arXiv:2602.04664v1 [math.AP] 4 Feb 2026

多边形与特征函数的多重乘积

EMMETT L. WYMAN、YAKUN XI 和 YI ZHANG

Abstract. 设 M 是一个无边界的紧黎曼流形，其 L^2-归一化拉普拉斯-贝尔特拉米特征函数 $\{e_j\}_j$ 满足 $\Delta_g e_j = -\lambda_j^2 e_j$。我们研究特征函数的以下内积

$$\langle e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle = \int e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \overline{e_{i_{k+1}}}\, dV.$$

我们证明，对频率变量作适度平均后，该内积的主要 ℓ^2-集中由边长为频率 λ_{i_1}、λ_{i_2}、.....、$\lambda_{i_{k+1}}$ 的 $(k+1)$ 边形构型集合的测度决定。我们证明，这部分质量中快速趋于零的比例落在这样的情形中：λ_{i_1}、λ_{i_2}、.....、$\lambda_{i_{k+1}}$ 不可能成为任何 $(k+1)$ 边形的边长。

1. Introduction

1.1. **背景**。设 M 是一个无边界的紧黎曼流形，且e_1, $e_2, \dots$ 是拉普拉斯-贝尔特拉米特征函数的一组正交归一基，且

$$\Delta_g e_j = -\lambda_j^2 e_j,$$

其中 λ_j 是 e_j的频率。

我们关注 k 特征函数$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$的多乘积的一般行为。为了更方便地分析这一多乘积，我们通过调和展开将其表示为特征函数与系数的和

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} = \sum_{i_{k+1}} \langle e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle e_{i_{k+1}}. \tag{1.1}$$

经典问题是研究$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$的 L^2 范数的衰减。若令$\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots = \lambda_{i_k} = \lambda_j$，则问题可化为研究特征函数$e^{\lambda_j}$的 L^{2k} 范数。对于这个问题，Sogge 针对 $k \geq 1$给出了完整的答案，见 [Sog88]。然而，对于一般的特征值λ_{i_1}，λ_{i_2}，.....，λ_{i_k}，情况则更加复杂。利用正交性，我们可以将 (1.1) 的 L^2 范数写成如下形式：

$$\|e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}\|_{L^2}^2 = \sum_{i_{k+1} \in \mathbb{Z}^+} \left| \langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle \right|^2. \tag{1.2}$$

因此，右侧各项的衰减决定了左侧的行为。于是，我们旨在研究 (1.2) 中的衰减情况及其分布方式。这引出了以下具体问题：频率λ_{i_1}，λ_{i_2}，.....，$\lambda_{i_{k+1}}$ 满足什么条件时，系数 $\langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$，$e_{i_{k+1}} \rangle$ 会出现衰减？随着这些频率变化，它们的 ℓ^2-质量又是如何分布的？

当 $k = 2$时，和许多谱问题一样，这个问题与自守形式背景下的数论密切相关。Sarnak 证明，对于固定的 j，系数 $\langle e_j^2$，$e_\ell \rangle$在 λ_ℓ [中呈指数衰减 Sar94]。Bernstein、Reznikov、Kr¨otz 和 Stanton 得到了最优估计 [BR99,KS04]。对于更一般的系数 $\langle e_i e_j$，$e_\ell \rangle$，一个关于特征值的经典衰减

估计由 Lu、Sogge 和 Steinerberger 给出 [LSS19]。最近，第一作者改进了他们的估计 [Wym22]。给定 $\epsilon > 0$ 和一个整数 $N \geq 1$，存在常数 $C_{\epsilon,\, N}$，使得

$$\sum_{\lambda_\ell \geq (2+\epsilon)\lambda} |\langle e_i e_j, e_\ell \rangle|^2 \leq C_{\epsilon,N} \lambda^{-N} \qquad \text{for all } i,\, j \text{ with } \lambda_i, \lambda_j \leq \lambda. \tag{1.3}$$

此外，他证明了 $(2+\epsilon)\lambda$ 因子几乎是最优的。他还得到了 [Wym22]非快速衰减部分的渐近展开。在此工作的基础上，我们研究 $(k+1)$ 特征函数的多乘积，并获得了类似的结果。[Wym22] 最引人注目的特点之一，是它将特征函数的三重乘积与几何构型——即三角形——联系起来。我们将这一视角拓展到一般的 $k \geq 2$，此时相应的构型可自然地用多边形来描述。

1.2. **多边形**。 基于 (1.2)，我们研究以下和

$$\sum_{(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_{k+1}}) = (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})} \left| \langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle \right|^2 \tag{1.4}$$

对于给定的特征值 a_1，a_2，.....，a_{k+1}。这些和与特征基的选择无关；因此，其行为完全由底层流形及其度量决定。

本文的主要目标是证明，和 (1.4) 可以通过计数边长为 a_1，a_2，.....，a_{k+1} 的 $(k+1)$ 边形构型来估计。为陈述我们的结果，我们首先引入以下关于 $(k+1)$ 边形边长的定义。

定义 1.1。 若向量 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{k+1}) \in (0, \infty)^{k+1}$ 满足以下两个条件，则称其为 k-优向量。

(1) $(k+1)$-边形不等式：对每个 $1 \leq j \leq k+1$,

$$\tau_j < \sum_{\ell \neq j} \tau_\ell. \tag{1.5}$$

(2) 非退化条件：对每个符号向量 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1}) \in \{\pm 1\}^{k+1}$,

$$|\varepsilon \cdot \tau| = \left| \sum_{j=1}^{k+1} \varepsilon_j \tau_j \right| > 0. \tag{1.6}$$

我们用 Γ_g 表示 k-优向量的集合。

若存在 j, $1 \leq j \leq k+1$，使得向量 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{k+1}) \in (0, \infty)^{k+1}$ 满足

$$\tau_j > \sum_{\ell \neq j} \tau_\ell. \tag{1.7}$$

我们用 Γ_b 表示 k-劣向量的集合。

如果 $\Gamma \subset \Gamma_g$，则称闭锥 $\Gamma \subset (0, \infty)^{k+1}$ 为 k-良好；如果 $\Gamma \subset \Gamma_b$，则称其为 k-不良 .

满足条件 (1) 的 τ 集合由可在平面上实现为 $(k+1)$ 边形的边长数据组成，而 k-坏向量集合不包含此类点。 k-好向量集合由满足条件 (1) 的 τ 集合中，去除那些存在某个 $\varepsilon \in \{\pm 1\}^{k+1}$ 使线性组合 $|\varepsilon \cdot \tau|$ 消失的 τ 后得到。例如，当 $k = 3$ 时，向量 (2，2，2，2) 满足 $(k+1)$ 边形不等式，但 (2，2，2，2) $\notin \Gamma_g$，因为它不满足非退化条件。具体来说，考虑由向量 (2，0)，(-2，0)，(2，0)，(-2，0) 在平面上构成的退化四边形。每条边的长度都是 2，但是

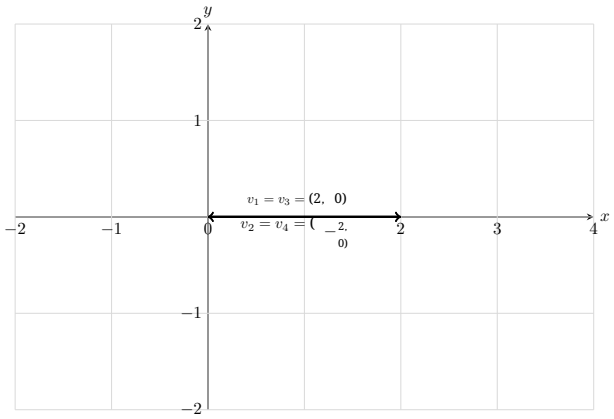


FIGURE 1. $\tau \notin \Gamma_g$的一个例子。

这个多边形共线，面积为零。在这种情况下， $\tau \notin \Gamma_g$，如图1所示。当 $k = 2$ 时，根据三角形的刚性，只要假设条件 (1) 成立，非退化条件便自动满足。这正是三重乘积结果能否推广到更高阶多重乘积这一问题此前并不明朗的主要原因，因为在更高阶情形下，这种刚性并不存在。我们的非退化条件旨在弥补这一缺口。正如我们将在证明中看到的，它确保若干关键步骤得以成立，并导出简洁的渐近行为。

接下来，我们利用谱投影算子 χ_λ 和傅里叶积分算子理论，建立 (1.4) 与 $(k+1)$ 边形构型计数之间的联系。我们的论证还表明，当 $(\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \ldots\ldots,\ \lambda_{i_{k+1}})$ 不满足 $(k+1)$ 边形不等式时，(1.4) 会快速衰减。

1.3. 主要结果。 我们的第一个定理表明，式（1.4）中快速衰减的部分来自这样的频率 $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_{k+1}})$：其坐标不可能作为一个 $(k+1)$ 边形的边长。

定理1.2。 对于每个 $\epsilon > 0$ 和整数 $N > 0$，存在常数 $C_{\epsilon,N}$，使得对于任意正数 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$，我们有

$$\sum_{\lambda_{i_{k+1}} \geq (1+\epsilon)(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_k)} \left|\langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle\right|^2 \leq C_{\epsilon,N} (\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_k)^{-N},$$

