们注意到

$$\mathrm{Jac}(u,v,w)+\mathrm{Jac}(v,u,w)=[([u,v]+[v,u]),w]=[\mathcal{D}\langle u,v\rangle,w],$$

根据引理的第三个结论，该式为零。最后，对于第二个和第三个变元，结论可通过计算得出：

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}(u,v,w)&=[u,\mathcal{D}\langle v,w\rangle]-[u,[w,v]]-\mathcal{D}\langle[u,v],w\rangle+[w,[u,v]]-\mathcal{D}\langle v,[u,w]\rangle+[[u,w],v]\\&=\mathcal{D}\rho(u)\langle v,w\rangle-\mathcal{D}\langle[u,v],w\rangle-\mathcal{D}\langle[u,w],v\rangle-\mathrm{Jac}(u,w,v)\\&=-\mathrm{Jac}(u,w,v).\end{aligned}$$

第一个等式使用性质（2），第二个等式使用引理的第二个陈述，第三个等式使用配对相容性（性质（3））。 □

推论3.15。 *Courant*代数丛恰好是这样一种几乎 *Courant* 代数丛：$\ker \rho$ 是余各向同性的，并且在$\mathcal{E}$的某个局部基下， R 和Jac 均为零。

4. 两种构造

4.1. **约化**。 Courant代数丛情形下也有辛约化的类似概念 [Š98]。全纯约化的概念曾在 [Gua14，附录A]中进行研究。我们在此回顾这一过程，并用我们的语言、在我们的普遍性层次上加以构建。

设 E 是 O 上的 Courant代数丛，且 $i\colon \mathrm{L} \subset \mathrm{E}$ 是一个（局部半自由的）对合各向同性子模层。最后两个条件意味着

$$[\mathcal{L},\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}, \qquad \langle \mathcal{L},\mathcal{L}\rangle = 0.$$

由各向同性可知，L 自然地是 O 上的李上同向量丛。由于

$$\langle [\mathcal{L},\mathcal{L}^\perp],\mathcal{L}\rangle = \langle \mathcal{L}^\perp,[\mathcal{L},\mathcal{L}]\rangle \subset \langle \mathcal{L}^\perp,\mathcal{L}\rangle = 0,$$

我们有 $[\mathrm{L},\ \mathrm{L}^\perp] \subset \mathrm{L}^\perp$，并且括号下降后在层 $\mathrm{F} \coloneqq \mathrm{L}^\perp/\mathrm{L}$ 上定义一个平坦 L-联络，其公式为

$$\nabla_l \pi(u) \coloneqq \pi([l,u])$$

对于 $l \in \mathrm{L}$ 和 $u \in \mathrm{L}^\perp$，其中 π 为自然商映射。然后我们可以定义这些层

$$\mathcal{O}^{\mathcal{L}} \coloneqq \{f \in \mathcal{O} \mid \rho(\mathcal{L})f = 0\}, \qquad \mathcal{F}^{\mathcal{L}} \coloneqq \mathcal{L}\text{-flat sections of } \mathcal{L}^\perp/\mathcal{L},$$

后者是前者上的模层。

定理 4.1 (O-Courant代数丛的约化$\mathcal{O}$-Courant代数丛)。 假设 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathcal{L}}} \mathcal{O} \to \mathcal{F}$ 是局部同构。则 $\mathcal{O}$-*Courant*代数丛$\mathcal{E}$ 上的结构诱导出$\mathcal{O}^{\mathcal{L}}$-*Courant*代数丛$\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$上的结构。

证明。 显然，E 上的锚映射可下降为一个良定义的映射 $\mathrm{F}^{\mathcal{L}} \to \mathrm{Der}\ \mathrm{O}^{\mathcal{L}}$。接下来，我们注意到，配对 η 可下降为 F 上的非退化配对，论证如下。考虑 O-模的定义短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^\perp \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{E} \xrightarrow{\ i^*\circ\eta\ } \mathcal{L}^\vee \longrightarrow 0.$$

对该列进行对偶化，并利用 η 的自对偶性，可得一个序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{E} \xrightarrow{\ j^*\circ\eta\ } (\mathcal{L}^\perp)^\vee \longrightarrow 0,$$

它与 $(\mathrm{L}^\perp)^\perp$ 的定义序列同一。因此 $\mathrm{L} = (\mathrm{L}^\perp)^\perp$。（注意，我们用到了 $(\mathrm{L}^\vee)^\vee = \mathrm{L}$，这正是使用关于 L 的假设之处；若 L 是有限生成且自反的，结论仍然成立。）

By 迷向性，$\mathrm{L} \subset \mathrm{L}^\perp$。由此我们得到一个两项上链复形的短正合列 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\ i\ } & \mathcal{E} & \xrightarrow{\ j^*\circ\eta\ } & (\mathcal{L}^\perp)^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\perp & \xrightarrow{\ j\ } & \mathcal{E} & \xrightarrow{\ i^*\circ\eta\ } & \mathcal{L}^\vee & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

这产生了一个上同调的长正合序列，其第一个连接映射是从 $\mathrm{F}^\vee$ 到 F 的映射；由正合性可知，它必然是一个同构。因此，F 上的诱导配对是非退化的。

根据内积的不变性，这下降为一个映射（我们也将在其上标注下标 L）

$$\langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle_{\mathcal{L}} \colon \mathcal{F}^{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathcal{L}}} \mathcal{F}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{O}^{\mathcal{L}}.$$

接下来，我们注意到根据假设，对于任意的 $u \in \mathrm{F}^{\mathcal{L}}$

$$\langle u, \mathcal{F}^{\mathcal{L}}\rangle_{\mathcal{L}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u, \mathcal{F}\rangle_{\mathcal{L}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0,$$

这表明 $\ker \eta_{\mathcal{L}} = 0$，由自对偶性也可知 $\operatorname{coker}\ \eta_{\mathcal{L}} = 0$，从而推出 $\mathrm{F}^{\mathcal{L}}$ 上的非退化性。

取 $u, v \in \mathrm{L}^{\perp}$，使得它们在 F 中的像是平坦的，即 $[\mathrm{L}\ u] \subset \mathrm{L}$ 且 $[\mathrm{L}\ v] \subset \mathrm{L}$。于是 $\langle [u,v], \mathrm{L}\rangle = \langle v, [u, \mathrm{L}]\rangle = \langle v, [\mathrm{L}\ u]\rangle = 0$，从而 $[u,v] \in \mathrm{L}^{\perp}$。此外，

$$[\mathcal{L}, [u,v]] \subset [[\mathcal{L}, u], v] + [u, [\mathcal{L}, v]] \subset [\mathcal{L}, v] + [u, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L},$$

这意味着 $[u,v]$ 在 F 中的像是平坦的。最后，我们需要检查结果与所选代表元 u，$v \in \mathrm{L}^{\perp}$ 无关，即需要检查 $[u, \mathrm{L}], [\mathrm{L}\ v] \subset \mathrm{L}$，这显然也成立。因此，$\mathrm{F}^{\mathcal{L}}$ 上的括号是良定义的。验证 Courant代数丛公理则很直接。□

例 4.2. 设 $\mathrm{E} = \Gamma(TM \oplus T^*M)$ 是复流形 M 上的标准光滑Courant代数丛，其中 $\mathrm{L} = \Gamma(T^{0,1}M)$。那么 $\mathrm{O}^{\mathcal{L}} = \mathrm{C}_{\mathrm{hol}}$ 是全纯函数层，而 $\mathrm{F}^{\mathcal{L}}$ 是标准全纯 Courant 锚丛。

例 4.3. 设 E 是 O 上的 Courant代数丛，且 L 是可积的拉格朗日子丛，即 $\mathrm{L}^{\perp} = \mathrm{L}$。则 $\mathrm{O}^{\mathcal{L}}$ 是由 $\rho(\mathrm{L})$ 不变函数构成的层，且 $\mathrm{F}^{\mathcal{L}} = 0$。例如，取光滑流形 M 上的标准光滑Courant代数丛 $\mathrm{E} = \Gamma(TM \oplus T^*M)$，令 $\mathrm{L} = \Gamma(TM)$，则得到 $\mathrm{O}^{\mathcal{L}} = \mathbb{R}$；或者令 $\mathrm{L} = \Gamma(T^*M)$，则得到 $\mathrm{O}^{\mathcal{L}} = C^{\infty}$。

—

4.2. **标量扩张**。设 $i\colon \mathrm{O} \to \mathrm{O}'$ 是交换微分分次代数（层）之间的一个映射。回顾一下，我们有相应的遗忘函子，

$$\mathrm{Res}_i\colon \mathcal{O}'\text{-Mod} \to \mathcal{O}\text{-Mod},$$

称为标量限制。该函子有一个左伴随，

$$\mathrm{Ind}_i\colon \mathcal{O}\text{-Mod} \to \mathcal{O}'\text{-Mod},$$

称为标量扩张；该伴随由以下事实体现：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathrm{Res}_i Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(\mathrm{Ind}_i X, Y) \tag{3}$$

对于任意 O-模 X 以及任意 O′-模 Y。

由于 Courant代数丛由微分算子定义，因此并不存在先验的方法，可以对 O 上的 Courant代数丛进行标量扩张，从而得到 O′ 上的 Courant代数丛。本节将说明，选择一项额外数据（大致而言，是将锚映射提升到 DerO′ 的一个提升，并满足某些条件），即可在

$$\mathcal{E}' := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'.$$

该结构是在 O′ 上扩展 E 上原有结构且具有指定锚映射的唯一 Courant代数丛结构。[5]

