arXiv:2602.04673v1 [math.PR] 4 Feb 2026

布朗路径作为环装饰的 SLE

Nathana¨el Berestycki*和 Isao Sauzedde†

2026年2月5日

摘要

我们构造了一个映射，它以一条简单路径和一个可能无限的环的集合为输入，并通过按照时间顺序将简单路径遇到的环添加到简单路径上，输出一条连续路径。通过研究该映射的正则性，并使用格点离散化，我们证明，按照时间顺序将独立的径向 SLE_2 路径遇到的布朗环汤中的环添加后，所得路径是连续的，其概率律与平面布朗运动相同。这解决了 Lawler 和 Werner [LW04猜想〉 1]。

这一构造建立了 SLE_2 与布朗运动之间的耦合，我们还证明，该联合概率律是环擦随机游走与随机游走本身的标度极限。这些论证具有稳健性，例如可应用于非临界设置；在这种设置下，环擦随机游走的标度极限是 Makarov 和 Smirnov 的有质量 SLE_2 [MS10]。

关键词： 环擦随机游走、Schramm–Loewner 演化（SLE）、布朗运动、布朗环汤、随机游走环汤、标度极限。**2020 年数学学科分类**：60J67、60J65、82B41。

目录

1 引言 **2**1.1 主要结果 .21.2 定理 1.1 的精确表述 .51.3 论文策略与组织结构 .6

2 构造路径 $\Xi(\gamma, \mathcal{L})$ 7
2.1 初步记号 .2.2 构造概要 .82.3 集合 $\mathscr{R}$，$\mathscr{R}_0$ .92.4 平局判定规则.102.5 集合 $\mathcal{T}$ 和函数 $\sigma_{\mathcal{X}}$, 7
λ .102.6 Ξ（$\mathcal{X}$，λ，B）的时间连续性 .11

3 将单个环附加到简单路径 1 **3**
3.1 正则对集合 .133.2 $\mathscr{L}_0$ 作为 $\mathscr{L}_{reg}$ .153.3 在 $\mathscr{L}_{reg}$ 上的连续性.16

4 附着映射的连续性 **17**
4.1 δ-同构，适用且强适用.174.2 关于 $\mathscr{R}_0$ .184.3 更强拓扑下的相等.184.4 有界性假设下较弱距离的等价性. . . . . 194.5 击中时间的连续性，Ξ .214.6 附着映射的连续性.22

*维也纳大学，奥地利，nathanael.berestycki@univie.ac.at
† 里昂高等师范学院，法国，isao.sauzedde@ens-lyon.fr

5 概率方面： $(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$ **及固定格点近似**235.1 记号与预备性质.235.2 策略概要.245.3 布朗环汤的性质（i）至（iv）.255.4 布朗环汤的性质（v）.275.5 将随机游走环汤附着到环擦除随机游走上.29**6 概率方面：收敛** $n \to \infty$ 306.1 δ-布朗环汤与随机游走环汤之间的同构.306.2 小环上耗费总时间的估计.32**7 开放问题**

1 引言

1.1 主要结果

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个真单连通区域。设 $o \in D$。令 $(W_t, 0 \le t \le \tau_D)$ 为从 o 出发的布朗运动，并运行至时间 τ_D，此时它首次离开 D。共形不变随机过程领域中的一个经典问题是，能否按时间顺序有意义地擦除 W 所产生的环，从而得到一条 SLE_2 路径。（回顾 Lawler、Schramm 和 Werner 的里程碑结果 [LSW04],：从一个趋于 o的顶点出发的环擦随机游走，其标度极限是所谓的径向 SLE_2路径；更精确的定义见下文。）

环擦除的逆操作是环添加，本文证明，可以按时间顺序向径向 SLE_2 路径 γ 在 D 中添加环，从而得到布朗运动 W。这些环构成集合 $\mathcal{L}_\gamma$，其中的环与 γ 相交；它们取自强度为 $c = 1$ 的布朗环汤 $\mathcal{L}$（精确定义同样见下文）。

这类结果至少可以追溯到 Lawler、Schramm 和 Werner 的工作 [LSW03]。他们在研究共形限制性质时证明，弦状 SLE_2 路径 γ 在上半平面中生成的凸包与上半平面中的布朗游程的凸包相同：换言之，将“洞填上”后，γ 与 $\mathcal{L}_\gamma$ 的并集具有与布朗游程相同的分布。Zhan [Zha11], 证明了一个更精确的结果（以及其他结论）：存在一个随机非递减函数 $\psi\colon [0, \tau_D] \to \mathbb{R}$，使得 $W_{\psi(t)}$ 是一条径向 SLE_2路径。最近，Sapozhnikov 和 Shiraishi [SS18] 证明，布朗运动 W的值域 $\mathrm{Range}(W) = W([0, \tau_D]) = \{W_t\colon 0 \le 0 \le t \le \tau_D\} \subset \mathbb{R}^2$作为随机紧集来看，其分布与 γ的值域连同 $\mathcal{L}_\gamma$中各个环的值域具有相同的分布。更准确地说，他们证明了

定理([SS18，定理 1。1])。在分布意义下，值域(W) = 值域$(\gamma) \cup \bigcup_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma}$ 值域(ℓ).

（值得注意的是，他们的结果在维数为 $d = 3$ 时也成立。）这里，等式两边都被视为 D中紧子集空间里的元素，该空间赋有豪斯多夫度量及其相应的 Borelσ-代数。由于这是关于随机集的一个分布恒等式，因此它没有传达这些集合被遍历的先后顺序信息。

我们的主要贡献是证明，可以按**时间顺序**将 $\mathcal{L}_\gamma$ 的环添加到 γ 中，从而得到一条参数化路径，其分布为布朗运动。

下面的结果解决了 Lawler 和 Werner 的一个猜想 [LW04，猜想 1]，它是本文的主要定理。此处以较为非正式的方式陈述，稍后将给出精确定义。（正如我们将在下文进一步说明的，我们的方法具有稳健性，在弦状设定中同样适用；事实上，弦状设定正是 Lawler 和 Werner 提出该猜想时的原始设定。有趣的是，这些方法也适用于我们稍后将引入的近临界或**有质量**设定。）

定理 1.1. 设 γ 为径向 SLE_2，并设 $\mathcal{L}$为强度为 $c = 1$的独立布朗环汤。令 $\mathcal{L}_\gamma$ 表示 $\mathcal{L}$ 中被 γ相交的环的集合。

$\mathcal{L}_\gamma$ 中的环可按 γ 首次与它们相交的时间完全排序，从根 o开始。将 $\mathcal{L}_\gamma$ 中所有环按时间顺序拼接，得到一条连续参数化路径$\Xi(\gamma, \mathcal{L})$，并且它与 $(W_t, 0 \le t \le \tau_D)$具有相同的分布。

按照遇到这些环的顺序依次添加环的过程 γ 在以下文献中得到了明确建议：[LW04]。我们强调，在任何长度为正的时间区间内，γ 都会遇到 $\mathcal{L}_\gamma$ 中的无穷多个环，因此这些环按时间顺序拼接的定义并非显而易见。不过，这一点已在 [LW04的引理 13] 以及下文中得到了论证

（他们还指出，这种拼接必然是连续的）。作为证明的一部分，我们将对这一前一事实给出一个稍简单的证明，并对后一事实给出完整证明。我们的构造也适用于 κ的其他取值，参见第7 节中的开放问题讨论。

上述构造尤其给出了 SLE_2 路径 γ与布朗运动 W之间的耦合 (γ, W)。为了进一步阐明在此构造中 γ 是 W 的“环擦除”的含义（这也是定理证明中的一个主要步骤），我们将证明，上述耦合中 (γ, W)这一对的分布，实际上是当 $n \to \infty$时 (γ^n, W^n)这一对的标度极限。这里， W^n 是缩放正方格点阵 $n^{-1}\mathbb{Z}^2$上的随机游走：也就是说，若 $(S^n(0)\ S^n(1)\ S^n(2)\ldots)$ 是 $\mathbb{Z}^2$上的离散时间随机游走，而 $(S^n(t)\ t \geq 0)$ 是其线性插值，那么对于$t \geq 0$，我们令 $W^n(t) = o^n + n^{-1}S^n(2n^2t)$，其中顶点 $o^n \in n^{-1}\mathbb{Z}^2$ 收敛到 o。为准确陈述结果，考虑离散化区域 D_n，它是$\{w \in n^{-1}\mathbb{Z}^2$ 中包含 o^n 的连通分支： $B(w, 1/(2n)) \subset D\}$；并令 $\tau_D^n = \inf\{t \geq 0 \colon W^n(t) \notin D_n\}$为 W^n离开 D_n的首个时间。最后， $\gamma^n = LE(W^n[0, \tau_D^n])$ 是 $W[0, \tau_D^n]$的按时间顺序的环擦除（离散路径的按时间顺序的环擦除定义，可参见例如 [LL10]）。

定理1.2。 存在一个满足以下性质的序列 $\epsilon_n \to 0$ 。对每个$n \geq 1$，都存在一个耦合，使得一方面的（γ^n, W^n）与另一方面的（γ, W）满足：其概率至少为 $1 - \epsilon_n$，

$$\|W^n(\,\cdot\,\wedge\tau_D^n) - W(\,\cdot\,\wedge\tau_D)\|_\infty \leq \epsilon_n, \ \textit{and}$$
$$\mathrm{d}_{\mathrm{Hausdorff}}(\gamma^n, \gamma) \leq \epsilon_n.$$

这里$\mathrm{d}_{\mathrm{Hausdorff}}$ 指两个紧集之间的豪斯多夫距离。事实上，如果我们把 γ 视为按所谓的“自然参数化”进行参数化，则还有 $\|\gamma^n - \gamma\|_\infty \leq \epsilon_n$。

注*1.3*。事实上，论证表明，我们不仅可以将二元组（γ^n, W^n）与（γ, W）耦合，使得（γ^n, W^n）与（γ, W）在 $\|\cdot\|_\infty$ 范数下接近，而且三元组（$\gamma^n, \mathcal{L}^n, W^n$）也接近（$\gamma, \mathcal{L}, W$）（完整表述见下文定理 *5.4*）。这里的 $\mathcal{L}^n$ 是一个随机游走环汤（与 γ^n相互独立），并且 $\mathcal{L}^n$ 中超过某个介观尺度的所有环都接近 $\mathcal{L}$中的所有环。

还需注意，根据 *Lawler* 和特鲁希略-费雷拉斯的一项结果 *[LTF07]*，， $\mathcal{L}^n$中的环在超过某个介观尺度后，与 $\mathcal{L}$中相应尺度的环一一对应，且彼此接近。（事实上，我们还要提到，最近 *Qian* *[Qia26]* 宣布，可以去除被耦合在一起的环的值域所受的多项式限制。）

我们得到这一结果的方式依赖于概率估计和拓扑论证。我们构造了一个确定性映射 Ξ，它以一条简单路径和一个环的集合为输入，并按时间顺序将这些环添加到路径中。虽然要找到一种能使映射 Ξ：（路径，环）$\mapsto \Xi$（路径，环）连续的拓扑并不现实，但映射 Ξ 表现出奇异行为的（路径，环）对颇为特殊，基本可归为三类具体问题（见下方图 1）。事实上，我们能够定义一个足够大的（路径，环）对的子空间 $\mathscr{R}$，以确保由 SLE_2 路径γ 和布朗环汤 $\mathcal{L}$ 构成的环对几乎必然属于 $\mathscr{R}$；同时定义一种足够强的拓扑，以确保映射 Ξ 在 $\mathscr{R}$上连续。[1] 然而，这种拓扑又足够弱，使得通过一对环擦除随机游走和随机游走环汤对（γ， $\mathcal{L}$）作格点近似后，在该拓扑下收敛于分布；这样一来，最初那个在分析上颇为困难的问题—— Ξ（γ， $\mathcal{L}$）是否服从布朗运动分布——便化约为其离散对应问题，而后者纯粹属于组合学范畴。

本文的主要贡献可以概括如下：

◇ 引言以及对所要处理的“正确”对象的严格构造，即映射 Ξ 所定义于其上的构型空间（为清晰起见，本引言中作了一些简化）、映射 Ξ本身、子集 $\mathscr{R}$ （第2节），以及适当的距离 $d_{\mathscr{R}_0}$（第4节）。◇ 在第3节和第4节中，证明了 Ξ 在子集 $\mathscr{R}$ 上关于距离 $d_{\mathscr{R}_0}$的连续性（定理 4.11），并给出了若干工具，将向 $\mathscr{R}$ 中的元素收敛这一问题化为更易检验的条件（引理 4.5 和引理 4.7）。◇ 证明了有序对（γ， $\mathcal{L}$）几乎必然属于 $\mathscr{R}$ （第5节，命题 5.1），并证明格点近似关于 $d_{\mathscr{R}_0}$ 的拓扑依分布收敛（第6节，命题 5.3）。

[1]我们强调，不仅从 Ξ 到 $\mathscr{R}$ 的限制映射是连续的，而且全局定义的映射 Ξ 在 $\mathscr{R}$上也是连续的。

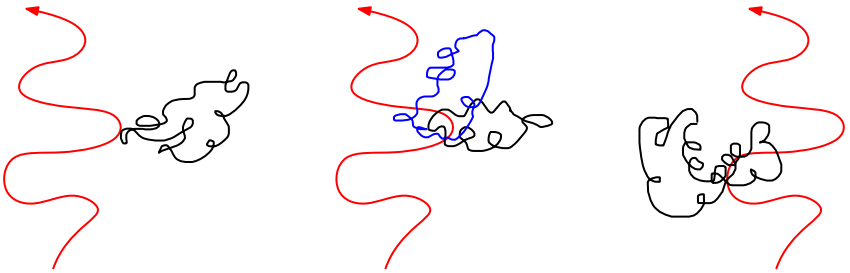

图1：导致映射 Ξ不连续的三类问题。红色为简单路径，黑色和蓝色为环 ℓ，$\ell' \in \mathcal{L}$。围绕根点 x_ℓ，γ 与ℓ 首次相遇之处：左图：交点是单侧的。对γ 或 ℓ 作小的连续变形，就能彻底消除这个交点，而不是使它连续移动。中图：γ 也在与 ℓ相同的位置首次遇到 ℓ'。小的连续变形可以使 γ 先遇到 ℓ 或 ℓ'。所得路径截然不同，尽管它们的值域大致相同。右图：ℓ 在两个不同的时刻 s，t穿过 x_ℓ。一些小的变形会使 ℓ 围绕 s重新定根，另一些则会使 ℓ 围绕 t重新定根，再次导致两条相当不同的路径。

支撑我们方法的（确定性）拓扑论证具有非常稳健的优点。例如，这些工具适用于不同的拓扑（例如黎曼曲面上的拓扑），也适用于**弦状情形**（如前所述，这实际上是 Lawler 和 Werner 猜想最初所处的情形 [LW04]。在这一情形下，$D = \mathbb{H}$ 是上半平面；γ 现在是一个弦状（而非径向）SLE_2 路径，位于 $\mathbb{H}$ 中，从 0 到 ∞，而 W 是从 0 到 ∞ 中的 $\mathbb{H}$ 布朗游程（即从 0 出发、并被条件化为在所有正时间内保持在上半平面中，且经由 ∞ 离开 —— 等价地说，其实部和虚部分别是相互独立的布朗运动和三维贝塞尔过程；见[BN26]）。相应的环汤不变。定理1.1 在弦状情形下的对应结果，以与径向情形完全相同的方式得到，因为：

> 已知如何定义从 i/n 出发、并以永远留在 $\mathbb{H}$ 内（且经由无穷远离开 $\mathbb{H}$）为条件的随机游走 W^n，它处于 $(1/n)\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{H}$ 中。⋄ 由于它是一条暂留路径，其按时间顺序的环擦除 γ^n 几乎必然定义良好，并且根据 [LSW04] 的里程碑结果，当 $n \to \infty$ 时收敛到弦 SLE_2（例如，在豪斯多夫意义下收敛，或在重参数化下局部一致收敛）。⋄ 加入由 γ^n遇到的环汤 $\mathcal{L}^n$ 中的环（与注1.3中的相同），会产生一条分布与 W^n 相同的路径。⋄ 要应用本文中的论证，唯一尚待证明的估计是，$(\gamma^n, \mathcal{L}^n)$ 在第4节定义的拓扑意义下收敛到 $(\gamma, \mathcal{L})$。归根结底，只需证明耗费在小环上的总时间可以忽略。对于普通随机游走，这些估计在第6.2节中得出。一种论证方法是利用绝对连续性：事实上，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，若 $\tau_\varepsilon = \inf\{t\colon \Im(W^n(t)) \geq \varepsilon\}$，则弦定律下 $W^n[\tau_\varepsilon, \tau_{\varepsilon^{-1}}]$ 的分布相对于适当区域内的径向定律下的分布绝对连续（对 n一致，且对每个固定的 ε而言）。这可用于证明时间区间 $[\tau_\varepsilon, \tau_{\varepsilon^{-1}}]$ 上相应的估计，从而得到所需恒等式在该时间区间上成立。由于 ε 是任意的，这就推出了所述结论。

为进一步说明这一方法的稳健性，我们还要提及另一种适用本证明的情形，即**有质量**或**非临界**情形。自 Makarov 和 Smirnov [MS10] 的启发性工作以来，这一情形重新受到了相当多的关注。在该工作中，他们受到其与（非共形）量子场论潜在联系的启发，提出了研究近临界标度极限的计划。

让我们以所关注的情形，即环擦随机游走为重点，对此作简要说明。固定一个有界单连通区域 D 和实参数 $m \in \mathbb{R}$。设格点 $(1/n)\mathbb{Z}^2 \cap D$上的随机游走 W^n在每一步以固定概率死亡，该概率为 $m^2/(2n^2)$；但以其在死亡前离开区域 D 为条件（按照约定，质量为m^2，这对应于相应布朗运动在连续统标度极限中被杀死的速率）。

Makarov 和 Smirnov 在 [MS10] 中概述了一个证明，即其环擦除 γ^n 在标度极限下收敛到某条随机曲线，他们称之为有质量 SLE_2, ，并且该曲线局部地（即，

在有界时间区间上）相对于普通 SLE 绝对连续[2]。随后，Chelkak 和 Wan [CW21] 在稍难一些的弦状情形中给出了这一事实的完整（且非平凡）证明。这一结果在 [BHS24] 中被推广到具有固定漂移的随机游走（即在固定方向上具有固定强度的漂移）。事实上，环擦除 γ^n （该游走 W^n 的），在以其端点为条件时，收敛到同一有质量 SLE_2 （其中质量 m^2 即为极限漂移的欧几里得范数）。事实上，该结果被推广到具有可变漂移的随机游走，前提是该漂移来自对数凸势。在这种情况下，γ^n 的标度极限是有质量 SLE 的一个适当推广的概念[2]；参见 [BHS24]。（这些思想在近期进展中发挥了关键作用，这些进展将统计力学的非临界二聚体模型与称为正弦-戈登模型的量子场论联系起来；参见 [BHS24, BMR26]。）

鉴于上述工作，自然可以猜测，有质量 SLE_2 （例如，具有固定质量 $m \in \mathbb{R}$，如 Makarov 和 Smirnov [MS10] 的设定中那样，为简单起见）是以速率 m^2 被杀死、且以在死亡前离开区域 D 为条件的布朗运动的“环擦除”。事实上，这可以作为我们方法的一个直接结果加以证明，其意义与定理1.1相同。我们将其陈述为一条推论：

推论 1.4. 设 D 为一个有界的单连通区域，并设 $o \in D$。设 γ 为径向有质量 SLE_2，其起点为 o，并设 $\mathcal{L}$ 为强度为 $c = 1$的独立布朗环汤，其中每个环 $\ell \in \mathcal{L}$ 的持续时间为 t_ℓ，并以概率$\exp(-m^2 t_\ell)$被独立保留。设 $\mathcal{L}_\gamma$ 表示 $\mathcal{L}$ 中被 γ相交的环的集合。

$\mathcal{L}_\gamma$ 的环可以按照 γ 首次与它们相交的时间（从根 o出发）进行全序排列。 $\mathcal{L}_\gamma$ 中所有环的按时间顺序拼接给出一条连续的参数化路径，并且该路径还与$(W_t, 0 \le t \le \tau_D)$在 $\tau > \tau_D$的条件下具有相同的分布，其中 τ 是速率为 m^2的独立指数随机变量，而 τ_D 是 D的首次离开时刻。

1.2 定理1.1 的精确表述

我们将有根定向环空间视为取值于空间

$$\mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2) = \bigcup_{t\ge 0} \mathcal{C}([0,t],\mathbb{R}^2).$$

在 本文其余部分，对于 $f \in \mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2)$，我们将 t_f记为满足 $f \in \mathcal{C}([0,t],\mathbb{R}$ 的唯一 t 空间[2]。$\mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2)$ 在赋予由 d_∞ 给出的距离后是一个波兰空间

$$d_\infty(f,g) := |t_f - t_g| + \sup_{t\ge 0} |f(t\wedge t_f) - g(t\wedge t_g)|.$$

根据定义， [LW04], 环测度是定义在 $\mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2$上的博雷尔测度，定义为

$$\mu(\mathrm{d}\ell) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi t^2} \mathbb{P}_{t,x,x}(\mathrm{d}\ell)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\mathbb{P}_{t,x,y}$ 是从 x到 y 、持续时间为 t的布朗桥分布。我们固定一个单连通平面区域 $D \neq \mathbb{C}$，并令 μ^D 为 μ 在那些完全位于 D中的环 $\ell \in \Omega$ 上的限制，也就是说，$\mathrm{Range}(\ell) \subset D$。 [2]

令 $\mathcal{L}$ 表示 D 中强度为 $c = 1$的**布朗环汤**，即定义在 $\mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2)$ 上、强度为 μ^D的泊松点过程。 $\mathcal{L}$ 的概率分布记为 $\mu^{\mathcal{L}}$。

我们还考虑一条（时间反向的）径向 SLE_2 路径，它位于 D 中，从 o 到一个随机点；该点按照从 o 在 ∂D上所见的调和测度分布。这条路径的值域的豪斯多夫维数为 $5/4$ ，并且可由 $5/4$-闵可夫斯基含量连续参数化 [LR15，定理 1。1]，我们称之为其自然参数化。令 γ 表示采用此参数化的 SLE_2 路径，并令 μ^γ 表示其概率分布。特别地， $\gamma(0) = o$ 且 $\gamma(t_\gamma) \in \partial D$。下面的定理是对定理 1.1的更精确表述。

定理 1.5。 设$(\gamma, \mathcal{L})$ 服从分布 $\mu^\gamma \otimes \mu^{\mathcal{L}}$，并令 $\mathcal{L}_\gamma := \{\ell \in \mathcal{L} \inf \ell) \cap \mathrm{Range}(\gamma) \neq \emptyset\}$。对于 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$，令 $\sigma_\ell := \inf\{\sigma : \gamma(\sigma) \in \mathrm{Range}(\ell)\}$。

那么，几乎必然地，对所有 $\ell \neq \ell' \in \mathcal{L}_\gamma$，都有 $\sigma_\ell \neq \sigma_{\ell'}$，并且存在唯一的 $\theta_\ell \in (0, t_\ell)$，使得 $\ell(\theta_\ell) = \gamma(\sigma_\ell)$。在 $\mathcal{L}_\gamma$ 上定义全序如下：$\ell \prec \ell' \iff \sigma_\ell < \sigma_{\ell'}$，并令 $T_\ell := \sum_{\ell' \prec \ell} t_\ell$

[2]事实上， [LW04] 中考虑的环测度对应于一个稍有不同的状态空间和拓扑，而人们通常感兴趣的是将其投影到 μ^D 无**根**环空间上。（不过，为了方便，我们将这些环视为有根环，尽管根的具体选择与下文的构造无关。）

（可将其理解为路径 $X = \Xi(\gamma, \mathcal{L})$ 到达环 ℓ 所需的时间），并且 $t_X := \sum_{\mathcal{L}_\gamma} t_\ell$. 几乎必然地，$t_X < \infty$，且存在唯一的连续路径 $X \in \mathcal{C}([0, t_X], D)$，使得对所有 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$ 以及所有 $t \in [T_\ell, T_\ell + t_\ell]$，$X(t) = \ell(t - T_\ell + \theta_\ell \bmod t_\ell)$。

此外，X 服从从 o 出发、定义至首次离开 D时刻的布朗运动。

这一路径的唯一性 X 直接由命题5.1 和下文的引理2.2 推出，而其服从布朗运动这一事实则由定理5.4得到。

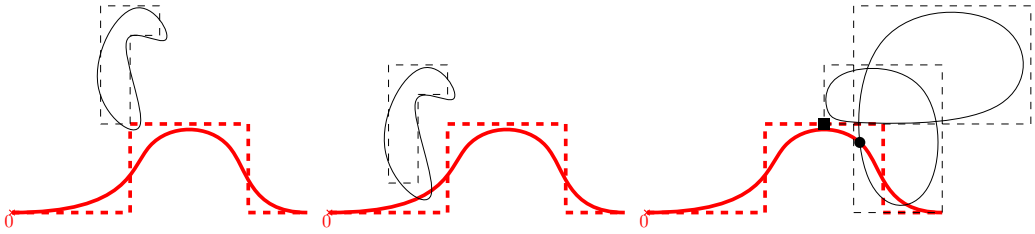

图 2：三个坏事件的例子。红色（粗线）表示 SLE_2 过程。黑色（细线）表示 $\mathcal{L}$中的一个环。虚线表示它们对应的离散版本。左：尽管 ℓ和 γ 不相交，相应的离散过程却相交，因此重构路径 $W(\mathbb{L}, \mathsf{S})$ 会包含这个环。中：相反的事件。右：路径 ℓ 和 γ 相交，它们对应的离散版本也相交；连续极限和离散根（圆点和方块）在空间上彼此接近，却对应于 γ中截然不同的部分。请注意，连续极限根和离散根也可能同时存在，但在空间上相距甚远。如果红色曲线现在表示边界 ∂D 而非 SLE_2 过程，那么这些图描绘的就是我们需要加以控制的其他非典型事件。