其中 $\lambda_{i_j} \leq \tau_j$ 对于 $1 \leq j \leq k$。

假设 $\lambda_{i_{k+1}} \geq (1+\epsilon)(\tau_1 + \cdots + \tau_k)$ 迫使这个 $(k+1)$ 元组 $(\tau_1, \ldots, \tau_k, \lambda_{i_{k+1}})$ 为 k-坏，因为最后一项大于其余各项之和。特别地，任何满足 $\lambda_{i_j} \leq \tau_j$（对于 $1 \leq j \leq k$）的 $(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}, \lambda_{i_{k+1}})$ 也都是 k-坏。

为清晰起见，我们不通过对位于 $(0,\infty)^{k+1}$指定区域内的所有元组（λ_{i_1}，……，$\lambda_{i_{k+1}}$）求和来组织左端。相反，我们固定 τ_j λ_{i_j}、 $1 \leq j \leq k$ 的上界，然后估计那些满足 $\lambda_{i_{k+1}} \geq (1+\epsilon)(\tau_1 + \cdots + \tau_k)$ 的 i_{k+1} 的尾和。证明采用非驻相位法。我们在第5节记录了一个平坦环面例子，表明定理1.2中的频率阈值基本上是尖锐的。

我们的第二个也是主要的定理涉及来自 k-good 向量 $\tau \in (0, \infty)^{k+1}$ 的贡献。沿用 [Wym22], ，我们引入联合谱测度

$$\mu = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}} \left|\langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle\right|^2 \delta_{(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_{k+1}})} \tag{1.8}$$

在 $\mathbb{R}^{k+1}$ 上，其中 δ 表示狄拉克测度。因此， μ 是点质量的加权和，其权重由系数 $\langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}} \rangle$ 的模平方给出。我们的第二个定理描述了由频率（$\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_{k+1}}$）承载、且落在$k$-优良锥中的 μ 质量。

在陈述结果之前，我们先回顾 Leray 密度的定义和基本性质，并介绍一些术语。设 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ 是一个光滑函数，且 $y_0 \in \mathbb{R}^d$ 满足微分 dF 在水平集 $F^{-1}(y_0)$ 的每一点处都具有满秩。根据反函数定理， $F^{-1}(y_0)$ 是一个光滑的（$n-d$）维子流形。在 $F^{-1}(y_0)$ 上某点的邻域内选取局部坐标（z, z'），使得 z 参数化 $F^{-1}(y_0)$，且 $\det(\partial F/\partial z') \neq 0$。 $F^{-1}(y_0)$ 上的 Leray 密度定义为

$$d_F = \left|\det \frac{\partial F}{\partial z'}\right|^{-1} dz, \tag{1.9}$$

且与补坐标 z' 的选取无关。相应的 Leray 体积为

$$\operatorname{vol} F^{-1}(y_0) = \int_{F^{-1}(y_0)} d_F.$$

给定定义在 $F^{-1}(y_0)$ 的某个邻域上的连续函数 f，关于 Leray 测度在 $F^{-1}(y_0)$ 上对 f 的积分可用狄拉克分布表示为

$$\int_{F^{-1}(y_0)} f \, d_F = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(F(x) - y_0) \, dx.$$

在本文中，我们将 $F\colon \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^{k+1}$ 定义为

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = \big(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_k|, \ |\xi_1 + \cdots + \xi_k|\big). \tag{1.10}$$

于是，水平集 $F^{-1}(\tau)$ 由满足以下条件的 k 元组 $(\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_k)$ 构成

$$|\xi_j| = \tau_j \quad (1 \le j \le k) \qquad \text{and} \qquad |\xi_1 + \cdots + \xi_k| = \tau_{k+1}.$$

这样的 k 元组确定了实数集 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭合 $(k+1)$ 边形，其边长为 $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_{k+1}$，其中最后一条边是闭合向量 $-(\xi_1 + \cdots + \xi_k)$。下一个定理描述了 k-良锥中 μ 的集中情况。

定理 1.3。设 ρ 是实数集 $\mathbb{R}^{k+1}$ 上的施瓦茨函数，且满足 $\int \rho = 1$。假设

$$\operatorname{supp} \hat{\rho} \subset (-\operatorname{inj} M, \operatorname{inj} M)^{k+1}.$$

设 Γ 是一个 k-良锥。那么对于 $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}) \in \Gamma$，

$$\rho * \mu(\tau) = (2\pi)^{-kn} \operatorname{vol} M \operatorname{vol} F^{-1}(\tau) + O(|\tau|^{k(n-1)-2}),$$

其中大-O 记号中隐含的常数依赖于 M、 Γ 和 ρ，但不依赖于 τ .

由于 ρ 快速衰减，且 $\operatorname{supp} \hat{\rho}$ 包含于 $(-\operatorname{inj} M, \operatorname{inj} M)^{k+1}$，卷积 $\rho * \mu$ 提供了 μ 的一个平滑版本，能够捕捉 μ 在 τ 附近的质量。特别地，定理 1.3 给出了 $\tau \in \Gamma$ 时这一平滑局部质量的渐近描述。接下来，我们确定当 $|\tau| \to \infty$ 时 $\operatorname{vol} F^{-1}(\tau)$ 的增长率。当 $k = 2$ 时，这个量与相应三角形 [Wym22] 的面积有关。对于 $k > 2$， 一个 $(k+1)$ 边形的形状

边长固定时并不能唯一确定（图2和图3），因此仅考虑其平面面积是不够的。我们在命题2.1中证明，在我们的假设下，vol $F^{-1}(\tau)$ 的量级为 $|\tau|^{k(n-1)-1}$，因此余项 $O(|\tau|^{k(n-1)-2})$ 确实是低阶项。与 [Wym22], 中一样，首项可以解释为边长由 τ规定的$(k+1)$边形构形空间的体积。

组织结构。 第2节分析定理 1.3 主项中出现的构形空间，并特别证明相关纤维体积的缩放律。第3节给出定理1.2的证明：在 $(k+1)$-边形不等式不成立的情形下，通过谱投影算子和非驻相位论证，证明高频尾部快速衰减。第4节通过将联合谱测度的傅里叶变换表示为傅里叶积分算子，并利用干净复合与半密度演算计算相关符号数据，从而证明定理 1.3。最后，第5节给出一个平坦环面例子，说明定理1.2中的频率截断基本上是尖锐的。

致谢。 本项目得到国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1007200）、国家自然科学基金（项目编号：12571107）以及浙江省自然科学基金（项目编号：LR25A010001）的资助。

2. Order of the main term in Theorem 1.3

定理 1.3 中的主导项涉及量 vol $F^{-1}(\tau)$，它可以看作边长由 τ 指定的闭合（$k+1$）边形构形空间的 Leray 体积。为了确定该项定义良好，并将其与余项进行比较，我们需要了解当 τ 位于 k-良锥中时， F 的纤维的基本几何性质。特别是，我们必须知道 $F^{-1}(\tau)$ 是一个光滑紧流形（因此 Leray 体积有限且非零），并且该体积在对 τ 进行膨胀变换时满足精确的缩放律。下一个命题将确立这些性质；其中的关键在于，非退化条件 (1.6) 排除了奇异纤维。

命题2.1 （ F 的缩放）。 令 Γ 为一个 k-良锥，并固定 $\tau \in \Gamma$。则 $F^{-1}(\tau) \neq \emptyset$，且 τ 是 F 的正则值，因此 $F^{-1}(\tau)$ 是余维为 $k+1$ 的光滑紧子流形。令

$$d := kn - (k+1) = k(n-1) - 1$$

设为其维数。则 $0 <$体积 $F^{-1}(\tau) < \infty$，并且对每个 $r > 0$，

$$\operatorname{vol} F^{-1}(r\tau) = r^d \operatorname{vol} F^{-1}(\tau).$$

证明。 固定 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{k+1}) \in \Gamma$。回顾一下，

$$F(\xi_1, \dots, \xi_k) = \big(|\xi_1|, \dots, |\xi_k|,\ |\xi_1 + \cdots + \xi_k|\big).$$

我们先证明纤维 $F^{-1}(\tau)$ 非空。由于 $\tau \in \Gamma \subset \Gamma_g$，严格的 $(k+1)$-边形不等式 (1.5) 成立。因此，存在向量 $u_1, \dots, u_{k+1} \in \mathbb{R}^n$（例如，它们都位于某个固定的二维平面内），使得

$$|u_j| = \tau_j \ (1 \le j \le k+1), \qquad u_1 + \cdots + u_{k+1} = 0.$$

令 $\xi_j := u_j$（其中 $1 \le j \le k$），得到 $|\xi_j| = \tau_j$，并且

$$|\xi_1 + \cdots + \xi_k| = |-(u_{k+1})| = \tau_{k+1},$$

因此 $F(\xi_1, \dots, \xi_k) = \tau$且 $F^{-1}(\tau) \neq \emptyset$。

接下来我们验证 τ 是 F 的正则值。取定 $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)\in F^{-1}(\tau)$ 并设

$$\omega_j=\frac{\xi_j}{|\xi_j|}\in S^{n-1}\ (1\le j\le k),\qquad \omega_{k+1}=\frac{\xi_1+\cdots+\xi_k}{|\xi_1+\cdots+\xi_k|}\in S^{n-1}.$$

对于 $h=(h_1,\dots,h_k)\in\mathbb{R}^{kn}$，我们计算

$$d(|\xi_j|)[h]=\langle\omega_j,h_j\rangle,\qquad d(|\xi_1+\cdots+\xi_k|)[h]=\Big\langle\omega_{k+1},\sum_{j=1}^{k}h_j\Big\rangle.$$