我们的结果实质上是对 Grützmann 的结果的共同推广 [Grü09]（关于全纯 Courant代数丛）以及 Li-Bland–Meinrenken 的结果 [LBM09]（关于将取值于二次李代数的局部常值函数上的括号扩展到 M 所有光滑 $\mathfrak{g}$ -值函数上的 Courant代数丛结构） $\mathfrak{g}$。更一般地，可以将它们视为把全纯微分算子唯一扩展到 Dolbeault 复形，从而扩展到作用于所有光滑函数的（∂-相容）微分算子这一构造的改编。在全纯情形下，提升的锚映射有自然的选取方式，稍后我们将对此作出说明；首先，我们明确一般情形所需的额外数据。

回顾可知，i 不会诱导从 Der O 到 Der O′ 的任何自然映射。相反，存在一对涉及 O′-模 Der(O,O′) 的映射。我们有如下映射：沿 i 的限制给出一个映射

$$i^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}\left(\mathrm{Der}\,\mathcal{O}', \mathrm{Der}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')\right).$$

[5]我们对光滑微分分次环化流形的结构层所作的假设意味着，此处无需考虑导出张量积。

另一方面，我们有 O-模的自然映射

$$\mathrm{Der}(\mathcal{O}) \xrightarrow{1\otimes i} \mathrm{Der}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}' \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}(\mathcal{O}, \mathcal{O}').$$

为了直观地理解这些映射，不妨设 O 是复流形上的全纯函数层 M，而 O′ 是复值光滑函数层。此时，Der(O) 可识别为全纯向量场，即 $(TM \otimes \mathbb{C})/T^{0,\,1}M$ 的全纯截面；Der(O′) 可识别为 $TM \otimes \mathbb{C}$ 的光滑截面。中间对象 Der(O，O′) 则对应于 $(TM \otimes \mathbb{C})/T^{0,\,1}M$ 的光滑截面；自然提升将它们识别为全纯切丛 $T^{1,\,0}M$ 的光滑截面。

更一般地，我们通过以下定义来刻画所需的数据。

定义 4.4。 设 E 是 O 上的 Courant代数丛，且 $i\colon \mathrm{O} \to \mathrm{O}'$ 如上所述。锚映射的提升 是一个 O-模映射

$$\hat{\rho}\colon \mathcal{E} \to \mathrm{Res}_i \,\mathrm{Der}\,\mathcal{O}'$$

满足以下三条性质：

(1) $\hat{}\rho$ 保持括号，即

$$\hat{\rho}([u,v]) = \hat{\rho}(u)\hat{\rho}(v) - \hat{\rho}(v)\hat{\rho}(u);$$

(2) $\hat{}\rho$ 到$\mathcal{O}'$上的线性映射 $\rho'\colon \mathcal{E}' \to \mathrm{Der}\,\mathcal{O}'$——利用伴随（3）——扩张后延拓了原锚映射，即下图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}' & \xrightarrow{\quad\rho'\quad} & \mathrm{Der}\,\mathcal{O}' \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_i\,\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ \mathrm{Der}\,\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}' & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \end{array} \tag{4}$$

交换。

(3) ker(ρ') 是余各向同性的。

定理 4.5 (Courant代数丛的标量扩张)。 对于任意 *Courant*代数丛 $\mathcal{E}$ 以及锚映射的任意提升$\hat{}\rho$，在$\mathcal{E}'$上存在唯一的 *Courant*代数丛结构，使其定义在$\mathcal{O}'$ 上，且对应的锚映射为 ρ'，并将给定的$\mathcal{E}$上的 *Courant*代数丛结构限制于其上。

证明。 任意 Courant代数丛结构都由在截面空间的一组基上规定配对、锚映射和括号唯一确定。由于在我们的情形中，E 的截面在 O 上张成 E′，故唯一性成立。

我们通过将锚映射定义为 $\mathcal{E}'$，并将配对定义为 ρ' 来定义 $\eta' = \mathrm{Ind}_i\,\eta$上的运算。括号（先验地 定义在 $\mathcal{E} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{O}'$的元素对上）由以下公式定义（参见 [Grü09，第 49]页）

$$[u \otimes_{\Bbbk} a, v \otimes_{\Bbbk} b]' \coloneqq [u,v] \otimes_{\mathcal{O}} ab + v \otimes_{\mathcal{O}} a\hat{\rho}(u)b - u \otimes_{\mathcal{O}} b\hat{\rho}(v)a + b\langle u,v\rangle \mathcal{D}'a \in \mathcal{E}'.$$

现在我们按一种方便的顺序验证 Courant代数丛的公理，以及括号确实下降到 E′ 上这一事实。

◦ 反对称性未成立： 我们将括号对称化，并计算得

$$\begin{aligned} [u \otimes_{\Bbbk} a, v \otimes_{\Bbbk} b]' + [v \otimes_{\Bbbk} b, u \otimes_{\Bbbk} a]' &= ([u,v] + [v,u]) \otimes_{\mathcal{O}} ab + b\langle u,v\rangle \mathcal{D}'a + a\langle u,v\rangle \mathcal{D}'b \\ &= ab\mathcal{D}(\langle u,v\rangle) + (\mathcal{D}'a)b\langle u,v\rangle + a(\mathcal{D}'b)\langle u,v\rangle \\ &= \mathcal{D}'\left(ab\langle u,v\rangle\right) = \mathcal{D}'\langle u \otimes_{\Bbbk} a, v \otimes_{\Bbbk} b\rangle'. \end{aligned}$$

第二个等号利用了 $\mathcal{E}$ 上括号反对称性不成立这一点；第三个等号利用了定义 2 中的性质 (4.4)；最后一个等号则利用了 η' 的定义。

◦ 下降到 E′： 我们需要证明，该括号对所有形如以下形式的元素都为零

$$v \otimes_{\Bbbk} zb - zv \otimes_{\Bbbk} b,$$

其中 $z \in \mathcal{O}$。对于第二个自变量，我们看到

$$\begin{aligned}[u \otimes_{\Bbbk} a, v \otimes_{\Bbbk} zb]' - [u \otimes_{\Bbbk} a, zv \otimes_{\Bbbk} b]' &= [u,v] \otimes_{\Bbbk} zab - [u, zv] \otimes_k ab + v \otimes_{\mathcal{O}} a\hat{\rho}(u)(zb) - zv \otimes_{\mathcal{O}} a\hat{\rho}(u)b \\ &= -v \otimes \rho(u)z \cdot ab + v \otimes \hat{\rho}(u)z \cdot ab,\end{aligned}$$

它因 2 中关于 $\hat{}\rho$ 的条件而消失。由于反对称性失效，且关系中的第三项显然在理想上消失，我们推知括号在第一个自变量上也在理想上消失。因此，我们不再需要写 $\otimes_{\Bbbk}$；在证明的其余部分中，为简洁起见，$\otimes = \otimes_{\mathcal{O}}$。

◦ 莱布尼茨： 我们再次通过计算验证

$$[u \otimes a, v \otimes fb]' - f[u \otimes a, v \otimes b]' = v \otimes ab\hat{\rho}(u)f = \rho'(u \otimes a)f \cdot (v \otimes b).$$

◦ 配对相容性：最后，我们注意到

$$\begin{aligned}\rho'(u \otimes a)\langle v \otimes b, w \otimes c\rangle &= abc\,\rho(u)\langle v, w\rangle + a\langle v, w\rangle(c\hat{\rho}(u)b + b\hat{\rho}(u)c) \\ &= \langle [u,v] \otimes ab + v \otimes a\hat{\rho}(u)b, w \otimes c\rangle + \langle v, [u,w] \otimes ac + w \otimes a\hat{\rho}(u)c\rangle \\ &= \langle [u \otimes a, v \otimes b]', w \otimes c\rangle + \langle v \otimes b, [u \otimes a, w \otimes c]'\rangle \\ &\quad + \langle u \otimes b\hat{\rho}(v)a - \langle u, v\rangle b \cdot \mathscr{D}'a, w \otimes c\rangle + \langle v \otimes b, u \otimes c\hat{\rho}(w)a - \langle u, w\rangle c\mathscr{D}'a\rangle\,.\end{aligned}$$

我们看到，最后一个等式的第一行表达了配对相容性。第二行中的额外项可以改写为

$$\langle u, v\rangle b\Big(c\hat{\rho}(w)a - \langle w \otimes c, \mathscr{D}'a\rangle\Big) + \langle u, w\rangle c\Big(b\hat{\rho}(v)a - \langle v \otimes b, \mathscr{D}'a\rangle\Big),$$

因此，根据 D′ 的定义，它们消失。

由此我们证明了 $\mathscr{E}'$ 所具有的结构按照 §3.2的意义构成一个几乎 Courant 代数丛。利用（3），并注意到 Jac 和 R 在 $\mathscr{E}$的截面上均为零，而这些截面在 $\mathscr{E}'$ 上生成 $\mathcal{O}'$-模，根据推论 3.15，可得$\mathscr{E}'$ 是一个 Courant 代数丛。□

例4.6 （无穷小群作用所产生的 Courant 代数丛 [LBM09]）。设 M 是一个光滑流形，$(\mathfrak{g}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{g}})$ 是一个二次李代数，且 $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ 是 M上的局部常值函数层。则 $\mathscr{E} = \mathfrak{g}$ 定义了一个带有锚映射 $\rho = 0$ 的 $\mathcal{O}$-Courant 代数丛，其括号和内积在 $\mathscr{E}$ 上由 $\mathfrak{g}$上的括号和内积给出。

取 $\mathcal{O}' = C^\infty$ 为 i 中从局部常值函数到光滑函数的自然映射，则有$\mathscr{E}' = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty$ 由取值于 $\mathfrak{g}$的光滑函数构成。由于 $\operatorname{Der} C^\infty = \mathfrak{X}$ 是光滑向量场层，要指定 ρ的一个提升，即是指定一个李映射 $\hat{}\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}$，也就是说，指定 $\mathfrak{g}$在 M上的一个作用。注意，（3）中的伴随可由以下事实表示：我们既可以将 $\hat{}\rho$ 解释为上述 $\mathbb{R}$-线性映射，也可以等价地将其解释为光滑截面上的 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}$-线性映射，即一个丛映射 $\mathfrak{g} \times M \to TM$。