1.3 论文的策略与组织

研究方法与主要思路。在讨论证明中的一些关键要点之前，先简要介绍 Lawler 和 Werner 在 [LW04]中的方法是有益的。他们的视角是，按照时间顺序考察沿着（弦状）SLE_2 路径γ发现的环集合。由于（无根）布朗环汤具有共形不变性，我们可以在任意时刻映射出 s 截至 $\gamma[0, s]$ SLE_2 路径在时间 s 已发现的部分，以及迄今为止与之相交的环。剩下的部分是该区域补集中的布朗环汤，它是上半平面中一个独立布朗环汤的共形像。这样一来，SLE 路径遇到的环序列便可描述为一个泊松点过程，其强度是在以上半平面原点为根的环上定义的无限测度，即所谓的气泡测度。离散情形下也有类似的性质。正如 Lawler 和 Werner 所指出的，要利用这一方法证明他们的猜想，关键难点在于证明离散气泡测度以某种方式收敛到其连续极限对应物。由于这一结论需要在边界极其粗糙的区域中得到证明（即一段环擦随机游走及与之相交的环的补集），这可能颇具挑战性。

相比之下，我们的方法更为“亲力亲为”，也与 [SS18] 中采用的方法更为接近。我们考虑定理 1.5 中构造的离散类似物：将独立环擦除随机游走遇到的离散随机游走环汤中的环添加进去；已知这样得到的路径与随机游走同分布。随后我们验证，在取标度极限时，若环擦除随机游走接近 SLE_2 路径，且离散环汤接近连续统环汤，那么由此得到的离散环拼接也接近其连续统类似物，因此必定是布朗运动。

主要困难在于，对路径和/或环作微小变形，可能导致某个环完全遗漏；反过来，也可能新增许多环，或使其在不同位置定根（见图2）。幸运的是，我们证明，重新定根映射 $\ell \mapsto \theta_\ell$ 仅在环访问 $\ell(\theta_\ell)$ 两次或以单侧方式访问时才不连续。另一个困难在于，需要在整个变形过程中一致地控制微观环和介观环所耗费的总时间。我们引入空间 $\mathscr{R}$，在该空间中不会发生这些非典型访问，并定义一种距离，禁止（除其他情况外）此类时间累积。随后我们证明

对 $(\gamma,\ \mathcal{L})$ 而言，不会发生非典型访问；并且这些离散化过程中产生的累积误差可以忽略，且对离散化 $n \geq 1$ 一致成立。

论文的组织结构。本文安排如下。

第 2 节：在 2.3 小节中，我们构造空间 $\mathscr{R}_0$，映射 Ξ 将在其上定义；并构造子集 $\mathscr{R}$，我们将在其上证明映射 Ξ 是连续的（作为简单路径γ 和环 $\mathcal{L}$的函数）。我们需要涵盖 SLE_2 路径与布朗环汤的情形，也要涵盖它们的离散类似物，这带来了两项复杂之处：首先，我们必须处理多个环在简单路径上完全相同的位置以根为根的情形（图 1，中），以及某个环两次或多次经过其根的情形（图 1，右）。在这些情形下，可以认为 Ξ 是多值的，因此我们在 2.4 小节构造了平局打破集合，以消除这些不定性。其次，根的集合不再必然在值域γ上稠密；为保持连续性，我们必须引入参数 $\lambda \geq 0$，用来描述 X 沿路径 γ 前进的倒数速度（到目前为止的解释对应于 $\lambda = 0$；在连续极限下我们令其取极限，同时令 $\lambda = \lambda_n > 0$ 适用于格点近似）。随后，我们通过（1）定义映射 Ξ 本身，并给出关于（γ，$\mathcal{L}$）的条件；在这些条件下，我们将在 2.6 小节证明路径 Ξ（γ，$\mathcal{L}$）关于时间连续。

第3节：我们在二元组（γ，ℓ）上定义单侧相交与重定根运算，其中 ℓ是与 γ相交的环，并证明这些运算在（γ，ℓ）处连续，前提是 ℓ 访问 γ（σ_ℓ）于单一时间 θ_ℓ（回顾记号 σ_ℓ，出自定理 1.5），且此次访问是双侧的（命题3.11与推论3.12）。

第4节：本节包含核心的确定性论证。我们在小节4.2中引入 $\mathscr{R}_0$ 上的距离$d_{\mathscr{R}_0}$，并最终在小节4.6中证明映射 Ξ 在 $\mathscr{R}$ 上的连续性。为此，我们在小节4.3中证明，由$d_{\mathscr{R}_0}$ 诱导的拓扑（在 $\mathscr{R}$的邻域内）与一个先验较强拓扑等价（引理4.4）。反之，我们在小节4.4中证明，在 $\mathscr{R}_0$ 的某些子集上——这些子集由（γ，$\mathcal{L}$）的某个函数值泛函小于某个固定函数这一性质所定义——关于 $d_{\mathscr{R}_0}$ 收敛到 $\mathscr{R}$ 中的某个元素，等价于关于先验较弱拓扑的收敛。最终保证映射 Ξ之连续性的关键技术要素由引理4.9给出；该引理大致表明，当（γ'，$\mathcal{L}'$）与（γ，$\mathcal{L}$）充分接近时，γ' 对 $\mathcal{L}'$ 中充分大的环的击中时间集合在 $[0, t_{\gamma'}]$上相当稠密，从而阻止 Ξ（γ'，$\mathcal{L}'$）沿 γ跳得过快而遇不到任何大环。

第5节：我们证明，对于任意维数小于 2 的简单路径 γ，$\mu^{\mathcal{L}}$-几乎必然，$(\gamma, \mathcal{L})$ 属于较小空间 $\mathscr{R}$。我们还证明，对于 γ_n 环擦随机游走和 $\mathbb{L}_n$在 D 的格点近似上的随机游走环汤，$\Xi(\gamma_n, \mathbb{L}_n)$ 的分布与简单随机游走相同。[3]

第6节：我们证明，对于距离 $d_{\mathscr{R}_0}$，当 $n \to \infty$ 时，$(\gamma_n, \mathbb{L}_n)$ 收敛到 $(\gamma, \mathcal{L})$，即径向 SLE_2 轨迹与布朗环汤这一对，从而完成定理 1.5 的证明。主要难点在于证明，与 γ_n 相交的 $\mathbb{L}_n$ 中所有环的总持续时间，能够很好地近似与 γ 相交的 $\mathcal{L}$ 中所有环的总持续时间。定理 6.15 中利用确定性引理 4.4，并结合技术性概率估计 (26) 证明了这一点。该估计大致指出，$\mathbb{L}_n$ 在大小小于 δ 的环上花费的总时间，其期望有一个上界，该上界是两个函数之和：一个与 δ 无关，且随着网格尺寸趋于 0 而趋于 0；另一个与网格尺寸无关，且随着 δ 趋于 0 而趋于 0。

2 路径 $\Xi(\gamma, \mathcal{L})$的构造

2.1 预备记号

对于集合 X, Y，令 $\mathcal{F}(X, Y) := Y^X$ 为从 X 到 Y的函数集合，$\mathcal{C}(X, Y)$ 为连续函数的子集，并且 $\mathcal{C}([0, \cdot], Y) := \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{C}([0, T], Y)$。对于 $f \in \mathcal{F}([0, \cdot], Y) := \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{F}([0, T], Y)$，令 t_f为唯一的非负实数，使得 f的区域为 $[0, t_f]$。我们定义简单路径集合

$$\mathscr{S} := \{\gamma \in \mathcal{C}([0, \cdot], \mathbb{R}^2) : \ \gamma_{|[0, t_\gamma)} \text{ is injective}\}.$$

我们还令 $\mathscr{L}$ 为**环**的集合

$$\mathscr{L} := \{\ell \in \mathcal{C}([0, \cdot], \mathbb{R}^2) : \ell(0) = \ell(t_\ell)\}.$$

[3]这本质上是一个已知结果，但我们未能在文献中找到清晰的表述。

除了前面定义的距离 d_∞ 之外，我们还将使用 $\mathcal{F}([0,\cdot],\mathbb{R}^d)$ 上的距离 ρ，定义如下

$$\rho(\gamma_0,\gamma_1) := \inf_{\varphi}\{\|\gamma_0 - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + \frac{\|\varphi-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + \|\varphi^{-1}-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_1}]}}{2}\},$$

其中，φ 遍历从 $[0,t_{\gamma_0}]$ 到 $[0,t_{\gamma_1}]$的连续递增双射集合。我们将证明（引理 3.4），这两个距离在 $\mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^d)$ 上诱导相同的拓扑。对于 d,d' 分别定义在 X,X' 上的两个距离，我们将 $d\times d'$ 记作 $X\times X'$ 上的距离，其定义为 $d\times d'((x,x'),(y,y')) := d(x,y) + d'(x',y')$。

函数 f 的 δ-连续性模数记作

$$\omega_\delta(f) := \sup\{f(t)-f(s) : s,t\in[0,t_f], |t-s|\le\delta\}.$$

若 $f\in\mathscr{L}$，则 f的 t_f-周期延拓 $\bar{f}$一致连续，并令 $\omega_\epsilon^l(f) := \omega_\epsilon(\bar{f})$，它在改变 f的根这一操作下保持不变。备注 $\omega_\epsilon(f) \le \omega_\epsilon^l(f) \le 2\omega_\epsilon(f)$。对于由环构成的集合 $\mathcal{L}$ 以及 $\epsilon>0$，令 $\omega_\epsilon(\mathcal{L}) := \sup_{\ell\in\mathcal{L}}\omega_\epsilon(\ell)\in[0,\infty]$ 为连续性模数的最大值，并令 $\omega_\epsilon^l(\mathcal{L}) = \sup_{\ell\in\mathcal{L}}\omega_\epsilon^l(\ell)$。

我们令 $\mathscr{L}^{lf}$ 为 $\mathscr{L}$上的局部有限计数测度集合，并将其视为 $\mathscr{L}$的多重子集。我们对多重集采用集合论记号。给定一条简单路径 $\gamma\in\mathscr{S}$和一个由环构成的多重集 $\mathcal{L}\in\mathscr{L}^{lf}$，我们定义

$$\mathscr{L}_\gamma := \{\ell\in\mathscr{L} : \mathrm{Range}(\ell)\cap\mathrm{Range}(\gamma)\neq\emptyset\},\qquad \mathcal{L}_\gamma := \mathcal{L}\cap\mathscr{L}_\gamma,\qquad t_{\gamma,\mathcal{L}} := \sum_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma} t_\ell.$$

In p特别地，$\mathscr{L}_\gamma$ 是与 γ相交的环的集合。对于一条简单路径 $\gamma\in\mathscr{S}$和 $\ell\in\mathscr{L}_\gamma$，我们令 et

$$\sigma_{\gamma,\ell} := \min\{\sigma : \gamma(\sigma)\in\mathrm{Range}(\ell)\},\quad x_{\gamma,\ell} := \gamma(\sigma_{\gamma,\ell}),\quad \Theta_{\gamma,\ell} := \{t\in[0,t_\ell] : \ell_t = x_\ell\},$$

我们将其称为 ℓ的**首次命中时刻**、其**空间根**以及它的时间根集合。我们还令

$$\sigma_{\gamma,\mathcal{L}} := \{\sigma_{\gamma,\ell} : \ell\in\mathcal{L}_\gamma\},\quad \theta^-_{\gamma,\ell} := \min\Theta_{\gamma,\ell},\quad \theta^+_{\gamma,\ell} := \max\Theta_{\gamma,\ell}.$$

在 $\Theta_{\gamma,\ell}$ 由单个元素构成的情形下，或者当 $\Theta_{\gamma,\ell}$ 中的某个特定元素固定时，我们将该元素记作 $\theta_{\gamma,\ell}$，并称其为 ℓ的**时间根**。然后，重新定根的环路 ℓ （隐含地依赖于 $\theta_{\gamma,\ell}\in\Theta_{\gamma,\ell}$的选择）定义为 $t_{\hat{\ell}} = t_\ell$，且对于 $t\in[0,t_{\hat{\ell}}]$,

$$\hat{\ell}(t) := \ell(t+\theta_{\gamma,\ell} \mod t_\ell).$$

我们将 $\prec_\gamma$ 和 $\preceq_\gamma$ 分别记作在 $\mathscr{L}_\gamma$ 上给定的严格偏序和偏序

$$\ell\prec_\gamma\ell' \iff \sigma_{\gamma,\ell}<\sigma_{\gamma,\ell'},\qquad \ell\preceq_\gamma\ell' \iff \sigma_{\gamma,\ell}\le\sigma_{\gamma,\ell'}.$$

稍后，我们将在 $\mathcal{L}_\gamma$ 上固定一个更精细的全序 $\prec_{\gamma,B}$，它取决于额外参数 B。然后，对于 $\mathcal{L}\in\mathscr{L}^{lf}$ 和 $\ell\in\mathcal{L}_\gamma$，我们令

$$\mathscr{L}_{\le\epsilon} := \{\ell\in\mathscr{L} : t_\ell\le\epsilon\},\qquad \mathcal{L}_{\le\epsilon} := \mathcal{L}\cap\mathscr{L}_{\le\epsilon},\qquad \mathcal{L}_{\prec\ell} := \{\ell'\in\mathcal{L} : \ell'\prec_{\gamma,B}\ell\}.$$

我们类似地定义空间 $\mathscr{L}_{<\epsilon}$，$\mathscr{L}_{\ge\epsilon}$，.....以及多重集 $\mathcal{L}_{<\epsilon}$，$\mathcal{L}_{\ge\epsilon}$，$\mathcal{L}_{\preceq\ell}$，.....。我们将从 $\mathscr{L}_\gamma$中提取一个子集 $\mathscr{L}_{reg,\gamma}$，粗略地说，它由满足以下条件的曲线集合 ℓ 组成：$\Theta_{\gamma,\ell}$ 仅含一个元素 $\theta_{\gamma,\ell}$，且该时间根处的交点是**双侧的**，也就是说，对于所有 $\epsilon>0$，环 ℓ 都会在时间区间 $[\theta_{\gamma,\ell}-\epsilon,\theta_{\gamma,\ell}+\epsilon]$内到达 γ 的两侧。精确定义将在后文给出。我们将交点的指标合并，例如 $\mathcal{L}_{reg,\gamma,\le\epsilon} := \mathcal{L}_{reg,\gamma}\cap\mathcal{L}_{\le\epsilon}$。

通常，γ 是固定的，因此之后会从记号中省略（例如 $\theta_\ell = \theta_{\gamma,\ell}$）。

2.2 构造概述

我们将定义两个由配对组成的集合 $\mathscr{R}\subseteq\mathscr{R}_0$ （γ，$\mathcal{L}$），其中 γ 是一条连续简单路径，$\mathcal{L}$ 是一个环的集合。我们希望据此构造一条连续曲线 $X = \Xi(\gamma,\mathcal{L})$，将其理解为通过将 γ 中的环附着到 $\mathcal{L}$上，并在 γ 首次访问这些环时 所得到的曲线（未被 γ 访问的环将被丢弃）。对于 $\mathscr{R}_0$ 中的一般元素，存在一些不确定性，例如两个不同的环可能具有相同的被 γ首次访问时间。因此，对于（γ，$\mathcal{L}$）$\in\mathscr{R}_0$，我们构造一个集合 $\mathcal{B}_{\gamma,\mathcal{L}}$ 来描述这种不确定性：其中一个元素

B 的 $\mathcal{B}_{\gamma,\,\mathcal{L}}$ 将次序 $\prec_\gamma$ 细化为一个全序$\prec_{\gamma,\,B}$，并为每个 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$ 选取一个时间根 $\theta_{\gamma,\,\ell} \in \Theta_{\gamma,\,\ell}$。对于较小集合 $\mathscr{R}$ 中的（γ，$\mathcal{L}$），该集合 $\mathcal{B}_{\gamma,\,\mathcal{L}}$ 缩减为单个元素。我们进一步引入一个非负参数 λ，用于描述 X 跟随 γ 的倒数速度。当我们沿着 SLE_2 路径附着布朗环汤时，我们关注 $\lambda = 0$；但为了考虑离散近似和连续性性质，有必要将构造扩展到 $\lambda > 0$。因此，对于（γ，$\mathcal{L}$，λ）$\in \mathscr{R}_0 \times [0,\infty)$）以及 $B \in \mathcal{B}_{\gamma,\,\mathcal{L}}$，我们构造一条曲线

$$X = \Xi(\gamma, \mathcal{L}, \lambda, B),$$

我们证明，只要 $(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$ or $\lambda > 0$，它就是连续的。对于 $(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$，令 $\Xi(\gamma,\ \mathcal{L}) = \Xi(\gamma,\ \mathcal{L},\ 0,\ B)$，其中 B 是 $\mathcal{B}_{\gamma,\,\mathcal{L}}$ 的唯一元素。

这条曲线 $X := \Xi(\gamma,\ \mathcal{L},\ \lambda,\ B)$ 满足以下性质；当 $(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$ and $\lambda = 0$ 时，该性质将它唯一地描述为一个连续函数：

$$\text{For all } \ell \in \mathcal{L}_\gamma \text{ and } t \in [0, t_\ell], \quad X(T_\ell + t) = \hat{\ell}(t), \quad \text{where} \quad T_\ell = T_\ell(\mathcal{X}, B, \lambda) := \sum_{\substack{\ell' \in \mathcal{L}_\gamma, \\ \ell' \prec_{\gamma,B} \ell}} t_{\ell'} + \lambda \sigma_{\gamma,\ell}.$$

ˆ 此处，重新定根的环路 ℓ 是借助由 B 确定的时间根 $\theta_{\gamma,\,\ell} \in \Theta_{\gamma,\,\ell}$ 得到的。换言之，T_ℓ 是 Ξ 到达环路 ℓ 所需的时间；从时间 T_ℓ 起，X 沿着环路 ℓ 前进，该环路从与 γ 相关联的 ℓ 的时间根 θ_ℓ 出发。

我们首先构造集合 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}_0$，以及映射 Ξ，并证明只要 $\lambda > 0$ or $(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$，$X = \Xi(\gamma,\ \mathcal{L},\ \lambda,\ B)$ 就关于时间连续。

接下来，我们在 $\mathcal{R}_0$ 上引入一种足够强的距离，以证明映射 $(\gamma,\ \mathcal{L},\ \lambda,\ B) \mapsto \Xi(\gamma,\ \mathcal{L},\ \lambda,\ B)$ 在 $\mathscr{R} \times \{0\}$ 附近的连续性，对 B 的任意选择均成立。对较小集合 $\mathscr{R}$ 施加的最后一个条件，是证明这一连续性性质的关键。我们还将证明，$\mathscr{R}$ 中一点处的 $\mathcal{R}_0$ 收敛，可以化归为较弱拓扑下的收敛以及某些泛函的有界性；这些条件之后更容易验证。

最后，我们考虑 $(\gamma,\ \mathcal{L}) \sim \mu^\gamma \otimes \mu^D$ 的情形，即 γ 是一条从 0 到∂D 的径向 SLE_2，而 $\mathcal{L}$ 是 D 中与 γ 独立的布朗环汤。我们将证明，几乎必然有 $(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$，并且格点上的离散对应对象 $(\gamma_n,\ \mathbb{L}_n)$ 在经过适当缩放后，依我们引入的拓扑依分布收敛到 $(\gamma,\ \mathcal{L})$。对于均匀选取的 $B_n \in \mathcal{B}_{\gamma_n,\,\mathbb{L}_n}$，我们将看到 $\Xi(\gamma_n,\ \mathbb{L}_n,\ 1,\ B_n)$ 服从简单随机游走的分布，由此可推得 $\Xi(\gamma,\ \mathcal{L})$ 服从布朗运动的分布。

2.3 集合 $\mathscr{R}$，$\mathscr{R}_0$

我们定义 $\mathscr{R} \subset \mathscr{S} \times \mathscr{L}^{lf}$ 的子集，它由满足以下条件的序对 $\mathcal{X} = (\gamma,\ \mathcal{L})$ 组成：

(i) 时间

$$t_{\mathcal{X},\lambda} := \sum_{\ell \in \mathcal{L}_\gamma} t_\ell + \lambda t_\gamma$$

是有限的，并且对于所有 $\epsilon > 0$，集合 $\mathcal{L}_{\geq \epsilon}$ 都是有限的。

(ii) 集合 $\mathcal{L}$ 是等度连续的，即对于所有 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得$\omega_\delta(\mathcal{L}) < \epsilon$，也就是说

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \forall s, t \in [0, t_\ell] \text{ such that } |s - t| < \delta, \text{ it holds } |\ell_s - \ell_t| < \epsilon.$$

(iii) 定义在 $\mathcal{L}_\gamma$ 上的映射 $\ell \mapsto \sigma_\ell$ 是单射。对于任意 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$，根的集合 Θ_ℓ 仅含一个元素 θ_ℓ。

(iv) 集合 $\sigma_{\gamma,\,\mathcal{L}}$ 在 $[0, t_\gamma]$ 中稠密。

(v) 对所有 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$，均有 $\ell \in \mathscr{L}_{reg,\,\gamma}$ 以下定义的集合。

进一步令 $\mathscr{R}_0 \subset \mathscr{S} \times \mathscr{L}^{lf}$ 为仅满足条件 (i) 和 (ii) 的配对所组成的子集，并令 $\mathscr{R}' = (\mathscr{R} \times \{0\}) \cup (\mathscr{R}_0 \times (0, \infty))$。一般而言，我们令 $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ 为 $\mathscr{R}_0$ 的元素。接下来，我们将用记号 γ（分别为 γ'）和 $\mathcal{L}$（分别为 $\mathcal{L}'$）表示满足 $\mathcal{X} = (\gamma, \mathcal{L})$（分别为 $\mathcal{X}' = (\gamma', \mathcal{L}')$）的元素。

2.4 平局判定规则

令 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}_0$。对于 $\sigma \in \sigma_{\gamma,\mathcal{L}}$，定义 $\mathcal{O}_\sigma$ 为集合 $\{\ell \in \mathcal{L}_\gamma$ 上的全序集合：以 σ 为根的环 $\sigma_\ell = \sigma\}$，并定义 $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ 为平局判定规则的集合，具体如下：

$$\mathcal{B}_\mathcal{X} := \Big(\prod_{\sigma\in\sigma_\mathcal{L}} \mathcal{O}_\sigma\Big) \times \Big(\prod_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma} \Theta_\ell\Big).$$

给定 $(\mathcal{X},\ \lambda) \in \mathscr{R}'$ 和 $B \in \mathcal{B}_\mathcal{X}$，我们将构造 $\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B) \in \mathcal{C}([0, t_{\mathcal{X},\lambda}],\ \mathbb{R}^2)$。应将 $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ 中的元素理解为一种判定方式：每当存在多个选择时，它决定首先跟随哪一个环，以及从何处重新为环定根。若 $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ 缩减为单个元素，我们就称不存在平局；容易看出，这等价于条件（iii）。

$B = ((\preceq_\sigma)_{\sigma\in\sigma_{\gamma,\mathcal{L}}}, (\theta_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}_{\geq\gamma}})$ 中的一个元素 $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ 自然地诱导出一个“字典序”全序 $\preceq_{\gamma,B}$，定义在 $\mathcal{L}_\gamma$ 上；它比初始顺序 $\preceq_\gamma$ 更细，并由下式给出

$$\ell \preceq_{\gamma,B} \ell' \iff (\sigma_{\gamma,\ell} < \sigma_{\gamma,\ell'} \text{ or } (\sigma_\ell = \sigma_{\ell'} \text{ and } \ell \preceq_{\sigma_\ell} \ell')).$$

˄ 此外，B 对所有 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$ 确定一个唯一的 $\theta_\ell \in \Theta_\ell$，因此重新定根的环路 ℓ 是唯一确定的。

2.5 集合 $\mathcal{T}$ 与函数 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$

设 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}_0$、$\lambda \geq 0$ 和 $B \in \mathcal{B}_\mathcal{X}$。回顾 $t_{\mathcal{X},\lambda} = \sum_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma} t_\ell + \lambda t_\gamma$ 和 $T_\ell = T_\ell(\mathcal{X},\ B,\ \lambda) := \sum_{\ell'\prec_{\gamma,B}\ell} t_\ell + \lambda\sigma_{\gamma,\ell}$，我们将分别把它们解释为 $\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$ 的总持续时间，以及 $\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$ 到达环 ℓ 所需的时间。我们定义集合

$$\mathcal{T} := \bigsqcup_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma} (T_\ell, T_\ell + t_\ell) \subset [0, t_{\mathcal{X},\lambda}].$$

集合 $\mathcal{T}$ 是这样的时间集合：在这些时刻，$\Xi(\mathcal{X},\lambda,B)$ 沿着 $\mathcal{L}$ 中的某个环前进；而 $[0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$ 是这样的时间集合：在这些时刻，$\Xi(\mathcal{X},\lambda,B)$ 沿着 γ 前进。当 $\lambda = 0$ 时，也可以把 $[0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$ 看作一个例外时刻集合：它是 $\{T_\ell\}_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma}$ 的拓扑闭包，并且 $\mathcal{T}$ 在 $[0, t_{\mathcal{X},\lambda}]$ 上稠密（引理 2.2），且其勒贝格测度为满测度（我们既不证明这一点，也不会在证明中用到）。$\lambda > 0$ 则并非如此，因为此时 $\Xi(\mathcal{X},\lambda,B)$ 在 γ 上花费了正的时间。

现在我们定义一个非递减函数 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}\colon [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \to [0, t_\gamma]$，使得 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t)$ 描述了 $\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)_{[0,t]}$ 沿着 γ 前进了多远（更准确地说，它满足：经过时间 t 后，$\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$ 将不会再访问 $\gamma_{[0,\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t)]}$）。[4] 一旦定义了 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$，路径 $X = \Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$ 就定义为

$$X_t := \begin{cases} \hat{\ell}(t - T_\ell) & \text{if } t \in (T_\ell, T_\ell + t_\ell) \subset \mathcal{T}, \\ \gamma(\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t)) & \text{if } t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}. \end{cases} \tag{1}$$

现在我们说明如何定义 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$（在 $[0, t_{\mathcal{X},\lambda}]$ 的所有部分上）。对于 $t \in \mathcal{T}$，存在唯一的环 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$，使得 $t \in (T_\ell,\ T_\ell + t_\ell)$，然后我们只需定义

$$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t) := \sigma_{\gamma,\ell}.$$

对于 $t \notin \mathcal{T}$，我们采用仿射插值。先考虑一个简单情形：存在环 $\ell,\ \ell' \in \mathcal{L}_\gamma$，使得 $T_\ell + t_\ell \leq t \leq T_{\ell'}$、$T_\ell + t_\ell < T_{\ell'}$，且其间没有环，也就是说，不存在满足 $\ell \prec \ell'' \prec \ell'$ 的 $\ell'' \in \mathcal{L}_\gamma$。在这种情形下，左极限 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(T_\ell + t_\ell-)$ 等于 σ_ℓ，而右极限 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(T_{\ell'}+)$ 等于 $\sigma_{\ell'}$。因此，我们用 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t) := (1-\mu)\sigma_\ell + \mu\sigma_{\ell'}$ 进行插值，其中 $\mu \in [0,1]$ 是满足 $t = (1-\mu)(T_\ell + t_\ell) + \mu T_{\ell'}$ 的唯一值。