如果 $\operatorname{rank}(dF_\xi)<k+1$，这些 $k+1$ 线性泛函线性相关，因此存在 $(c_1,\dots,c_k,c_{k+1})\neq 0$，使得对所有 h,

$$\sum_{j=1}^{k}c_j\langle\omega_j,h_j\rangle+c_{k+1}\Big\langle\omega_{k+1},\sum_{j=1}^{k}h_j\Big\rangle=0.$$

等价地,

$$\sum_{j=1}^{k}\langle c_j\omega_j+c_{k+1}\omega_{k+1},\ h_j\rangle=0\quad\text{for all } h_1,\dots,h_k,$$

因此，对每个 j 都有 $c_j\omega_j+c_{k+1}\omega_{k+1}=0$。特别地，$c_{k+1}\neq 0$，且对于某个$\varepsilon_j\in\{\pm1\}$，有 $\omega_j=\varepsilon_j\,\omega_{k+1}$。因此

$$\xi_1+\cdots+\xi_k=\sum_{j=1}^{k}|\xi_j|\omega_j=\Big(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j|\xi_j|\Big)\omega_{k+1},$$

取范数可得

$$\tau_{k+1}=|\xi_1+\cdots+\xi_k|=\Big|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j|\xi_j|\Big|=\Big|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j\,\tau_j\Big|.$$

令 $s:=\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j\,\tau_j$，并选择 $\varepsilon_{k+1}\in\{\pm1\}$ 使得 $\varepsilon_{k+1}\tau_{k+1}+s=0$。那么符号向量

$$\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1})\in\{\pm1\}^{k+1}$$

满足 $\varepsilon\cdot\tau=0$，这与非退化条件 (1.6) 矛盾。因此，对所有 $\xi\in F^{-1}(\tau)$，都有 $\operatorname{rank}(dF_\xi)=k+1$，所以 τ 是正则值。

由此可知，$F^{-1}(\tau)$ 是 $\mathbb{R}^{kn}$ 中余维为 $k+1$ 的光滑子流形，因此其维数为 $d=kn-(k+1)=k(n-1)-1$。此外，它是紧的，因为

$$F^{-1}(\tau)\subset\prod_{j=1}^{k}\{|\xi_j|=\tau_j\},$$

它是球面的乘积。特别地，Leray 密度 d_F 在$F^{-1}(\tau)$ 上光滑且严格为正，因此 $0<\operatorname{vol}F^{-1}(\tau)<\infty$。

最后，我们证明缩放律。注意到

$$\operatorname{vol}F^{-1}(\tau)=\int_{\mathbb{R}^{kn}}\delta(F(\xi)-\tau)\,d\xi.$$

对于 $r>0$，作变量替换 $\xi = r\eta$。由于在 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中，$F(r\eta) = rF(\eta)$ 且 $\delta(ry) = r^{-(k+1)}\delta(y)$，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} F^{-1}(r\tau) &= \int_{\mathbb{R}^{kn}} \delta(F(\xi) - r\tau)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{kn}} \delta(rF(\eta) - r\tau)\, r^{kn}\, d\eta \\ &= r^{kn-(k+1)} \int_{\mathbb{R}^{kn}} \delta(F(\eta) - \tau)\, d\eta \\ &= r^{d}\ \operatorname{vol} F^{-1}(\tau),\end{aligned}$$

其中 $d = kn - (k+1) = k(n-1) - 1$。 □

3. Proof of Theorem 1.2

为分析求和式 (1.4) 中快速衰减的部分，我们引入一个光滑的谱投影算子。取满足 $\chi(0) = 1$ 的 $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，并定义

$$\chi_\lambda := \chi\Big(\lambda - \sqrt{-\Delta_g}\Big).$$

若 e_λ 是频率为 λ 的特征函数，则 $\chi_\lambda e_\lambda = e_\lambda$。此外，若假设 $\operatorname{supp}\widehat{\chi} \subset (1,2)$，则（模去对任意 N 均成立的 $O(\lambda^{-N})$ 误差项，如 [Sog17, 引理 5.1.3] 中所述）有如下振荡积分表示

$$\chi_\lambda e_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n-1}{2}} \int_M e^{i\lambda\psi(x,y)}\, a_\lambda(x,y)\, e_\lambda(y)\, dV(y), \tag{3.1}$$

其中 $\psi(x,\ y) = d_g(x,\ y)$ 是黎曼距离函数。这里我们不妨假设单射半径至少为 10，且振幅 a_λ 属于C^∞ 的一个有界子集，并满足

$$a_\lambda(x,y) = 0 \qquad \text{if } d_g(x,y) \notin (1,2).$$

在证明定理1.2之前，我们先记录一个适用于高输出频率区域中系数的统一非驻相估计。

引理 3.1. 令 $\epsilon > 0$ 并设

$$T_m := (1+\epsilon)(\tau_1 + \cdots + \tau_k) + m, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

假设 $\lambda_{i_j} \le \tau_j$ 对 $1 \le j \le k$ 成立，且

$$\lambda_{i_{k+1}} \in [T_m, T_m + 1].$$

那么，对每个整数 $N \ge 0$，都存在常数 $C_{\epsilon,\ N}$ 使得

$$\big|\langle e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k},\ e_{i_{k+1}}\rangle\big| \le C_{\epsilon,N}\, T_m^{-N}.$$

定理*1.2*的证明。 将尾部按单位谱窗分解:

$$\sum_{\lambda_{i_{k+1}} \ge (1+\epsilon)(\tau_1+\cdots+\tau_k)} \big|\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle\big|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{i_{k+1}} \in [T_m, T_m+1]} \big|\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle\big|^2$$

由韦尔定律,

$$\#\{\lambda_{i_{k+1}} \in [T_m, T_m+1]\} \ \lesssim\ T_m^{n-1}.$$

引理 3.1 给出

$$\sup_{\lambda_{i_{k+1}} \in [T_m, T_m+1]} \big|\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle\big|^2 \ \lesssim_{\epsilon,N}\ T_m^{-2N}.$$

因此

$$\sum_{\lambda_{i_{k+1}}\geq(1+\epsilon)(\tau_1+\cdots+\tau_k)} \left|\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle\right|^2 \lesssim_{\epsilon,N} \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{n-1-2N}.$$

给定 $N'>0$，选取 N使得 $2N-(n-1) > N'$。于是，最后一个和式被$C_{\epsilon,\ N'}(\tau_1+\cdots+\tau_k)^{-N'}$所控制，从而证明了该定理。□

引理 *3.1* 的证明。令

$$\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle = \int_M e_{i_1}(x)\cdots e_{i_k}(x)\,\overline{e_{i_{k+1}}(x)}\,dV(x).$$

对每个因子使用振荡表示 (3.1)（并对$e_{i_{k+1}}$使用其复共轭），我们可以将该积分表示为一个相位为

$$\phi(x,y_1,\ldots,y_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_{i_{k+1}}}\,\psi(x,y_j) \;-\; \psi(x,y_{k+1}),$$

其中 $\psi(x,\ y) = d_g(x,\ y)$，且所有变量均受限于区域 $1 < d_g(x,\ y_j) < 2$，这是由振幅 $a_{\lambda_{i_j}}$ 的支集所决定的。

在此区域上，$|\nabla_x\psi(x,\ y)| = 1$，因此若 $\nabla_x\phi = 0$，则

$$\nabla_x\psi(x,y_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_{i_{k+1}}}\,\nabla_x\psi(x,y_j),$$

这是不可能的，因为左边的范数为 1，而右边的范数至多为 $\sum_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}/\lambda_{i_{k+1}}$。在假设 $\lambda_{i_j}\leq\tau_j$ 和 $\lambda_{i_{k+1}}\geq T_m$ 下，我们有

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_{i_{k+1}}} \leq \frac{\tau_1+\cdots+\tau_k}{(1+\epsilon)(\tau_1+\cdots+\tau_k)+m} \leq \frac{1}{1+\epsilon},$$

因此，$|\nabla_x\phi|$ 有一个仅依赖于 ϵ的正下界。

利用这一一致非驻相性，我们对 x进行分部积分。每次分部积分都会带来一个因子 $\lambda_{i_{k+1}}^{-1}$，而振幅 $a_{\lambda_{i_j}}$ 在其支撑集上具有一致的 C^∞ 界。因此，对任意 N，我们得到

$$\left|\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle\right| \leq C_{\epsilon,N}\,\lambda_{i_{k+1}}^{-N}.$$

最后，在窗口 $\lambda_{i_{k+1}}\in[T_m, T_m+1]$ 上，我们有 $\lambda_{i_{k+1}}\simeq T_m$，因此估计变为$\left|\langle e_{i_1}\cdots e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\rangle\right| \leq C_{\epsilon,N}T_m^{-N}$，如所述。□

4. The proof of Theorem 1.3

接下来，我们将 $\check{}\mu\,|dt|^{1/2}$ 表示为傅里叶积分算子与拉格朗日分布的复合。然后计算它们的阶数和主符号，以获得 $\check{}\mu\,|dt|^{1/2}$ 的符号数据。乘以截断函数 $\check{}\rho\,|dt|^{1/2}$ 后，我们应用逆傅里叶变换来证明定理 1.3。