根据定理 4.5，$\mathscr{E}'$ 上的内积由扩张给出，而括号为

$$[x_1 \otimes f_1, x_2 \otimes f_2]' = [x_1, x_2]_{\mathfrak{g}} \otimes f_1 f_2 + x_2 \otimes f_1\hat{\rho}(x_1)f_2 - x_1 \otimes f_2\hat{\rho}(x_2)f_1 + f_2\langle x_1, x_2\rangle_{\mathfrak{g}}\mathscr{D}'f_1$$

要求 $\ker\rho'$ 在 $\mathscr{E}'$ 中为余各向同性，归结为以下陈述：任意点 $p \in M$的稳定子，即 $\ker\hat{}\rho_p = \{x \in \mathfrak{g} \mid \hat{}\rho(x)_p = 0\}$，均为余各向同性。这正是 [LBM09] 中所确定的条件。

在本文余下部分，我们将关注一类特殊的提升 $\hat{}\rho$，它们来自一种直接涉及结构层 O 与 O′ 的构造，而不引用任何特定的 Courant代数丛结构。

命题 4.7. 固定一个交换微分分次代数映射 $i:\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$，并设 $\lambda:\operatorname{Der}\mathcal{O}\to\operatorname{Res}_i\operatorname{Der}\mathcal{O}'$ 为一个保括号映射，使得下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{Der}\mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda} & \operatorname{Res}_i\operatorname{Der}\mathcal{O}' \\ & \searrow^{i} & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ & & \operatorname{Res}_i\operatorname{Der}(\mathcal{O},\mathcal{O}').\end{array} \tag{5}$$

那么，对于任意一个底空间为 $\mathcal{E}$ 的 *Courant*代数丛 $\mathcal{O}$，复合映射 $\hat{}\rho:=\lambda\circ\rho$ 是锚映射的一个提升（参见 4.4）。

证明。 由于 $\hat{}\rho$ 是两个保括号映射的复合，因此它也保括号。接下来，我们注意到 $\operatorname{Ind}_i\lambda$ 在（4）中定义了一个从左下角到右上角的对角映射。上、下两个三角形的交换性分别对应于 $\hat{}\rho:=\lambda\circ\rho$ 以及（5）的定义。最后，余迷向性由下式可得

$$\hat{\rho}\,\eta^{-1}\hat{\rho}^{\vee}=\lambda(\rho\,\eta^{-1}\rho^{\vee})\lambda^{\vee}=0. \qquad \square$$

例 4.8 (从全纯到光滑)。 设 $\mathcal{O}$ 是复流形上的全纯函数层，$\mathcal{O}'$ 是复值光滑函数层，而 $i:\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$ 是自然的包含映射。取λ 为从全纯向量场到光滑向量场的自然嵌入，即可得到 Grü09] 将全纯 Courant algebroid 扩张为光滑复值 Courant algebroid 的过程。

另一个有趣的例子是，取 i 为从全纯函数到 Dolbeault 复形的映射$(\Omega^{0,\bullet},\bar{\partial})$。下文 §6.2 将对此作更详细的考察。

5. Courant 接触模型

5.1. **Roytenberg–Weinstein 局部李代数**。读者或许已经注意到，Courant代数丛定义中的条件（2）表明，括号运算的对称化属于算子$\mathcal{D}$的像，而配对则体现了这一点。因此，$\mathcal{E}$ 上的括号不满足李括号的条件，其偏离李括号的部分在上链复形中是正合的

$$\operatorname{Cone}(\mathcal{D})=\ \mathcal{O}[1]\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{E}.$$

因此，我们自然会想到利用$\mathcal{E}$ 上的 Courant 锚丛结构，在 L_∞ 代数$\operatorname{Cone}(\mathcal{D})$上定义一个局部 [RW98]。Roytenberg 和 Weinstein 正是这样做的。为此，他们将括号反对称化，从而以反对称性的失效换取雅可比恒等式的失效。后者同样是正合的，可以通过引入一个三元高阶括号运算来修正。

定义 5.1. 设 E 是 O 上的 Courant代数丛。E 的 *Roytenberg–Weinstein*局部李代数 是微分分次 O-模构成的局部自由层

$$\mathrm{RW}(\mathcal{E}):=\operatorname{Cone}(\mathcal{D}),$$

视为具有以下运算的局部李代数：

- 微分由该微分分次 O-模上的微分 D $+\bar{\partial}$ 给出。
- Th0 次截面之间的二元括号是 Courant 括号的对称化 t:

$$\mu_2(\xi_1,\xi_2):=\tfrac{1}{2}([\xi_1,\xi_2]-[\xi_2,\xi_1])=[\xi_1,\xi_2]-\tfrac{1}{2}\mathcal{D}\eta(\xi_1,\xi_2).$$

- 截面 $u\in$E 与截面 $f\in$O$[1]$ 的二元括号定义为

$$\mu_2(\xi,f)=\tfrac{1}{2}\langle\xi,\mathcal{D}f\rangle=\tfrac{1}{2}\rho(\xi)f.$$

- 有一个三元括号，用来修正雅可比恒等式失效的问题，它是

$$\mu_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=-\tfrac{1}{6}\left(\langle[\xi_1,\xi_2],\xi_3\rangle+\langle[\xi_2,\xi_3],\xi_1\rangle+\langle[\xi_3,\xi_1],\xi_2\rangle\right)\in\mathcal{O}[1].$$

这里我们用字母 ξ 表示 E 的截面，用字母 f表示 O[1] 的截面；在下文提及模型的场时，我们将沿用这一记法。

在$\mathcal{E}$ 上的锚映射成为从 $\mathrm{RW}(\mathcal{E})$ 到 $\mathrm{Der}\mathcal{O}$ 的局部李代数映射，从而 $\mathrm{RW}(\mathcal{E})$ 自然是一个高阶李代数丛。事实上，Roytenberg–Weinstein局部李代数可以看作带联络结构的gerbe的Atiyah代数丛。（参见 [Š98，书信 5], 以及近期在 [BS23] 中的讨论。）如上文§2.3所回顾，$\mathrm{RW}(\mathcal{E})$ 给出一个形式模空间问题层，我们将余层 $C^\bullet(\mathrm{RW}(\mathcal{E}))$ 视为该空间层上的函数。我们以如下说明结束本讨论：Chevalley–Eilenberg微分（或同调向量场）可以显式地写为

$$Q_{\mathrm{RW}} = \int_M \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi f - \frac{1}{12}\langle \xi, \mathcal{L}_\xi \xi\rangle\right)\frac{\delta}{\delta f} + \left(\mathcal{D}f + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \xi\right)\frac{\delta}{\delta \xi}. \tag{6}$$

5.2. **主作用量**。现设一个Courant代数丛 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{O}$ 上配备了固定的n-定向（依定义 2.6的意义），由一个截面给出

$$\lambda_0 \in \mathcal{O}^!{}[-n].$$

为简洁起见，我们称 λ_0 为非退化。接下来引入如下由分次局部自由 O-模构成的层：

$$\mathcal{M}[1] = \mathcal{O}[2] \oplus \mathcal{E}[1] \oplus \mathcal{O}^!{}[-n] \tag{7}$$

并将其视为 Courant 接触模型的场空间，尽管完整的微分还包含其他项；请参阅后文的备注 5.4。我们将在下文为 $\mathcal{M}$赋予局部李代数结构。我们将场记为 $(f,\ \xi,\ \lambda')$，沿用 $\mathrm{RW}(\mathcal{E})$. 的记号约定。

场 λ' 可解释为背景定向 λ_0 的形变；据此，我们定义$\lambda = \lambda_0 + \lambda'$，并使用变量 λ 写出所有公式。此外，可逆函数群 $\mathrm{O}^\times$ 在 $\mathcal{M}[1]$ 上有一个自然作用，即通过缩放定向 λ；此作用不保持λ_0，但会将非退化定向映射为非退化定向。

定义局部1-形式

$$\vartheta := \int \lambda\left(\delta f + \frac{1}{2}\langle \xi, \delta\xi\rangle\right) \tag{8}$$

在 $B\mathcal{M}$ 上。注意，此形式关于场空间坐标 λ 是线性的。此外，将ϑ 视为 Liouville 1-形式，可在 $B\mathcal{M}$ 上定义一个正合的 $(2-n)$ 移位辛结构，其对应的局部闭2-形式为

$$\omega := \delta\vartheta = \int \delta\lambda\left(\delta f + \frac{1}{2}\langle \xi, \delta\xi\rangle\right) + \frac{(-1)^n}{2}\lambda\langle \delta\xi, \delta\xi\rangle \tag{9}$$

注意，这个辛形式不是以 Darboux形式写出的。

引理 5.2。 次数为 $3-n$ 的泛函的哈密顿向量场

$$S_{\bar\partial} = \int_M \lambda\left(\bar\partial f + \frac{1}{2}\langle \xi, \bar\partial\xi\rangle\right)$$

¯是内部微分 ∂。

¯证明。 由于 ∂ 保持所有涉及的结构，我们有

$$i_{\bar\partial}\omega = i_{\bar\partial}\delta\vartheta = -L_{\bar\partial}\vartheta + \delta i_{\bar\partial}\vartheta = \delta i_{\bar\partial}\vartheta = -\delta\int_M \lambda\left(\bar\partial f + \frac{1}{2}\langle \xi, \bar\partial\xi\rangle\right). \qquad \square$$

定理 5.3。 次数为 $3-n$ 的作用泛函 $S = S_0 + S_{\bar\partial}$，其中

$$S_0 = \int \lambda\left(\mathcal{L}_\xi f + \frac{1}{6}\langle \xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle\right),$$