现在来考虑一般情形（对于 $t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$）。首先，令

$$t_- := 0 \vee \sup\{T_\ell + t_\ell : \ell \in \mathcal{L}_\gamma, T_\ell + t_\ell \leq t\}, \qquad t_+ := t_{\mathcal{X},\lambda} \wedge \inf\{T_\ell : \ell \in \mathcal{L}_\gamma, T_\ell \geq t\}, \tag{2}$$

$$\sigma_- := 0 \vee \sup\{\sigma_\ell : \ell \in \mathcal{L}_\gamma, T_\ell + t_\ell \leq t\}, \qquad \sigma_+ := t_\gamma \wedge \inf\{\sigma_\ell : \ell \in \mathcal{L}_\gamma, T_\ell \geq t\}.$$

然后，$t_- \leq t \leq t_+$。在 $t_- = t_+$ 的情形下，令 $\mu(t) := 0$。否则，令 $\mu(t) := (t - t_-)/(t_+ - t_-) \in [0,1]$，即 $t = (1-\mu)t_- + \mu t_+$，并在 $[0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$ 上令，

$$\sigma_{\mathcal{X},\lambda} := (1-\mu)\sigma_- + \mu\sigma_+.$$

特别地，这些函数满足 $\sigma_- \leq \sigma_{\mathcal{X},\lambda} \leq \sigma_+$。

[4] 注意，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 是一个函数，而 $\sigma_{\gamma,\mathcal{L}}$ 是首次命中时刻的集合。

备注 2.1。显然，函数 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 不依赖于在 $\prod_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma}\Theta_\ell$ 中选择哪些根。虽然不那么显而易见，但它也不依赖于次序的选择（因此完全不依赖于 $B\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ 的选择）。事实上，σ_-、σ_+ 的值不依赖于这些次序；尽管对于某些 t 的取值，t_- 和 t_+ 确实会依赖于 B 的选择，但这只会发生在满足 $\sigma_-=\sigma_+$ 的 t 情况下，而此时 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 无论如何都恰好等于这个共同值。

为供后续使用，我们现在证明以下结论。（直观而言，这告诉我们，除其他事项外，所得路径 X 不依赖于 γ的初始参数化。）

引理 2.2. 对于所有 $\lambda=0$ 和 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}_0$，集合 $\mathcal{T}$ 在 $[0,t_{\mathcal{X},0}]$上稠密。

证明. 令 $\mathcal{T}'=\bigcup_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma}[T_\ell,T_\ell+t_\ell]$，于是 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{T}'$中稠密。

关键在于，对于 $\lambda=0$，对所有 $s\in[0,t_{\mathcal{X},0}]\setminus\mathcal{T}'$，都有 $s_-=s_+$（对于 $\lambda\neq0$，它们相差 $\lambda(\sigma_+-\sigma_-)$）。确实，对于这样的 s，

$$\begin{aligned}s_+=\inf\{\sum_{\ell'\prec\ell}t_{\ell'}:T_\ell\geq s\}&=\sum\{t_{\ell'}:\forall\ell,T_\ell\geq s\implies\ell'\prec\ell\}\\&=\sum\{t_{\ell'}:\forall\ell,T_\ell\geq s\implies T_{\ell'}<T_\ell\}\\&=\sum\{t_{\ell'}:T_{\ell'}<s\},\end{aligned}$$

其中第一行的第二个等式由单调收敛定理得到。另一方面，

$$\begin{aligned}s_-=\sup\{\sum_{\ell'\preceq\ell}t_{\ell'}:T_\ell+t_\ell\geq s\}&=\sum\{t_{\ell'}:\forall\ell,T_\ell+t_\ell\geq s\implies\ell'\preceq\ell\}\\&=\sum\{t_{\ell'}:T_{\ell'}+t_{\ell'}\geq s\}\\&=\sum\{t_{\ell'}:T_{\ell'}<s\},\end{aligned}$$

其中第二个等式同样由单调收敛定理得到，最后一个等式则利用了这一事实 $s\notin\mathcal{T}'$）。因此，$s_-=s_+$，如所述。

现在令 $s<t\in[0,t_{\mathcal{X},0}]\setminus\mathcal{T}'$。我们将证明存在 $u\in[s,t]\cap\mathcal{T}$。由于 $s=s_+$，要么存在 ℓ使得 $T_\ell=s$，此时我们可以取 $u\coloneqq(t+s)/2\wedge(T_\ell+t_\ell/2)$；要么存在一个序列 (ℓ_n)，使得 T_{ℓ_n} 趋于 s。于是 $T_{\ell_n}+t_{\ell_n}\leq T_{\ell_{n-1}}$，因此 $(T_{\ell_n}+t_{\ell_n})$ 也趋于 s。因此，对于足够大的任意 n，$T_{\ell_n}+t_{\ell_n}<t$，我们可以取 $u\coloneqq(T_{\ell_n}+t_{\ell_n}/2)$，证明至此完成。 □

2.6 $\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$的时间连续性

本节最后将证明，对于（$\mathcal{X}$，λ）$\in\mathscr{R}'$且 $B\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$，函数$X=\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$是连续的。在此过程中，我们将记录两个定量界，尤其是下一条引理中的关键估计（3）；在研究更困难的映射（$\mathcal{X}$，λ，B）$\mapsto\Xi(\mathcal{X},\ \lambda,\ B)$的连续性问题时，这些结果将派上用场。

引理 2.3. 设 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}_0$ 和 $\lambda\geq0$。若 $\lambda>0$ 或 $\mathcal{X}$ 满足条件 (iv)，则映射$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在 $[0,t_{\mathcal{X},\lambda}]$上连续。

此外，连续性模数满足以下与 λ无关的定量界：对所有 $\delta>0$，设 $(\sigma_i)^{i\in\{1,\dots,k\}}$ 是有限集合 $\{\sigma_\ell:\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\geq\delta}\}$的递增枚举，并设 $\sigma_0=0$, $\sigma_{k+1}=t_\gamma$。那么，

$$\omega_\delta(\sigma_{\mathcal{X},\lambda})\leq\omega_\delta^1(\mathcal{X})\coloneqq\max\{\sigma_{i+1}-\sigma_i:i\in\{0,\dots,k\}\}.\tag{3}$$

证明。我们先证明 (3)。设 $s<t$。假设 $(\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s)\,\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t))\cap\{\sigma_i:\ i\in\{0,\dots,k+1\}\}\neq\emptyset$，并设 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\geq\delta}$ 满足 $\sigma_\ell\in(\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s)\,\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t))$。对所有 $u\in(T_\ell,T_\ell+t_\ell)$，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s)<\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(u)=\sigma_\ell<\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t)$。由于 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 是非递减的，我们推得 $s\leq u\leq t$。因此 $s\leq T_\ell$ 且 $t\leq T_\ell+t_\ell$，于是$t-s\geq t_\ell\geq\delta$。通过逆否命题，

$$t-s<\delta\implies(\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s),\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t))\cap\{\sigma_i:i\in\{0,\dots,k+1\}\}=\emptyset\implies\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t)-\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s)\leq\omega_\delta^1(\mathcal{X}),$$

这就证明了（3）。

对于 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 的连续性，我们分别考虑 $\mathcal{X}$ 满足条件 (iv) 的情况，以及 $\lambda>0$。

前一种情况可直接由 (3) 得出。事实上，当 $\delta \to 0$, $\omega_\delta^1(\mathcal{X})$ 收敛至

$$\sup\{\sigma' - \sigma : \sigma' \geq \sigma, (\sigma, \sigma') \cap \{\sigma_{\gamma,\ell} : \ell \in \mathcal{L}\} = \emptyset\},$$

根据（iv），其值为 0。因此 $\omega_\delta(\sigma) \leq \omega_\delta^1(\mathcal{X}) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$，所以 σ 是连续的。

现在考虑后一种情况 $\lambda > 0$。如果集合 $\sigma_{\mathcal{L}}$ 是有限的，那么很容易证明函数 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 是利普希茨连续的。另一方面，如果 $\sigma_{\mathcal{L}}$ 是稠密的，上述论证也足以得出 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 是连续的。然而，当 $\sigma_{\mathcal{L}}$ 既非离散也非稠密时，这两种论证都无法得出结论：我们必须将先前的论证“局部化”。对于某个 t，我们需要在左侧使用“利普希茨论证”，在右侧使用“稠密性论证”，或者反过来，因此我们还要区分左连续与右连续。

◇显然，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在任意 $t \in \mathcal{T}$ 处连续，因为存在一个开集 $(T_\ell, T_\ell + t_\ell) \ni t$，在该集合上 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 是局部常数。现在令 $t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$.◇对于满足 $t_- < t < t_+$ 的 $t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$，将 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 限制在 (t_-, t_+) 上所得的函数是仿射的，因此连续。同理，若 $t < t_+$，则 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在 t 处右连续；若 $t > t_-$，则 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在 t 处左连续。◇只需证明：当 $t = t_+$ 时，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在 t 处右连续；当 $t = t_-$ 时，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在 t 处左连续。在 $t = t_-$ 的情况下，$\mu(t) = 0$，从而 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t) = \sigma_-(t)$。在 $t = t_+$ 的情况下，要么 $\mu(t) = 1$，要么 $t_- = t_+$。在前一种情况下，$\mu(t) = 1$，于是有 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t) = \sigma_+(t)$。在后一种情况下 $t_- = t_+$，存在一个非递减序列 (ℓ_n^-) 和一个非递增序列 (ℓ_n^+)，使得 $T_{\ell_n^+}$ 和 $T_{\ell_n^-} + t_{\ell_n^-}$ 都在

$$n \to \infty \qquad T_{\ell_n^+} - T_{\ell_n^-} + t_{\ell_n^-} \qquad \lambda \cdot \sigma_{\ell_n^+} - \sigma_{\ell_n^-} \geq$$
$$\lambda \cdot \sigma_+ t - \sigma_- t \qquad \lambda > 0 \qquad \sigma_- t = \sigma_+ t \qquad \sigma_{\mathcal{X}\lambda} t = \sigma_+ t$$

时趋于 $t = t_- = t_+$。然而，差值 ( ) 有下界 ( ) (( ) ( ))。由于，我们推得 ( ) ( )，因此，( ) ( )。无论是 $\mu(t) = 1$ 还是 $t_- = t_+$，我们都已证明 $\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t) = \sigma_+(t)$。在证明的其余部分，$t = t_-$ 与 $t = t_+$ 的情况现在是对称的，因此我们只考虑 $t = t_+$ 的右连续性。根据定义 t_+ 的下确界是否能取到，我们分两种情况讨论。如果能取到，即存在 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$ 使得 $t = T_\ell$，那么根据定义，$\sigma_+(t) = \sigma_{\gamma,\ell}$。因此$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t) = \sigma_{\gamma,\ell}$。对于所有 $s \in (t, t + t_\ell)$，根据定义，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$, $\mathcal{X}, \sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s) = \sigma_{\gamma,\ell}$。因此，$\sigma_{\mathcal{X},\lambda}$ 在 $[t, t + t_\ell)$ 上局部常数，故在 t 处右连续。

当定义 t_+ 的下确界未取到时，存在一个序列 $(\ell_n)_n$，属于 $\mathcal{L}_\gamma$，使得 T_{ℓ_n} 递减趋向 $t_+ = t$。由于 $\sigma_{\mathcal{X}}$, λ 单调不减，且 T_{ℓ_n} 递减趋向 t，$\lim_{s\to t} \sigma_{\mathcal{X}}$, $,\lambda(s) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\mathcal{X},\lambda}(T_{\ell_n})$。根据 σ_+ 的定义以及 $\ell \mapsto \sigma_\gamma$ 的单调性，ℓ, $\sigma_{\mathcal{X}}$, $\lambda(T_{\ell_n}) \overset{s>t}{}$ 趋向 $\sigma_+(t)$。由于 $\sigma_+(t) = \sigma_{\mathcal{X}}$, $\lambda(t)$, $\lim_{s\to t}, \sigma_{\mathcal{X},\lambda}(s) = \sigma_{\mathcal{X},\lambda}(t)$，由此$_{s>t}$完成证明。

□

命题 2.4。设 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}_0$ 和 $\lambda \geq 0$。若 $\lambda > 0$ 或 $\mathcal{X}$ 满足 (iv)，无论采用哪种平局规则 $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$，对所有 $\epsilon > 0$,

$$\omega_\epsilon(\Xi(\mathcal{X}, \lambda, B)) \leq 2\,\omega_\epsilon^l(\mathcal{L}) + \omega_\epsilon(\gamma \circ \sigma_{\mathcal{X},\lambda}).$$

特别地，函数 $X = \Xi(\mathcal{X}, \lambda, B)$ 在 $[0, t_{\mathcal{X},\lambda}]$ 上连续，且函数族$\{\Xi(\gamma, \mathcal{L}, \lambda, B)\}_{B\in\mathcal{B}_{\gamma,\ \mathcal{L}}}$ 等度连续。

证明。定义 $\pi_-, \pi_+ \colon [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \to [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$，使得 $\pi_- t(t) = \pi_+(t) = t$，其中 $t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$；对于 $t \in (T_\ell, T_\ell + t_\ell)$，$\pi_-(t) \coloneqq T_\ell$, $\pi_+(t) \coloneqq T_\ell + t_\ell$。特别地，对所有 t，$\pi_-(t) \leq t \leq \pi_+(t)$。此外，对于任意满足 $s < t$ 的 $s, t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}]$，要么存在 ℓ 使得 $T_\ell < s < t < T_\ell + t_\ell$，要么 $\pi_+(s) \leq \pi_-(t)$。

L以及 $s, t \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}]$，使得 $s < t < s+\epsilon$。若存在 ℓ 使得 $T_\ell < s < t < T_\ell +$ t_ℓ,

$$|X(t) - X(s)| = |\hat{\ell}(t - T_\ell) - \hat{\ell}(s - T_\ell)| \leq \omega_\epsilon(\hat{\ell}) \leq \omega_\epsilon^l(\mathcal{L}).$$

否则，$s < \pi_+(s) \leq \pi_-(t) < t < s+\epsilon$。由于 $\pi_-(t)$ $\pi_+(s) \in [0, t_{\mathcal{X},\lambda}] \setminus \mathcal{T}$，$X(\pi_-(t)) = \gamma \circ \sigma(\pi_-(t))$ 且 $X(\pi_+(s)) = \gamma \circ \sigma(\pi_+(s))$。因此，

$$\begin{aligned} |X(t) - X(s)| &\leq |X(t) - X(\pi_-(t))| + |\gamma \circ \sigma(\pi_-(t)) - \gamma \circ \sigma(\pi_+(s))| + |X(\pi_+(s)) - X(s)| \\ &\leq \omega_\epsilon^l(\mathcal{L}) + \omega_\epsilon(\gamma \circ \sigma) + \omega_\epsilon^l(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

等度连续条件以及 γ 和 σ 的连续性确保了$2\omega_\epsilon^l(\mathcal{L}) + \omega_\epsilon(\gamma \circ \sigma) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$，由此完成证明。

□

3 将单个环附加到一条简单路径上

本节中，我们考察映射$(\gamma,\ \ell)\mapsto x_{\gamma,\ \ell},\quad \sigma_{\gamma,\ \ell},\quad \theta^{-}_{\gamma\ ,\ \ell},\quad \theta^{+}_{\gamma\ ,\ \ell}$的连续性。很容易看出，不连续点$(\gamma,\ \ell)$并非一般情形，因此我们寻找关于$(\gamma,\ \ell)$的泛型条件，以确保在$(\gamma,\ \ell)$处的连续性。

3.1 正则对的集合

对于 $\gamma\in\mathscr{S}$和 $x\in\gamma((0,t_\gamma))$，我们首先构造两个连通开集 $L(x)$ 和 $R(x)$，使得其不交并集 $\mathrm{Range}(\gamma)\sqcup L(x)\sqcup R(x)$ 包含 x 的一个邻域；我们可以将它们视为 γ 周围 x 的“左侧”和“右侧”。

令 $\gamma^{-1}\colon\mathrm{Range}(\gamma)\to[0,t_\gamma]$ 为 γ 的逆映射，$o:=\gamma(0)$，$f:=\gamma(t_\gamma)$，以及 $\mathbf{r}(x):=d(x,\{o,f\})$。于是，对于任意 $x\in\mathrm{Range}(\gamma)\setminus\{o,f\}$，有 $\mathbf{r}(x)>0$。令 $\sigma^{-}_{\gamma}(x)$ 和 $\sigma^{+}_{\gamma}(x)$ 分别表示 γ 在到达 x 之前进入 $B_{\mathbf{r}(x)}(x)$ 的最后时刻，以及在到达 x 之后离开 $B_{\mathbf{r}(x)}(x)$ 的第一时刻：

$$\sigma^{-}_{\gamma}(x):=\sup\{\sigma<\gamma^{-1}(x):\gamma_\sigma\in\partial B_{\mathbf{r}(x)}(x)\}\quad\text{and}\quad\sigma^{+}_{\gamma}(x):=\inf\{\sigma>\gamma^{-1}(x):\gamma_\sigma\in\partial B_{\mathbf{r}(x)}(x)\}.$$

特别地，$0\le\sigma^{-}_{\gamma}(x)\le\gamma^{-1}(x)\le\sigma^{+}_{\gamma}(x)\le t_\gamma$。

$\partial B_{\mathbf{r}(x)}\ x\quad\overleftarrow{\gamma}\quad\gamma\quad\sigma^{-}_{\gamma}\ x\quad\sigma^{+}_{\gamma}\ x\quad x\quad B_{\mathbf{r}(x)}\ x\quad\gamma\ \sigma^{\pm}_{\gamma}\ x\quad\in$在区间 $(\ (\ )\ (\ ))$ 上的限制在 $(\ )$ 上取值，而 $(\ (\ ))\ (\ )$。令（其依赖于，但也依赖于 ）为沿着 $\partial B_{\mathbf{r}(x)}(x)$ 从 $\gamma(\sigma^{+}_{\gamma}(x))$ 逆时针弧长参数化到 $\gamma(\sigma^{-}_{\gamma}(x))$ 的弧长参数化。于是，拼接 $\eta:=\gamma_{|[\sigma^{-}_{\gamma}(x),\sigma^{+}_{\gamma}(x)]}\cdot\overleftarrow{\gamma}$ 是一个简单环。根据若尔当曲线定理，$\mathbb{C}\setminus\mathrm{Range}(\eta)$ 恰好由两个连通分支组成。我们将有界的那个记为 $L(x)$，将无界的那个记为 $R(x)$。

Defi定义 3.1. 环 ℓ 称为**关于** γ 正则，若它与 γ 相交且满足以下条件 $s.$

i) 时间根集合 Θ_ℓ 缩减为单个元素 θ_ℓ。此外，$\sigma_\ell\notin\{0,t_\gamma\}$。注意，这排除了 $\theta^{-}_{\ell}=0$，因为那样的话 $\theta^{+}_{\ell}=t_\ell$。*ii)* θ_ℓ 处的交点是双侧的：对于任意 $\epsilon>0$，都存在 θ^{L}、$\theta^{R}\in[\theta_\ell-\epsilon,\theta_\ell+\epsilon]$，使得 $\ell(\theta^{L})\in L(x_\ell)$ 以及 $\ell(\theta^{R})\in R(x_\ell)$。

$\mathscr{L}_\gamma$ 中对 γ 正则的环所构成的子集记为 $\mathscr{L}_{reg,\gamma}$。我们定义

$$\mathscr{L}_{reg}:=\bigcup_{\gamma\in\mathscr{S}}(\{\gamma\}\times\mathscr{L}_{reg,\gamma})\qquad and\qquad\mathscr{L}_0:=\bigcup_{\gamma\in\mathscr{S}}(\{\gamma\}\times\mathscr{L}_\gamma).$$

本小节的主要目标是证明以下性质，其中 $\mathscr{S}\times\mathscr{L}\supset\mathscr{L}_0$ 赋予由 $\rho\times d_\infty$ 诱导的拓扑。

定理 3.2。

1. 集合 $\mathscr{L}_0$ 是 $\mathscr{S}\times\mathscr{L}$ 中 $\mathscr{L}_{reg}$ 的一个邻域（即，存在 U 和一个开集，使得 $\mathscr{L}_{reg}\subset U\subset\mathscr{L}_0$）。*2.* 将 (ℓ,γ) 映射到 θ^{-}_{ℓ}、θ^{+}_{ℓ}、x_ℓ 和 σ_ℓ 的映射都定义在 $\mathscr{L}_0$ 上，并且在 $\mathscr{L}_{reg}$ 上连续。

我们再次提醒读者，在 $\mathscr{L}_{reg}$ 上的连续性强于将映射限制在 $\mathscr{L}_{reg}$上的连续性：这意味着，对于任意固定的 $(\gamma,\ \ell)\in\mathscr{L}_{reg}$，以及任意满足 $(\gamma_n,\ \ell_n)\to(\gamma,\ \ell)$ 的 $\mathscr{L}_0$中的序列 $(\gamma_n,\ \ell_n)$，都有 $\theta^{-}_{\ell_n}\to\theta^{-}_{\ell}$；其他映射也同理。

该定理的证明见第 3.2 节和第 3.3节。我们先给出一些初等观察。

备注 3.3。 由下文的引理 *3.4* 可知，由 d_∞ 和 ρ 在 $\mathcal{C}([0,\cdot],\ \mathbb{R}^d)$上诱导的拓扑相同，因此在$\mathscr{S}$和 $\mathscr{L}$上也相同。因此，我们将交替使用距离 $\rho\times\rho,\ \ \rho\times d_\infty$和$d_\infty\times d_\infty$。

此外，所考虑的拓扑都是度量拓扑，因此是第一可数的。因此，无需进一步说明，我们将依据连续性的序列刻画。

$\mathscr{L}_0$ 和 $\mathscr{L}_{reg}$ 都不是 $\mathscr{S}\times\mathscr{L}$ 中的开集（事实上，我们将证明 $\mathscr{L}_0$ 是闭的）。

以下是一个经典结论，它说明引言中定义的两种路径距离 ρ和 d_∞ 是等价的。为完整起见，我们陈述并证明这一结论。

引理 3.4。 对于任意 $\gamma_0, \gamma_1 \in \bigcup_{T\geq 0} \mathcal{F}([0,T],\mathbb{R}^d)$，有

$$\rho(\gamma_0,\gamma_1) \leq \omega_{d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_0) + 3d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)$$

and

$$d_\infty(\gamma_0,\gamma_1) \leq 2\rho(\gamma_0,\gamma_1) + \min(\omega_{2\rho(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_0), \omega_{2\rho(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_1)).$$

特别地，距离 ρ 和 d_∞ 在 $\mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^d)$上诱导相同的拓扑。

证明。 令 $\gamma_0,\gamma_1 \in \bigcup_{T\geq 0}\mathcal{F}([0,T],\mathbb{R}^d)$，并定义集合 $\varphi\colon\ t \mapsto t\cdot t_{\gamma_1}/t_{\gamma_0}$，它将 $[0,t_{\gamma_0}]$ 映射到 $[0,t_{\gamma_1}]$，以及 $\delta t := |t_{\gamma_0} - t_{\gamma_1}|$。于是，

$$\|\varphi - \mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} = \|\varphi^{-1} - \mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_1}]} = \delta t.$$

假设 $t_{\gamma_0} \geq t_{\gamma_1}$，因此 $\gamma_0\circ\varphi$ 在 $[0,t_{\gamma_0}]$上有定义。于是，

$$\begin{aligned}\|\gamma_0 - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} &\leq \|\gamma_0 - \gamma_0\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + \|\gamma_0\circ\varphi - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]}\\ &\leq \omega_{\|\varphi-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]}}(\gamma_0) + \|\gamma_0-\gamma_1\|_{\infty,[0,t_{\gamma_1}]} = \omega_{\delta t}(\gamma_0) + \|\gamma_0-\gamma_1\|_{\infty,[0,t_{\gamma_1}]}.\end{aligned}$$

因此，

$$\rho(\gamma_0,\gamma_1) \leq \omega_{\delta t}(\gamma_0) + \|\gamma_0-\gamma_1\|_{\infty,[0,t_{\gamma_1}]} + \delta t \leq \omega_{d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_0) + d_\infty(\gamma_0,\gamma_1). \tag{4}$$

在 $t_{\gamma_0} \leq t_{\gamma_1}$的情形下，有 $\omega_{d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_1) \leq \omega_{d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_0) + 2d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)$。将 (4) 中的 γ_0和 γ_1 互换后应用，可得

$$\rho(\gamma_0,\gamma_1) \leq \omega_{d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_1) + d_\infty(\gamma_0,\gamma_1) \leq \omega_{d_\infty(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_0) + 3d_\infty(\gamma_0,\gamma_1),$$

这对 $t_{\gamma_0} \geq t_{\gamma_1}$ 和 $t_{\gamma_0} \leq t_{\gamma_1}$均成立。

另一方面，对任意 γ_0，γ_1，令 φ为从 $[0,t_{\gamma_0}]$ 到$[0,t_{\gamma_1}]$ 的连续递增双射，使得

$$\|\varphi - \mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + \|\varphi^{-1} - \mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_1}]} + \|\gamma_0 - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,\infty)} \leq 2\rho(\gamma_0,\gamma_1).$$

我们有

$$\begin{aligned}d_\infty(\gamma_0,\gamma_1) &\leq \|\gamma_0 - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + d_\infty(\gamma_1\circ\varphi,\gamma_1)\\ &\leq \|\gamma_0 - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + |t_{\gamma_0} - t_{\gamma_1}| + \omega_{\|\varphi-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]}}(\gamma_1)\\ &\leq \|\gamma_0 - \gamma_1\circ\varphi\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + \|\varphi-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]} + \omega_{\|\varphi-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma_0}]}}(\gamma_1)\\ &\leq 2\rho(\gamma_0,\gamma_1) + \omega_{2\rho(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_1),\end{aligned}$$

利用 γ_0 与 γ_1 之间的对称性，我们可以将其改进为

$$d_\infty(\gamma_0,\gamma_1) \leq 2\rho(\gamma_0,\gamma_1) + \min(\omega_{2\rho(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_0), \omega_{2\rho(\gamma_0,\gamma_1)}(\gamma_1)).$$

当 γ_0，γ_1 限制在 $\mathcal{C}([0,\cdot],\ \mathbb{R}^d)$上时，$\omega_\epsilon(\gamma_0)$随 $\epsilon\to 0$而 $\to 0$，因此 ρ 与 d_∞ 诱导相同的拓扑。 □