为了计算这些复合的符号数据，我们使用 Duistermaat 和 Guillemin [DG75]的干净复合微积分。我们还使用第一作者 [Wym22]提出的复合傅里叶积分算子的半密度公式。有关傅里叶积分算子和半密度的背景知识，请参见 [Dui73, DH72, Wym22]。

为方便起见，我们固定一个由实值特征函数组成的 L^2 正交特征基 $\{e_j\}_{j\geq 1}$。按照这一约定，我们可以写成

$$\mu = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_{k+1}} \left| \int_M e_{i_1}(x)\, e_{i_2}(x) \cdots e_{i_{k+1}}(x)\, dV_M(x) \right|^2 \delta_{(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\dots,\lambda_{i_{k+1}})}.$$

设 P 表示 M 上的椭圆一阶伪微分算子 $\sqrt{-\Delta_g}$。为简化记号，令 $m = (i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$，并定义光滑半密度

$$\phi_m = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{k+1}} \, |dV_{M^{k+1}}|^{1/2}$$

在 M^{k+1} 上。集合 $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}^{k+1}}$ 构成 M^{k+1} 上内蕴 L^2 空间的希尔伯特基，且每个 ϕ_m 是交换算子的联合特征半密度，这些交换算子由让 P 作用于一个因子、恒等算子作用于其余因子而得到。我们将其联合特征值记为 $\lambda_m = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_{k+1}})$。

设 $\Delta = \{(x, x, \dots, x) : x \in M\} \subset M^{k+1}$ 表示对角线，并设 δ_Δ 为相应的半密度分布，定义为

$$(\delta_\Delta, f\, |dV_{M^{k+1}}|^{1/2}) = \int_M f(x, x, \dots, x)\, dV_M(x) \qquad \text{for all } f \in C^\infty(M^{k+1}).$$

采用这一记号，

$$\int_M e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{k+1}}\, dV_M = (\delta_\Delta, \phi_m).$$

令 $\check{}\mu$ 表示 μ 在 $\mathbb{R}^{k+1}$上的逆傅里叶变换。按照我们的归一化，

$$\check{\mu}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{k+1}} \sum_m |(\delta_\Delta, \phi_m)|^2\, e^{i\langle t, \lambda_m\rangle}, \qquad t = (t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

等价地，若将 $\check{}\mu(t)\, |dt|^{1/2}$ 视为 $\mathbb{R}^{k+1}$上的半密度分布，则

$$\begin{aligned} \check{\mu}(t)\, |dt|^{1/2} &= \frac{1}{(2\pi)^{k+1}} \sum_m (\delta_\Delta \otimes \delta_\Delta,\ \phi_m \otimes \phi_m)\, e^{i\langle t, \lambda_m\rangle}\, |dt|^{1/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k+1}}\, U \circ \delta_{\Delta\times\Delta}(t), \end{aligned}$$

其中 $\Delta \times \Delta \subset M^{k+1} \times M^{k+1}$和 $\delta_{\Delta\times\Delta} := \delta_\Delta \otimes \delta_\Delta$。这里， U是一个算子，它将 $M^{k+1} \times M^{k+1}$上的测试半密度映射为 $\mathbb{R}^{k+1}$上的半密度分布，其核为

$$U(t, x, y) = e^{it_1 P}(x_1, y_1)\, e^{it_2 P}(x_2, y_2) \cdots e^{it_{k+1} P}(x_{k+1}, y_{k+1}),$$

for $x = (x_1, \dots\dots, x_{k+1}) \in M^{k+1}$和 $y = (y_1, \dots\dots, y_{k+1}) \in M^{k+1}$。这里，每个 $e^{it_j P}$表示 th e half-波算子。

因此，我们的主要任务是研究复合算子 $U \circ \delta_{\Delta\times\Delta}$ 的某些性质。然而，如果不对联合谱进行局部化，这个复合算子未必在 Duistermaat 和 Guillemin [DG75] 的意义下是干净的。为了将特征值变量局部化到一个k-良好区域，我们插入一个截断算子 A，方法是将其作用于 $\delta_\Delta \otimes \delta_\Delta$ 中的一个 δ_Δ 副本。这里， $A \in \Psi^0_{\text{phg}}(M^{k+1})$ 在谱意义上定义为

$$A\phi_m = a(\lambda_m)\phi_m, \tag{4.1}$$

其中， a在半径为 1 的球B 之外（例如）是实值、光滑且 0 阶正齐次的。我们将 a的锥形支集定义为使 $\operatorname{supp} a \setminus B \subset \Gamma$成立的最小闭锥 $\Gamma \subset \mathbb{R}^{k+1} \setminus 0$。这种局部化在复合$U \circ \delta_{\Delta\times\Delta}$中发挥着重要作用。

接下来，我们考察它对计算 $\check{}\mu(t)\,|dt|^{1/2}$的影响。定义修正测度

$$\mu_a = \sum_m a(\lambda_m)\,|(\delta_\Delta, \phi_m)|^2\,\delta_{\lambda_m}.$$

回溯上述计算，我们得到

$$\check{\mu}_a(t)\,|dt|^{1/2} = \frac{1}{(2\pi)^{k+1}}\,U\circ(\delta_\Delta\otimes A\delta_\Delta)(t). \tag{4.2}$$

特别地，若 $a\equiv 1$ 位于一个 k-良好锥上，则 μ_a 与 μ 在该锥上相等。由于在定理 1.3 中我们固定了一个 k-良好锥 Γ，因此只需研究算子 $U\circ(\delta_\Delta\otimes A\delta_\Delta)$。

我们论证的核心是计算复合算子 (4.2) 的符号数据。直接研究该算子较为繁琐。因此，我们将其改写为四个较简单部分的复合。令 $Q\colon C^\infty(M^{k+1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{k+1}\times M^{k+1})$ 为与 U 具有相同分布核的算子，并令 $S\colon C^\infty(M^{k+1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ 为其分布核为

$$(Q\circ A)\circ\delta_\Delta. \tag{4.3}$$

由此可得

$$U\circ(\delta_\Delta\otimes A\delta_\Delta) = S\circ\delta_\Delta. \tag{4.4}$$

我们首先验证 $Q\circ A$ 和 δ_Δ 是傅里叶积分算子，并计算其典范关系和主符号（包括半密度部分）。随后，按照 [Wym22], 的方法，我们将 $Q\circ A$ 与 δ_Δ 复合，以得到 S 的符号数据，最后计算 $S\circ\delta_\Delta$ 的符号数据。此分解仅用于简化各个分量的符号计算。

命题 4.1。 $\delta_\Delta\in I^{(k-1)n/4}(M^{k+1}, \dot{N}^*\Delta)$ 其中，在典范局部坐标中 s,

$\dot{N}^*\Delta = \{(x_1, -\xi_2-\xi_3-\cdots-\xi_{k+1}, x_1, \xi_2, x_1, \xi_3, \dots, x_1, \xi_{k+1})\colon x_1\in M,\ \xi\in \dot{T}^*_{(x_1,\dots,x_1)} M^{k+1}\}$，其主符号的半密度部分为

$$(2\pi)^{-(k-1)n/4}\frac{1}{|g(x_1)|^{(k-1)/4}}|dx_1\,d\xi_2\,d\xi_3\dots\,d\xi_{k+1}|^{1/2}.$$

设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，且 $(x,\theta)\in X\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$。回忆一下，若齐次相位函数 $\varphi(x,\theta)$ 满足 $d\varphi\neq 0$，并且只要 $\varphi'_\theta(x,\theta)=0$，微分 $d(\varphi'_{\theta_1})\dots, d(\varphi'_{\theta_N})$ 线性无关，则称其为非退化的。这意味着临界集

$$C_\varphi = \{(x,\theta)\colon \varphi'_\theta(x,\theta)=0\}$$

是 $X\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$的光滑子流形。因此，

$$\Lambda_\varphi = \{(x,\varphi'_x(x,\theta))\colon (x,\theta)\in C_\varphi\}$$

是拉格朗日子流形。在证明命题 4.1 之前，我们记录以下关于傅里叶积分算子和半密度的引理，参见 [Sog17，引理 6.1.4]。

引理 4.2. 设 φ是$(x_0,\theta_0)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$的某个开锥邻域中的非退化相位函数。用振荡积分定义 X 上的半密度分布 u

$$u(x) = (2\pi)^{-(n+2N)/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)\,d\theta\right)|dx|^{1/2},$$

其中 $a(x,\theta)$ 属于符号类 $S^m_{phg}(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^N\setminus 0))$。则 u 是与 Λ_φ 相关的拉格朗日分布，其阶为

$$\operatorname{ord} u = m + (2N-n)/4,$$

并记作 $u \in I^{m+(2N-n)/4}(X, \Lambda_\varphi)$。

在 u 上，可以关联一个齐次半密度。连同马斯洛指标，这构成了 u 的主符号。我们只描述半密度部分。给定 C_φ 通过 λ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集中的参数化，主符号的半密度部分可通过传输

$$a_0(\lambda)\sqrt{d_{\varphi'_\theta}} = a_0(\lambda)\left|\det\frac{\partial(\lambda,\varphi'_\theta)}{\partial(x,\theta)}\right|^{-1/2}|d\lambda|^{1/2}$$

经由映射 $C_\varphi \to \Lambda_\varphi$ 到 Λ_φ，其中 a_0 表示 a 的最高阶项，而 $d_{\varphi'_\theta}$ 是 $C_\varphi = (\varphi'_\theta)^{-1}(0)$ 上的 Leray 密度。