满足 $(\mathcal{M}[1], \omega)$ 上的经典主方程。

因此， S 在 $\mathcal{M}$上定义了一个局部李代数结构。相应的形式模空间问题就是 Courant 接触模型。

证明。 由于 $\bar{\partial}^2 = 0$，我们有 $\{S_{\bar{\partial}}, S_{\bar{\partial}}\} = 0$。此外，由于 $\bar{\partial}$ 保持 Courant 锚丛结构，我们也有 $\{S_0, S_{\bar{\partial}}\} = 0$。因此，只需验证 $\{S_0, S_0\} = 0$。

首先，在变分 $\xi \to \xi + \delta\xi$ 下，我们得到

$$\begin{aligned}\delta\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \xi\rangle &= \langle\mathcal{L}_\xi\delta\xi + \mathcal{L}_{\delta\xi}\xi, \xi\rangle + \langle\mathcal{L}_\xi\xi, \delta\xi\rangle = \langle 2\mathcal{L}_\xi\delta\xi + \mathscr{D}\langle\delta\xi, \xi\rangle, \xi\rangle + \langle\mathcal{L}_\xi\xi, \delta\xi\rangle \\ &= 2\langle\mathcal{L}_\xi\delta\xi, \xi\rangle + \mathcal{L}_\xi\langle\delta\xi, \xi\rangle + \langle\mathcal{L}_\xi\xi, \delta\xi\rangle = 3\langle\mathcal{L}_\xi\delta\xi, \xi\rangle,\end{aligned}$$

在相同的变分下，我们得到

$$\delta S_0 = \int_M \lambda(\mathcal{L}_{\delta\xi} f + \tfrac{1}{2}\langle\mathcal{L}_\xi\delta\xi, \xi\rangle) = \int_S \langle\delta\xi, (-1)^n\lambda\mathscr{D}f + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_\xi(\lambda\xi)\rangle.$$

因此，对于变分导数，我们有

$$\frac{\delta S_0}{\delta\xi} = (-1)^n\lambda\mathscr{D}f + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi(\lambda\xi), \qquad \frac{\delta S_0}{\delta f} = (-1)^{n+1}\mathcal{L}_\xi\lambda, \qquad \frac{\delta S_0}{\delta\lambda} = \mathcal{L}_\xi f + \frac{1}{6}\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle.$$

求解 $i_{X_{S_0}}\omega = -\delta S_0$，我们得到同调向量场

$$X_{S_0} = \int_M \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi f - \frac{1}{12}\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle\right)\frac{\delta}{\delta f} + \left(\mathscr{D}f + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\xi\right)\frac{\delta}{\delta\xi} + (\mathcal{L}_\xi\lambda)\frac{\delta}{\delta\lambda}. \tag{10}$$

请注意，这仅由上文式（6）中给出的 Roytenberg–Weinstein 局部李代数的同调向量场，以及表示李导数在体积形式空间上作用的项组成。

将其代入经典主方程，并利用

$$\langle\mathscr{D}f, \mathscr{D}f\rangle = 0, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi\xi} = 2\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\{S_0, S_0\} = X_{S_0}S_0 = \int_M &\frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\lambda)\mathcal{L}_\xi f - \frac{1}{12}(\mathcal{L}_\xi\lambda)\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathcal{L}_\xi(\lambda\xi), \mathscr{D}f\rangle + \frac{1}{2}(-1)^n\langle\lambda\mathscr{D}f, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle \\ &+ \frac{1}{4}\langle\mathcal{L}_\xi(\lambda\xi), \mathcal{L}_\xi\xi\rangle + (\mathcal{L}_\xi\lambda)\mathcal{L}_\xi f + \frac{1}{6}(\mathcal{L}_\xi\lambda)\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle \\ = \int_M &2(\mathcal{L}_\xi\lambda)\mathcal{L}_\xi f + (-1)^n\lambda\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi\xi} f + \frac{1}{3}(\mathcal{L}_\xi\lambda)\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle + \frac{1}{4}(-1)^n\lambda\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle \\ = (-1)^n\int_M &\lambda\left(-\frac{1}{3}\mathcal{L}_\xi\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle + \frac{1}{4}\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle\right) = (-1)^n\int_M \lambda\left(-\frac{1}{12}\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle + \frac{1}{3}\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi\xi\rangle\right).\end{aligned}$$

最后，我们注意到

$$\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle - \langle\xi, \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi\xi\rangle = \mathcal{L}_\xi\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \xi\rangle = \langle\xi, \mathscr{D}\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \xi\rangle\rangle = \langle\xi, \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi\xi}\xi + \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi\xi\rangle = 3\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi\xi\rangle,$$

这意味着

$$\langle\mathcal{L}_\xi\xi, \mathcal{L}_\xi\xi\rangle = 4\langle\xi, \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi\xi\rangle,$$

因此 $\{S_0, S_0\}$ 也消失。 □

注 5.4. 请注意，Courant 接触模型的场的上链复形并非仅仅是 (7)¯配备了 ∂。实际上，还有一个额外的微分，使其具有 $\mathcal{M}[1]$ 半自由 $\mathcal{O}$- 模结构。通过考察上同调向量场 (10) 的线性部分，我们看到，微分中的额外项由算子 $\mathscr{D}$ (将 $\mathcal{O}[2]$ 映射到 $\mathcal{E}[1]$) 和将 ξ映射到 $\mathcal{L}_\xi\lambda_0$ (将 $\mathcal{E}[1]$ 映射到 $\mathcal{O}^!{}[-n]$)。

5.3. **解释：接触结构与模空间。** 正如我们在证明中所见，局部李代数 $\mathcal{M}$ 是RW(E)与层$\mathrm{O}^!{}[-n-1]$关于由李导数给出的模结构的半直积。因此，它适合一个短正合列

$$0 \to \mathcal{O}^!{}[-n-1] \to \mathcal{M} \to \mathrm{RW}(\mathcal{E}) \to 0.$$

我们将此解释为 $B\mathrm{RW}(\mathcal{E})$上的纤维丛，其纤维同构于$(M,\mathcal{O})$上的定向层。这证实了§1中所给口号的模空间论解释：Courant 接触模型 $B\mathcal{M}$ 描述了 n-定向的模空间，这些定向在广义微分同胚下加以考虑，并在非退化定向附近形式地工作。如果我们跟随 [Š98], ，从一个作为带联络结构的gerbe的Atiyah代数丛的Courant代数丛开始，我们可以将 $B\mathcal{M}$ 解释为对的模空间，每个对由一个带联络结构的gerbe与一个定向组成，且仅在$(M,\mathcal{O})$的保结构微分同胚下加以考虑。

事实上，上述计算在该纤维化的纤维方向上隐式地作了整体处理，而在基方向上则作了形式处理。显然存在一种整体的非退化定向 λ，其层是 $\mathsf{O}^\times$ 上的一个扭子。我们可以将其视为阿贝尔形式模空间问题 $B\mathsf{O}^!\lbrack -n-1\rbrack$ 背后的正确整体对象。基的正确整体替代会更为微妙，因为 RW(E) 是非阿贝尔的；我们将在下文关于广义 G-结构的讨论中对此作出说明。

仔细考察便会发现，这符合移位接触结构理论的局部版本；该结构由 $B\mathrm{RW}(\mathcal{E})$ 上的任意一个局部接触形式定义，这些形式由 ϑ 通过将 λ 设为某个特定的非退化值而得到。遵循 [Ber24a], ，我们可以设想用 $B\mathcal{M}$的切丛的一个子丛来表示这一结构，这与经典上用超平面分布定义的方式相呼应。切丛由局部微分分次李代数 $C^\bullet(\mathcal{M},\ \mathcal{M}[1])$表示。对于 $\mathcal{E}$的一个显式基，我们可以将这个子丛视为由映射表示：

$$C^\bullet(\mathcal{M})\otimes\mathcal{E}[1]\to C^\bullet(\mathcal{M},\mathcal{M}[1]),\qquad e_\alpha\mapsto\frac{\delta}{\delta\xi^\alpha}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\xi^\beta\frac{\delta}{\delta f}.$$

现在回顾一下，流形 X 上的接触结构与由以下数据构成的元组之间存在经典等价关系：一个位于 X 上的主 $\mathbb{R}^\times$-丛 C，以及定义在 Tot(C) 上的恰辛形式 $\omega=d\vartheta$，其中ϑ 关于纤维坐标是线性的。在此等价关系下，(Tot(C) ω) 称为接触流形 X的辛化。显然，我们的构造应当符合这一理论的局部版本，而 Courant 接触模型可以解释为接触局部模空间问题 BRW(E)的辛化。

6. 扭曲超引力背景

6.1. $\mathcal{N}=1$ **十维超引力**。在 [KSCV25a; KSCV25c], 的基础上，我们现在来描述定义 $D=10$, $\mathcal{N}=1$ 与杨–米尔斯多重态耦合的超引力的扭曲超引力背景数据。我们将聚焦于欧几里得版本。[6] 在本节中，我们固定 $\mathcal{E}$ 为一个光滑传递Courant代数丛，对应于一个向量丛 $E\to M$，其中 维数 $M=10$。注意，这意味着 E的符号为 $(10+p,\ 10+q)$，其中 $p,\ q\geq 0$。我们记作

$$H\to M$$

M上的半密度线丛。我们首先定义该理论的玻色场内容，它由自旋结构和膨胀子组成。

定义 6.1。A 自旋结构 是将 E 的结构群约化至

$$\mathrm{Spin}(10)\times O(p,10+q)$$

沿着映射

$$\mathrm{Spin}(10)\times O(p,10+q)\to SO(10)\times O(p,10+q)\subset O(10+p,10+q).$$