后面我们还将需要如下内容

引理 3.5. 集合 $\mathscr{L}_0$ 在 $\mathscr{S}\times\mathscr{L}$ 中是闭的。

证明。根据引理 3.4，我们可以使用距离 $\rho\times\rho$。对于来自 $\mathbb{R}^2$ 的两个子集 X、Y，令$d_{\inf}(X,Y) := \inf\{|x-y|\colon\ x\in X, y\in Y\}$。对于紧集 X,Y，该下确界可以取到，即存在 $x\in X, y\in Y$ 使得 $d_{\inf}(X,Y) = |x-y|$。特别地，对于紧集 X,Y，$d_{\inf}(X,Y) = 0$ 当且仅当 $X\cap Y\neq\emptyset$。

令 $(\gamma,\ell)\in(\mathscr{S}\times\mathscr{L})\setminus\mathscr{L}_0$。由紧致性，且由于 $\mathrm{Range}(\gamma)\cap\mathrm{Range}(\ell) = \emptyset$,

$$d_{\inf}(\mathrm{Range}(\gamma),\mathrm{Range}(\ell)) > 0.$$

令(γ',ℓ')与(γ,ℓ)之间的距离严格小于 $\delta = d_{\inf}(\mathrm{Range}(\gamma),\mathrm{Range}(\ell))$。由紧致性，存在 $\sigma\in[0,t_\gamma]$ 和 $t\in[0,t_\ell]$，使得 $d_{\inf}(\mathrm{Range}(\gamma'),\mathrm{Range}(\ell')) = |\gamma'(\sigma) - \ell'(t)|$。考察$\varphi_\gamma$，取 φ_ℓ 为连续双射，使得 $\|\gamma-\gamma'\circ\varphi_\gamma\|_\infty + \|\ell-\ell'\circ\varphi_\ell\|_\infty < \delta$，我们可推出 $|\gamma'(\sigma) - \ell'(t)| > d_{\inf}(\mathrm{Range}(\gamma),\mathrm{Range}(\ell)) - \delta = 0$。因此 $d_{\inf}(\mathrm{Range}(\gamma'),\mathrm{Range}(\ell')) > 0$，由紧致性可推出$\mathrm{Range}(\gamma')\cap\mathrm{Range}(\ell') = \emptyset$，故$(\gamma',\ell')\notin\mathscr{L}_0$。我们证明了$\mathscr{S}\times\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0$ 是开集，因此 $\mathscr{L}_0$ 是闭的。 □

3.2 $\mathscr{L}_0$ 作为 $\mathscr{L}_{reg}$的邻域

请注意，定理 3.2 中的第一项可以改写如下。设$(\gamma,\ \ell) \in \mathscr{L}_{reg}$。那么，存在 $\delta>0$，使得对所有 $\gamma' \in \mathscr{S}$以及满足 $\ell' \in \mathscr{L}$的 $d_\infty(\gamma,\ \gamma')<\delta$和 $d_\infty(\ell,\ \ell')<\delta$，都有 $\ell' \in \mathscr{L}_{\gamma'}$。

我们将直接证明以下更强得多的版本，其中还指出，空间根$x_{\gamma,\ \ell}$和时间根 $\theta_{\gamma,\ \ell}$ 分别可以由某个交点 x （位于γ' 与 ℓ' 之间）以及某个时间 θ 逼近： $\ell'(\theta)=x$。备注：我们尚未声称可以选择 $x=x_{\gamma',\ \ell'}$和 $\theta \in \Theta_{\gamma',\ \ell'}$ （更不用说可以选择 $\theta=\theta^-_{\gamma',\ \ell'}$ 或 $\theta=\theta^+_{\gamma',\ \ell'}$），因此这仍远不足以证明 $\gamma,\ \ell \mapsto x_{\gamma,\ \ell},\ \ \theta_{\gamma,\ \ell}$的连续性。

引理 3.6。 设 $(\gamma,\ell) \in \mathscr{L}_{reg}$ 和 $\epsilon>0$。那么，存在 $\delta>0$，使得对于所有 $\gamma' \in \mathscr{S}$和$\ell' \in \mathscr{L}$，若 $d_\infty(\gamma,\gamma')<\delta$和 $d_\infty(\ell,\ell')<\delta$，则有 $\ell' \in \mathscr{L}_{\gamma'}$，并且存在 $\theta \in [\theta_\ell-\epsilon,\theta_\ell+\epsilon]$使得 $\ell'(\theta) \in$ 值域(γ') 和 $|\ell'(\theta)-x_\ell| \le \epsilon$。

证明。 根据引理3.4，只需证明同一结果，但将 ρ 替换为 d_∞。首先，我们将问题归结为$t_\gamma=t_{\gamma'}$、 $t_\ell=t_{\ell'}$、$\|\gamma-\gamma'\|_\infty<\delta$以及 $\|\ell-\ell'\|_\infty<\delta$的情形。

令 $\delta_1 \in (0,\ \epsilon)$ 足够小，使连续性模量 $\omega_{\delta_1}(\ell)$ 小于 $\epsilon/4$和$\mathbf{r}(x_\ell)/2$。令 $\theta^L,\ \theta^R \in [\theta_\ell-\delta_1,\theta_\ell+\delta_1]$，使得 $\ell(\theta^L) \in L(x_\ell),\ \ \ell(\theta^R) \in R(x_\ell)$；这样的取值存在，因为 $\ell \in \mathcal{L}_{reg,\ \gamma}$。然后，令

$$\delta \coloneqq \frac{1}{4}\min\{\epsilon,\delta_1,\mathbf{r}(x_\ell),d(\ell(\theta^L),R(x_\ell)),d(\ell(\theta^L),L(x_\ell))\}>0. \tag{5}$$

现在令 $\gamma',\ \ell' \in \mathscr{S}\times\mathscr{L}$，使得 $d_\infty(\gamma,\ \gamma')<\delta$且 $d_\infty(\ell,\ \ell')<\delta$。进一步令$\varphi_\gamma\colon [0,t_\gamma]\to[0,t_{\gamma'}]$和 $\varphi_\ell\colon [0,t_\ell]\to[0,t_{\ell'}]$为连续双射，使得

$$\|\gamma-\gamma'\circ\varphi_\gamma\|_{\infty,[0,t_\gamma]}+\frac{\|\varphi_\gamma-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_\gamma]}+\|\varphi_\gamma^{-1}-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\gamma'}]}}{2}<\delta$$

$$\text{and}\qquad \|\ell-\ell'\circ\varphi_\ell\|_{\infty,[0,t_\ell]}+\frac{\|\varphi_\ell-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_\ell]}+\|\varphi_\ell^{-1}-\mathrm{Id}\,\|_{\infty,[0,t_{\ell'}]}}{2}<\delta.$$

令 $\tilde\theta^L=\varphi_\ell^{-1}(\theta^L)$, $\tilde\theta^R=\varphi_\ell^{-1}(\theta^R)$。对于 $s,t\in[0,\infty)$, 将区间 $[s\wedge t,s\vee t]$记为 $[s,t]$。我们将找出 $\tilde\theta\in[\tilde\theta^L,\tilde\theta^R]$，使得 $\ell'\circ\varphi_\ell(\theta) \in$ 值域$(\gamma'\circ\varphi_\gamma)$。这足以得出结论：令 then$\theta\coloneqq\varphi_\ell(\theta)$，我们有

- 由 φ_ℓ的单调性， $\theta=\varphi_\ell(\tilde\theta) \in \varphi_\ell([\tilde\theta^L,\tilde\theta^R])=[\theta^L,\theta^R]\subseteq[\theta_\ell-\epsilon,\theta_\ell+\epsilon]$。 ~ ~ $\ell(\theta)=\ell(\theta) \in$ 值域$(\gamma'\circ\varphi_\gamma)=$ 值域(γ')。 ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~
- $|\ell'(\theta)-x_\ell|=|\ell'(\theta)-\ell(\theta_\ell)|\le|\ell'(\theta)-\ell(\theta)|+|\ell(\theta)-\ell(\theta)|+|\ell(\theta)-\ell(\theta_\ell)|\le\|\ell'-\ell\|_\infty+\omega_{\|\phi_\ell-\mathrm{Id}\,\|_\infty}(\ell)+\epsilon/2<\delta_1+\omega_{\delta_1}(\ell)+\epsilon/2=\epsilon$。

我们已完成化简步骤（另请注意，我们不再需要证明 $|\ell'(\theta)-x_\ell|$），现在~ ~我们证明 θ 的存在性。我们只需考虑 $\ell'\coloneqq\ell'\circ\varphi_\ell$ 和 $\tilde\gamma'\coloneqq\gamma'\circ\varphi_\gamma$，而非 ℓ' 和 γ'，因此记 ℓ' 为 $\tilde\ell'$， γ' 为 $\tilde\gamma'$， θ^L 为 $\tilde\theta^L$，以及 θ^R 为 $\tilde\theta^R$。于是 $t_{\gamma'}=t_\gamma$、 $t_{\ell'}=t_\ell$、$\|\gamma'-\gamma\|_\infty<\delta$ 和 $\|\ell'-\ell\|_\infty<\delta$。

记住环 $\eta=\gamma_{|[\sigma_\gamma^-(x)\ \ \sigma_\gamma^+(x)]}\cdot\overleftarrow{\gamma}$，它以逆时针方向参数化 $\partial L(x_\ell)$。对于 $a,\ b\in\mathbb{R}^2$（可能带有 $a=b$），令 $[a,b]$ 为从 $[0,1]$ 到 a 的函数，该函数以仿射方式从时间 0 时的 a 变化到时间 1 时的 b。令 $a_\pm=\gamma(\sigma_\gamma^\pm(x))$、 $a'_\pm=\gamma'(\sigma_\gamma^\pm(x))$，并定义

$$\eta_0\coloneqq[a_-,a_-]\cdot\gamma_{|[\sigma_\gamma^-(x),\sigma_\gamma^+(x)]}\cdot[a_+,a_+]\cdot\overleftarrow{\gamma},$$

$$\eta_1\coloneqq[a_-,a'_-]\cdot\gamma'_{|[\sigma_\gamma^-(x),\sigma_\gamma^+(x)]}\cdot[a'_+,a_+]\cdot\overleftarrow{\gamma}.$$

备注 η_0,η_1 定义在同一时间区间上，且 $\|\eta_1-\eta_0\|_\infty\le\|\gamma-\gamma'\|_\infty<\delta$。

对于 $\lambda\in[0,1]$，定义环 $\eta_\lambda=(1-\lambda)\eta_0+\lambda\eta_1$。对于所有 $\lambda\in[0,1]$， $\|\eta_\lambda-\eta_0\|_\infty=(1-\lambda)\|\eta_1-\eta_0\|_\infty<\delta$。因此， $d(\ell(\theta^R)\ \eta_\lambda)>d(\ell(\theta^R)\ \eta_0)-\delta\ge0$，类似地 $d(\ell(\theta^L)\ \eta_\lambda)>0$。因此，$(\eta_\lambda)_\lambda$是一个从 η_0 到 η_1 的同伦，且避开了 $\ell(\theta^R)$ 和 $\ell(\theta^L)$。由于点 x 位于由环界定的无界道路连通分支这一性质，在避开 x 的同伦下保持不变，我们推得 $\ell(\theta^R)$ 位于由 η_1 界定的无界道路连通分支中，我们将其称为 R'；而 $\ell(\theta^L)$ 不在其中。此外， $d(\ell(\theta^R)\ \eta_1)\ge d(\ell(\theta^R)\ \eta_0)-\|\eta_1,\eta_0\|_\infty\ge2\delta-\delta=\delta$。因此， $\ell'(\theta^R)\in B_\delta(\ell(\theta^R))\subset R'$。通过类似的论证，我们推得 $\ell'(\theta^L)\notin R'$。根据介值定理，存在 $\theta\in[\theta^L,\theta^R]$ 使得 $\ell'(t)\in$ 值域(η_1)。现在我们将证明 $\ell'([\theta^L,\theta^R])$ 不与 $\overleftarrow{\gamma}$、线段 $[a_-,a'_-]$ 和 $[a'_+,a_+]$ 相交，由此可得$\ell'(t)\in$ 值域$(\gamma'_{|[\sigma_\gamma^-(x)\ \sigma_\gamma^+(x)]})\subseteq$ 值域(γ')，证明至此完成。 □

3.3 在 $\mathscr{L}_{reg}$上的连续性

现在我们开始证明连续性：$\gamma,\ \ell) \mapsto \sigma_{\gamma,\ \ell}$ 在 $\mathcal{L}_{reg}$上；证明将在命题3.11中完成。

引理 3.7。 设 $\gamma_n \in \mathscr{S}$是一个收敛到 $\gamma \in \mathscr{S}$的序列。设 $x_n \in$ 值域(γ_n) 收敛到 $x \in$值域(γ)。那么， $\gamma_n^{-1}(x_n)$ 收敛到 $\gamma^{-1}(x)$。

证明。 首先注意，对于任意满足 $\sigma_n \in [0, t_{\gamma_n}]$ 对所有 n成立的序列 $(\sigma_n)_n$ ，我们有如下蕴含关系

$$\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma \implies \gamma_n(\sigma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma(\sigma). \tag{6}$$

事实上，左侧蕴含 $\sigma \le t_\gamma$ 以及

$$|\gamma_n(\theta_n) - \gamma(\sigma)| \le |\gamma_n(\sigma_n) - \gamma(\sigma_n \wedge t_\gamma)| + |\gamma(\sigma_n \wedge t_\gamma) - \gamma(\sigma)| \le d_\infty(\gamma_n, \gamma) + |\gamma(\sigma_n \wedge t_\gamma) - \gamma(\sigma)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

令 x_n, x 如引理中所述，并令 σ 为 $\{\gamma_n^{-1}(x_n)\}$的任意聚点。由于对所有充分大的 n， $\gamma_n^{-1}(x_n) \in [0, t_\gamma + 1]$ 是紧集，只需证明 $\sigma = \gamma^{-1}(x)$。令 n 沿着 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集变化，使得 $\gamma_n^{-1}(x_n) \to \sigma$。由 (6) 可得 $x_n = \gamma_n(\gamma_n^{-1}(x_n)) \to \gamma(\sigma)$。根据假设， $x_n \to x$，因此 $x = \gamma(\sigma)$。由于 γ 是单射，我们推出 $\sigma = \gamma^{-1}(x)$，证明至此完成。 □

推论 3.8。 设$(\gamma_n, \ell_n) \in \mathscr{L}_0$ 是一个收敛于$(\gamma, \ell) \in \mathscr{L}_{reg}$的序列。那么，

$$\limsup \sigma_{\gamma_n,\ell_n} \le \sigma_{\gamma,\ell}.$$

证明。根据引理 3.6，存在一个序列 θ_n ，使得 θ_n 收敛于 $\theta_{\gamma,\ell}$，且 $x_n := \ell_n(\theta_n)$ 收敛于 $x_{\gamma,\ell}$；并且对于所有充分大的 n $\ell_n(\theta_n) \in$ 值域(γ_n)。应用引理 3.7（由于 $x_{\gamma,\ell} \in$ 值域(γ)，我们可以这样做），可推出 $\gamma_n^{-1}(x_n)$ 收敛于 $\gamma^{-1}(x_{\gamma,\ell}) = \sigma_{\gamma,\ell}$，当 $n \to \infty$ 时。由于 $x_n \in$值域$(\ell_n) \cap$值域(γ_n)，$\sigma_{\gamma_n,\ell_n} \le \gamma_n^{-1}(x_n)$，因此 $\limsup \sigma_{\ell_n,\gamma_n} \le \sigma_{\gamma,\ell_0}$

□

引理 3.9。 设$(\gamma_n, \ell_n) \in \mathscr{L}_0$ 是一个收敛于$(\gamma, \ell) \in \mathscr{L}_{reg}$的序列。设$(t_n)_n$是一个时间序列，使得 $\ell_n(t_n) \in$ 值域(γ_n)，并假设 $t_n \to t$ 当 $n \to \infty$时。那么，$\ell(t) \in$值域(γ)。

证明。 由三角不等式，

$$d(\ell(t), \mathrm{Range}(\gamma)) \le |\ell(t) - \ell(t_n \wedge t_\ell)| + |\ell(t_n \wedge t_\ell) - \ell_n(t_n)| + d(\ell_n(t_n), \mathrm{Range}(\gamma)).$$

由于 $\ell_n \to \ell$, $t_n \le t_{\ell_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t_\ell$。又由于 $t_n \to t$，因此有 $t_n \wedge t_\ell \to t$。由 ℓ的连续性，右侧第一项在 $n \to \infty$时趋于 0。第二项小于$d_\infty(\ell, \ell_n)$，它也趋于 0。由于 $\ell_n(t_n) \in$ 的值域为(γ_n)，第三项小于 $\rho(\gamma_n, \gamma)$，它也趋于 0。由于左侧不依赖于 n，它等于 0，即 $\ell(t) \in$ 的值域为$(\gamma) =$ 的值域为(γ)。

□

C推论 3.10。 设 $(\gamma_n, \ell_n) \in \mathscr{L}_0$ 是一个收敛到 $(\gamma, \ell) \in \mathscr{L}_{reg}$的序列。 $n,$

$$\liminf \sigma_{\gamma_n,\ell_n} \ge \sigma_{\gamma,\ell}.$$

证明。设 σ 是σ_{γ_n,ℓ_n}的一个聚点，并固定一个子序列，使得沿该子序列有 $\sigma_{\gamma_n,\ell_n} \to \sigma$。再取一个子序列，使得$\theta_{\gamma_n,\ell_n}$ 沿此子序列收敛（由 $[0, t_\gamma + 1]$的紧致性可知这样的子序列存在），并令 θ 为其极限。沿此子序列，$x_{\gamma_n,\ell_n} = \ell_n(\theta_{\gamma_n,\ell_n})$ 收敛到 $x := \ell(\theta)$（这是由 ℓ 的连续性、 θ_n 收敛到 θ以及 ℓ_n 一致收敛到 ℓ 得出的）。由引理 3.9， $x \in$的值域为(γ)。因此，我们可以沿该子序列应用引理 3.7，从而推出$\sigma_{\gamma_n,\ell_n} = \gamma_n^{-1}(x_{\gamma_n,\ell_n})$ 收敛到 $\gamma^{-1}(x)$。由极限的唯一性， $\sigma = \gamma^{-1}(x)$。由于 $x \in$ 的值域为$(\gamma) \cap$ 的值域为(ℓ)， $\sigma_{\gamma,\ell} \le \gamma^{-1}(x) = \sigma$， 证明完毕。

□

命题 3.11. 定义在 $\mathscr{L}_0$ 上的映射 $(\gamma, \ell) \mapsto \sigma_{\gamma,\ell}$ 与 $(\gamma, \ell) \mapsto x_{\gamma,\ell}$ 在$\mathscr{L}_{reg}$上连续。

证明. σ 的连续性等价于推论 3.8 与 3.10。由于 $x_{\gamma,\ell} = \gamma(\sigma_{\gamma,\ell})$， x 的连续性随之成立：

$$|x_{\gamma,\ell} - x_{\gamma',\ell'}| = |\gamma(\sigma_{\gamma,\ell}) - \gamma'(\sigma_{\gamma',\ell'})| \le d_\infty(\gamma', \gamma) + |\gamma(\sigma_{\gamma',\ell'}) - \gamma(\sigma_{\gamma,\ell})| \underset{(\gamma',\ell')\to(\gamma,\ell)}{\longrightarrow} 0,$$

由 γ的连续性。 □

尚需证明 θ^- 和 θ^+的连续性。

推论 3.12. 定义在 $\mathscr{L}_0$ 上的函数 θ^- 和 θ^+ 在 $\mathscr{L}_{reg}$上连续。

证明。我们处理 θ^-的情形， θ^+ 的情形完全相同。设 $(\gamma,\ell) \in \mathscr{L}_{reg}$， 且 $(\gamma_n,\ell_n) \in \mathscr{L}_0$ 收敛到 (γ,ℓ)。由 $[0,t_\ell+1]$的紧致性，只需证明对于 $(\theta^-_{\ell_n,\gamma_n})_n$ 的任意聚点 θ ，都有 $\theta=\theta^-_{\gamma,\ell}$。固定一个子序列，使得沿该子序列 $\theta^-_{\gamma_n,\ell_n}\to\theta$。由于 $(\gamma,\ell)\in\mathcal{L}_{reg}$, $\theta^-_{\gamma,\ell}=\theta^+_{\gamma,\ell}=\theta_{\gamma,\ell}$。沿该子序列，$x_{\gamma_n,\ell_n}=\ell_n$ $(\theta^-_{\gamma_n,\ell_n})\to\ell(\theta)$（由 ℓ_n 一致收敛到 ℓ、 ℓ 的连续性，以及 $\theta^-_{\gamma_n,\ell_n}$ 收敛到 θ）。另一方面，由 (γ,ℓ) 的连续性 $\mapsto x_{\gamma,\ell}$ （命题 3.11），$x_{\gamma_n,\ell_n}\to x_{\gamma,\ell}=\ell(\theta_{\gamma,\ell})$。因此$\ell(\theta)=\ell(\theta_{\gamma,\ell})$，即 $\theta\in\Theta_{\gamma,\ell}$。由于 ℓ 对于 γ, $\Theta_{\gamma,\ell}=\{\theta_{\gamma,\ell}\}$ 是正则的，因此 $\theta=\theta_{\gamma,\ell}$，证毕。

□

4 附着映射的连续性

4.1 δ-同构、适配与强适配

为了在 $\mathscr{L}^{lf}$ 上定义距离，我们在 $\mathscr{L}^{lf}$ 中将从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}'$ 的 δ-同构定义为 $\phi\colon \mathcal{L}_0\to\mathcal{L}'_0$，其中 $\mathcal{L}_0,\mathcal{L}'_0$ 满足 $\mathcal{L}'_{\geq\delta}\subseteq\mathcal{L}'_0\subseteq\mathcal{L}'$ 和 $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}_{\geq\delta}\cup\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\geq\delta})$（由此可推出 $\mathcal{L}'_0=\mathcal{L}'_{\geq\delta}\cup\phi(\mathcal{L}_{\geq\delta})$），并且对所有 $\ell\in\mathcal{L}_0$,

$$d_\infty(\ell,\phi(\ell))\leq\delta/2.$$

如果映射 ϕ 诱导出一个 δ-同构，我们就称之为诱导一个 δ-同构；这要求它定义在 $\mathcal{L}_{\geq\delta}$ 上，并且由 $\tilde\phi(\ell):=\phi(\ell)$ 定义的从 $\mathcal{L}_{\geq\delta}\cup\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\geq\delta})$ 到 $\phi(\mathcal{L}_{\geq\delta})\cup\mathcal{L}'_{\geq\delta}$ 的映射 $\tilde\phi$ 是一个 δ-同构。

对于一个 δ-同构，特别有

$$\mathcal{L}_0\subseteq\mathcal{L}_{\geq\delta/2}\qquad\text{and}\qquad\mathcal{L}'_0\subseteq\mathcal{L}'_{\geq\delta/2}.$$

事实上， $\mathcal{L}_{\geq\delta}\subseteq\mathcal{L}_{\geq\delta/2}$，对于 $\ell\in\phi^{-1}(\mathcal{L}_{\geq\delta})$， $t_\ell\geq t_{\phi(\ell)}-|t_\ell-t_{\phi(\ell)}|\geq\delta-\delta/2$，因此 $\phi^{-1}(\mathcal{L}_{\geq\delta})\subseteq\mathcal{L}_{\geq\delta/2}$。包含 $\mathcal{L}'_0\subseteq\mathcal{L}'_{\geq\delta/2}$ 可通过类似的计算验证。

引理 4.1. 令 $\delta>0$，并令 ϕ 为从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}'$的一个 δ-同构。则，

- ϕ^{-1} 是从 $\mathcal{L}'$ 到 $\mathcal{L}$的一个 δ-同构。
- 对于 $\delta'>\delta$， ϕ 诱导出一个 δ'-同构。
- 如果 ψ 是从 $\mathcal{L}'$ 到 $\mathcal{L}''$的一个 δ'-同构， $\psi\circ\phi$ 则诱导出一个$(\delta+\delta')$-同构，从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}''$。

证明。 第一项显然成立。

对于第二项，令 $\tilde{\mathcal{L}}_0:=\mathcal{L}_{\geq\delta'}\cup\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\geq\delta})$ 和 $\tilde{\mathcal{L}}'_0:=\phi(\mathcal{L}_{\geq\delta'})\cup\mathcal{L}'_{\geq\delta'}$。由于 ϕ 是单射且 $\mathcal{L}'_0=\phi(\mathcal{L}_0)$，因此 $\phi\colon\mathcal{L}_0\to\phi(\mathcal{L}_0)$ 是双射。对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_0$, $d_\infty(\ell,\ \phi(\ell))<\delta/2<\delta'/2$。

对于最后一项，先备注 $\psi^{-1}(\mathcal{L}''_{\geq\delta+\delta'})\subseteq\mathcal{L}'_{\geq\delta}$，并且 $\phi(\mathcal{L}_{\geq\delta+\delta'})\subseteq\mathcal{L}'_{\geq\delta'}$，因此这些集合

$$\mathcal{L}_0:=\mathcal{L}_{\geq\delta+\delta'}\cup\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{L}''_{\geq\delta+\delta'})),\qquad\mathcal{L}''_0:=\psi(\phi(\mathcal{L}_{\geq\delta+\delta'}))\cup(\mathcal{L}''_{\geq\delta+\delta'})$$

是良定义的。此外， $\psi\circ\phi$ 在 $\mathcal{L}_0$ 上是良定义的，并且 $\psi\circ\phi(\mathcal{L}_0)=\mathcal{L}''_0$。由于 $\psi\circ\phi$ 是单射，我们推出 $\Phi\colon\mathcal{L}_0\to\mathcal{L}''_0$, $\ell\mapsto\psi\circ\phi(\ell)$ 是一个双射，并且对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_0$,

$$d_\infty(\ell,\Phi(\ell))\leq d_\infty(\ell,\phi(\ell))+d_\infty(\phi(\ell),\psi(\phi(\ell)))\leq(\delta+\delta')/2.$$ □