命题 *4.1* 的证明。令 x 表示 M 上的局部坐标，并令 $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{k+1})$ 表示 M^{k+1} 上诱导的坐标。于是，$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{k+1})$ 参数化了与对角线相交的 M^{k+1} 的一个邻域。假设 f 是光滑的，且支撑在这样一个坐标片中。由傅里叶反演公式，

$$(\delta_\Delta, f|dV_{M^{k+1}}|^{1/2}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_1)\,|g(x_1)|^{1/2}\,dx_1$$
$$= (2\pi)^{-kn}\int\cdots\int e^{i\phi(x_1,\ldots,x_{k+1},\xi_2,\ldots,\xi_{k+1})} f(x_1,\ldots,x_{k+1})\,|g(x_1)|^{1/2}\,dx_1\ldots dx_{k+1}\,d\xi_2\ldots d\xi_{k+1},$$

where

$$\phi(x_1,\ldots,x_{k+1},\xi_2,\ldots,\xi_{k+1}) = \langle x_1-x_2,\xi_2\rangle + \langle x_1-x_3,\xi_3\rangle + \cdots + \langle x_1-x_{k+1},\xi_{k+1}\rangle.$$

回想一下，在局部坐标中，

$$f|dV_{M^{k+1}}|^{1/2} = f(x_1,\ldots,x_{k+1})\,|g(x_1)|^{1/4}\ldots|g(x_{k+1})|^{1/4}\,|dx_1\ldots dx_{k+1}|^{1/2}.$$

因此我们可以写成

$$\delta_\Delta = (2\pi)^{-kn}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi}\,\frac{|g(x_1)|^{1/4}}{|g(x_2)|^{1/4}\ldots|g(x_{k+1})|^{1/4}}\,d\xi_2\ldots d\xi_{k+1}\right)|dx_1\ldots dx_{k+1}|^{1/2}$$
$$= (2\pi)^{-(3kn+n)/4}\left(\int_{\mathbb{R}^{kn}} e^{i\phi}\,(2\pi)^{-(kn-n)/4}\,G(x_1,\ldots,x_{k+1})\,d\xi_2\ldots d\xi_{k+1}\right)|dx_1\ldots dx_{k+1}|^{1/2},$$

其中

$$G(x_1,\ldots,x_{k+1}) = \frac{|g(x_1)|^{1/4}}{|g(x_2)|^{1/4}\ldots|g(x_{k+1})|^{1/4}}.$$

这里我们将因子 $(2\pi)^{-\frac{kn-n}{4}}$ 并入振幅，使归一化与前一个引理中的约定相符。

现在验证 $\phi(x_1、\ldots\ldots、x_{k+1}、\xi_2、\ldots\ldots、\xi_{k+1})$ 是一个非退化相位函数。首先，ϕ 关于频率变量 $(\xi_2、\ldots\ldots、\xi_{k+1})$ 正齐次。接下来，记 $x = (x_1、\ldots\ldots、x_{k+1})$ 和 $\theta = (\xi_2、\ldots\ldots、\xi_{k+1})$，则有

$$\phi'_x = \begin{bmatrix}\xi_2+\cdots+\xi_{k+1}\\ -\xi_2\\ -\xi_3\\ \vdots\\ -\xi_{k+1}\end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad \phi'_\theta = \begin{bmatrix}x_1-x_2\\ x_1-x_3\\ \vdots\\ x_1-x_{k+1}\end{bmatrix}.$$

因此 $d\phi \neq 0$ 只要 $(\xi_2,\ldots,\xi_{k+1}) \neq (0,\ldots,0)$。临界集为

$$C_\phi = \{(x_1,\ldots,x_1,\xi_2,\ldots,\xi_{k+1}) : x_1\in\mathbb{R}^n,\ (\xi_2,\ldots,\xi_{k+1})\in\mathbb{R}^{kn}\setminus 0\},$$

并且在 C_ϕ 上有

$$d\phi'_\theta = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & 0 & 0 & 0 & \cdots & -I \end{bmatrix}.$$

其秩为满秩。因此， δ_Δ 是一个阶数为

$$\operatorname{ord}(\delta_\Delta) = m + \frac{2N-n}{4} = \frac{2kn-(k+1)n}{4} = \frac{(k-1)n}{4},$$

与映射下 C_ϕ 的像相关联

$$(x_1, \dots, x_{k+1}, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{k+1}, \phi'_x(x_1, \dots, x_{k+1}, \xi_2, \dots, \xi_{k+1})),$$

即

$$\{(x_1, x_1, \dots, x_1; \xi_2 + \cdots + \xi_{k+1}, -\xi_2, \dots, -\xi_{k+1}) \in \dot{T}^* M^{k+1} : x_1 \in M,\ \xi_2, \dots, \xi_{k+1} \in T^*_{x_1} M\},$$

$\dot{}$，它是去心余法丛 $N^*\Delta$。

符号的半密度部分通过传输得到

$$(2\pi)^{-n/4} G(x_1, \dots, x_1)\, d^{1/2}_{\phi'_\theta}$$

$\dot{}$通过 $N^*\Delta$ 的参数化 (x_1， ξ_2，……， ξ_{k+1})，其中 $d_{\phi'_\theta}$ 是C_ϕ =(ϕ'_θ)$^{-1}$上的 Leray 密度 (0)。在这些坐标中，

$$\begin{aligned} d_{\phi'_\theta} &= \left| \det \frac{\partial(x_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}, \phi'_\theta)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, \theta)} \right|^{-1} dx_1\, d\xi_2 \dots d\xi_{k+1} \\ &= dx_1\, d\xi_2 \dots d\xi_{k+1}. \end{aligned}$$

因此，除去一个 Maslov 因子，主符号的半密度部分为

$$(2\pi)^{-(k-1)n/4} \frac{1}{|g(x_1)|^{(k-1)/4}} |dx_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \dots\, d\xi_{k+1}|^{1/2}.$$

将 ξ_2， ξ_3，……， ξ_{k+1}取负后，命题即得。 □

接下来，我们描述 $Q \circ A$的符号数据。为此，我们回顾哈密顿流。设X 是一个光滑流形，且 p 是 T^*X上的光滑函数。哈密顿向量场H_p 在局部定义为

$$H_p = \sum_j \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right), \tag{4.5}$$

其中 (x_1，……， x_n， ξ_1，……， ξ_n) 是 T^*X上的典范局部坐标。等价地， H_p由恒等式 ω (H_p， v) = dp(v) 刻画，该式对 T^*X上的所有向量场 v均成立，其中$\omega = d\xi \wedge dx$ 是 T^*X 上的辛 2-形式。流 exp(tH_p) 称为 p的哈密顿流。

从几何上看，如果 (x， ξ) $\in T^*X$并且我们将 exp(tH_p)(x， ξ) =(x(t) ξ(t)) 写成这样，那么 x(t) 就是 X 上的投影轨迹，其余切分量 ξ(t) 沿该轨迹传输。如果 p 是 1 阶正齐次的，那么哈密顿流具有齐次性，即它与纤维膨胀相交换：对于 $\lambda > 0$,

$$\exp(tH_p)(x, \lambda\xi) = (x(t), \lambda\xi(t)).$$

关于哈密顿向量场、流以及构成傅里叶积分算子基础的辛几何的更多背景，请参阅 [Dui73] 和 [Sog17]。

回到我们的问题，设 $(x,\xi) = (x_1,\xi_1,\dots,x_{k+1},\xi_{k+1}) \in T^*M^{k+1}$，其中每个$\xi_j \neq 0$，并对 $t = (t_1,\dots,t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$定义，

$$G^t(x,\xi) = \big(\exp(t_1H_p)(x_1,\xi_1),\dots,\exp(t_{k+1}H_p)(x_{k+1},\xi_{k+1})\big),$$

其中， H_p 是流形 M 上 $P = \sqrt{-\Delta_g}$ 的主符号 p 对应的哈密顿向量场。我们还记

$$p(x,\xi) = (p(x_1,\xi_1),\dots,p(x_{k+1},\xi_{k+1})) \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

采用这一记号，下面的命题给出了 $Q \circ A$的符号。

命题 4.3。 若 a 的锥形支集是 k-良好的，则(4.3) 中的 $Q \circ A$ 是 $I^{-(k+1)/4}(\mathbb{R}^{k+1}\times M^{k+1}\times M^{k+1},\mathcal{C}')$ 上的一个傅里叶积分算子，与以下典范关系相关联

$$\mathcal{C} = \{(t,p(x,\xi),G^{-t}(x,\xi);x,\xi) : t \in \mathbb{R}^{k+1},\ (x,\xi) \in \operatorname{ess\,supp} A\},$$

其主符号的半密度部分为

$$(2\pi)^{(k+1)/4}a(p(x,\xi))|dt\,dx\,d\xi|^{1/2}.$$

证明。 我们回顾半波算子及其波前集的一些标准事实，例如可参见 [H¨o94，第 29 节1]。对于 $t \in \mathbb{R}$，算子 e^{-itP}: $C^\infty(M) \to C^\infty(\mathbb{R}\times M)$ 是一个阶数为 $-1/4$ 、典范关系为

$$\{(t,-p(x,\xi),\exp(tH_p)(x,\xi),x,\xi) : t \in \mathbb{R},\ (x,\xi) \in \dot{T}^*M\}$$