特别地，自旋结构定义了一个正交分裂 $E=C_+\oplus C_-$，其符号分别为 $C_\pm$: (10，0) 和 (p，$10+q$)。子丛 C_+ 称为广义度量。记由 Spin(C_+) 关联的（复）手征旋量丛为 $S_\pm$，并令 $S=S_+\oplus S_-$。

[6]特别是，这意味着我们取费米子场为复数场。

在本文的语境中，我们还要求

$$\rho|_{C_+} : C_+ \to TM$$

是一个同构。由此可得 $\rho|_{C_-} : C_- \to TM \otimes \mathbb{C}$ 是满射（例如，参见 C_- 在 [KSCV25b]中的显式形式）。

定义 6.2。 A膨胀子是处处不消失的截面 $\sigma \in \Gamma(H)$。

给定一个自旋结构和一个膨胀子，便可定义广义列维-奇维塔联络 [CSCW11; GF19]。这类联络存在，但并不唯一；我们用 LC 表示它们的全体。重要的是，对于任意 $v \in \Gamma(C_-)$ 和 $\rho \in \Gamma(S \otimes H)$，表达式 $D_v\rho$ 和 $\not{D}\rho$ 与代表元 $D \in$LC 的选取无关，因此只依赖于自旋结构和膨胀子（以及 v和 ρ）。类似地，用下标 $\pm$表示到 $C_\pm$ 上的投影，对于任意广义列维-奇维塔联络，我们有 $D_{u_\pm} v_\mp = [u_\pm, v_\mp]_\mp$，对任意 $u, v \in \Gamma(E)$ 均成立。

定义 6.3。 给定一个自旋结构和一个膨胀子，这些数据的扭曲数据 由一个处处不为零的旋量 $e \in \Gamma(S_+ \otimes H)$ 构成，满足

$$\bar{e}\gamma_a e = 0, \qquad \not{D} e = 0, \qquad D_v e = 0, \qquad \forall v \in \Gamma(C_-). \tag{11}$$

由自旋结构、膨胀子及相应扭曲数据组成的元组称为扭曲超引力背景。

注 6.4。 为了与通常的 $\mathcal{N} = 1$ 超引力表述（通常采用洛伦兹符号）建立联系，首先回忆 E 局部具有例 3.9 的形式，其中李群为 G，即

$$E \cong_{\mathrm{loc}} TM \oplus T^*M \oplus (M \times \mathfrak{g}).$$

广义度量 C_+ 因而可视为线性映射 $TM \to T^*M \oplus (M \times \mathfrak{g})$ 的图像，也就是说，它编码了一个度量、一个 2-形式和一个 G-联络。膨胀子可写为 $\sigma = \sigma_g e^{-2\varphi}$，其中 σ_g 是度量半密度，φ 是 $\mathcal{N} = 1$ 超引力的膨胀子函数。类似地，也可以编码费米子场内容以及该理论的对称性——其中尤其包括局部超对称性。

在 [KSCV25a; KSCV25c] 构造了超引力的 BV 作用量。随后通过在由扭曲超引力背景定义的临界点附近展开该作用量，得到 Costello–Li 扭曲 $\mathcal{N} = 1$ 超引力的 Costello–Li 扭曲 [CL16]，其中所有其他场、幽灵场和反场均为零。临界性条件恰好转化为条件（11），以及广义里奇张量为零。

现在来分析这些条件的结果。我们注意到，扭曲数据定义了一个子丛 L of C_+，即 e 的零化子：

$$L \coloneqq \{u \in C_+ \otimes \mathbb{C} \mid \not{u} e = 0\} \subset C_+ \otimes \mathbb{C}, \qquad \mathcal{L} \coloneqq \Gamma(L).$$

定理6.5。 该子丛 L 是拉格朗日且可积的。

证明。 迷向性可由以下论证轻易得出：若 u， $v \in L$ 则 $0 = \{\not{u}, \not{v}\}e = 2\langle u,\ v\rangle e$因此 $\langle u,\ v\rangle$ 为零。极大性可由十维纯旋量的分类得出 [Igu70]。

由于 D 是列维-奇维塔连接，它保留了 $C_\pm$，因此特别地，对于任意$w \in \Gamma(C_-)$，我们有 $D_w\Gamma(L) \subset \Gamma(C_+ \otimes \mathbb{C})$。由于

$$\forall w \in \Gamma(C_-),\ u \in \Gamma(L) \qquad 0 = D_w(\not{u} e) = (\cancel{D_w u})e,$$

事实上，我们有 D_{C_-} 保持 L。接下来，利用 Courant代数丛的配对相容性，

$$\forall w \in \Gamma(C_-),\ u, v \in \Gamma(L) \qquad \langle [u, v], w\rangle = \langle v, [w, u]\rangle = \langle v, D_w u\rangle = 0,$$

可得 $[\Gamma(L)\ \Gamma(L)] \subset \Gamma(C_+ \otimes \mathbb{C})$。

最后，我们利用公式 [KSCV25c, （F.11）]:

$$\mathcal{L}_u e = \tfrac{1}{2}\{\not{D}, \not{\psi}\}e, \qquad \forall u \in \Gamma(C_+)$$

从而推导出，对于所有的 $u \in \Gamma(L)$，都有 $\mathcal{L}_u e = 0$。因此，对于 $u,\ v \in \Gamma(L)$，我们有

$$(\not{\mathcal{L}_u v})e = \mathcal{L}_u(\not{\psi}e) - \not{\psi}\mathcal{L}_u e = 0,$$

因此 $[u, v] \in \Gamma(L)$。这证明了 L 的对合性。 □

推论6.6。 子丛 L 在 M上定义了一个复结构，其中 $\rho(L) = T^{0,1}M \subset TM \otimes \mathbb{C}$。

证明。 对于任意 $u \in L \cap \bar{L}$，我们有 $\bar{u} \in L \cap \bar{L}$，因此 $u + \bar{u},\ i(u - \bar{u}) \in L \cap (C_+ \otimes \mathbb{R}) \subset C_+ \otimes \mathbb{C}$。但后一个交集为空，因为 L 由各向同性向量组成，而 C_+ 具有正定的内积。因此 $u = 0$ 和 $L \cap \bar{L} = 0$，由于假设 $\rho|_{C_+}$ 是一个同构，这意味着 $\rho(L) \cap \rho(\bar{L}) = 0$。 $\rho(L)$ 的对合性由 L的对合性推出。□

注6.7。 扭曲超引力背景等价于如下意义下的无挠 $SU(5) \times O(p, 10+q)$-结构： $O(10+p, 10+q) \times \mathbb{R}^+$ 广义几何，这与 [ASCTW20]中的六维表述类似。此外，子丛 L 对应于该文献中的可积子丛 L_{-1}。

6.2. **约化与扩张**。 在上一节中，我们从一个定义在 10 维流形 M 上的光滑传递Courant代数丛 E 出发，该流形配备了扭曲超引力背景，并证明这会诱导出光滑复 Courant algebroid E $\otimes \mathbb{C}$中的一个可积各向同性子层 L $:= \Gamma(L)$。

现在，我们将 $\mathcal{L} \subset \mathcal{E} \otimes \mathbb{C}$ 作为第 4节约化与扩张过程的输入。注意，$\mathcal{O}$ 和$\mathcal{O}^{\mathcal{L}}$ 分别是光滑函数层和全纯函数层。此外，

$$\mathcal{F} \cong \Gamma(L^{\perp}/L), \qquad \mathcal{F}^{\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}\text{-flat sections of } \mathcal{F}\}.$$

引理6.8。 条件 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathcal{L}}} \mathcal{O} = \mathcal{F}$ 在局部成立。

证明。 由于 $L \cong T^{0,1}M$， $L^{\perp}/L$上的平坦 L-联络等价于 $L^{\perp}/L$上的 Dolbeault算子，即 $L^{\perp}/L$ 是 M 上的全纯向量丛。因此，其光滑截面空间在局部由全纯截面生成，从而证明了该结论。□

接下来，我们定义

$$\mathcal{O}' := (\Omega^{0,\bullet}, \bar{\partial}),$$

并取 $i\colon \mathcal{O}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{O}'$ 为包含映射。最后，由于关于任意全纯向量场 x 的李导数是 Dolbeault 复形的导子，我们可以定义

$$\lambda\colon \operatorname{Der}\mathcal{O}^{\mathcal{L}} \to \operatorname{Der}\mathcal{O}', \qquad \lambda(x) := L_x.$$

由于这延拓了 x 在全纯函数上的作用，因此性质 (5) 得以满足。

从光滑复 Courant algebroid $\mathcal{E} \otimes \mathbb{C}$出发，我们因此可以沿$\mathcal{L}$ （定理 4.1）进行约化，得到约化 Courant algebroid $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ ，它位于 $\mathcal{O}^{\mathcal{L}}$之上，即一个全纯 Courant algebroid。由于 $L^{\perp}/L \cong C_- \otimes \mathbb{C}$ 且 $\rho|_{C_-}$ 是满射，因此 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ 是传递的。

随后，我们沿着 λ （定理4.5 和命题 4.7）应用扩张过程，从而得到 Courant代数丛 $\mathcal{E}_{\text{twist}} := \mathcal{E}' = \mathcal{F}^{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathcal{L}}} \mathcal{O}'$ 上的$\mathcal{O}'$，即全纯代数丛 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$的 Dolbeault 分解。由此我们证明了本节的主要结果:

定理 6.9。 对于 *10* 维流形 M 上的光滑传递*Courant*代数丛 $\mathcal{E}$ 上的任意扭曲数据，我们可以将其典范地对应到 *Dolbeault* 空间 $M_{\bar{\partial}}$上的一个传递*Courant*代数丛 $\mathcal{E}_{\text{twist}}$ （其中 M 上的复结构由扭曲数据定义）。