给定 γ， $\gamma'\in\mathscr{S}$，如果 ϕ 是一个 δ-适配同构（相对于 $(\gamma,\ \gamma')$），即它是一个 δ-同构，并且 $\phi(\mathcal{L}_{\gamma,\ \geq\delta'})\subseteq\mathcal{L}'_{\gamma',}$ 且 $\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\gamma',\ \geq\delta'})\subseteq\mathcal{L}_\gamma$，我们就称之为 δ-适配同构。如果ϕ 是一个 δ-强适配同构（相对于 $(\gamma,\ \gamma')$），即它是一个 δ-适配同构，并且

$$\forall\ell,\ell'\in\mathcal{L}_{\gamma,\geq\delta'}\cup\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\gamma',\geq\delta'}),\qquad\ell\prec_\gamma\ell'\iff\phi(\ell)\prec_{\gamma'}\phi(\ell').$$

对于 $\mathcal{X}=(\gamma,\ \mathcal{L})$ 和 $\mathcal{X}'=(\gamma',\ \mathcal{L}')$，当 ϕ是一个关于 $(\gamma,\ \gamma')$、从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}'$ 的 δ-适配（分别为强适配）同构时，我们称 ϕ是一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'$ 的 δ-适配（分别为强适配）同构。

4.2 $\mathscr{R}_0$ 上的距离

由引理 4.1 可知 d 定义为

$$d(\mathcal{L},\mathcal{L}') := \inf\{\delta>0 : \text{there exists a } \delta\text{-isomorphism from } \mathcal{L} \text{ to } \mathcal{L}'\} \tag{7}$$

是 $\mathscr{L}^{lf}$ 上的一种距离。我们用它来定义 $\mathscr{R}_0$ 上的距离 $d_{\mathscr{R}_0}$：对于 $\mathscr{R}_0$ 中的 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})$ 和 $\mathcal{X}'=(\gamma',\mathcal{L}')$，

$$d_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X},\mathcal{X}') := \rho(\gamma,\gamma') + d(\mathcal{L},\mathcal{L}') + |t_{\mathcal{X}} - t_{\mathcal{X}'}| + \|\delta \mapsto (\omega_\delta(\mathcal{L}) - \omega_\delta(\mathcal{L}'))\|_{\infty,[0,1]}$$

以 $\mathcal{X}$ 为中心、半径为 r 的 $(\mathscr{R}_0, d_{\mathscr{R}_0})$ 球记作 $B_r(\mathcal{X})$。定义 $d_{\mathscr{R}_0}$ 时的最后两项看起来可能有些人为，但它们至关重要。项 $|t_{\mathcal{X}} - t_{\mathcal{X}'}|$ 可防止小环的总时间累积到 1 的量级（这样可避免 $\Xi(\mathcal{X}')$ 中的元素在 $\mathcal{X}'\to\mathcal{X}$ 处“卡住”）。如果从 $d_{\mathscr{R}_0}$ 的定义中删去这一项，映射 Ξ 将处处不连续（不过，若将其视为一个取值于非递减重参数化下的路径空间的映射，它仍可能连续）。至于涉及连续性模数的最后一项，它可以防止例如添加一个时间持续时间极短、但空间尺度宏大的单个环（极限 $\Xi(\mathcal{X}')$ 会“跳过”这样的环）。

由引理 4.5 和 4.7 可知，为了证明在 $d_{\mathscr{R}_0}$ 中的收敛，只需证明在由下式给出的较弱距离 $d'_{\mathscr{R}_0}$ 下收敛：

$$d'_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X},\mathcal{X}') := \rho(\gamma,\gamma') + d(\mathcal{L},\mathcal{L}'), \tag{8}$$

以获得 by f 以及 $\epsilon\mapsto\omega_\epsilon$ 和 $\epsilon\mapsto T_{\le\epsilon}$ 的一致有界性（在这些引理之前的式（10 ））在 0 处取值为 0 的函数。距离 $d'_{\mathscr{R}_0}$ 下的球记作 $B'_r(\mathcal{X})$。

另一方面，我们现在将证明：对于任意给定的 $\mathcal{X}=(\gamma,\ \mathcal{L})\in\mathcal{R}$，对于所有 $\epsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得任意一个与 $\mathcal{X}$的距离小于 δ 的 $\mathcal{X}'\in\mathcal{R}_0$，都存在一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'$的强适配同构。换言之，$d_{\mathscr{R}_0}$ 所诱导的拓扑，等于先验上较强的拓扑；后者是将式（7）中的“同构”替换为“强适配同构”得到的（但强适配同构的复合性质不好，这样修改后，三角不等式将不成立）。

注 4.2. 集合 $\mathscr{R}_0$ 是由$(\gamma,\mathcal{L})$（一条 SLE_2 路径与一个布朗环汤组成的有序对）生成的 σ-代数下的可测子集；从$(\mathscr{R}_0,\sigma(\mathscr{S}\times\mathscr{L}^{lf}))$ 到$(\mathscr{R}_0,d_{\mathscr{R}_0})$ 的恒等映射是可测的，证明这一点可作为关于点过程的练习。我们将看到$(\gamma,\mathcal{L})$ 以概率$1\in\mathscr{R}_0$，因此可以将其视为$(\mathscr{R}_0,d_{\mathscr{R}_0})$中的一个随机变量。

4.3 在较强拓扑下相等

如上所述，我们现在证明，收敛（相对于由δ-同构概念所诱导的距离）意味着相对于强适配同构概念的更强形式的收敛。

引理 4.3. 设 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}$。对于所有 $\epsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\mathcal{X})\in(0,\epsilon]$，使得对于所有$\mathcal{X}'=(\gamma',\mathcal{L}')\in B'_\delta(\mathcal{X})$，从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{X}'$的所有 δ-同构 ϕ都会诱导出一个 ϵ-适配同构（相对于(γ,γ')）。

证明。设 $\epsilon>0$和 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}$。对于 $\ell\in\mathcal{L}_\gamma$，令 $\delta(\gamma,\ell)>0$，使得对于所有满足与 (γ,ℓ) 的 $(\rho\times d_\infty)$-距离小于或等于 $\delta(\gamma,\ell)$ 的 $(\gamma',\ell')\in\mathscr{S}\times\mathscr{L}$，都有 $\ell'\in\mathscr{L}_{\gamma'}$。根据定理 3.2 的第 1 项以及 $\mathscr{R}$ 的定义中的假设 (v)，这样的 $\delta(\gamma,\ell)$ 存在。

对于 $\ell\in\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_\gamma$，$(\gamma,\ell)\notin\mathscr{L}_0$。由于 $\mathscr{L}_0$ 在 $\mathscr{S}\times\mathscr{L}$中是闭的（引理 3.5），存在 $\delta'(\gamma,\ell)>0$，使得对于所有满足与 (γ,ℓ) 的 $(\rho\times d_\infty)$-距离小于或等于 $\delta'(\gamma,\ell)$ 的 $(\gamma',\ell')\in\mathscr{S}\times\mathscr{L}$，都有 $\ell'\notin\mathscr{L}_{\gamma'}$。

Let

$$\delta := \epsilon\wedge\min\{\delta(\gamma,\ell)/2 : \ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\epsilon}\}\wedge\min\{\delta'(\gamma,\ell) : \ell\in\mathcal{L}_{\ge\epsilon/2}\setminus\mathcal{L}_\gamma\}>0.$$

令 ϕ 为从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'=(\gamma',\mathcal{L}')\in B_\delta(\mathcal{X})$ 的任意 δ-同构。由于 ϕ 诱导了一个 ϵ-同构，我们只需检查额外条件 $\phi(\mathcal{L}_{\gamma,\ge\epsilon})\subseteq\mathcal{L}'_{\gamma'}$ 和 $\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\gamma',\ge\epsilon})\subseteq\mathcal{L}_\gamma$。对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\epsilon}$, $\rho(\gamma,\gamma')+d_\infty(\ell,\phi(\ell))\le\delta+\delta/2\le\delta(\gamma,\ell)$，因此 $\phi(\ell)\in\mathscr{L}_{\gamma'}$。这证明了第一个包含。对于第二个包含，令 $\ell'\in\mathcal{L}'_{\gamma',\ge\epsilon}$。由于 ϕ 诱导了一个 ϵ-同构，$\ell:=\phi^{-1}(\ell')$ 定义良好，且 $d_\infty(\ell,\ell')\le\epsilon/2$。特别地，$t_\ell\ge t_{\ell'}-d_\infty(\ell,\ell')\ge\epsilon$，因此 $\ell\in\mathcal{L}_{\ge\epsilon/2}$。反设 $\ell\notin\mathcal{L}_\gamma$。那么

$$(\rho\times d_\infty)((\gamma,\ell),(\gamma',\ell'))\le d'_{\mathcal{R}_0}(\mathcal{X},\mathcal{X}')\le\delta\le\delta'(\gamma,\ell),$$

根据 $\delta'(\gamma,\ \ell)$ 的构造可知 $\ell'\notin\mathscr{L}_{\gamma'}$，这就产生了矛盾。 □

引理4.4. 设 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}$。对于所有 $\epsilon>0$，存在 $\eta=\eta(\mathcal{X})\in(0,\epsilon]$，使得对于所有$\mathcal{X}'=(\gamma',\mathcal{L}')\in B'_\eta(\mathcal{X})$，所有从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'$ 的 η-同构 ϕ 都会诱导出一个 ϵ-强适配同构（相对于 (γ,γ')）。

证明。 固定 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$ 和 $\epsilon>0$。令 $(\ell_i)^{i\in\{1,\dots,k\}}$ 为有限全序集合 $\mathcal{L}_{\gamma,\geq\epsilon}$ 的递增枚举。定义

$$\eta_1 \coloneqq \min\{\sigma_{\ell_{i+1}}-\sigma_{\ell_i} : i\in\{0,\dots,k\}\}>0,$$

其中形式上 $\sigma_{\ell_0}\coloneqq 0$ 且 $\sigma_{\ell_{k+1}}\coloneqq t_\gamma$。回忆一下，$(\gamma,\ell)\mapsto\sigma_{\gamma,\ell}$ 在 $\mathscr{L}_{reg}$ 上连续，且对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_\gamma$，$(\gamma,\ell)\in\mathscr{L}_{reg}$。因此，对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_\gamma$，存在 $\eta_\ell>0$，使得对于满足 $(\rho\times d_\infty)((\gamma',\ell'),(\gamma,\ell))<\eta_\ell$ 的所有 (γ',ℓ')，都有 $|\sigma_{\gamma,\ell}-\sigma_{\gamma',\ell'}|<\eta_1/2$。令 $\eta_2\coloneqq\min\{\eta_\ell:\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\geq\epsilon}\}$，和$\eta=\eta_2\wedge\delta$，其中 $\delta>0$ 由将引理 4.3 应用于 $\mathcal{X}$和 ϵ得到。

设 $\mathcal{X}'=(\gamma',\mathcal{L}')\in B'_\eta(\mathcal{X})$，且 ϕ是一个从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{X}'$的 η-同构。由于 $\eta\leq\delta$，ϕ诱导出一个 δ-同构，且该同构是 δ-适配的。由于 $\delta<\epsilon$，由 ϕ 诱导的 ϵ-同构也同样是 ϵ-适配的。此外，对所有$\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\geq\epsilon}$，都有

$$(\rho\times d_\infty)((\gamma',\phi(\ell)),(\gamma,\ell))\leq d'_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X},\mathcal{X}')<\eta_2\leq\eta_\ell,\qquad\text{thus}\qquad|\sigma_{\gamma,\ell}-\sigma_{\gamma',\phi(\ell)}|\leq\eta_1/2.$$

因此，对于 $\ell_1,\ell_2\in\mathcal{L}_{\gamma,\geq\epsilon}$，若 $\ell_1\succ_\gamma\ell_2$，

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma',\phi(\ell_1)}-\sigma_{\gamma',\phi(\ell_2)}&\geq\sigma_{\gamma,\ell_1}-\sigma_{\gamma,\ell_2}-|\sigma_{\gamma',\phi(\ell_1)}-\sigma_{\gamma,\ell_1}|-|\sigma_{\gamma',\phi(\ell_2)}-\sigma_{\gamma,\ell_2}|\\&>\eta-\eta/2-\eta/2=0.\end{aligned}$$

因此，$\sigma_{\gamma',\,\phi(\ell_1)}>\sigma_{\gamma',\,\phi(\ell_2)}$，这意味着 $\phi(\ell_1)\succ_{\gamma'}\phi(\ell_2)$。我们已经证明了如下蕴含关系

$$\ell_1\succ_\gamma\ell_2\implies\phi(\ell_1)\succ_{\gamma'}\phi(\ell_2).\tag{9}$$

由逆否命题可知，反向蕴含为

$$\ell_1\succeq_\gamma\ell_2\implies\phi(\ell_1)\succeq_{\gamma'}\phi(\ell_2).$$

这是成立的，因为 $\prec_\gamma$ 是一个全序严格序（回忆一下 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$）。事实上，

$$\ell_1\succeq_\gamma\ell_2\iff(\ell_1\succ_\gamma\ell_2\text{ or }\ell_1=\ell_2)\implies(\phi(\ell_1)\succ_{\gamma'},\phi(\ell_2)\text{ or }\phi(\ell_1)=\phi(\ell_2))\implies\phi(\ell_1)\succeq_{\gamma'},\phi(\ell_2).$$

因此，由 ϕ 诱导的 ϵ-适配同构是 ϵ-强适配的。 □

考虑到引理 4.4，对于 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$，我们将取 $\eta=\eta(\mathcal{X}):(0,\infty)\to(0,\infty)$，使其满足 $\eta(\delta)<\delta$ 对所有 $\delta>0$成立，并且任意 $\eta(\delta)$-同构都 $\mathcal{X}$是 δ-强适配的。

4.4 有界性假设下较弱距离的等价性

在下文中，对于 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}_0$ 和 $\epsilon>0$，我们记

$$T_{\leq\epsilon}(\mathcal{X})\coloneqq\sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\leq\epsilon}}t_\ell.\tag{10}$$

引理 *4.5.* 对于 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$，令 $K_f\coloneqq\{\mathcal{X}\in\mathscr{R}_0:\forall\epsilon>0,\ T_{\leq\epsilon}(\mathcal{X})\leq f(\epsilon)\}$。对于$r>0$ 和 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$，令 $B_r(\mathcal{X})$ 为 $\mathscr{R}_0$ 中以 $\mathcal{X}$ 为中心、半径为 r 的球，其中距离为$\rho(\gamma,\gamma')+d(\mathcal{L},\mathcal{L}')+d_{\infty,[0,1]}(\omega(\mathcal{L})\ \omega(\mathcal{L}'))$。

那么，对所有 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$，

◇ 对于所有满足 $f(0)=0$ 的连续函数 f，以及所有 $\epsilon>0$，都存在 $\delta>0$（其取决于~ ϵ、f 和 $\mathcal{X}$），使得 $B_\delta(\mathcal{X})\cap K_f\subseteq B_\epsilon(\mathcal{X})$。◇ 存在连续函数 $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$（其取决于 $\mathcal{X}$），使得 $f_\epsilon(\epsilon)\underset{\epsilon\to0}{\longrightarrow}0$，并且对于所有 $\mathcal{X}'\in\mathscr{R}_0$，若存在一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'$ 的 ϵ-适配同构 ϕ，则 $\mathcal{X}'\in K_{f_\epsilon}$。特别地，$B_{\eta(\epsilon)}(\mathcal{X})\subseteq K_{f_\epsilon}$。

注记 4.6. 另一方面，甚至不存在任何 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}_0$，$\epsilon>0$ 和 $f<\infty$ 使得~ $B_{\eta(\epsilon)}(\mathcal{X})\subset K_f$。事实上，我们总能轻易找到 $\mathcal{X}'$，使其与 $\mathcal{X}$的距离小于 ϵ，并且小环累积的总时间大于$\|f\|_{\infty,\,[0,1]}$。

引理的证明 4.5。对于第一点，固定 $\epsilon > 0$。令 $\delta_0 = \epsilon/4$，令 $\delta_1 > 0$ 使得 $T_{\le\delta_1}(\mathcal{X}) \le \epsilon/4$（这存在，因为 $t_{\mathcal{X}} < \infty$），令 $\delta_2 > 0$ 使得 $f(\delta_2) \le \epsilon/4$，令 ϵ' 为 $\min(\delta_1, \delta_2)$，令 $\delta_3 = \epsilon/(4\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\epsilon'})$，并令 δ 为 $\min(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$。令 $\eta > 0$ 使得任意 η-同构都是 δ 适配的。令 $\mathcal{X}' \in B_\eta(\mathcal{X}) \cap K_f$，并令 ϕ 为一个 η-同构。那么，

$$\begin{aligned}|t_{\mathcal{X}'} - t_{\mathcal{X}}| &\le \Big|\sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\epsilon'}} (t_\ell - t_{\phi(\ell)})\Big| + \Big|\sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\le\epsilon'}} t_\ell\Big| + \Big|\sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\gamma',\le\epsilon'}} t_\ell\Big| \\ &\le \delta_3\cdot\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\epsilon'} + T_{\le\delta_1}(\mathcal{X}) + T_{\le\delta_2}(\mathcal{X}') \le 3\epsilon/4.\end{aligned}$$

Since $\delta \le \delta_0 = \epsilon/4$, $\rho(\gamma, \gamma') + d(\mathcal{L}, \mathcal{L}') + d_{\infty,[0,1]}(\omega(\mathcal{L}), \omega(\mathcal{L}')) \le \epsilon/4$，因此 $d_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \le \epsilon$，其 ch prov是第一个点。

对于第二个点，令 $\delta : (0, 1] \to (0, 1]$ 为 ϵ 的连续非递减函数，它随 ϵ 趋于 0，但趋于得足够缓慢，使得 $\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta(\epsilon)} \le \epsilon^{-\frac{1}{2}}$。将 δ 替换为 $\epsilon \mapsto \max(\epsilon, \delta(\epsilon))$ 后，我们还可以进一步假设 $\delta(\epsilon) \ge \epsilon$。固定 $T : [0,\infty] \to [0,\infty)$，使得 $T(0) = 0$，T 连续，并且对所有 $u \ge 0$ 都有 $T(u) \ge T_{\le u}(\mathcal{X})$（例如 $T(u) = \frac{1}{u}\int_u^{2u} T_{\le s}(\mathcal{X})\,\mathrm{d}s$）。函数 f_ϵ 定义如下

$$f_\epsilon(u) = \epsilon + \sqrt{\epsilon} + T(u) + u/\sqrt{\epsilon}.$$

L以及 $\epsilon > 0$ 和 $\delta \in (0, \epsilon)$，使得所有 δ-同构都适用 ϵ。令 $\mathcal{X}'$ 满足存在一个 ϵ-适用的 ed isom同构 ϕ。由于 $\delta \ge \epsilon$，ϕ 也适用 δ。对于 $u > 0$,

$$\begin{aligned}&T_{\le u}(\mathcal{X}') = t_{\mathcal{X}'} - \sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\gamma',\ge u}} t_{\ell'} \\ &= t_{\mathcal{X}'} - t_{\mathcal{X}} + \sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\le\delta}} t_\ell + \sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}} (t_\ell - t_{\phi(\ell)}) + \sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}} t_{\phi(\ell)} - \sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\gamma',\ge u}} t_{\ell'} \\ &\le \epsilon + T_{\le\delta}(\mathcal{X}) + \epsilon\cdot\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta} + \sum_{\ell'\in\phi(\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta})\setminus\mathcal{L}'_{\gamma',\ge u}} t_{\ell'} \\ &\le \epsilon + T_{\le\delta}(\mathcal{X}) + \epsilon\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta} + u\cdot\#\phi(\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}) \quad \text{since } \phi(\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta})\setminus\mathcal{L}'_{\gamma',\ge u} \subseteq \mathcal{L}'_{\gamma'}\setminus\mathcal{L}'_{\gamma',\ge u} = \mathcal{L}'_{\gamma',<u} \\ &\le f_\epsilon(u).\end{aligned}$$

包含关系 $\phi(\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}) \subseteq \mathcal{L}'_{\gamma'}$ 源于 ϕ 适用 δ这一事实。 □

引理 4.7。对于函数 $f : [0,1) \to [0,\infty)$，令 $J_f := \{\mathcal{X} = (\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R}_0 : \forall\epsilon > 0,\ \omega_\epsilon(\mathcal{L}) \le f(\epsilon)\}$。对于 $r > 0$ 和 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}$，回忆一下，$B'_r(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{R}_0$ 中的球，其半径为 r，以 $\mathcal{X}$ 为中心，采用 (8) 中的 ~距离 $\rho(\gamma, \gamma') + d(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$；并令 $B_r(\mathcal{X})$ 如引理 4.5 中所示。那么，对于所有 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}$、所有满足 $f(0) = 0$ 的连续函数 f 以及所有 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$（其取决于 ϵ、f 和 ~$\mathcal{X}$），使得 $B'_\delta(\mathcal{X}) \cap J_f \subseteq B_\epsilon(\mathcal{X})$。

证明。固定 $\epsilon > 0$。由等度连续条件 (ii)，存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $\omega_{\delta_1}(\mathcal{L}) < 2\epsilon/3$。由 f的连续性，且由于 $f(0) = 0$，存在 $\delta_2 > 0$ 使得 $f(\delta_2) < 2\epsilon/3$。令 $\delta := \min(\epsilon/3, \delta_1, \delta_2)$。令 $t \in [0,1]$ 和 $\mathcal{X}' = (\gamma', \mathcal{L}') \in B'_\delta(\mathcal{X}) \cap J_f$，并令 ϕ 为一个 δ-同构。

首先，假设存在 $\ell \in \mathcal{L}_{\ge\delta}$ 使得 $\omega_t(\mathcal{L}) = \omega_t(\ell)$。于是令 $\ell' = \phi(\ell)$。那么，

$$\omega_t(\mathcal{L}') \ge \omega_t(\ell') \ge \omega_t(\ell) - 2d_\infty(\ell, \ell') > \omega_t(\mathcal{L}) - 2\delta \ge \omega_t(\mathcal{L}) - 2\epsilon/3.$$

如果不存在这样的 ℓ，那么 $\omega_t(\mathcal{L}) = \omega_t(\mathcal{L}_{<\delta})$，由此可得

$$\omega_t(\mathcal{L}) - \omega_t(\mathcal{L}') \le \omega_t(\mathcal{L}) = \omega_t(\mathcal{L}_{<\delta}) = \omega_\delta(\mathcal{L}_{<\delta}) \le \omega_\delta(\mathcal{L}) < 2\epsilon/3.$$

两种情况下，我们都可得 $\omega_t(\mathcal{L}) - \omega_t(\mathcal{L}') \le \epsilon$。为证明反向不等式，先假设存在$\ell' \in \mathcal{L}'_{\ge\delta}$ 使得 $\omega_t(\mathcal{L}') = \omega_t(\ell')$，并令 $\ell = \phi^{-1}(\ell')$。与上面类似，我们看到 $\omega_t(\mathcal{L}) \ge \omega_t(\mathcal{L}') - \epsilon$。如果不存在这样的 ℓ'，那么 $\omega_t(\mathcal{L}') = \omega_t(\mathcal{L}'_{<\delta})$，由此可得

$$\omega_t(\mathcal{L}') - \omega_t(\mathcal{L}) \le \omega_t(\mathcal{L}') = \omega_t(\mathcal{L}'_{<\delta}) = \omega_\delta(\mathcal{L}'_{<\delta}) \le \omega_\delta(\mathcal{L}') \le f(\delta) \le 2\epsilon/3.$$

因此，$|\omega_t(\mathcal{L}') - \omega_t(\mathcal{L})| \le 2\epsilon/3$。由于 $\rho(\gamma, \gamma') + d(\mathcal{L}, \mathcal{L}') < \delta \le \epsilon/3$，我们确实可以推得 ~$\mathcal{X}' \in B_\epsilon(\mathcal{X})$。 □

4.5 首达时刻的连续性，Ξ的局部等度连续性

引理 4.8。对于所有 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}$，对于所有 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于所有 $\mathcal{X}'\in\mathscr{R}_0$ 以及从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'$的 δ-强适配同构 ϕ，对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ \geq\delta}$，

$$|T_\ell(\mathcal{X})-T_{\phi(\ell)}(\mathcal{X}')|\leq\epsilon.$$

这个引理背后的想法是，当 $\mathcal{X}'$收敛到 $\mathcal{X}$时，路径与环之间的交点在极限中不会消失，因此得到不等式 $\liminf T_\ell(\mathcal{X}')\geq T_{\phi(\ell)}(\mathcal{X})$。然而，由于我们还对总时间有所控制（即 $t_{\mathcal{X}'}\to t_{\mathcal{X}}$），前述不等式实际上必须是锐利的：任何严格不等式都会导致 $t_{\mathcal{X}}$ 与 $t_{\mathcal{X}'}$明显不同。

证明。首先，注意到

$$\delta\cdot\#\mathcal{L}_{\gamma,\geq\delta}\leq\sum_{\ell\in\mathcal{L}_\gamma}(t_\ell\wedge\delta)\xrightarrow[\delta\to0]{}0,$$

由控制收敛定理可知，因为 $t_{\mathcal{X}}<\infty$。因此，对于所有 $\epsilon>0$，当 $\delta>0$ 足够小时，有

$$T_{\leq\delta}(\mathcal{X})+\frac{\delta}{2}\cdot\#\mathcal{L}_{\gamma,\geq\delta}+\delta+f_\delta(\delta)\leq\epsilon,$$

其中 f_δ 是引理 4.5第二点中的函数。令 $\mathcal{X}'\in\mathscr{R}_0$，并令 ϕ 为一个 δ-适配同构。由引理 4.5，$T_{\leq\delta}(\mathcal{X}')\leq f_\delta(\delta)$ 以及 $T_{\leq\delta}(\mathcal{X})\leq f_\delta(\delta)$。

一方面，对于任意满足 $t_{\ell'}\geq\delta$ 的 $\ell'\prec\ell$，有 $\phi(\ell')\in\mathcal{L}'_{\prec\phi(\ell)}$，因此

$$\begin{aligned}T_\ell(\mathcal{X})-T_{\phi(\ell)}(\mathcal{X}')&=\sum_{\tilde\ell\in\mathcal{L}_{\prec\ell,<\delta}}t_{\tilde\ell}+\sum_{\tilde\ell\in\mathcal{L}_{\prec\ell,\geq\delta}}t_{\tilde\ell}-\sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\prec\phi(\ell)}}t_{\ell'}\\&\leq T_{\leq\delta}(\mathcal{X})+\sum_{\tilde\ell\prec\ell,t_{\tilde\ell}>\delta}(t_{\tilde\ell}-t_{\phi(\tilde\ell)})\\&\leq T_{\leq\delta}(\mathcal{X})+\frac{\delta}{2}\#\mathcal{L}_{\gamma,>\delta}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}T_{\phi(\ell)}(\mathcal{X}')-T_\ell(\mathcal{X})&=t_{\mathcal{X}'}-t_{\mathcal{X}}-\sum_{\tilde\ell\in\mathcal{L}_{\succeq\ell}}t_{\tilde\ell}+\sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\succeq\phi(\ell),\geq\delta}}t_{\ell'}+\sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\succeq\phi(\ell),\leq\delta}}t_{\ell'}\\&\leq\delta+\sum_{\ell'\in\mathcal{L}'_{\succeq\phi(\ell),\geq\delta}}(t_{\ell'}-t_{\phi^{-1}(\ell')})+f_\delta(\delta)\qquad\leq\delta+\frac{\delta}{2}\#\mathcal{L}_{\gamma,\leq\delta}+f_\delta(\delta).\end{aligned}$$