且主符号的半密度部分为

$$(2\pi)^{1/4}|dt\,dx\,d\xi|^{1/2}.$$

Aft经变量替换 $t \mapsto -t$后，算子 e^{itP} 具有相同的阶数和符号，而 d its 典范关系变为

$$\{(t,p(x,\xi),\exp(-tH_p)(x,\xi);x,\xi) : t \in \mathbb{R},\ (x,\xi) \in \dot{T}^*M\}.$$

令 u 表示 e^{itP} 在流形 M $\mathbb{R}\times M\times M$上的分布核。回到多参数记号 $t \in \mathbb{R}^{k+1}$和 $(x,\xi) \in T^*M^{k+1}$，算子 Q的核在变量置换意义下是 $(k+1)$ 重张量积 $u\otimes\cdots\otimes u$。因此，由 [Dui73 命题 1.35], 可知，算子 Q 的核的波前集包含于以下集合的并集中

$$\mathrm{WF}(u)\times\cdots\times\mathrm{WF}(u) \simeq \{(t,p(x,\xi),G^{-t}(x,\xi),x,-\xi) : t \in \mathbb{R}^{k+1},\ (x,\xi) \in \dot{T}^*M^{k+1}\} \tag{4.6}$$

再加上由乘积产生的其他分量，其中至少有一个因子是 $T^*(\mathbb{R}\times M\times M)$ 的零截面。具体而言，这些乘积为 $X_1\times\cdots\times X_{k+1}$，其中每个 X_j 都是 WF(u) 或零截面，并且至少有一个 X_j 是零截面。

还需验证，与 A 复合会消去这些额外分量。对于任意属于 k-良锥的 $(x,\xi) \in$本质支集 A，$(p(x_1,\xi_1)\dots,p(x_{k+1},\xi_{k+1}))$ 的每个坐标 $p(x_j,\xi_j)$ 都是正的，因此每个 ξ_j 都非零。特别是，应用 A 后，零截面因子均不会出现。因此

$$\mathrm{WF}(Q\circ A) \subset \{(t,p(x,\xi),G^{-t}(x,\xi);x,-\xi) : t \in \mathbb{R}^{k+1},\ (x,\xi) \in \operatorname{ess\,supp} A\}.$$

在这个典范关系上，主符号是半波因子的符号与 A 的主符号之积，即

$$(2\pi)^{(k+1)/4}a(p(x,\xi))|dt\,dx\,d\xi|^{1/2},$$

模一个 Maslov 因子。 □

结合命题 4.1 与命题 4.3，我们现在陈述复合（$Q\circ A$）$\circ\delta_\Delta$ 在 a 的锥形支集为 k-好的情形下的符号数据。

命题 4.4. 假设 a 的锥形支集是 k-*good*。那么 $(Q\circ A)\circ\delta_\Delta$ 属于类 $I^{(kn-n-k-1)/4}(\mathbb{R}^{k+1}\times M^{k+1};\,\Lambda)$，其中

$$\Lambda=\mathcal{C}\circ\dot N^*\Delta=\{(t,p(x,\xi)\ G^{-t}(x,\xi))\in\dot T^*(\mathbb{R}^{k+1}\times M^{k+1}):(x,\xi)\in\dot T^*M^{k+1}\cap\text{本质支集 }A\},$$

其主符号的半密度部分为

$$(2\pi)^{-(kn-n-k-1)/4}a(p(x,\xi))|g(x_1)|^{-(k-1)/4}|dt\,dx_1\,d\xi_2\cdots d\xi_{k+1}|^{1/2},$$

通过参数化

$$(x,\xi)=(x_1,x_1,\dots,x_1,-\xi_2-\cdots-\xi_{k+1},\xi_2,\dots,\xi_{k+1}).$$

回顾 (4.3) 和 (4.4)，$S:\ C^\infty(M^{k+1})\ \to\ C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ 是分布核为 $(Q\circ A)\circ\delta_\Delta$ 的算子。也就是说，$S\in I^{(kn-n-k-1)/4}(\mathbb{R}^{k+1}\times M^{k+1};\,\mathcal{C}_S')$，其中

$$\begin{aligned}(4.7)\quad \mathcal{C}_S=\{(t,p(x,\xi);G^t(x,\xi))\in\dot T^*\mathbb{R}^{k+1}\times\dot T^*M^{k+1}:\\ x=(x_1,\dots,x_1)\in M^{k+1},\ \xi=(-\xi_2-\cdots-\xi_{k+1},\xi_2,\dots,\xi_{k+1})\in\dot T_x^*M^{k+1},\\ (x,\xi)\in\operatorname{ess\,supp}A\}.\end{aligned}$$

它与命题 4.4 中的主符号相同。注意，当 A 的本质支集包含于正八分体时，$\mathcal{C}_S\subset\dot T^*\mathbb{R}^{k+1}\times\dot T^*M^{k+1}$成立；例如，当它是 k-good 或 k-bad 时便是如此。现在可以利用标准演算 [Dui73，第 1]章来计算 $S\circ\delta_\Delta$ 的波前集。在此过程中，会出现某些构型；我们利用下面来自 [Wym22], 的引理将其单独处理，并在命题 4.4 的证明中应用该引理。

设 Y 是一个无边界的光滑紧流形，其维数为 $\dim Y=n$。固定一个锥形拉格朗日子流形 $\Lambda\subset T^*Y$。设 $p=(p_1,\ldots\ldots,p_{k+1})$ 是满足 $\{p_i,p_j\}=0$ 的正齐次一阶符号，其中对所有 $1\le i,\ j\le k+1$均成立。特别地，对每一对指标而言，哈密顿向量场 H_{p_i} 和 H_{p_j} 彼此对易。

考虑典范关系

$$\mathcal{C}_p=\{(t,p(x,\xi),G^{-t}(x,\xi);x,\xi):t\in\mathbb{R}^{k+1},\ (x,\xi)\in\dot T^*Y\}\subset\dot T^*(\mathbb{R}^{k+1}\times Y)\times\dot T^*Y,$$

其中

$$G^t=\exp(t_1H_{p_1})\circ\cdots\circ\exp(t_{k+1}H_{p_{k+1}})=\exp(t_1H_{p_1}+\cdots+t_{k+1}H_{p_{k+1}}).$$

下文中，我们固定 Λ 的参数化 $\lambda\mapsto(x(\lambda)\ \xi(\lambda))$，它由 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ 给出。复合

$$\mathcal{C}_p\circ\Lambda=\{(t,p(x,\xi),G^{-t}(x,\xi)):t\in\mathbb{R}^{k+1},\ (x,\xi)\in\Lambda\}$$

于是可由 (t,λ) 参数化。

引理 4.5. $\mathcal{C}_p$ 与 Λ 的复合是横截的。此外，固定齐次半密度

$$\sigma_{\mathcal{C}_p}(t,x,\xi)=a(t,x,\xi)\,|dt\,dx\,d\xi|^{1/2}\qquad and\qquad \sigma_\Lambda(\lambda)=b(\lambda)\,|d\lambda|^{1/2}$$

分别定义在 $\mathcal{C}_p$ 和 Λ 上。则复合 $\sigma_{\mathcal{C}_p}\circ\sigma_\Lambda$ 是半密度

$$a(t,x(\lambda),\xi(\lambda))\,b(\lambda)\,|dt\,d\lambda|^{1/2}$$

通过 $\mathcal{C}_p\circ\Lambda$ 的参数化(t,λ)。

命题 *4.4* 的证明。 设 $Y = M^{k+1}$，则 $\dim\, Y = (k+1)n$。我们将命题 4.1 中的拉格朗日子流形 $N^*\Delta$ 与引理 4.5 中的 Λ 对应起来，并取参数$\lambda = (x_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_{k+1})$。

我们还取

$$p(x,\xi) = (p(x_1,\xi_1), p(x_2,\xi_2), \dots, p(x_{k+1},\xi_{k+1})).$$

在 A 的作用下，仅当 $p(x,\ \xi)$ 位于一个 k-良锥中时，$(x,\ \xi) \in$ 的本质支集 A 才成立，因此每个分量 $p(x_j,\ \xi_j)$ 都是正的。

在这种情形下，

$$\sigma_{\mathcal{C}_p}(t,x,\xi) = (2\pi)^{(k+1)/4} a(p(x,\xi))\, |dt\, dx\, d\xi|^{1/2}$$

and

$$\sigma_\Lambda(\lambda) = (2\pi)^{-(k-1)n/4} \frac{1}{|g(x_1)|^{(k-1)/4}}\, |dx_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \cdots d\xi_{k+1}|^{1/2}.$$

该命题直接由引理 4.5 得出。 □

接下来，我们计算 $S \circ \delta_\Delta$ 的符号数据，并用它得到 $\check{}\mu\, |dt|^{1/2}$ 的渐近展开。

命题 4.6。 设 a 的锥形支集是 k-良好的。将复合 $S \circ \delta_\Delta$ 限制在开立方体 $(-\operatorname{inj} M、\operatorname{inj} M)^{k+1}$ 上，所得对象是属于以下类的拉格朗日分布

$$I^{kn-3(k+1)/4}\big((-\operatorname{inj} M, \operatorname{inj} M)^{k+1}; \dot{T}_0^*\mathbb{R}^{k+1}\big)$$

其主符号的半密度部分为

$$(2\pi)^{-kn+3(k+1)/4}\ \operatorname{vol} M\, a(\tau)\ \operatorname{vol} F^{-1}(\tau)\, |d\tau|^{1/2}.$$