注 6.10。回顾 §4.1，F $\cong \Gamma(C_- \otimes \mathbb{C})$ 上的全纯结构由平坦 L $\cong \Gamma(T^{0,1}M)$-联络定义，该联络对于 $u \in \Gamma(L)$ 和 $w \in \Gamma(C_- \otimes \mathbb{C})$ 由 $D_u w$ 给出，其中 D 是上文定义的广义列维-奇维塔算子。经显式计算，所得的多尔博复形解消代数丛尤其恢复了 [OS14]，的复形 $(\Omega^{0,\bullet}(Q)\ \bar{D})$，其中 $Q \cong C_- \otimes \mathbb{C}$。

6.3. **卡拉比–丘例子**。设 M 为一个 Calabi–Yau 五维流形。进一步假设，M 配备了一个里奇平坦凯勒度量 g（对应于一个凯勒形式 ω），以及一个选定的非零协变常数旋量 ψ。

我们令 E $= \Gamma(TM \oplus T^*M)$ 为标准光滑Courant代数丛，并为其赋予自旋结构，使得

$$C_\pm = \mathrm{graph}(\pm g) = \{x \pm g(x, \cdot) \mid x \in TM\},$$

其中，C_+ 上的 Spin(5)结构由该 Calabi–Yau 五维流形上的结构经由锚映射下的识别$C_+ \cong TM$ 给出。为获得扭曲数据，我们取膨胀子 σ 为度量半密度，并且

$$e \coloneqq \sigma\psi.$$

相应的子丛 L 是 $\rho|_{C_+}$下 $T^{0,1}M$ 的原像，即

$$L = \{x + g(x, \cdot) \mid x \in T^{0,1}M\} = \{x + i\omega(x, \cdot) \mid x \in T^{0,1}M\} = e^{i\omega}(T^{0,1}M),$$

其中我们定义了 ω在 $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ 上的作用为 $y + \alpha \mapsto \omega(y, \cdot)$。由于 ω是闭的，我们注意到此作用局部上与某个 1-形式 β对应的 $\mathcal{L}_\beta$ 一致，因此 ω 的作用保持 E $\otimes \mathbb{C}$上的括号。这也特别解释了 L的对合性。

接下来，利用锚映射和 ω，我们得到以下复光滑向量丛的同构：

$$\tau\colon T^{1,0}M \oplus T^{*1,0}M \xrightarrow{\sim} T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M = TM \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} C_- \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} L^\perp/L,$$

显式地表示为

$$\tau(y + \alpha) = [(y + i\omega(y, \cdot)) + \tfrac{i}{2}(\omega^{-1}(\alpha) - i\alpha)] = [e^{i\omega}y + \tfrac{i}{2}e^{-i\omega}\omega^{-1}\alpha],$$

其中 $\omega^{-1}\colon T^*M \otimes \mathbb{C} \to TM \otimes \mathbb{C}$是映射 $x \mapsto \omega(x, \cdot)$ 的逆映射，并且我们为了后续方便插入了因子 $i/2$。

命题 6.11. 在识别 τ 下，约化 *Courant algebroid* $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ 对应于 M上的标准全纯 *Courant algebroid*。

证明。首先注意，$\mathrm{F}^{\mathcal{L}}$中的元素对应于满足以下条件的 $y + \alpha \in \Gamma(T^{1,0}M \oplus T^{*1,0}M)$

$$[\mathcal{L}, e^{i\omega}y + \tfrac{i}{2}e^{-i\omega}\omega^{-1}\alpha] \subset \mathcal{L}.$$

由于 $e^{\pm i\omega}$ 保持括号不变，对于任意 $\bar{x} \in T^{0,1}M$ 条件

$$[e^{i\omega}\bar{x}, e^{i\omega}y + \tfrac{i}{2}e^{-i\omega}\omega^{-1}\alpha] \in \Gamma(e^{i\omega}T^{0,1}M) \tag{12}$$

等价于

$$\Gamma(T^{0,1}M) \ni [\bar{x}, y + \tfrac{i}{2}e^{-2i\omega}\omega^{-1}\alpha] = [\bar{x}, y + \tfrac{i}{2}\omega^{-1}\alpha + \alpha].$$

由于 $T^{0,1}M$的对合性，我们自动有 $[\bar{x}, \omega^{-1}\alpha] \in \Gamma(T^{0,1}M)$ 因此条件（12）等价于

$$L_{\bar{x}}y \in \Gamma(T^{0,1}M), \qquad L_{\bar{x}}\alpha = 0.$$

要求这对所有 $\bar{x}$ 都成立，即是 y 和 α 为全纯的条件。

容易看出（将因子 $i/2$ 纳入 τ 的定义中后），$T^{1,0}M \oplus T^{*1,0}M$（的全纯截面）上的锚映射和配对恰好具有所要求的形式。对于括号，我们首先取两个全纯向量场 y、$z \in \Gamma(T^{1,0}M)$ 并计算

$$[e^{i\omega}y, e^{i\omega}z] = e^{i\omega}[y, z] = \tau(L_y z),$$

从而恢复标准全纯 Courant 锚丛上括号的“向量–向量”部分。括号的其余部分则由 Courant algebroid 公理唯一确定。□

推论 6.12。 由此得到的 *Courant*代数丛 $\mathcal{E}_{\mathrm{twist}}$ 是 $M_{\bar\partial}$ 上的标准 *Courant* 锚丛。

7. I 型超引力的极小 BCOV 理论与广义 G-结构

7.1. **猜想**。 我们首先注意到，有两种 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次巴塔林–维尔科维斯基理论可以赋予一个扭曲数据（见定义 6.3）：

(1) 该背景下超引力的 Costello–Li 扭曲 [KSCV25a; KSCV25c]，即 L_∞代数，它是通过将 I 型超引力的 BV 作用量在该临界点附近展开而得到的。(2) 根据定理 6.9，与 Dolbeault 复形上的 Courant代数丛 $\mathcal{E}_{\mathrm{twist}}$ 相关联的 Courant 接触模型。

主要猜想。 I 型超引力的 Costello–Li 扭曲作为微扰 BV 理论等价于 $\mathrm{E}_{\mathrm{twist}}$ 的 Courant 接触模型。

请注意，此处的等价是在最强意义下理解的，即保持辛结构的局部李代数之间的拟同构。这一猜想的主要依据是下文定理 7.6所证明的事实：对于 Calabi–Yau 流形，该猜想归结为 Costello 和 Li 的原始猜想 [CL19]，即关于极小 I 型 BCOV 理论与 I 型超引力扭曲之间关系的猜想。因此，Courant 接触模型为极小 I 型 BCOV 理论推广到最一般的扭曲数据提供了一种自然方式。用通常的几何数据来表述（见注 6.4），这对应于具有可能非平凡通量的背景上的扭曲——更确切地说，可能具有非平凡的 2-形式、膨胀子和 G-联络。

此外，本文的形式体系使我们能够将主要猜想视为两种自然构造之间的比较，而这两种构造都属于Courant代数丛的范畴。由于后者的框架尤其提供了非常高效的计算工具，因此可以自然地期待，它也为解决这一猜想（尤其是 Costello–Li 猜想）提供了最简单、最直接的途径。

最后，比较定理7.6揭示了极小 I 型 BCOV 理论起源的一个有趣见解：它可以从辛化L_∞ Roytenberg–Weinstein 代数上的接触结构得到，也可以从模掉广义微分同胚后的体积形式模空间得到。

此外，我们自然会期待 Courant 接触模型与近期文献中的若干研究之间存在联系。值得注意的是，在 [AISCS25] 中，基于此前的研究，提出了一种具有受约束场的三次模型 [OS14; Ash+18] 并证明它作为一个 L_∞ 代数层，与 Calabi–Yau 情形下的极小 I 型 BCOV 理论等价。[7] 因此，Courant 接触模型可视为同一理论在无约束场情形下的一个版本，从而满足定义 2.11的要求。由此我们提出以下猜想。

猜想 7.1。 Courant 接触模型作为 L_∞ 代数层，与 [AISCS25] 的三次模型准同构。

受广义 G-结构启发的另一种相关构造是 扩展 *BPS* 复形，它属于[Kup+25]，对应于 $G = U(5) \times SO(10 + k)$，其对应的对合子丛为 L [ASCTW20]。我们很容易观察到，这个 BPS 复形底层的向量空间与场空间（7）一致，由此自然得到：

猜想 7.2. Courant 接触模型所基于的复形与 $G = U(5) \times SO(10 + k)$ 的扩展 BPS 复形拟同构。

[7]由于场空间受约束，该模型并未定义 BV 理论；参见注 2.12。相应地，等价的概念也有所不同。

扩展 BPS 复形是以一种特设方式构造的，即通过附加 $\mathcal{O}^!$ 作为 [Kup+25]中关于超势的讨论里的额外一行。因此，目前的构造将为这一做法提供自然的几何依据，即接触结构的辛化。

注 7.3。可以设想，将背景的超对称条件分为两组，类似于 [AS-CTW20] 中六维构造的 F 项和 D 项条件（之所以如此命名，是因为它们是四维 $\mathcal{N}=1$ 超引力理论中相应条件的起源，而这些理论是通过对其进行紧化得到的）。在十维情形下，F 项自然应被识别为这样一类条件：它们的变分出现在（7）的相关次数部分中。因此，Courant 接触模型应当与满足这些 F 项超对称条件的背景所对应的形式模空间问题相关联，其方式正如 Baulieu 理论在 [Bau11]（十维 $\mathcal{N}=(1,0)$ 超杨–米尔斯理论的全纯扭曲）与全纯丛所对应的模问题相关联一样。