因此 $|T_\ell(\mathcal{X})-T_{\phi(\ell)}(\mathcal{X}')|\leq\delta+T_{\leq\delta}(\mathcal{X})+\frac{\delta}{2}\#\mathcal{L}_{\gamma,\ \leq\delta}+f_\delta(\delta)\leq\epsilon$。 □

引理4.9。回顾 ω^1 在 (3)中的定义。

设 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$。那么，对于所有 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于所有 $\mathcal{X}'\in\mathscr{R}_0$，若存在一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'$ 的 δ- 强适配同构 ϕ，则 $\omega^1_\delta(\mathcal{X}')<\epsilon$。

证明。设 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$ 和 $\epsilon>0$。设 $\delta_1>0$，使得 $\omega^1_{3\delta_1/2}(\mathcal{X})<\epsilon/2$；由 $\sigma_{\mathcal{L}}$ 的稠密性可知其存在。取 $\delta\in(0,\delta_1)$，使得对于所有 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ \geq\delta_1}$，以及所有与 (γ,ℓ) 的距离小于 δ 的 (γ',ℓ')，均有 $|\sigma_{\gamma',\ell'}-\sigma_{\gamma,\ell}|<\epsilon/2$。$\delta$ 的存在性源于以下事实：对于所有 $\ell\in\mathcal{L}$，$(\gamma,\ell)\in\mathscr{L}_{reg}$（根据 $\mathscr{R}$ 的定义），且函数 $(\gamma',\ell')\in\mathscr{S}\times\mathscr{L}\mapsto\sigma_{\gamma',\ell'}$ 在 $\mathscr{L}_{reg}$ 上连续（定理 3.2）。

那么，对于所有满足存在从 $\mathcal{X}$ 到$\mathcal{X}'$的 δ-强适配同构 ϕ 的 $\mathcal{X}'\in\mathscr{R}_0$，设$(\ell'_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ 为$\mathcal{L}'_\gamma$的递增枚举，$_{\geq\delta}$ 和 $\ell_i=\phi^{-1}(\ell'_i)$。由于$\mathcal{L}_{\gamma,\ \geq3\delta/2}\subseteq\phi^{-1}(\mathcal{L}'_{\gamma',\ \geq\delta})=\{\ell_i:\ i\in\{1,\dots,k\}\}$，

$$\omega^1_\delta(\gamma',\mathcal{L}')=\max\{\sigma_{\gamma',\ell'_{i+1}}-\sigma_{\gamma',\ell'_{i+1}}\}\leq\epsilon/2+\max\{\sigma_{\gamma,\ell_{i+1}}-\sigma_{\gamma,\ell_{i+1}}\}<\epsilon/2+\omega^1_{3\delta/2}(\gamma,\mathcal{L})<\epsilon.$$ □

命题4.10。对于所有 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$，对于所有 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于所有 $\lambda>0$ 和$\mathcal{X}'=(\gamma',\mathcal{L}')\in\mathscr{R}_0$ 以及从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{X}'$的 δ-强适配同构 ϕ，对于所有$B\in\mathcal{B}_{\gamma',\ \mathcal{L}'}$，$\omega_\delta(\gamma'\circ\sigma'_{\mathcal{X}',\ \lambda})$ 和 $\omega_\delta(\Xi(\gamma',\mathcal{L}',\lambda,B))$ 均小于 ϵ。

证明。令 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}$ 和 $\epsilon>0$。令 $\delta_0>0$ 使得 $\omega_{\delta_0}(\gamma)<\epsilon/6$。令 $\delta_1>0$ 使得对于所有 δ_1-强适配同构 ϕ从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{X}'$，$\omega^1_{\delta_1}(\mathcal{X}')<\eta$，其存在性由引理4.9推出。令 $\delta\leq\min(\epsilon/8,\delta_1)$ 使得 $\rho(\gamma,\gamma')\leq\delta\implies d_\infty(\gamma,\gamma')<\epsilon/6$ 且 $\omega_{2\delta}(\mathcal{L})<\epsilon/8$。

那么，如果存在一个 δ-强适配同构 ϕ 从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}'=(\gamma',\ \mathcal{L}')$，

$$\omega_\delta(\gamma'\circ\sigma_{\mathcal{X}',\lambda})\le\omega_{\omega_\delta(\sigma_{\mathcal{X}',\lambda})}(\gamma')\le\omega_{\omega_\delta^1(\mathcal{X}')}(\gamma')\le\omega_{\omega_\delta^1(\mathcal{X}')}(\gamma)+2d_\infty(\gamma,\gamma')\le\omega_{\delta_0}(\gamma)+\epsilon/3\le\epsilon/2,\ (11)$$

其中第二个不等式来自引理 2.3 （公式（3））。

此外，$\omega_\delta^l(\mathcal{L}')\le\omega_{2\delta}(\mathcal{L}')\le\omega_{2\delta}(\mathcal{L})+d_{\mathcal{R}_0}(\mathcal{X},\ \mathcal{X}')\le\epsilon/4$。将其与（11）和命题 2.4结合，我们得到 $\omega_\delta(\Xi(\gamma',\ \mathcal{L}',\ \lambda,\ B))<\epsilon$，从而证明完毕。 □

4.6 附着映射的连续性

定理 4.11。映射 Ξ 在 $\mathscr{R}\times\{0\}$上连续，具体而言：对于所有 $\mathcal{X}\in\mathscr{R}$，对于所有 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall(\mathcal{X}',\lambda)\in\mathscr{R}',\qquad d_{\mathcal{R}_0}(\mathcal{X},\mathcal{X}')\le\delta\ and\ \lambda\le\delta\implies\forall B\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}'},\ d_\infty(\Xi(\mathcal{X}',\lambda,B),\Xi(\mathcal{X}))<\epsilon.$$

注记*4.12.* 应当可以将命题 *2.4* 扩展到更大的空间 $\mathscr{R}_0\times[0,\infty)$（即当 $\lambda=0$时去除条件（*iv*）），代价是在结果中将“连续”替换为“*c`adl`ag*”。届时，定理 *4.11* 中的连续性性质也应当可以扩展到满足（*iii*）和（*v*）但不一定满足（*iv*）的对象对，前提是将 $\mathcal{C}([0,\infty)\ \mathbb{R}^2)$ 上的一致拓扑替换为空间 *c`adl`ag* 函数上的适当斯科罗霍德型拓扑。总而言之：（*iii*）确保附着所得路径的唯一性，（*iv*）确保我们以无穷速率跟随 γ 时该路径的连续性，而（*v*）确保附着映射本身是连续的。

定理 4.11 的证明。设 $\mathcal{X}=(\gamma,\mathcal{L})\in\mathscr{R}$，$X=\Xi(\mathcal{X})$，且 $\epsilon>0$。由引理4.4，只需证明存在 $\delta>0$，使得对于所有满足 $\lambda<\delta$ 的 $(\gamma',\mathcal{L}',\lambda)\in\mathscr{R}'$，如果存在一个 δ-强适配同构 ϕ，将 $\mathcal{X}$ 映到 $\mathcal{X}':=(\gamma',\mathcal{L}')$，那么对于所有 $B\in\mathcal{B}_{\gamma',\mathcal{L}'}$,$d_\infty(\Xi(\gamma',\mathcal{L}',\lambda,B)\ \Xi(\gamma,\mathcal{L}))<\epsilon$。

取 $\delta_0\in(0,\epsilon/4)$，使得 $\omega_{6\delta_0}(\mathcal{L})<\epsilon/8$，并且对于所有将 $\mathcal{X}$ 映到 $\mathcal{X}'$ 的 δ_0-强适配同构ϕ，有 $\omega_{3\delta_0}(X')\le\epsilon/4$，其中 $X'=\Xi(\mathcal{X}',\lambda,B)$（特别地，由于我们可以取 $\mathcal{X}':=\mathcal{X}$ 和 $\phi:=\mathrm{id}$，因此 $\omega_{3\delta_0}(X)\le\epsilon/4$）。$\delta_0$ 的存在性由等度连续条件和命题4.10保证。

令 $\delta_1\in(0,\delta_0)$，使得对所有 $t\in[0,t_{\mathcal{X}}=t_X]$，都存在 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ \ge\delta_1}$ 以及 $s\in(T_\ell,T_\ell+t_\ell)$，使得 $|s-t|\le\delta_0$。由 δ_1 在 $\mathcal{T}$中的稠密性可知 $[0,t_\gamma]$ (引理 2.2)。

令 $\delta\in(0,\delta_1)$，使得 $\delta<\delta_0/(2t_\gamma)$，并且对于所有从 $\mathcal{X}$ 到$\mathcal{X}'$的 δ-强适配同构 ϕ，以及所有 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta_1}$，都有 $|T_\ell-T_{\phi(\ell)}|\le\delta_0$ 且 $|\theta_\ell-\theta_{\phi(\ell)}|\le\delta_0$。由引理 4.8和定理 3.2 （$(\gamma,\ell)\mapsto\theta_{\gamma,\ell}$ 的连续性）可知这是可能的。

那么，对于所有从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{X}'$的 δ-强适配同构 ϕ，以及所有 $t\in[0,t_X]$，令 $\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta_1}$和 $s\in(T_\ell,T_\ell+t_\ell)$，使得 $|s-t|\le\delta_0$，令 $\ell':=\phi(\ell)$，并令

$$s'=(s-T_\ell+T_{\ell'})\wedge(T_{\ell'}+t_{\ell'})\in[T_{\ell'},T_{\ell'}+t_{\ell'}].$$

首先，备注

$$|X(t)-X(s)|\le\omega_{\delta_0}(X)\le\epsilon/4.$$

此外，$X(s)=\ell(\{\mathrm{v4},\ \{\mathrm{v7},\ _\ell t_\ell)$ 和 $X'(s')=\ell'(\{\mathrm{v14},\ \{\mathrm{v17},\ _{\ell'}t_{\ell'})$。~令 ℓ 为 ℓ 的 t_ℓ-周期延拓，并注意到

$$X(s)=\ell(s-T_\ell-\theta_{\gamma,\ell}+\mathbb{1}_{s-T_\ell\le\theta_{\gamma,\ell}}t_\ell)=\tilde{\ell}(s-T_\ell-\theta_{\gamma,\ell}+\mathbb{1}_{s'-T'_{\ell'}\le\theta_{\gamma',\ell'}}t_\ell).$$

因此，

$$\begin{aligned}|X(s)-X'(s')|&\le\omega^l_{|s'-s|+|\theta_{\gamma,\ell}-\theta_{\gamma',\ell'}|+|t_\ell-t_{\ell'}|}(\ell)+\|\ell'-\tilde{\ell}\|_{\infty,[0,t_{\ell'}]}\\&\le2\omega^l_{|s'-s|+|\theta_{\gamma,\ell}-\theta_{\gamma',\ell'}|+|t_\ell-t_{\ell'}|}(\ell)+d_\infty(\ell',\ell)\le2\omega_{4\delta_0+2\delta}(\mathcal{L})+\delta\le\epsilon/2.\end{aligned}$$

此外，$|s-s'|\le\delta_0+\delta/2<2\delta_0$：要么 $s'=s-T_\ell+T_{\ell'}$，此时 $|s'-s|=|T_{\ell'}-T_\ell|\le\delta_0$；要么 $s'=T_{\ell'}+t_{\ell'}$，这仅当 $T_{\ell'}+t_{\ell'}\le s-T_\ell+T_{\ell'}$时才会发生，即 $s\ge T_\ell+t_{\ell'}$。在这种情况下，$s\in[T_\ell+t_{\ell'},T_\ell+t_\ell]$，因此 $s-s'\in[T_\ell-T_{\ell'},T_\ell-T_{\ell'}+t_\ell-t_{\ell'}]$，进而 $|s-s'|\le|T_{\ell'}-T_\ell|+|t_{\ell'}-t_\ell|\le\delta_0+\delta/2$。由此可得 $|t-s'|\le3\delta_0$。由于 $\omega_{3\delta_0}(X')\le\epsilon/4$，

$$|X'(s')-X'(t)|\le\epsilon/4,\qquad\text{thus}\qquad|X(t)-X'(t)|\le\epsilon.$$

因此，$\|X-X'\|_{\infty,\ [0,t_X]}\le\epsilon$。由于 X' 在 X 附近一致连续，且当 $(\gamma',\ \mathcal{X}',\ \lambda)$ 在 $\mathcal{R}'$中趋近于 $(\gamma,\ \mathcal{X},\ 0)$ 时，$t_{X'}=t_{\mathcal{X}'}$趋近于 $t_X=t_{\mathcal{X}}$，因此足以得出结论。

□

5 概率方面：$(\gamma,\ \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$ 及固定格点近似

5.1 记号与预备性质

下文中，我们固定一个适当的单连通平面区域 D，满足 $0 \in D$。我们回顾一下，$\mu^{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}$ 在 D 上强度为 1 的、以根为起点且定向的布朗环汤的概率分布。全平面布朗环汤记作 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$。我们还回顾一下，$\mu^{\gamma}$ 是 γ 从 D 的边界到 0 的径向 SLE_2，沿时间反向运行，而 $\mathcal{X}:=(\gamma,\ \mathcal{L}) \sim \mu^{\gamma} \otimes \mu^{\mathcal{L}}$。

令 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 为正方格上的、强度为 1 的有根定向随机游走环汤。对于整数 n，令 $\mathbb{L}^{nD}$ 为 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 的子集，它由边全部包含在 nD 内的环组成。应当理解，对于 $n \neq n'$，集合 $\mathbb{L}^{nD}$ 和 $\mathbb{L}^{n'D}$ 并非来自同一个全格点环汤 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$，而是来自它的两个副本，这两个副本可能以非平凡的方式耦合（尤其是在我们希望考虑重标度后的依概率收敛时，如 $n \to \infty$）。我们还令 γ^{nD} 为正方格上从 0 到 ∂D 的环擦随机游走。始终默认 γ^{nD} 和 $\mathbb{L}^{nD}$ 相互独立。γ^{nD} 以及 $\mathbb{L}^{nD}$ 的元素都可以被视为以单位速度参数化的连续曲线，或者视为它们在整数时刻的取值所组成的有限序列。给定一个整数 n，我们将考虑标度函数

$$\begin{array}{rccc} \phi_n^*: & \mathscr{S} & \to & \mathscr{S}, \\ & \mathsf{S} & \mapsto & n^{-1}\mathsf{S}(c_* n^{\frac{5}{4}}\ \cdot\ ) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi_n: & \mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2) & \to & \mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2) \\ & \mathsf{L} & \mapsto & n^{-1}\mathsf{L}(2n^2\ \cdot\ ) \end{array},$$

其中 $c_* > 0$ 是一个普适常数，其定义为满足以下性质的常数：$\phi_n^*(\gamma^{nD})$在 ρ-距离下向 γ 依分布收敛（回想一下，此处 γ 是按其闵可夫斯基含量或“自然参数化”进行参数化的）。接着，我们定义

$$\mathcal{X}^n := (\phi_n^*(\gamma^{nD}), \phi_n(\mathbb{L}^{nD})) \qquad \text{and} \qquad \lambda_n := \frac{c_*}{2} n^{-\frac{3}{4}}.$$

注意，当 $n \to \infty$时，$\lambda_n \to 0$。

给定 $\mathcal{X} = (\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{S} \times \mathscr{L}^{lf}$和 $a > 0$，令 $a \cdot \mathcal{X} := (a\gamma, \{a\ell:\ \ell \in \mathcal{L}\})$。那么，$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ 与 $\mathcal{B}_{a\cdot\mathcal{X}}$之间存在一个典范双射；若将 $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ 与其在 $\mathcal{B}_{a\cdot\mathcal{X}}$中的对应元素等同，则映射 Ξ 与乘以 a可交换，即

$$\Xi(a \cdot \mathcal{X}, \lambda, B) = a\Xi(\mathcal{X}, \lambda, B). \tag{12}$$

此外，对于 $c > 0$，若 $S_c: \mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2) \to \mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2)$ 是算子 $f \mapsto (t \mapsto f(ct))$，且 $S_c(\mathcal{X}) := (S_c(\gamma)\ S_c(\mathcal{L}) := \{S_c(\ell):\ \ell \in \mathcal{L}\})$，则 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$与$\mathcal{B}_{S_c(\mathcal{X})}$之间也存在一个典范双射；在此对应关系下，映射 Ξ 也与 S_c可交换：

$$\Xi(S_c(\mathcal{X}), \lambda, B) = S_c(\Xi(\mathcal{X}, \lambda, B)). \tag{13}$$

此外，

$$\Xi(S_c(\gamma), \mathcal{L}, \lambda, B) = \Xi(\gamma, \mathcal{L}, c^{-1}\lambda, B). \tag{14}$$

当然，空间和时间的缩放算子彼此可交换：对于 $a > 0$ 和$\lambda > 0$，$S_c(a \cdot \mathcal{X}) = a \cdot S_c(\mathcal{X})$，而 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ 与 $\mathcal{B}_{S_c(a\cdot\mathcal{X})} = \mathcal{B}_{a\cdot S_c(\mathcal{X})}$之间的对应关系不依赖于我们执行这两种操作的顺序。

由这些考虑以及 λ_n 的选择可知，我们有如下等式

$$\phi_n(\Xi(\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD}, 1, B)) = \Xi(\phi_n^*(\gamma^{nD}), \phi_n(\mathbb{L}^{nD}), \lambda_n, B). \tag{15}$$

对于格路径，按时间顺序的环擦除过程是良定义的。我们用 $LE(X)$表示格路径 X 的环擦除。特别地，

$$LE(\Xi(\mathsf{S}, \mathbb{L}, 1, B)) = \mathsf{S}. \tag{16}$$

我们用 λ 表示二维勒贝格测度。对于 $X \subset D$，我们用 X^{δ} 表示 X 的 δ-加厚，即 $X^{\delta} := \{x:\ d(x,\ X) \leq \delta\}$。维数一词始终指上闵可夫斯基维数，例如，$\mathbb{R}^2$ 的子集的维数为 d，如果

$$\limsup \frac{\ln\ \lambda(X^{\epsilon})}{\ln\ \epsilon} = 2 - d.$$

特别地，几乎必然地，Range(γ) 的维数为 $5/4$。

5.2 策略总结

本节将证明以下两个结果。

命题 5.1。 设 $\gamma \in \mathscr{S}$ 为确定的，并假设值域(γ) 的维数为 $d < 2$。那么，$\mu^{\mathcal{L}}$-几乎必然地，$(\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$。

特别地， $\mu^{\gamma} \otimes \mu^{\mathcal{L}}$-几乎必然地，$(\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$。

换言之，空间 $\mathscr{R}$ 所施加的条件虽然足够严格，以确保附着映射的连续性，但也足够一般，因此以概率 1 成立。

命题 5.2。 设 Λ 是 $\mathbb{Z}^2$ 上正方格的一个子格，且包含0。设 γ 是一条从0出发、在离开 Λ 时（沿边）停止的环擦随机游走。设 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 是一个与 γ 独立的随机游走环汤，且 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 限制在包含于 Λ（沿边）的环上的部分。那么，集合 $\mathcal{B}_{\gamma,\mathbb{L}}$ 是有限的。设 $B \in \mathcal{B}_{\gamma,\mathbb{L}}$ 在给定 $\mathcal{B}_{\gamma,\mathbb{L}}$ 的条件下，从 $(\gamma, \mathbb{L})$ 中独立地均匀随机选取。

那么， $\Xi(\gamma, \mathbb{L}, 1, B)$ 的分布与从0 出发、在离开 Λ 时（沿边）停止的简单随机游走相同。

在下一节中，我们将证明以下结论。

命题 5.3。 当 $n \to \infty$趋于 $\mathcal{X}^n$ 时，它在 $d_{\mathscr{R}_0}$-距离下依分布收敛至 $\mathcal{X}$。

为证明这一点，我们将借助已知结果：这些结果保证 $\phi_n^*(\gamma^{nD})$趋于 γ （在距离 ρ下）以及 $\phi_n(\mathbb{L}^{nD})$趋于 $\mathcal{L}$（在距离 d下）的收敛。因此，我们还需证明 $\mathcal{X}^n$ 在距离 $d_{\mathscr{R}_0}$下趋于 $\mathcal{X}$，尤其要证明 $t_{\mathcal{X}^n}$趋于 $t_{\mathcal{X}}$ （这是困难之处）。

假设这三个结果成立，我们便可轻易推出以下结论。

定理 5.4。 存在 n上的耦合，其耦合对象为$(\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD}, S^{nD} := \Xi(\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD}, 1, B^n))$，其中 γ^{nD}、 $\mathbb{L}^{nD}$ 和 B^n 的分布如上所述，并满足以下性质。

- 对所有 $n \in \mathbb{N}$， S^{nD} 是从*0*出发、在首次到达∂D时停止的简单随机游走。
- 当 $n \to \infty$ 时，*(*$\phi_n^*(\gamma^{nD})$ $\phi_n(\mathbb{L}^{nD})$*)*几乎必然收敛于*(*$\gamma, \mathcal{L}$*)* $\sim \mu^{\gamma} \otimes \mu^{\mathcal{L}}$，关于 $d_{\mathscr{R}_0}$的拓扑。特别地， $\phi_n^*(\gamma^{nD})$几乎必然收敛于 γ，且 $\phi_n(\mathbb{L}^{nD})$几乎必然收敛于 $\mathcal{L}$ （分别关于*(7)*中定义的距离 ρ 和 d ）
- 当 $n \to \infty$时， $\phi_n(S^{nD})$关于 d_∞的拓扑几乎必然收敛。极限 W 的分布为从*0*出发、在首次到达 ∂D 时停止的布朗运动，且 W 几乎必然等于 $\Xi(\gamma, \mathcal{L})$。

特别地，若$(\gamma, \mathcal{L}) \sim \mu^{\gamma} \otimes \mu^{\mathcal{L}}$，则 $\Xi(\gamma, \mathcal{L})$ 的分布为从0出发、在首次到达 ∂D时停止的布朗运动。

在假设定理 5.1、5.2、5.3 成立的条件下证明定理 5.4。设 $\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD}, B^n$ 如上。由命题 5.3，$(\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD})$ 关于距离 $d_{\mathscr{R}_0}$依分布收敛到$(\gamma, \mathcal{L})$。由斯科罗霍德几乎处处表示定理，存在一个概率空间，使得对于所有 $n \geq 1$，$(\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD})$ 都同时定义在该空间上，并且 γ 和 $\mathcal{L}$也定义在该空间上，且当 $n \to \infty$ 时（对于 $d_{\mathscr{R}_0}$），$(\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD}) \to (\gamma, \mathcal{L})$ 几乎必然成立。扩大该概率空间后，可以假设其中还包含随机元素 $B \in \mathcal{B}_{\gamma^{nD}, \mathbb{L}^{nD}}$。由命题 5.2， S^n 于是是一个从 0 出发、在首次离开 nD时停止的格点上的简单随机游走。由式（15），重新缩放并重新参数化后的随机游走 $\phi_n(S^n)$ 等于 $\Xi(\phi_n^*(\gamma^{nD})\ \phi_n(\mathbb{L}^{nD})\ \lambda_n, B^n)$，其中$\lambda_n \longrightarrow 0.{}_{n\to\infty}$

根据命题 5.1，几乎必然，$(\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$，因此 $W := \Xi(\gamma, \mathcal{L}) = \Xi(\gamma, \mathcal{L}, 0)$ 几乎必然定义良好。由于受限映射 $X : (\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R} \mapsto \Xi(\gamma, \mathcal{L}, 0)$ 是连续的，因此它是可测的。因此， W 是一个真正的随机变量。

由于几乎必然有$(\phi_n^*(\gamma^{nD})\ \phi_n(\mathbb{L}^{nD})\ \lambda_n) \longrightarrow (\gamma, \mathcal{L}, 0) \in \mathscr{R} \times \{0\}$，定理 4.11 保证几乎必然地，$\phi_n(S^n) = \Xi(\phi_n^*(\gamma^{nD})\ \phi_n(\mathbb{L}^{nD})\ \lambda_n, B^n)$ 当 d_∞ 趋向于W 时，$= \Xi(\gamma, \mathcal{L}) = W$ 几乎必然收敛。

由于 S^n 是简单随机游走，唐斯克定理保证 $\phi_n(S^n)$ 在 d_∞ 下收敛于一个从 0 出发、首次离开 D 时停止的布朗运动。根据分布极限的唯一性， W 的分布与一个从 0 出发、首次离开 D 时停止的布朗运动相同。 □

5.3 布朗环汤的性质 (i)至(iv)

本节将通过引理 5.6、5.7、5.9 和 5.10 证明：对于任意满足以下条件的简单路径 $\gamma \in \mathscr{S}$：值域 Range(γ) 的维数小于 2，且 $\gamma((0,t_\gamma)) \subset D$，对于 $\mathcal{L}$ 上的布朗环汤，配对 $(\gamma,\mathcal{L})$ 几乎必然满足性质（i）、（ii）、（iii）和（iv）。最后一条性质（v）需要多做一些工作，将留到下一小节讨论。正如 [LW04], 中所述，总时间 $t_{\gamma,\mathcal{L}}$ 有限，这一点可由 γ 的维数小于 2 得出。为完整起见，我们给出一个简短的证明。

引理 5.5。 设 $X \subset \mathbb{R}^2$ 为一个维数为 $d<2$的集合。那么，当 $t \to 0$时，

$$\int_D \mathbb{P}_{t,x,x}(\mathrm{Range}(\ell) \cap X \neq \emptyset)\,\mathrm{d}x \le t^{1-d/2+o(1)}.$$

证明。 设 $d'>d$，使得当 $\epsilon \to 0$时， $\lambda(X^\epsilon)\epsilon^{d'-2}$ 保持有界。取 $\epsilon>0$，并令 $\delta=\delta(t) = t^{\frac{1}{2}-\epsilon}$。我们将积分在 D上的部分分解为 $X^\delta \cup (D \setminus X^\delta)$。一方面，我们有

$$\int_{X^\delta} \mathbb{P}_{t,x,x}(\mathrm{Range}(\ell) \cap X \neq \emptyset)\,\mathrm{d}x \le \lambda(X^\delta) = O(\delta^{2-d'}) = o(t^{1-d'/2-2\epsilon}).$$