命题 4.6 的证明使用了 Duistermaat 和 Guillemin [DG75] 的干净复合演算。我们首先记录两个引理。

设 Y、 Λ和 p 如引理 4.5 中所述，并定义

$$\mathcal{C}_\Lambda = \{(t, p(x,\xi); G^t(x,\xi)) : t \in \mathbb{R}^{k+1},\ (x,\xi) \in \Lambda\} \subset \dot{T}^*\mathbb{R}^{k+1} \times \dot{T}^*Y.$$

假设这些哈密顿向量场

$$H_p = (H_{p_1}, \dots, H_{p_{k+1}})$$

线性无关，并张成一个与 $T\Lambda$ 平凡相交的子空间。

引理 4.7. 设 $\mathcal{C}_\Lambda$ 与 Λ 如上所述。下列结论成立。

(1) 存在一个孤立分支，属于

$$\mathcal{C}_\Lambda \circ \Lambda = \{(t, p(x,\xi)) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^{k+1} : (x,\xi) \in \Lambda,\ G^t(x,\xi) \in \Lambda\}$$

包含于 $\dot{T}_0^*\mathbb{R}^{k+1}$。

(2) 在该分支处， $\mathcal{C}_\Lambda$ 与 Λ 以超额干净地复合

$$e = \dim Y - (k+1).$$

(3) 假设 Λ 由 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ 参数化，并且我们有齐次半密度

$$\sigma_{\mathcal{C}_\Lambda} = b(t,\lambda)\, |dt\, d\lambda|^{1/2} \qquad and \qquad \sigma_\Lambda = a(\lambda)\, |d\lambda|^{1/2}$$

分别在 $\mathcal{C}_\Lambda$ 和 Λ上。于是

$$\sigma_{\mathcal{C}_\Lambda} \circ \sigma_\Lambda = \left(\int_{p^{-1}(\tau)} b(0,\lambda)\, a(\lambda)\, d_p(\lambda) \right) |d\tau|^{1/2}$$

at $(0,\tau)\in \dot{T}^*\mathbb{R}^{k+1}$*, where* d_p *denotes the Leray density on* $p^{-1}(\tau)$*.*

引理 4.8. 设 $\mathcal{C}$ 和 Λ 以超额 e干净复合。若 A 是与 $\mathcal{C}$ 相关联的傅里叶积分算子，且 B 是与 Λ相关联的拉格朗日分布，则 $A\circ B$ 是与 $\mathcal{C}\circ\Lambda$ 相关联的拉格朗日分布，其阶数为

$$\operatorname{ord}(A\circ B)=\operatorname{ord}A+\operatorname{ord}B+\frac{e}{2}.$$

此外，若 σ_A、σ_B 和 $\sigma_{A\circ B}$ 分别是 A、B 和 $A\circ B$ 的主符号的半密度部分，则

$$\sigma_{A\circ B}=(2\pi i)^{-e/2}\,\sigma_A\circ\sigma_B.$$

引理 4.7 和引理 4.8 的证明分别见 [Wym22] 和 [DG75], 。现在证明命题 4.6。

命题 *4.6* 的证明。对于 $1\le j\le k+1$，令 H_j 表示流形 T^*M^{k+1} 上的向量场，其第 j 个分量为 $H_p(x_1,\xi_j)$，其余分量均为零，即

$$H_j=(0,\dots,0,H_p(x_1,\xi_j),0,\dots,0).$$

这些 H_j 线性无关，且它们张成的子空间由如下形式的向量构成

$$(t_1'H_p(x_1,\xi_1),\,t_2'H_p(x_1,\xi_2),\,\dots,\,t_{k+1}'H_p(x_1,\xi_{k+1})).$$

我们断言，该子空间与 $T(N^*\Delta)$ 的交平凡。为此，设

$$(t_1'H_p(x_1,\xi_1),\,\dots,\,t_{k+1}'H_p(x_1,\xi_{k+1}))\in T(\dot{N}^*\Delta).$$

在以 x_1 为中心的测地法坐标中，哈密顿向量场具有如下形式

$$H_p(0,\xi)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\xi_m}{|\xi|}\,\frac{\partial}{\partial x_m}.$$

因此，此向量在 $T^*M^{k+1}\to M^{k+1}$ 下的推前等于

$$(t_1'\xi_1/|\xi_1|,\,\dots,\,t_{k+1}'\xi_{k+1}/|\xi_{k+1}|).$$

由于 $T\Delta\subset TM^{k+1}$ 由对角向量组成，属于 $T\Delta$ 就要求这些分量相等。特别地，所有 ξ_j 都必须平行。在 $N^*\Delta$ 上，我们还有 $\xi_1=-(\xi_2+\cdots+\xi_{k+1})$，因此平行性意味着存在一个符号向量 $\varepsilon\in\{\pm1\}^{k+1}$，使得

$$\varepsilon_1|\xi_1|+\cdots+\varepsilon_{k+1}|\xi_{k+1}|=0.$$

然而，$(|\xi_1|,\ \dots\dots,\ |\xi_{k+1}|)$ 位于 ess supp A 上的一个 k-good 锥内，因此这与非退化条件 (1.6) 矛盾。故 $t_1'=\cdots=t_{k+1}'=0$，这就证明了所述结论。

引理 4.7 的第 (1) 部分表明，复合 $\mathcal{C}_\Lambda\circ N^*\Delta$ 在 $\dot{T}^*_0\mathbb{R}^{k+1}$ 中有一个孤立分支。此外，若存在 $t=(t_1,\ \dots\dots,\ t_{k+1})\neq 0$，使得点 $\exp(t_1H_p)(x_1,\ \xi_1)\dots\dots,\ \exp(t_{k+1}H_p)(x_1,\ \xi_{k+1})$ 在 M 中投影到同一个基点，那么至少有一个 $|t_j|$ 不小于 inj M。由于我们将范围限制在 $(-\operatorname{inj}M,\ \operatorname{inj}M)^{k+1}$，因此可以忽略这种情况。

引理 4.7 的第 (2) 部分给出干净复合在 $t=0$ 分量处的超额，

$$e=(k+1)n-(k+1).$$

因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(S\circ\delta_\Delta) &= \operatorname{ord} S + \operatorname{ord}\delta_\Delta + \frac{e}{2}\\ &= \frac{kn-n-k-1}{4} + \frac{(k-1)n}{4} + \frac{(k+1)n-(k+1)}{2}\\ &= kn - \frac{3(k+1)}{4},\end{aligned}$$

如所述。

由引理 4.7 的第 (3) 部分，我们在局部有

$$\sigma_S\circ\sigma_{\delta_\Delta} = (2\pi)^{(-2kn+2n+k+1)/4}\left(\int_{p(x,\xi)=\tau} |g(x_1)|^{-(k-1)/2}\, a(p(x,\xi))\, d_p\right)|d\tau|^{1/2}.$$

这里 (x,ξ) 表示点

$$(x_1,\dots,x_1;\ -\xi_2-\cdots-\xi_{k+1},\ \xi_2,\dots,\xi_{k+1}),$$

并且积分是对满足 $p(x,\xi) = \tau$ 的变量 $(x_1,\xi_2,\dots,\xi_{k+1})$ 进行的，所依据的是 Leray 密度 d_p。通过简单的变量代换，我们可以将此积分改写为

$$a(\tau)\int_M |g(x_1)|^{1/2}\left(\int\cdots\int |g(x_1)|^{-k/2}\,\delta(p(x,\xi)-\tau)\,d\xi_2\cdots d\xi_{k+1}\right)dx_1. \tag{4.8}$$

在 $N^*\Delta$ 上，我们有 $\xi_1 = -(\xi_2+\cdots+\xi_{k+1})$，因此

$$p(x,\xi) = (|\xi_1|,|\xi_2|,\dots,|\xi_{k+1}|) = (|\xi_2+\cdots+\xi_{k+1}|,|\xi_2|,\dots,|\xi_{k+1}|).$$

因此，除目标坐标的一个排列外，约束条件 $p(x,\ \xi) = \tau$ 等价于 $F(\xi_2,\ \dots\dots,\ \xi_{k+1}) = \tau$，其中 F 如 (1.10) 所示。相应地，(4.8) 中的内积分为

$$\int\cdots\int \delta(F(\xi_2,\dots,\xi_{k+1})-\tau)\,d\xi_2\cdots d\xi_{k+1} = \operatorname{vol} F^{-1}(\tau).$$

由于 ξ 积分采用由 g 正交余标架诱导的典范余切纤维密度，因此，(4.8) 中任何诸如 $|g(x_1)|^{-k/2}$ 的坐标雅可比因子都只是坐标造成的假象，会相互抵消。最后，

$$\int_M |g(x_1)|^{1/2}\,dx_1 = \operatorname{vol} M.$$

至此，命题 4.6 的证明完成。 □

至此，我们已经完成了对这些复合算子的研究。接下来，只需进行一些傅里叶变换即可证明定理 1.3。

*Pro*定理 *1.3* 的为方便起见，我们用振荡半密度检验 $S\circ\delta_\Delta$

$$\phi_\tau(t) = \check{\rho}(t)\, e^{-i\langle t,\tau\rangle}\,|dt|^{1/2},$$

其中，ρ 如定理 1.3 所示。另一方面，由 (4.2) 可得

$$(S\circ\delta_\Delta,\phi_\tau) = (2\pi)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^{k+1}} e^{-i\langle t,\tau\rangle}\,\check{\mu}_a(t)\,\check{\rho}(t)\,dt = \rho * \mu_a(\tau).$$