7.2. **极小 I 型 BCOV 理论回顾**。我们回顾 Calabi–Yau 五维流形上的极小 I 型 BCOV 理论的定义 (M, Ω)，即带有全纯体积形式 M 的复五维流形 Ω。我们的理论是原始理论的一维中心扩张，原始理论见 [CL19]，并具有非退化的奇辛结构。关于这一特定的“势理论”，详见 [RSW23，§5.4。1], 另见 [CL19]，其中介绍了原始构造并进行了详细讨论。

首先，我们引入全纯多向量场

$$\mathrm{PV}^{i,\bullet} := \Omega^{0,\bullet}(\Lambda^i T^{1,0} M).$$

与全纯体积形式 Ω 收缩后会诱导出一个同构

$$\mathrm{PV}^{i,\bullet} \xrightarrow{\cong} \Omega^{n-i,\bullet} \tag{13}$$

BCOV 理论的场空间由下述 Dolbeault 复形 $\mathcal{O} = (\Omega^{0,\bullet}, \bar\partial)$ 上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次局部自由模层描述：

$$\Pi\mathcal{M}_{\mathrm{BCOV}} := \Omega^{0,\bullet} \oplus \Pi(\Omega^{1,\bullet} \oplus \mathrm{PV}^{1,\bullet}) \oplus \mathrm{PV}^{0,\bullet}. \tag{14}$$

我们将称各个场为 $(\beta, \gamma, \mu, \nu)$。[8]

这个理论是奇移位辛的，其中 β 是 ν 的反场，而 γ 是 μ的反场。要看出这个配对是奇的，重要的是要记住我们处于一个五维流形上，因此 Dolbeault 形式上的楔积并积分配对具有奇数次数。配对和作用通过对固定的背景全纯体积形式 Ω 积分来定义：

$$\omega = \int \Omega\,(\delta\beta\,\delta\nu + \delta\mu \vee \delta\gamma)\,, \qquad S = S_{\bar\partial} + \int \Omega\left(L^{\mathcal{O}}_{\mu}\beta + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\nu} i_\mu i_\mu \partial\gamma\right), \tag{15}$$

其中 $S_{\bar\partial}$ 是其哈密顿向量场为场空间上算子 ∂ 的泛函；遵循文献中的惯例，我们用 $\vee$表示向量与 1-形式的配对。最后，$L^{\mathcal{O}}$ 对应于“全纯李导数”（例如，若 $x \in \Gamma(T^{1,0}M)$，则在形式上 $L^{\mathcal{O}}_x = i_x\partial + \partial i_x$），它已自然地扩展到相应对象的 Dolbeault 解消上（参见例 3.12）。

注 7.4。特别地，由此可知 $\Pi\mathcal{M}_{\mathrm{BCOV}}$ 上的上链复形结构为

$$\Omega^{0,\bullet} \xrightarrow{\partial} \Omega^{1,\bullet} \oplus \mathrm{PV}^{1,\bullet} \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{PV}^{0,\bullet},$$

其中 散度算子 div 是参照同构（13）定义的。

7.3. **Courant 接触模型与 BCOV 理论之间的等价**。我们先回顾 $M_{\bar\partial}$上的标准 Courant 锚丛的 Courant 接触模型，其中 M，Ω 是一个 Calabi–Yau 五维流形

[8]注意，反全纯形式部分会进一步适当地改变奇偶性，因此例如 γ 的$\Omega^{1,3}$部分是偶的。

（参见推论6.12）。场空间为

$$\Pi\mathcal{M} = \Omega^{0,\bullet} \oplus \Pi(\Omega^{1,\bullet} \oplus \mathrm{PV}^{1,\bullet}) \oplus \Omega^{5,\bullet},$$

场记为 $(f,\ \alpha,\ x,\ \lambda)$。

引理 7.5。 $M_{\bar\partial}$ 上的标准 *Courant*代数丛的 *Courant* 接触模型的辛形式和作用泛函为（这里同样用 $S_{\bar\partial}$ 表示生成 ∂ 算子的泛函）

$$\omega = \int_M \delta\lambda(\delta f + \tfrac{1}{2}x \vee \delta\alpha + \tfrac{1}{2}\delta x \vee \alpha) - \lambda\delta x \vee \delta\alpha, \qquad S = S_{\bar\partial} + \int_M \lambda\left(L_x^{\mathcal{O}} f + \tfrac{1}{2}x \vee L_x^{\mathcal{O}}\alpha\right).$$

证明。 唯一不显然的部分是 S中的最后一项，其中我们使用 $i_{L_x^{\mathcal{O}}x} = L_x^{\mathcal{O}} i_x + i_x L_x^{\mathcal{O}}$来写出

$$\langle \xi,\ \mathcal{L}_\xi \xi\rangle = \alpha\vee L_x^{\mathcal{O}} x + x\vee(L_x^{\mathcal{O}}\alpha + i_x\partial\alpha) = (i_{L_x^{\mathcal{O}}x} + i_x L_x^{\mathcal{O}} + i_x i_x\partial)\alpha = (L_x^{\mathcal{O}} i_x + 3 i_x L_x^{\mathcal{O}} - i_x\partial i_x)\alpha = 3 i_x L_x^{\mathcal{O}}\alpha.\ \square$$

定理 7.6。 设 (M,Ω) 为一个 *Calabi–Yau* 五维流形。那么，从 (f,α,x,λ) 到(β,γ,μ,ν) 的场重定义为

$$f = \beta + \frac{\mu\vee\gamma}{2(\nu-1)}, \qquad \alpha = -\gamma, \qquad x = \frac{\mu}{\nu-1}, \qquad \lambda = \Omega(\nu-1)$$

定义了 $M_{\bar\partial}$ 上的 *Courant* 接触模型与极小 *I* 型 *BCOV* 理论之间的 *BV* 理论等价。

证明。 这可以通过直接计算得到。特别地，变换的全纯性确保相应泛函中 $\bar\partial$-生成的部分 $S_{\bar\partial}$ 彼此映射。场重定义在相应的局部形式模问题之间定义了一个 L_∞ 拟同构。尽管它们并不定义正则变换，但可以直接验证，它们将各自的奇辛结构相互交织。$\square$

注 7.7。 我们注意到，由（14）和（15）给出的理论原则上可以定义在任意 Calabi–Yau n维流形 M 上，并给出一种移位辛结构，其辛形式的奇偶性与 n的奇偶性一致。（不过我们强调，只有在$n=5$时，该理论才与 I 型 BCOV 理论一致。）类似地，标准 Courant 锚丛在$M_{\bar\partial}$ 上的 Courant 接触模型的场空间由下式给出：

$$\Pi\mathcal{M} = \Omega^{0,\bullet} \oplus \Pi(\Omega^{1,\bullet} \oplus \mathrm{PV}^{1,\bullet}) \oplus \Omega^{n,\bullet},$$

连同辛形式和作用

$$\omega = \int_M \delta\lambda(\delta f + \tfrac{1}{2}x \vee \delta\alpha + \tfrac{1}{2}\delta x \vee \alpha) + (-1)^n\lambda\delta x \vee \delta\alpha, \qquad S = S_{\bar\partial} + \int_M \lambda\left(L_x^{\mathcal{O}} f + \tfrac{1}{2}x \vee L_x^{\mathcal{O}}\alpha\right).$$

随后通过以下方式建立这两个模型之间的等价关系

$$f = \beta - \frac{\mu\vee\gamma}{2(1-\nu)}, \qquad \alpha = (-1)^n\gamma, \qquad x = (-1)^n\frac{\mu}{1-\nu}, \qquad \lambda = (-1)^n\Omega(1-\nu).$$

参考文献

[AKSZ97] M. Alexandrov、M. Kontsevich、A. Schwarz 和 O. Zaboronsky。《主方程的几何与拓扑量子场论》。国际现代物理学杂志 *A* 12 (1997年), 第1405–1429页。arXiv: 高能物理理论/9502010。

[Ash+18] A. Ashmore、X. De La Ossa、R. Minasian、C. Strickland-Constable 和 E. E. Svanes。《来自杂化超势的有限形变：全纯陈-西蒙斯理论与L_∞ 代数》。高能物理学杂志10 (2018年)，第 179 页。arXiv：1806.08367 [高能物理理论]。

[AISCS25] A. Ashmore、J. J. M. Ibarra、C. Strickland-Constable 和 E. E. Svanes。《十维全纯超引力与反常抵消》（2025年7月）。arXiv：2507.06003[高能物理理论]。