另一方面，对于 $x \notin \mathrm{Range}(\gamma)^\delta$，概率 $\mathbb{P}_{t,\,x,\,x}(\mathrm{Range}(\ell) \cap X \neq \emptyset)$ 小于

$$\mathbb{P}_{t,x,x}(\exists s \in [0,t] : |\ell_s - x| \ge \delta) = \mathbb{P}_{1,0,0}(\exists s \in [0,1] : |\ell_s| \ge t^{-\epsilon}).$$

由于一维单位布朗桥的最大位移具有高斯尾，我们可推知，当 $t \to 0$时：

$$\exists c'>0, C'<\infty : \mathbb{P}_{t,x,x}(\mathrm{Range}(\ell) \cap X \neq \emptyset) \le C' \exp(-c' t^{-2\epsilon}).$$

由于 ϵ 是任意的，且 d' 可以任意接近 d，故证明得证。 □

引理 5.6。 对于所有 $\epsilon>0$， $\mathcal{L}_{\ge\epsilon}$几乎必然有限。对于所有确定的 $\gamma \in \mathcal{C}([0,\cdot],\mathbb{R}^2)$，若 值域($\gamma$) 的维数为 $d<2$，则几乎必然有 $t_{\gamma,\,\mathcal{L}}<\infty$ 且 $\mathbb{E}[t_{\gamma,\mathcal{L}}]<\infty$。

证明。 第一条性质直接由 $\mathcal{L}_{\ge\epsilon}$ 的强度测度有限这一事实得出。对于第二条性质，注意到根据泊松过程的坎贝尔定理（例如参见[Kin93]），

$$\mathbb{E}[t_{\gamma,\mathcal{L}}] = \int_0^\infty \int_D \frac{t}{2\pi t^2} \mathbb{P}_{t,x,x}(\mathrm{Range}(\ell) \subset D, \mathrm{Range}(\ell) \cap \mathrm{Range}(\gamma) \neq \emptyset)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

右端有限，当且仅当 $t_{\gamma,\,\mathcal{L}}$ 几乎必然有限且属于 $L^1(\mathbb{P})$。分子中的额外因子 t 来自我们所求和的长度 t_ℓ。

根据引理 5.5，我们得出，当 $t \to 0$,

$$\int_D \frac{t}{2\pi t^2} \mathbb{P}_{t,x,x}(\mathrm{Range}(\ell) \cap \mathrm{Range}(\gamma) \neq \emptyset)\,\mathrm{d}x \le t^{-d/2+o(1)},$$

由于 $d<2$，它在 0 的某个邻域内可积。在 $+\infty$ 附近，可积性由 $\mathbb{P}_{t,\,x,\,x}$(值域(ℓ) $\subset D$) 的指数衰减得出。因此， $\mathbb{E}[t_{\gamma,\mathcal{L}}]<\infty$，尤其是 $t_{\gamma,\,\mathcal{L}}$ 几乎必然有限。

□

引理 5.7。 $\mathcal{L}$ 几乎必然是等度连续的集合。

证明。 固定 $\epsilon>0$。当 t 趋于 0 时， $\mathbb{P}_{t,\,x,\,x}(\|X-x\|_\infty \ge \frac{\epsilon}{2}) = \mathbb{P}_{1,\,0,\,0}(\|X\|_\infty \ge \frac{\epsilon}{2\sqrt{t}})$ 以指数速度关于 t 趋于 0：存在正常数 c， C （它们依赖于 ϵ），使得对所有$t \le 1$,

$$\mathbb{P}_{t,x,x}(\|X-x\|_\infty \ge \frac{\epsilon}{2}) \le Ce^{-ct^{-1}}.$$

对于 $\delta \in (0,1]$,，定义事件 $E_\delta := \{\forall \ell \in \mathcal{L}_{\le\delta}, \|X-x\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}\}$。那么，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_\delta^c) \le \mathbb{E}[\#\{\ell \in \mathcal{L}_{\le\delta} : \|X-x\|_\infty \ge \frac{\epsilon}{2})\}] &\le \int_0^\delta \frac{|D|}{2\pi t^2} \mathbb{P}_{t,x,x}(\|X-x\|_\infty \ge \frac{\epsilon}{2})\,\mathrm{d}t \\ &\le C|D| \int_0^\delta \frac{e^{-ct^{-1}}}{2\pi t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{P}(\bigcup_{\delta>0} E_\delta) = 1$，故几乎必然存在 δ_1（随机），使得事件 E_{δ_1} 成立。在此事件上，对于所有 $\ell \in \mathcal{L}_{\le \delta_1}$，以及所有 $\delta \in (0, +\infty)$，均有 $\omega_\ell(\delta) < \epsilon$。

对于每个 $\ell \in \mathcal{L}_{>\delta_1}$，令 $\delta_\ell > 0$ 使得 $\omega_{\delta_\ell}(\ell) \le \epsilon$，这由 ℓ 的连续性可知存在。由于 $\mathcal{L}_{>\delta_1}$ 是有限的，$\delta_2 := \min\{\delta_\ell : \ell \in \mathcal{L}_{>\delta_1}\}$ 定义良好且为正。于是，$\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ 满足 $\omega_{\mathcal{L}}(\delta) \le \epsilon$，如所需。 □

为了考察性质（iii），给定，令，x, y 表示 σ_γ 的分布，其中 ℓ 服从 $\mathbb{P}_{t, x, y}$。在 ℓ 不与 γ 相交的事件中，我们任意设定 $\sigma_{\gamma, \ell} = +\infty$。同样，令 $\nu_{t, x}$ 表示 σ_γ 的分布，其中 ℓ 服从 $\mathbb{P}_{t, x}$。

引理 5.8。对于所有 $\gamma \in \mathscr{S}$、所有 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus$ 值域(γ) 以及 $t > 0$，分布 $\nu_{t, x}$ 和 $\nu_{t, x, x}$ 在 $[0, t_\gamma]$ 上没有原子。

证明。我们先从 $\nu_{t, x}$ 开始。固定 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{Range}(\gamma)$。对于任意 $\sigma \in [0, t_\gamma]$，

$$\nu_{t,x}(\{\sigma\}) \le \mathbb{P}_{t,x}(\exists u \in [0, t] : W_u = \gamma(\sigma)).$$

由二维布朗运动的点极性，除非 $\gamma(\sigma) = x$，否则右侧为零；而条件 $x \notin$Range(γ) 排除了这种情况。

对 $\nu_{t, x, x}$ 也可以使用同样的论证。需要指出的是，布朗桥的点极性可由标准布朗运动的点极性推出：事实上，持续时间为 t 的布朗桥在 $[0, t/2]$ 上的限制相对于普通布朗运动在该区间上的限制绝对连续；此外，布朗桥具有可逆性（由此可知，在区间 $[t/2, t]$ 上，给定的点也不可能以正概率被击中）。 □

引理 5.9。设 $\gamma \in \mathscr{S}$ 满足 $\lambda($值域$(\gamma)) = 0$。那么，$\mathcal{L}$-几乎必然有

1. 对所有 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$, $\Theta_{\gamma, \ell}$ 都化简为单个元素。*2.* 对所有 $\ell, \ell' \in \mathcal{L}_\gamma$, $x_{\gamma, \ell} \ne x_{\gamma, \ell'}$。

证明。首先，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists \ell \in \mathcal{L}, \exists s_1, s_2 : s_1 < s_2,\ \ell(s_1) = \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell}) \\
&\le \mathbb{E}[\#\{\ell \in \mathcal{L} : \exists s_1 < s_2 : \ell(s_1) = \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell}\}] \\
&= \int_0^\infty \int_D \frac{1}{2\pi t^2} \mathbb{P}_{t,x,x}(\ell \cap \gamma \ne \emptyset, \exists s_1 < s_2 : \ell(s_1) = \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \int_D \frac{1}{2\pi t^2} \sum_{s \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}_{t,x,x}(\ell \cap \gamma \ne \emptyset, \exists s_1 < s < s_2 : \ell(s_1) = \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \int_D \frac{1}{2\pi t^2} \sum_{s \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}_{t,x,x}(\theta_\ell^- < s \text{ and } \exists s_2 > s : \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因此，只需证明对所有 $0 < s < t$，几乎所有 $x \in D$，

$$\mathbb{P}_{t,x,x}(\theta_{\gamma,\ell}^- < s \text{ and } \exists s_2 > s : \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell}) = 0. \tag{17}$$

正如我们将看到的，这可由以下事实推出：对于布朗桥，点是极性的，并且布朗桥在时间 s 具有马尔可夫性质。需要注意的是，事件 $\theta_{\gamma, \ell}^- < s$ 关于由截至时间 s 的布朗桥生成的 σ-代数 $\mathcal{F}_s$ 并非可测。

我们定义了 $x_{\gamma, \ell}$，但仅当 ℓ 是一个环时才如此；不过，该定义无需修改即可扩展到所有与 γ 相交的 $\ell \in \mathcal{C}([0, \cdot], \mathbb{R}^2)$。在事件 $\{\theta_{\gamma,\ell}^- < s\}$ 上，有 $x_{\gamma, \ell} = x_{\gamma, \ell_{[0,s]}}$。此外，位置 $x_{\gamma, \ell[0,s]}$ 关于 $\mathcal{F}_s$ 可测。

因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{t,x,x}(\theta_{\gamma,\ell}^- < s \text{ and } \exists s_2 > s : \ell(s_2) = x_{\gamma,\ell} | \mathcal{F}_s) &\le \mathbb{P}_{t,x,x}(\exists s_2 > s : \ell(s_2) = x_{\ell[0,s]} | \mathcal{F}_s) \\
&\le \sup_{y,z} \mathbb{P}_{t-s,y,x}(\exists s_2 > 0 : b_{s_2} = z).
\end{aligned}$$

由于右侧为零，因此无条件概率也为零（17）。至此，第一个要点的证明完成。

关于第二个要点，备注

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\exists \ell \neq \ell' \in \mathcal{L}_\gamma : x_{\gamma,\ell} = x_{\gamma,\ell'})\\&\leq \mathbb{E}[\#\{\ell, \ell' \in \mathcal{L}_\gamma : \ell \neq \ell', x_{\gamma,\ell} = x_{\gamma,\ell'})\}]\\&= \int_0^\infty \int_D \int_0^\infty \int_D \frac{1}{4\pi^2 t^2 s^2} \nu_{t,x,x} \otimes \nu_{s,y,y}(\{(\sigma,\sigma) : \sigma \in [0, t_\gamma]\}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s, \qquad (18)\end{aligned}$$

根据 Fubini 定理和引理，其为 05.8，利用事实 $\lambda(\text{值域}(\gamma)) = 0$。 □

引理 5.10. 假设 $\gamma \in \mathscr{S}$ 且 $\gamma(0, t_\gamma) \subset D$。几乎必然，集合 $\{\sigma_{\gamma,\ell} : \ell \in \mathcal{L}\}$ 在$[0, t_\gamma]$上稠密。

证明。设 $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < t_\gamma$、$\ell$。设 $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ 与 $x = \gamma(\sigma)$。首先注意到，当 $\epsilon_0 > 0$ 足够小时，$B_{\epsilon_0}(x) \cap$ 值域(γ) 包含在 $\gamma((\sigma_1, \sigma_2))$ 内。事实上，若我们采用反证法并假设并非如此，设 ϵ_n 为递减趋于 0 的序列，且 $x_n \in (B_{\epsilon_n}(x) \cap \text{值域}(\gamma)) \setminus \gamma((\sigma_1, \sigma_2))$。则 x_n 收敛于 x。由于 γ 是到其像上的同胚，$\sigma_n := \gamma^{-1}(x_n)$ 收敛于 $\gamma^{-1}(x) = \sigma$。因此，当 n 足够大时，$\sigma_n \in (\sigma_1, \sigma_2)$，从而 $x_n = \gamma(\sigma_n) \in \gamma((\sigma_1, \sigma_2))$，这是荒谬的。

令 $\epsilon_1 > 0$ 使得 $\omega_{\epsilon_1}(\mathcal{L}) < \epsilon_0/2$，该对象由引理 5.7保证存在。于是，对所有 $\ell \in \mathcal{L}_{\leq \epsilon_1}$，

$$\sup\{|\ell_t - \ell_s| : s, t \in [0, t_\ell]\} = \omega_{\epsilon_1}(\ell) < \epsilon_0/2.$$

特别地，若存在 t 使得 $\ell(t) \in B_{\epsilon_0/2}(x) \cap$ 值域(γ)，则 $x_{\gamma,\ell} \in B_{\epsilon_0}(x) \cap$ 值域$(\gamma) \subseteq \gamma((\sigma_1, \sigma_2))$，因此 $\sigma_{\gamma,\ell} \in (\sigma_1, \sigma_2)$。于是，只需找到一个环 $\ell \in \mathcal{L}_{\leq \min(\epsilon_0, \epsilon_1)}$ 使得$B_{\epsilon_0/2}(x) \cap$值域$(\ell) \cap$值域$(\gamma) \neq \emptyset$。

令 $\epsilon_2 < \min d(x, \gamma(\sigma_1))$ $d(x, \gamma(\sigma_2))$，$\epsilon_3 = \min\{d(x, y) : x \in \gamma[\sigma_1, \sigma_2], y \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ $\epsilon := \min(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$，并令 n_0 为满足 $2^{-n_0} < \epsilon/2$的整数。对所有 $n \geq n_0$，定义环域

$$C_n := B_{2^{-n}}(x) \setminus B_{2^{-n-1}}(x),$$

并令 $\partial^1 C_n$ 和 $\partial^2 C_n$ 为其边界的两个连通分支。根据介值定理，且由于 $2^{-n} < \epsilon_2$，存在 $\sigma_3, \sigma_4 \in (\sigma, \sigma_2)$，使得 $\gamma(\sigma_3) \in \partial^1 C_n$ 且 $\gamma(\sigma_4) \in \partial^2 C_n$。从拓扑角度看，任何始终位于 C_n 内且在 C_n 上不可缩的环 $\ell \in \mathscr{L}$ 都必须与 $\gamma[\sigma_3, \sigma_4]$ 相交，尤其必须与 γ 相交。此外，由于 $\epsilon < \epsilon_3$，全平面布朗环汤 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$ 中任何始终位于 C_n 内的环也包含在 D 中。因此，对所有 n，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\exists \ell \in \mathcal{L}_{\leq \epsilon} : B_{\epsilon_0/2}(x) \cap \mathrm{Range}(\ell) \cap \mathrm{Range}(\gamma) \neq \emptyset)\\&\quad \geq \mathbb{P}(\exists \ell \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}_{\leq \epsilon} : \mathrm{Range}(\ell) \subseteq C_n,\ \ell \text{ is non-contractible on } C_n)\\&\quad \geq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \{\exists \ell \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}^2} : t_\ell \in (2^{-2n-2}, 2^{-2n}],\ \mathrm{Range}(\ell) \subseteq C_n,\ \ell \text{ is non-contractible on } C_n\}\Big)\end{aligned}$$

根据泊松性质，以下事件

$$E_n := \{\exists \ell \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}^2} : t_\ell \in (2^{-2n-2}, 2^{-2n}],\ \mathrm{Range}(\ell) \subseteq C_n,\ \ell \text{ is non-contractible on } C_n\}$$

相互全局独立。根据布朗环汤的缩放性质，$\mathbb{P}(E_n)$ 不依赖于 n。由于其为正，$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \infty$。根据第二博雷尔-坎特利引理，$\mathbb{P}(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} E_n) = 1$，证明至此完成。 □

5.4 性质 (v) 关于布朗环汤

记住，对于 $\gamma \in \mathscr{S}$和 $x \in \gamma((0, t_\gamma))$，集合 $L(x)$、$R(x)$ 是我们在第 3.1 节中构造的，它们将 x 的一个邻域分成值域(γ) 的“左侧”部分和“右侧”部分。

引理 5.11. 设 $\gamma \in \mathscr{S}$。设 $x \in \gamma((0, t_\gamma))$、$\epsilon > 0$ 和 W 是从 x 出发的平面布朗运动。则几乎必然存在 u、$v \in [0, \epsilon]$，使得 $W_u \in L(x)$ 且 $W_v \in R(x)$。

证明。由 x 附近的对称性，只需证明 v 的存在性。设 $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $R(x)$ 的一个紧集穷竭，即 K_n 是紧的，对所有 n 都有 $K_n \subseteq K_{n+1}$，且 $\bigcup_n K_n = R(x)$。令$\pi : z \mapsto x + |z - x|$，并令 $\Pi_n = \pi(K_n) = \{x + |z - x| : z \in K_n\}$。设 T_n 为 W 首次命中K_n的时间，T'_n 为 W 首次命中 Π_n 的时间，而 S_δ 为 W 首次离开球 $B_\delta(x)$ 的时间。

由于递增并集 $\bigcup_n K_n$ 等于 $R(x)$，递增并集 $\Pi := \bigcup_n \Pi_n$ 等于$\pi(R(x)) = x + (0, a)$，其中 $a > 0$。

对于任意 $s > 0$，从 x 出发的平面布朗运动以概率 1 在 s 之前命中 Π，因此对于任意给定的几乎必然非零的停时 S，

$$\mathbb{P}_x(\exists n : T'_n \le S) = \mathbb{P}_x(\exists t \le S : W_t \in \Pi) \ge \lim_{s\to 0} \mathbb{P}_x(\exists t \le s : W_t \in \Pi, s \le S)$$
$$= \lim_{s\to 0} \mathbb{P}_x(s \le S) = \mathbb{P}(S > 0) = 1.$$

根据 Beurling 投影原理（例如参见 [Wer96，式（2）]），

$$\mathbb{P}(T_n \le S_\delta) \ge \mathbb{P}(T'_n \le S_\delta).$$

对 n 取递增并集，我们推得，对于任意 $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\exists n : T_n \le S_\delta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n \le S_\delta) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T'_n \le S_\delta).) = \mathbb{P}(\exists n : T'_n \le S_\delta).) = 1.$$

因此，

$$\mathbb{P}(\exists n : T_n \le \epsilon) \ge \mathbb{P}(\exists n, \delta : T_n \le S_\delta \le \epsilon) = \mathbb{P}(\exists \delta : S_\delta \le \epsilon) = \lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}(S_\delta \le \epsilon) = 1. \qquad \square$$

引理 5.12。设 $\gamma \in \mathscr{S}$。设 W 是一个布朗环，其起点为 $x \in \mathbb{R}^2$，持续时间为 t，并设 $\epsilon > 0$。设 T 是一个停时，使得在事件 $T < +\infty$ 中几乎必然有 $W_T \in \gamma(0, t_\gamma)$。那么，存在停止时刻 U、$V \in [T, T+\epsilon] \cup \{+\infty\}$，使得在事件 $T < +\infty$ 中几乎必然有 $U < +\infty$、$V < +\infty$、$W_U \in L(W_T)$ 以及 $W_V \in R(W_T)$。

证明。固定 $\delta > 0$ 并考虑事件 E_δ：$T < t - \delta$，当 δ 趋于 0 时，该事件递增。由于 $x \notin$ 值域(γ) 且 W 连续，$\mathbb{P}(T = +\infty$ 或 $E_\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 1$，因此只需证明在给定 E_δ的条件下结论成立。由于 W 在 $[0, t-\delta]$ 上的限制相对于布朗运动的分布绝对连续，只需证明当 W 是从 x出发、持续时间为 $t' = t - \delta$的布朗运动时结论成立。由 W的强马尔可夫性质以及引理 5.11，即可得出结论。

$\square$

命题 5.13。令 $\gamma \in \mathscr{S}$，并假设 λ(值域(γ)) $= 0$。令 W 为一个布朗回路，其给定起点为 $x \notin$值域(γ)，持续时间为 t。那么，几乎必然地，在 W 击中 γ这一事件发生时，W 对于 γ是正则的。

证明。正如我们已在引理 5.9 中证明i 一样，只需证明ii，即几乎必然地，对所有 $\epsilon > 0$，都存在 U, $V \in [\theta_{\gamma,W} - \epsilon, \theta_{\gamma,W} + \epsilon]$ 使得 $W_U \in L(W_{\theta_\gamma, w})$ 且 $W_V \in R(W_{\theta_\gamma, w})$。由对称性，只需证明 V 的存在性。

记住 $\mathbf{r}(x) = d(x, \{\gamma(0)\ \gamma(t_\gamma)\})$，以及在第3.1节中定义的 $\sigma^{\pm}_\gamma(x)$：它是 γ 在到达 x 之前进入 $B_x(\mathbf{r}(x))$ 的最后进入时刻（分别是到达 x 后的首次离开时刻）。对所有 $x \in \gamma((0, t_\gamma))$ 和 $y \in \gamma((\sigma^-_\gamma(x)\ \sigma^+_\gamma(x)))$,

$$R(y) \cap B_x(\mathbf{r}(x)) \subset R(x).$$

对于 $x \in \gamma((0, t_\gamma))$，令 $\delta_x \in (0, \mathbf{r}(x)]$ 使得 $B_x(\delta_x) \cap$ 属于 γ 的值域 $\subset \gamma((\sigma^-_\gamma(x)\ \sigma^+_\gamma(x)))$（其存在性已在引理 5.10 的证明中确立）。令 ϵ_0 使得 $\omega_W(\epsilon_0) < \delta_{x_\gamma, w}$。那么，对所有满足 $W_t \in \gamma((0, t_\gamma))$ 且 $s \in R(W_t)$ 的 $s, t \in [\theta_{\gamma,W} - \epsilon_0, \theta_{\gamma,W} + \epsilon_0]$，都有 $|W_t - x_{\gamma,W}| < \delta_{x_\gamma,w}$，因此 $W_t \in \gamma((\sigma^-_\gamma(x)\ \sigma^+_\gamma(x)))$，并且 $|W_s - x_{\gamma,W}| < \delta_{x_\gamma,w} \le \mathbf{r}(x_{\gamma,W})$，故

$$W_s \in R(W_t) \cap B_{x_{\gamma,W}}(\mathbf{r}(x_{\gamma,W})) \subset R(x_{\gamma,W}). \tag{19}$$

固定 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$，并设定 j_0，使得 $j_0\epsilon \le t < (j_0 + 1)\epsilon$。对于所有 $j \in \{0, \dots, j_0\}$，定义 $T_j = \inf\{s \in [j\epsilon, (j+1)\epsilon)) : W_s \in \gamma((0, t_\gamma))\}$（其中 $\inf \emptyset = +\infty$），显然，对于所有 $j \in \{0, \dots, j_0\}$，它都是一个停时。因此，我们可以应用引理 5.12，并推得几乎必然地，对于所有 j，存在一个停时 $V_j \in [T_j, T_j + \epsilon] \cup \{+\infty\}$，使得在事件 $T_j < +\infty$ 上几乎必然有 $W_{V_j} \in R(V_j)$。另外定义 $V_{+\infty} = +\infty$，以处理 W 未击中 γ 的情形。令J为满足 $\theta_{\gamma,W} \in [J\epsilon, (J+1)\epsilon)$ 的唯一随机指标（或者在 W 未击中 γ 的事件中取 $J = +\infty$）。那么 V_J 是一个随机变量；在 W 击中 γ 的事件中，V_J 和 θ_W 都属于 $[J\epsilon, (J+1)\epsilon)$，因此 $V_J \in [\theta_W - \epsilon, \theta_W + \epsilon]$。此外，$W_{V_J} \in R(W_{T_J})$，由（19）可知 $W_{V_J} \in R(W_{\theta_\gamma, w})$。因此，随机时刻 $V := V_J$ 满足所需性质。 $\square$

推论 5.14。令 $\gamma \in \mathscr{S}$并假设 λ(值域(γ)) $= 0$。几乎必然地，对所有 $\ell \in \mathcal{L}_\gamma$，都有$\ell \in \mathcal{L}_{reg,\ \gamma}$。

证明。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists \ell \in \mathcal{L}_\gamma : \ell \notin \mathcal{L}_{reg,\gamma}) &\le \mathbb{E}[\#\{\ell \in \mathcal{L}_\gamma : \ell \notin \mathcal{L}_{reg,\gamma}\}] \\ &= \int_0^\infty \int_D p^D_{t,x,x} \mathbb{P}_{t,x,x}(W \in \mathcal{L}_\gamma, W \notin \mathcal{L}_{reg,\gamma})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \qquad \text{by Proposition 5.13 .}\end{aligned}$$

□

*Proo*命题 *5.1* 的 *f*。对于 γ 为确定性的情形，它是引理 5.6、5.7、5.9、5. 10 and 推论 5.14 （ λ(值域(γ)) $= 0$ 这一事实由 dim(γ) < 2推出）。

对于 $\gamma \sim \nu^\gamma$，它由以下事实推出：几乎必然，$\gamma \in \mathscr{S}$ 且 γ 的维数为 $5/4 < 2$（参见例如 [LR15] 的定理 1.1，以得到更强的结果），从而 ν^γ-几乎必然，$\nu^{\mathcal{L}}$-几乎必然，$(\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$。由 Fubini 定理，$\nu^\gamma \otimes \nu^{\mathcal{L}}$-几乎必然，$(\gamma, \mathcal{L}) \in \mathscr{R}$。 □

5.5 将随机游走环汤附加到环擦除随机游走

在本小节中，我们证明命题 5.2，即对于 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$，环擦除随机游走 γ（从 0 出发，在离开 Λ 时停止（沿边））、随机游走环汤 $\mathbb{L}$，以及平局打破 B 的均匀选择，曲线 $\Xi(\gamma, \mathbb{L}, 1, B)$ 是一条在离开 Λ 时停止（沿边）的简单随机游走。备注：它本质上是一个已知结果；关键论证为 [LL10 的命题 9.4。1]。