另一方面，根据 [H¨o94、(25.1.13)] 及其前面的讨论，乘积 $\check{}\rho(t)\,(S\circ\delta_\Delta)$ 可以写成

$$\check{\rho}(t)\,(S\circ\delta_\Delta) = (2\pi)^{-3(k+1)/4}\left(\int_{\mathbb{R}^{k+1}} e^{i\langle t,\tau\rangle}\,\nu(\tau)\,d\tau\right)|dt|^{1/2},$$

其中，根据命题 4.6,

$$\nu(\tau) \equiv \zeta\, \check{\rho}(0)\, (2\pi)^{-kn+3(k+1)/4}\, \operatorname{vol} M\, a(\tau)\, \operatorname{vol} F^{-1}(\tau) \mod S^{kn-k-2}(\mathbb{R}^{k+1} \setminus 0).$$

这里， $S^{kn-k-2}(\mathbb{R}^{k+1} \setminus 0)$表示阶数为 $kn-k-2$的符号类， ζ 是来自Maslov因子的一个复单位。由傅里叶反演,

$$(S \circ \delta_\Delta, \phi_\tau) = (2\pi)^{k+1-3(k+1)/4}\, \nu(\tau) = \zeta\, \check{\rho}(0)\, (2\pi)^{k+1-kn}\, \operatorname{vol} M\, a(\tau)\, \operatorname{vol} F^{-1}(\tau) + O(|\tau|^{kn-k-2}).$$

取 $a \geq 0$和 ρ为非负数。于是 $\rho * \mu_a(\tau)$为实数且非负，右端的首项为实数且为正。因此, $\zeta = 1$。此外， $\check{\rho}(0) = (2\pi)^{-(k+1)}$， 因为 $\int \rho = 1$。因此,

$$\rho * \mu_a(\tau) = (2\pi)^{-kn}\, \operatorname{vol} M\, a(\tau)\, \operatorname{vol} F^{-1}(\tau) + O(|\tau|^{kn-k-2}).$$

在 k-良锥 Γ 上选取 $a \equiv 1$ ，并在一个包含 Γ于其内部的 k-良锥之外选取 $a \equiv 0$ ，即可得到该定理。□

5. A flat-torus example

下面的例子说明了定理1.2中截断函数的尖锐性。

例5.1. 设 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ 表示平坦环面。其标准 L^2-标准正交特征函数是傅里叶指数函数

$$\varphi_m(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{i\langle x, m\rangle} \qquad \text{for } m \in \mathbb{Z}^n,$$

对应频率为 $|m|$。对于 m_1， m_2，……， $m_{k+1} \in \mathbb{Z}^n$， （$k+1$）重乘积满足

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\cdots\varphi_{m_k}, \varphi_{m_{k+1}}\rangle &= (2\pi)^{-(k+1)n/2} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle x,\, m_1+m_2+\cdots+m_k-m_{k+1}\rangle}\, dx \\ &= \begin{cases} (2\pi)^{-(k-1)n/2} & \text{if } m_1+m_2+\cdots+m_k-m_{k+1}=0, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

因此，和式(1.4)等于

$$(2\pi)^{-(k-1)n} \#\Big\{(m_1, m_2, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^{kn} : |m_1| = a_1, \ldots, |m_k| = a_k,\ |m_1+m_2+\cdots+m_k| = a_{k+1}\Big\}.$$

特别地，除非存在长度分别为 a_1，……， a_{k+1}的向量，它们构成一个闭合的（$k+1$）边形（图2），否则(1.4)为零。当 $k=2$时，边长为 a_1， a_2， a_3的三角形形状是刚性的。对于 $k>2$，边长固定的（$k+1$）边形的形状不必唯一。所得多边形可以是非凸的，甚至可以自交（图2和图3）。

这表明定理1.2中的截断函数本质上是尖锐的。事实上，固定一个非零格向量 $v \in \mathbb{Z}^n$ 以及整数 r_1，……， $r_k \geq 1$，并对 $1 \leq j \leq k$与$m_{k+1} = (r_1 + \cdots + r_k)\, v$令 $m_j = r_j v$。则 $|m_j| = r_j|v|$且 $|m_{k+1}| = (r_1 + \cdots + r_k)\, |v|$，从而 $\lambda_{m_{k+1}} = \lambda_{m_1} + \cdots + \lambda_{m_k}$，而

$$\big|\langle \varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\cdots\varphi_{m_k}, \varphi_{m_{k+1}}\rangle\big| = (2\pi)^{-(k-1)n/2}.$$

特别是，在（$k+1$）边不等式的边界处没有衰减，因此定理1.2中的频率阈值基本上是锐的。

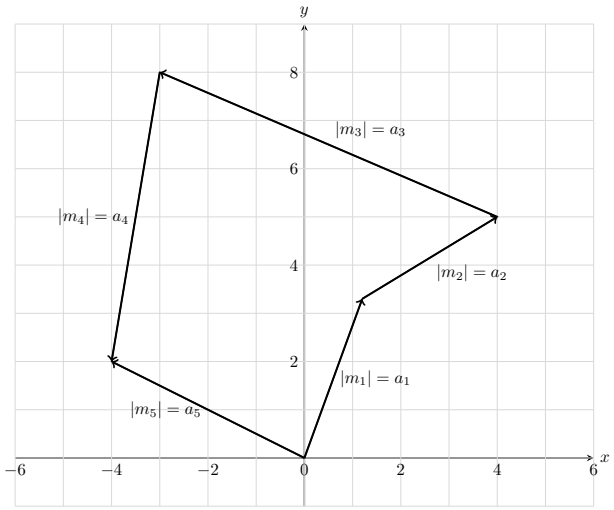


FIGURE 2. 边长为 $a_1, \ldots, a_5$的五边形。

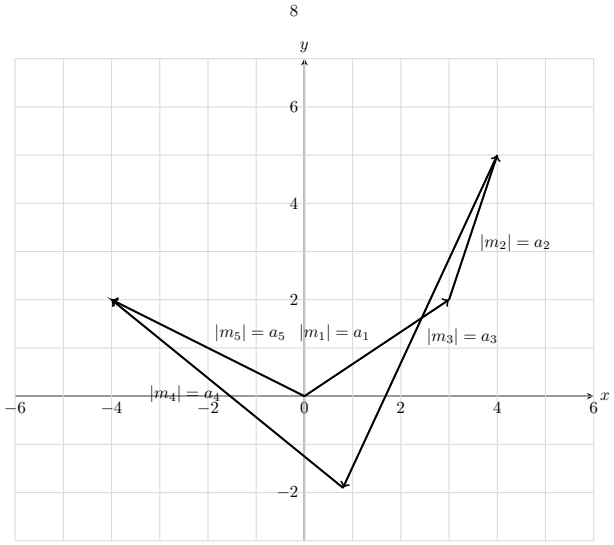


FIGURE 3. 一个具有相同边长的自交五边形。

REFERENCES

[BR99] Joseph Bernstein 和 Andre Reznikov。表示的解析延拓与自守形式的估计。 *Ann. of Math. (2)*, 150(1):329–352, 1999. [DG75] J. J. Duistermaat 和 V. W. Guillemin。正椭圆算子的谱与周期双特征线。 *Invent. Math.*, 29(1):39–79, 1975. [DH72] J. J. Duistermaat 和 L. H

¨

Acta Math. 128 3 4 183 269, ormander。傅里叶积

1972
分算子。II. , (-): – 。

[Dui73] J. J. Duistermaat。 *Fourier integral operators*。纽约大学库朗数学科学研究所，纽约，1973年。译自奈梅亨大学1970年2月至1971年12月期间课程的荷兰语讲义。[H¨o94] Lars H¨ormander。 *The analysis of linear partial differential operators. IV*，第275卷，收录于 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1994 1985。施普林格出版社，柏林，。傅里叶积分算子，原版的修订重印本。[KS04] Bernhard Kr¨otz 和 Robert J. Stanton。表示的全纯延拓。I. 自守函数。 *Ann. of Math. (2)*，159(2):641–724，2004年。[LSS19] 卢建峰、Christopher D. Sogge 和 Stefan Steinerberger。拉普拉斯特征函数逐点乘积的逼近。 *J. Funct. Anal.*，277(9):3271–3282，2019年。[Sar94] Peter Sarnak。特征函数乘积的积分。 *Internat. Math. Res. Notices*，(6):251页起，约10页，1994年。[Sog88] Christopher D. Sogge。关于紧流形上二阶椭圆算子谱簇的 L^p 范数。 *J. Funct. Anal.*，77(1):123–138，1988年。[Sog17] Christopher D. Sogge。 *Fourier integrals in classical analysis* 210 *Cambridge Tracts in* ，第卷，。 *Mathematics* 2017 剑桥大学出版社，剑桥，第二版，。[Wym22] Emmett L. Wyman。拉普拉斯特征函数的三角形与三重乘积。 *J. Funct. Anal.*，282 8( ):论文编号109404，38，2022年。

Department of Mathematics and Statistics, Binghamton University, Binghamton NY
Email address: ewyman@binghamton.edu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China
Email address: yakunxi@zju.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China
Email address: 12335009@zju.edu.cn