[ASCTW20] A. Ashmore、C. Strickland-Constable、D. Tennyson 和 D. Waldram。《借助广义几何研究异质弦背景：矩映射与模空间》。高能物理学杂志 11（2020），第 071 页。arXiv：1912.09981 [高能物理理论].[Bar13] D. Baraglia。《共形 Courant 代数胚与定向折叠 T-对偶》。International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 10.02（2013）。[BV81] I. A. Batalin 和 G. A. Vilkovisky。《规范代数与量子化》。Phys. Lett. B 102（1981），第 27–31 页。[BV84] I. A. Batalin 和 G. A. Vilkovisky。《规范代数的闭合、广义李方程与费曼规则》。Nuclear Physics B 234（1984），第 106–124 页。[Bau11] L. Baulieu。《十维杨–米尔斯超对称性的$SU(5)$-不变分解》。Phys. Lett. B 698.1（2011），第 63–67 页。[Ber24a] K. Berktav。《移位接触结构及其局部理论》。Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, Série 6) 33.4（2024），第 1019–1057 页。arXiv：2209.09686 [math.AG].[Ber24b] K. Berktav。《关于移位接触导出 Artin 叠》（2024）。arXiv：2401.03334 [math.- AG].[Ber24c] K. Berktav。《导出几何中的勒让德结构》（2024）。arXiv：2406 . 17416[math.SG].[BCOV94] M. Bershadsky、S. Cecotti、H. Ooguri 和 C. Vafa。《引力小平–斯宾塞理论与量子弦振幅的精确结果》。Comm. Math. Phys. 165.2（1994），第 311–427 页。网址：http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104271134。[BS23] S. Bunk 和 C. S. Shahbazi。《流形上的高阶几何结构与德利涅上同调规范理论》（2023）。arXiv：2304.06633 [math.DG].[BY16] D. Butson 和 P. Yoo。《退化经典场论与边界理论》。2016。arXiv：1611.00311 [math-ph].[Car23] D. Carchedi。《作为微分分次流形的导出流形》（2023）。arXiv：2303.11140 [math.DG].[Ced10a] M. Cederwall。《迈向十一维超引力的明显超对称作用量》。Journal of High-Energy Physics 01（2010），第 117 页。arXiv：0912.1814 [高能物理理论].[Ced10b] M. Cederwall。《具有明显超对称性的$D = 11$ 超引力》。Modern Physics Letters A 25（2010），第 3201–3212 页。arXiv：1001.0112 [高能物理理论].[CSCW11] A. Coimbra、C. Strickland-Constable 和 D. Waldram。《作为广义几何的超引力 I：II 型理论》。高能物理学杂志 11（2011），第 091 页。arXiv：1107.1733 [高能物理理论].[Cos10] K. Costello。《Witten 亏格的几何构造，I》。2010 年国际数学家大会论文集（ICM 2010）。World Scientific。2010，第 942–959 页。高能物理理论：1112.0816（math.QA）。[Cos16] K. Costello。《omega 背景中的 M-理论与五维非交换规范理论》（2016）。arXiv：1610.04144 [高能物理理论].[CG17] K. Costello 和 O. Gwilliam。《量子场论中的因子化代数 I》。New Mathematical Monographs 31。剑桥大学出版社，剑桥，2017。[CG21] K. Costello 和 O. Gwilliam。《量子场论中的因子化代数 II》。New Mathematical Monographs 41。剑桥大学出版社，2021。[CL15] K. Costello 和 S. Li。《开闭 BCOV 理论的量子化，I》（2015）。arXiv：1505.06703 [高能物理理论].[CL16] K. Costello 和 S. Li。《扭曲超引力及其量子化》。2016。电子预印本：1606. 00365。

[CL19] K. Costello 和 S. Li。《拓扑弦中的反常抵消》（2019）。arXiv: 1905.09269 [hep-th].[OS14] X. de la Ossa 和 E. E. Svanes。《全纯丛与超对称杂化紧致化的模空间》。高能物理学杂志 10 (2014)，第 123 页。arXiv: 1402.1725.[EHSW22] R. Eager、F. Hahner、I. Saberi 和 B. R. Williams。《纯旋量超场形式的展望》。几何与物理杂志 180 (2022)。arXiv: 2111.01162.[GF19] M. Garcia-Fernandez。《广义几何中的里奇流、Killing旋量与T对偶》。Adv. Math. 350 (2019)，第 1059–1108 页。arXiv: 1611.08926 [math.DG].[GFRT20] M. Garcia-Fernandez、R. Rubio 和 C. Tipler。《全纯弦代数胚》。Trans. Am. Math. Soc. 373.10 (2020)，第 7347–7382 页。arXiv: 1807.10329 [math.AG].[Get09] E. Getzler。《幂零代数的李理论》。数学年刊 170.1 (2009)，第 271–301 页。[Gin06] V. Ginzburg。《Calabi–Yau代数》（2006）。arXiv: 0612139 [math].[Gra13] J. Grabowski。《分次切触流形与切触Courant代数胚》。几何与物理杂志 68 (2013)，第 27–58 页。[GG15] R. Grady 和 O. Gwilliam。《空间与导出环路空间》。纽约数学杂志 21 (2015)，第 231–272 页。[GG20] R. Grady 和 O. Gwilliam。《作为空间的李代数丛》。Jussieu 数学研究所杂志 19.2 (2020)，第 487–535 页。[Grü09] M. Grützmann。《Courant代数丛：上同调与匹配对》。博士论文。宾夕法尼亚州立大学，2009年。arXiv: 1004.1487 [math.DG].[Gua14] M. Gualtieri。《广义Kähler几何》。数学物理通讯 331.1 (2014)，第 297–331 页。[HRSW24] F. Hahner、S. Raghavendran、I. Saberi 和 B. R. Williams。《局部超共形代数》（ 2024 ）。arXiv: 2410.08176 [math-ph].[HS25] F. Hahner 和 I. Saberi。《作为 Calabi–Yau 二重的十一维超引力》。Selecta Mathematica 31.2 (2025)，第 1–34 页。arXiv: 2304.12371 [math-ph].[Hin01] V. Hinich。《作为形式栈的DG余代数》。纯粹与应用代数杂志 162.2-3 (2001)，第 209–250 页。[Igu70] J.-I. Igusa。《十二维以内旋量的分类》。美国数学杂志 92.4 (1970)，第 997–1028 页。[Ike03] N. Ikeda。《与BF理论耦合的Chern-Simons规范理论》。国际现代物理学杂志 A 18 (2003)，第 2689–2702 页。arXiv: hep-th/0203043.[Kup+25] J. Kupka、C. Strickland-Constable、E. E. Svanes、D. Tennyson 和 F. Valach。《规范理论与引力中由G结构产生的BPS复形和Chern-Simons理论》。高能物理学杂志 10 (2025)，第 192 页。arXiv: 2406.03550 [hep-th].[KSCV25a] J. Kupka、C. Strickland-Constable 和 F. Valach。《十维超引力的Batalin–Vilkovisky表述》。Phys. Rev. Lett. 134.21 (2025)，第 211602 页。arXiv: 2501.18008 [hep-th].[KSCV25b] J. Kupka、C. Strickland-Constable 和 F. Valach。《十维超引力中费米子全阶项的直接推导》。高能物理学杂志 07 (2025)，第 114 页。arXiv: 2410.16046[hep-th].[KSCV25c] J. Kupka、C. Strickland-Constable 和 F. Valach。《十维引力理论的几何与Batalin–Vilkovisky表述》（2025年8月）。arXiv: 2508.06398 [hep-th].[LBM09] D. Li-Bland 和 E. Meinrenken。《Courant代数丛与泊松几何》。国际数学研究通知 2009.11 (2009)，第 2106–2145 页。电子预印本：0811.4554。

[LWX97] Z.-J. Liu、A. Weinstein 和 P. Xu。《李双代数丛的Manin 三元组》。微分几何杂志 45.3 (1997)，第 547–574 页。电子预印本：dg-ga/9508013。[Lur11] J. Lurie。《导出代数几何 X：形式模问题》。2011年。网址：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/DAG-X.pdf。[Mag25] A. Maglio。《可微栈上的移位接触结构》。博士论文。萨莱诺大学，2025年。arXiv: 2503.24238。[MTV24] A. Maglio、A. G. Tortorella 和 L. Vitagliano。《可微栈上的移位接触结构》。国际数学研究通知 2024.16 (2024)，第 11933–11976 页。[MR25] F. Moučka 和 R. Rubio。《Courant 代数丛提升与曲率 Courant 代数丛》（2025年11月）。arXiv: 2511.04743 [math.DG].[Nui18] J. J. Nuiten。《导出微分拓扑中的李代数丛》。博士论文。乌得勒支大学，2018年。[PTVV13] T. Pantev、B. Toën、M. Vaquié 和 G. Vezzosi。《移位辛结构》。IHÉS 数学出版物 117.1 (2013)，第 271–328 页。[Pri10] J. P. Pridham。《统一导出变形理论》。数学进展 224.3 (2010)，第 772–826 页。[RSW23] S. Raghavendran、I. Saberi 和 B. R. Williams。《扭曲的十一维超引力》。数学物理通讯 402.2 (2023)，第 1103–1166 页。[Roy02] D. Roytenberg。《关于分次辛超流形与Courant代数丛的结构》。量子化、变形以及数理物理中新兴同调与范畴方法研讨会。2002年3月。arXiv: math/0203110。[Roy07] D. Roytenberg。《AKSZ-BV 形式体系与由 Courant 代数丛诱导的拓扑场论》。Lett. Math. Phys. 79 (2007)，第 143–159 页。arXiv: hep-th/0608150。[Roy09] D. Roytenberg。《Courant–Dorfman 代数及其上同调》。数学物理快报 90.1 (2009)，第 311–351 页。[RW98] D. Roytenberg 和 A. Weinstein。《Courant代数丛与强同伦李代数》。数学物理快报 46 (1998)，第 81–93 页。[SW24] I. Saberi 和 B. R. Williams。《纯旋量超场的扭曲及其在超引力中的应用》。纯粹与应用数学季刊 20.2 (2024)，第 645–701 页。[Šev05] P. Ševera。《标题中包含“同伦”和“辛”二词的某篇文章，例如本文》。Travaux Mathématiques Fasc. XVI (2005)，第 121–137 页。arXiv: 0105080 [math.SG].[Swa62] R. G. Swan。《向量丛与射影模》。美国数学会汇刊 105.2 (1962)，第 264–277 页。[Stacks] Stacks 项目作者。Stacks 项目。https://stacks.math.columbia.edu。[Vai12] I. Vaisman。《双场论的几何》。J. Math. Phys. 53 (2012)，第 033509 页。arXiv: 1203.0836 [math.DG].[Š98] P. Ševera。《致 Alan Weinstein 的关于Courant代数丛的信》（1998–2000）。arXiv: 1707.00265 [math.DG]。

物理系，天文学与数学，赫特福德大学，College Lane，Hat-领域，AL10 9AB，英国
电子邮箱: j.kupka@herts.ac.uk
电子邮箱: c.strickland-constable@herts.ac.uk
电子邮箱: i.saberi@herts.ac.uk

数学研究所，数学与物理学院，查理大学，布拉格 18675，捷克共和国电子邮箱: fridrich.valach@matfyz.cuni.cz