命题 5.2 的证明。由于我们研究的是以单位速度参数化的格点路径，因此将它们视为其顶点列表，即将路径 X 视为 $(X(0) \dots, X(t_X))$。对于 $\mathbb{Z}^2$ 中相邻的 a, b，令 $[a, b]$ 为持续时间为 1 的路径，满足 $[a, b](0) = a$ 且 $[a, b](1) = b$。对于两条路径 X, Y，若 $X(t_X) = Y(0)$，则定义它们的拼接 $X \oplus Y$ 为：当 $t \le t_X$ 时，$t_{X\oplus Y} = t_X + t_Y$,$X \oplus Y(t) = X(t)$；当 $t \ge t_X$ 时，$X \oplus Y(t) = Y(t - t_X)$。对于格路径 η，回忆一下，$LE(\eta)$ 是它的环擦除，定义见例如 [LL10]。令 S 为从 0 出发、首次离开 Λ 时停止的简单随机游走。因此，我们需要证明，对于任意从 0 出发并在首次离开 Λ 时停止的确定性路径 η，

$$\mathbb{P}(S = \eta) = \mathbb{P}(\Xi(\gamma, \mathbb{L}, 1, B) = \eta).$$

根据环擦随机游走的定义，γ 与 $LE(S)$的分布相同。因此，只需证明对于任意从 0 出发、在首次离开 Λ 时停止的路径 η，

$$\mathbb{P}(S = \eta | LE(S) = \eta') = \mathbb{P}(\Xi(\gamma, \mathbb{L}, 1, B) = \eta | \gamma = \eta'), \qquad \eta' := LE(\eta),$$

也就是说，

$$\mathbb{P}(S = \eta | LE(S) = \eta') = \mathbb{P}(\Xi(\eta', \mathbb{L}, 1, B) = \eta).$$

对于 $j \in \{0, \dots, t_{\eta'} - 1\}$，令 ω_j 为这些环（最终 $t_{\omega_j} = 0$），它们由以下性质唯一确定：ω_i 与 $\eta_{[0,i-1]}$ 不相交，并且

$$\eta = \omega_0 \oplus [\eta'_0, \eta'_1] \oplus \omega_1 \oplus [\eta'_1, \eta'_2] \oplus \cdots \oplus \omega_{t_{\eta'}-1} \oplus [\eta'_{t_{\eta'}-1}, \eta'_{t_{\eta'}}].$$

那么，

$$\mathbb{P}(S = \eta) = 4^{-t_\eta} = 4^{-t_{\eta'}} \prod_{j=0}^{t_{\eta'}-1} 4^{-t_{\omega_j}},$$

由于这对任意 η都成立，因此可得

$$\mathbb{P}(S = \eta | LE(S) = \eta') = Z_{\eta'} \prod_{j=0}^{t_{\eta'}-1} 4^{-t_{\omega_j}},$$

其中某个常数 $Z_{\eta'}$ 仅取决于 η' 和 Λ。

另一方面，令 $(L_j)^{j \in \{0, \dots t_{\eta'}-1\}}$ 为由以下性质唯一确定的环：L_i 与 $\eta'_{[0,i-1]}$ 不相交，且

$$\Xi(\eta', \mathbb{L}, 1, B) = L_0 \oplus [\eta'_0, \eta'_1] \oplus L_1 \oplus [\eta'_1, \eta'_2] \oplus \cdots \oplus L_{k_{\eta'}-1} \oplus [\eta'_{t_{\eta'}-1}, \eta'_{t_{\eta'}}].$$

因此，

$$\mathbb{P}(\Xi(\eta', \mathbb{L}, 1, B) = \eta) = \mathbb{P}(\forall j < t_{\eta'}, L_j = \omega_j).$$

根据 $\mathbb{L}$ 的泊松性质，并根据 [LL10，命题 9.4。1]，

$$\mathbb{P}(\forall j < t_{\eta'}, L_j = \omega_j) = \prod_{j=0}^{t_{\eta'}-1} \mathbb{P}(L_j = \omega_j) = \prod_{j=0}^{t_{\eta'}-1} Z_j 4^{-t_{\omega_j}},$$

对某些仅依赖于 j、 η'和 Λ的常数 Z_j。我们推出，对任意给定的 η'，对所有满足 $LE(\eta) = \eta'$的 η，概率 $\mathbb{P}(S = \eta | LE(S) = \eta')$与 $\mathbb{P}(\Xi(\eta', \mathbb{L}, 1, B) = \eta)$彼此成比例。由于二者都是概率，对 $\{\eta : LE(\eta) = \eta'\}$求和，我们推出比例常数相等，即 $Z_{\eta'} = \prod_{j=0}^{t_{\eta'}-1} Z_j$。因此，

$$\mathbb{P}(S = \eta | LE(S) = \eta') = \mathbb{P}(\Xi(\eta', \mathbb{L}, 1, B) = \eta). \qquad \square$$

6 概率方面：收敛 $n \to \infty$

本节的目标是建立命题 5.3。

由定理 1.1，在 [LV21]中， γ^{nD} 依分布收敛（距离 ρ ）于 γ。由斯科罗霍德表示定理，我们可以并且确实假设所有的（γ^{nD}）$_{n\geq 1}$ 与 γ 均定义在同一概率空间（Ω $\mathcal{F}, \mathbb{Q}$）上，使得该收敛以几乎必然的意义成立。

作为处理 $\mathbb{L}$收敛问题的出发点，我们将使用以下结果，其中$\alpha := \frac{5}{8}$, $\theta \in (\frac{2}{3}, 1)$，以及 $\epsilon_n := n^{-2}(\frac{n^\theta - 2}{2} + \alpha)$。

定理 6.1 ([SS18，定理 2。2] 与 $d = 2$ –弱化版本)。 存在一个常数 $C < \infty$，并且对每个整数 $n \geq 2$，存在 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$ 与 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 之间的一个耦合，以及一个事件 E_n，使得 $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$，并且在事件 E_n 上，存在一个双射 ψ_n ，它将 $\mathcal{L}^R_{\geq \epsilon_n}$ 与 $\mathbb{L}^{nR-\frac{1}{2}}_{\geq n^\theta}$ 对应起来，使得对所有 $\ell \in \mathcal{L}^R_{\geq \epsilon_n}$，

$$|t_\ell - t_{\phi_n \circ \psi_n(\ell)}| \leq \alpha n^{-2} \qquad and \qquad d_\infty(\ell, \phi_n \circ \psi_n(\ell)) \leq C n^{-\frac{1}{4}} \log(n). \tag{20}$$

注 6.2. 中的结果*SS18]* 更强。特别是，概率 $\mathbb{P}(E_n)$得到明确控制，并证明其衰减速度至少为 $n^{-3\theta+2}$。也可以考虑使用 *Qian* 最近得到的更强结果 *[Qia26]*。

以下内容中，我们省略记号 n 的下标，将其记为 ψ_n，ϕ_n，ϕ_n^*，因为根据上下文这些下标是明确的。

注 6.3。 在定理 *6.1* 中，我们并非只有一个布朗环汤 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$ 以及一个重标度后收敛到 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$ 的随机游走环汤族，而是对每个整数 n，都有一份布朗环汤的副本 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}(n)$ 。然而， $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$ 和 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 所取值的空间是波兰空间的可数乘积，因此也是一个波兰空间。这使我们能够使用分解定理，从而构造出一个单一的可测空间，使定理 *6.1* 所给出的耦合都能在该空间上同时定义，并且 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}(n) = \mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$ 不依赖于n。在下文中我们将作此假设，但这只是为了记号方便：也可以不使用分解定理，而是在阅读本节及下一节时，确实对每个 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$都保留一份 n的副本。此时 $\mathbb{P}$ 必须替换为 $\mathbb{P}^n$ ，而依概率收敛必须替换为依分布收敛。

根据定理 6.1 和备注 6.3，设 $\mathbb{P}'$，在其下定义了 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}^2}$，并且对每个正整数 n，取一个 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$的副本，使得（20）成立。我们设 $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{P}'$，在其下随机路径 γ 和 γ^{nD} 也有定义。

6.1 δ-布朗环汤与随机游走环汤之间的同构 s

定理 6.1 说明了包含在 D中的正方形区域里的环之间存在同构。下面的命题保证我们可以只考虑 D中的环。直观地说，这与以下事实有关：¯所有停留在 D 中的环也都位于 D 的内部（利用黎曼映射定理和布朗环汤的共形不变性即可轻易验证）。

命题 6.4。 考虑定理 *6.1*中的耦合。令 $\epsilon > 0$。存在事件$E_{\epsilon,\ n} \subset E_n$ 使得：

◇ $\mathbb{P}(E_{\epsilon,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ 对所有固定的 $\epsilon > 0$均成立。

◇ 对于所有足够大的 n，使得 $\epsilon_n < \epsilon$，在 $E_{\epsilon,n}$，

$$\mathbb{L}^{nD}_{\geq 2n^2\epsilon+2\alpha} \subseteq \psi(\mathcal{L}^D_{\geq\epsilon}) \subseteq \mathbb{L}^{nD}. \tag{21}$$

证明。令 C 为（20）中的常数，$\delta_n = Cn^{-\frac{1}{4}}\log(n)$，并令

$$F_{\epsilon,n} \coloneqq \{\exists \ell \in \mathcal{L}^R_{\geq\epsilon} : \ell \not\subset D, \ell \subset D^{\delta_n}\}, \quad \text{where} \quad D^\delta \coloneqq \{x : d(x,D) \leq \delta\},$$

$$G_{\epsilon,n} \coloneqq \{\exists \ell \in \mathcal{L}^D_{\geq\epsilon} : \exists y \in \mathrm{Range}(\ell) : d(y, \mathbb{R}^2 \setminus D) \geq \delta_n\}, \qquad E_{\epsilon,n} = E_n \setminus (F_{\epsilon,n} \cup G_{\epsilon,n}).$$

事件$F_{\epsilon,n}$ 和 $G_{\epsilon,n}$ 关于 n是递减的。由于 $\mathcal{L}^R_{\geq\epsilon}$ 是有限的，

$$F_{\epsilon,\infty} \coloneqq \bigcap_{n\geq 1} F_{\epsilon,n} = \{\exists \ell \in \mathcal{L}^R_{\geq\epsilon} : \ell \not\subset D, \ell \subset \bar{D}\}.$$

由于 D 是一个单连通区域，$\mathbb{P}(F_{\epsilon,\infty}) = 0$：这可以像引理 5.11 和引理 5.12那样证明，只需作相应调整。相应集合 Π 包含一个完整区间$x + (0, a]$ 这一事实可以利用黎曼映射定理证明。事实上，这使得对于所有 $x \in \partial D$，都可以构造 $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2)$，使得 $\gamma(0) = x$，并且对所有 $t > 0$，都有 $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$。于是 $x + \pi(\gamma(0,1]) = x + (0, a] \subseteq \Pi$。因此，$\mathbb{P}(F_{\epsilon,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

此外，由于 $\mathcal{L}^D_{\geq\epsilon}$ 是有限的，并且对于所有 $\ell \in \mathcal{L}^D_{\geq\epsilon}$，$\mathrm{Range}(\ell)$ 都是紧的，

$$\bigcap_{n\geq 1} G_{\epsilon,n} = \{\exists \ell \in \mathcal{L}^D_{\geq\epsilon} : \exists y \in \mathrm{Range}(\ell) : d(y, \mathbb{R}^2 \setminus D) = 0\} = \emptyset.$$

只需证明包含关系（21）在 $E_{\epsilon,n}$ 上成立。

设 $\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}_{\geq 2n^2\epsilon+2\alpha}$。由于 $2n^2\epsilon + 2\alpha \geq 2n^2\epsilon_n + 2\alpha = n^\theta + 1/2 > n^\theta$ 且 $nD \subset [-(nR - \frac{1}{2})\ nR - \frac{1}{2}]^2$，在 E_n 上，$\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nR-\frac{1}{2}}_{\geq n^\theta} \subseteq \psi(\mathcal{L}^R_{\geq\epsilon_n})$。因此，$\ell \coloneqq \psi^{-1}(\mathsf{L}) \in \mathcal{L}^R_{\geq\epsilon_n}$ 是定义良好的。为了证明（21）中的第一个包含关系，只需证明 $t_\ell \geq \epsilon$ 且 $\ell \subset D$。

根据（20），$t_\ell \geq t_{\phi(\mathsf{L})} - \alpha n^{-2} = n^{-2}k_{\mathsf{L}}/2 - \alpha n^{-2} \geq n^{-2}(2n^2\epsilon_n + 2\alpha)/2 - \alpha n^{-2} = \epsilon_n$。

由于 $\ell \in \mathcal{L}^R_{\geq\epsilon}$，在 $E_n \setminus F_{\epsilon,n}$ 上，$\ell \subset D$ 或 $\ell \not\subset D^{\delta_n}$。

假设 $\ell \not\subset D^{\delta_n}$，并令 t 使得 $\ell_t \notin D^{\delta_n}$，即 $d(\ell_t, D) > \delta_n$。由 (20)，$d(\phi(\mathsf{L})_t, D) \geq d(\ell_t, D) - d(\phi(\mathsf{L})_t, \ell_t) > \delta_n - \delta_n = 0$。因此 $\phi(\mathsf{L}) \not\subset D$，这与 $\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}$ 的事实矛盾。由此可得 $\ell \subset D$，从而证明了 (21) 中的第一个包含关系。

对于第二个包含关系，令 $\mathsf{L} \in \psi(\mathcal{L}^D_{\geq\epsilon})$，$\ell = \psi^{-1}(\mathsf{L})$。那么在 $E_n \setminus G_\epsilon$ 上，n；由 (20)，对所有 t，$d(\phi(\mathsf{L})_t, \mathbb{R}^2 \setminus D) \geq d(\ell_t, \mathbb{R}^2 \setminus D) - d(\phi(\mathsf{L})_t, \ell_t) > \delta_n - \delta_n = 0$。因此 $\phi(\mathsf{L})_t \in D$，进而 $\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}$，至此证明完毕。□

对所有 $\epsilon > 0$，存在 $n_0 = n_0(\epsilon)$，使得对所有 $n \geq n_0$，$\delta_n \coloneqq \max(\epsilon_n, 2(\alpha n^{-2} + Cn^{-\frac{1}{4}}\log(n)))$ 小于 ϵ。于是，在事件 $E_{\epsilon,n}$ 上，ϕ 诱导从 $\mathcal{L}$ 到 $\phi(\mathbb{L}^{nD})$ 的一个 ϵ-同构。特别地，

$$\mathbb{P}(d(\mathcal{L}, \phi(\mathbb{L}^{nD})) > \epsilon) \leq \mathbb{1}_{n<n_0} + \mathbb{P}(E^c_{\epsilon,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

因此，$\phi(\mathbb{L}^{nD})$ 关于距离 d 依概率收敛于 $\mathcal{L}$。

引理 6.5. 设 C 为定理 *6.1* 中的常数。对所有 $\epsilon \in (0, e^{-5}]$ 以及 $n \geq n_0(\epsilon)$，在事件 $E_{\epsilon,n}$（定义于命题 *6.4*）上，

$$\omega_\epsilon(\phi(\mathbb{L}^{nD})) \leq f_{\mathcal{L}}(\epsilon) \coloneqq \max(\epsilon^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}, \epsilon^{\frac{1}{5}}, \omega_\epsilon(\mathcal{L}) + \frac{8C}{5}|\log(\epsilon)|\epsilon^{\frac{1}{5}}). \tag{22}$$

对 $\epsilon \geq e^{-5}$，对所有 $n \geq n_0(e^{-5})$，在事件 $E_{\epsilon,n}$ 上，我们则有

$$\omega_\epsilon(\phi(\mathbb{L}^{nD})) \leq \max(\epsilon^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}, \epsilon^{\frac{1}{5}}, \omega_\epsilon(\mathcal{L}) + 8Ce^{-1}).$$

证明. 对 $\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}$，由于 L 是 1-利普希茨，

$$\omega_\epsilon(\phi(\mathsf{L})) = n^{-1}\omega_{\epsilon n^2}(\mathsf{L}) \leq \min(n^{-1}t_{\mathsf{L}}, \epsilon n). \tag{23}$$

由此可以推出以下结论。

$\diamond$若 $t_{\mathsf{L}} \le n^{\theta}$且 $n < \epsilon^{-1/(2-\theta)}$，则 $\omega_\epsilon(\phi(\mathsf{L})) \le \epsilon n \le \epsilon^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}$。$\diamond$若 $t_{\mathsf{L}} \le n^{\theta}$且 $n \ge \epsilon^{-1/(2-\theta)}$，则 $\omega_\epsilon(\phi(\mathsf{L})) \le n^{-1} t_{\mathsf{L}} \le n^{\theta-1} \le \epsilon^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}$。$\diamond$若 $t_{\mathsf{L}} > n^{\theta}$且 $n < \epsilon^{-\frac{4}{5}}$，则 $\omega_\epsilon(\phi(\mathsf{L})) \le \epsilon n < \epsilon^{\frac{1}{5}}$。$\diamond$若 $t_{\mathsf{L}} > n^{\theta}$且 $n \ge \epsilon^{-\frac{4}{5}}$：在事件 E_ϵ上，n，对于 C，常数取自 (2 0),

$$\omega_\epsilon(\phi(\mathsf{L})) \le \omega_\epsilon(\psi^{-1}(\mathsf{L})) + 2d_\infty(\psi^{-1}(\mathsf{L}), \phi(\mathsf{L})) \le \omega_\epsilon(\mathcal{L}) + 2Cn^{-\frac{1}{4}} \log(n)$$

当 $\epsilon \le e^{-5}$：$\epsilon^{-\frac{4}{5}} \ge e^4$。函数 $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}\log(x)$ 在 $[e^4, \infty)$ 上单调递减，因此$n^{-\frac{1}{4}}\log(n) \le \epsilon^{\frac{1}{5}}\log(\epsilon^{-\frac{4}{5}})$。由此可得$2Cn^{-\frac{1}{4}}\log(n) \le 2C\epsilon^{\frac{1}{5}}\log(\epsilon^{-\frac{4}{5}})$，这就证明了 (22)。当 $\epsilon \ge e^{-5}$时，我们改用以下事实：$n^{-\frac{1}{4}}\log(n) \le 4e^{-1}$对所有 $n > 0$均成立。 □

在下一节中，我们将证明（定理 6.15）：在这些耦合下，$t_{\mathcal{X}^n}$ 依概率收敛到 $t_{\mathcal{X}}$。现在我们解释为何这足以证明命题 5.3

假设定理 6.15 成立，证明命题 5.3。回忆在概率空间 $\mathbb{P}$ 上，随机对象 γ^{nD}、γ、$\mathcal{L}$、$\mathbb{L}^{nD}$ 均已定义。令 $\epsilon > 0$。由于 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}$，根据引理 4.7，存在 $\delta > 0$（随机的），使得 $B'_\delta(\mathcal{X}) \cap J_{f_{\mathcal{L}}} \subseteq B_{\epsilon/2}(\mathcal{X})$；这里采用引理 4.7 中的记号，且 $f_{\mathcal{L}}$ 由 (22) 定义。注意，f 连续且在 0 处取值为零，这一事实源于 $\mathcal{L}$ 的等度连续性（引理 5.7）。

对于 $\delta' > 0$，考虑

$$F_{\delta',n} := \{\rho(\gamma^{nD}, \gamma) \le \delta'/2\}.$$

根据构造，γ^{nD} 依概率收敛到 γ。因此，对于任意确定性的 $\delta' > 0$，存在 $n_1(\delta')$，使得对所有 $n \ge n_1$, $\mathbb{P}(F_{\delta',n}) \ge 1 - \epsilon/4$。根据命题 6.4，存在 $n_2 \ge n_1$，使得对所有 $n \ge n_2$, $\mathbb{P}(E_{\delta',n} \cap F_{\delta',n}) \ge 1 - \epsilon/2$。在 $E_{\delta',n} \cap F_{\delta',n}$ 上，对于 $n \ge n_2$,

$$d'_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X}) \le \delta' \qquad (\text{recall } d'_{\mathscr{R}_0} \text{ from } (8))$$

在 $E_{\delta',n} \cap F_{\delta',n} \cap \{\delta \ge \delta'\} \cap \{n \ge n_2\}$ 上，因此有 $\mathcal{X}^n \in B'_\delta(\mathcal{X})$。根据引理 6.5，我们也有 $\mathcal{X}^n \in J_{f_{\mathcal{L}}}$，因此 $\mathcal{X}^n \in B_{\epsilon/2}(\mathcal{X})$。

根据定理 6.15，$t_{\mathcal{X}^n}$趋近于 $t_{\mathcal{X}}$。因此，存在 $n_3 \ge n_2$，使得对于所有 $n \ge n_3$，事件 $G_{\epsilon,n} := \{|t_{\mathcal{X}^n} - t_{\mathcal{X}}| \le \epsilon/2\}$的概率至少为 $1 - \epsilon/2$。在大概率事件 $E_{\delta',n} \cap F_{\delta',n} \cap \{\delta \ge \delta'\} \cap \{n \ge n_2\} \cap G_{\epsilon,n}$上，我们有 $d_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X}) \le \epsilon$。因此，

$$\mathbb{P}(d_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X}) \ge \epsilon) \le \mathbb{P}((E_{\delta',n} \cap F_{\delta',n})^c) + \mathbb{P}(G^c_{\epsilon,n}) + \mathbb{P}(n \le n_2) + \mathbb{P}(\delta < \delta') \le \epsilon + \mathbb{P}(n \le n_2) + \mathbb{P}(\delta < \delta')。$$

由于 n_2 几乎必然有限，对于所有 δ',

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(d_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X}) \ge \epsilon) \le \epsilon + \mathbb{P}(\delta < \delta').$$

由于这对任意确定性的 $\delta' > 0$ 都成立，并且由于 δ 几乎必然为正，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(d_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X}) \ge \epsilon) \le \epsilon,$$

这就完成了证明。 □

6.2 对小环所耗总时间的估计

本小节的目标是证明定理 6.15，其大意是随机游走不会在微观环上花费宏观量级的时间，并且我们可以对网格尺寸一致地量化这一点。为此，我们估计环擦随机游走 γ^{nD}的邻域大小：在连续极限中，我们知道 γ 的 δ-邻域大小为 $\delta^{3/4+o(1)}$量级，因此可以预期，在 nD 上，S 的 k-邻域的基数应为 $n^2(k/n)^{3/4+o(1)}$量级，其中 $k < n$。我们只能证明其为 $O(n^2(k/n)^{\epsilon})$量级（推论 6.11），但这已足以得出结论。我们通过估计给定点 x 位于 γ^{nD}附近的概率来证明这一点。引理 6.9 给出了一个初步估计；若将范围限制在距 ∂D 至少有一定距离的点上，则可得到更好的估计。这足以处理边界满足非常弱的正则性条件的区域，但我们将利用引理 6.8 去掉这一额外要求：当 x 靠近 ∂D 时，它不太可能位于（经缩放的）环擦随机游走附近，因为它本来就不太可能位于（经缩放的）随机游走附近，这是因为随机游走很可能在接近 ∂D 之前就被杀死

到 x。我们先讨论两个关于简单随机游走的技术性估计：它绕 x 一周且从未靠近它的概率下界（引理 6.6），以及上穿越事件数量的上界（引理 6.7）。我们将在引理6.8 和引理 6.9中分别使用这两个结果。

对于 $r>0$ 令 $B_r^{\mathbb{Z}^2}=\{x\in\mathbb{Z}^2:|x|<r\}$，并令 $\partial B_r^{\mathbb{Z}^2}=\{x\in B_r^{\mathbb{Z}^2}:\exists y\in\mathbb{Z}^2\setminus B_r^{\mathbb{Z}^2}:|x-y|=1$。对于在 $\mathbb{Z}^2$ 上的简单随机游走 S（不一定从 0 出发），令 $\zeta_r(S)=\inf\{j:|S(j)|<r\}$ 为 S 进入 $B_r^{\mathbb{Z}^2}$ 的首次进入时间。再令 $\zeta_0(S)$为 S 首次到达 0 的时间。对于满足 $S(s)=S(t)$ 的 $0\le s<t<\zeta_0(S)$，若对 $S_{[s,t]}$ 进行分段线性插值得到的连续环在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$上不可缩，则称 $S_{[s,t]}$ 不可缩。

引理 6.6。对于 $r>2$ 和 $x\in\partial B_r^{\mathbb{Z}^2}$，令

$$p_{x,r}:=\mathbb{P}_x(\exists s,t:s\le t\le\zeta_{r/2}(S):S_{[s,t]}\ \textit{is non-contractible}).$$

那么，下确界$\{p_{x,r}:r>2,x\in\partial B_r^{\mathbb{Z}^2}\}>0$。

证明。设 W 是一个从 0 出发、协方差矩阵为 $I/2$ 的平面布朗运动。设 E 是事件

$\zeta_{3/4}(W)\le 1$，并且存在 $s\le t\le\zeta_{3/4}(W)$，使得 $W_{[s,t]}$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 上不可缩，$|W(s)-1|>1/4$，且 $|W(s)-W(\zeta_{3/4}(W))|>1/4$,

并且 $p_0=\mathbb{P}(E)>0$。在事件 E 上，对于任意满足$\|\ell-W\|_{\infty,[0,1]}\le 1/4$ 的曲线 ℓ，存在 $s'\le t'\le\zeta_{1/2}(\ell)$，使得 $\ell(s')=\ell(t')$，且 $\ell_{[s',t']}$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 上不可缩。

通过分段线性插值将 S延拓到 $[0,\zeta_0(S))$，对于给定的 r和 $x=|x|e^{i\phi}\in\partial B_r^{\mathbb{Z}^2}$，定义 $\tilde{S}:t\mapsto e^{-i\phi}S(2r^2t)/r$。当 $r\to\infty$时，$\tilde{S}$在分布意义下局部一致地收敛到 W。取足够大的 r_0，使得对所有 $r\ge r_0$，存在 W 与 S 的一个耦合，使得˜事件 F的概率至少为 $1-p_0/2$。因此，

$$\inf\{p_{x,r}:r\in[r_0,\infty),x\in\partial B_r^{\mathbb{Z}^2}\}\ge\mathbb{P}(E\cap F)\ge p_0/2>0.$$

另一方面，对于所有 $x\in\partial B_r^n$和 $r>2$，有 $r\le|x|+1$ 和 $|x|>1$。由于 $p_{x,\,r}$关于 r 变量单调递减，

$$\inf\{p_{x,r}:r\in(2,r_0],x\in\partial B_r^n\}\ge\min\{p_{x,|x|+1}:x\in\mathbb{Z}^2,|x|>1\}.$$

对于任意满足 $|x|>1$的 $x\in\mathbb{Z}^2$，至少存在一条从 x 和 $s<t<\xi_{(|x|+1)/2}(\eta)$出发的确定性路径 η，使得 $\eta_{[s,t]}$ 是不可缩的，因此 $p_{x,\,|x|+1}>0$，证明完毕。□

下文中，对于 W（无论离散或连续）以及 $0<a<b$，我们递归地定义(a,b)-上穿时刻 $\tau_i=\tau_i(a,b,W)$与 $\sigma_i=\sigma_i(a,b,W)$:

$$\tau_0=\sigma_0=0,\tau_{i+1}:=\inf\{j\ge\sigma_i:|W(j)|\le a\},\sigma_{i+1}:=\inf\{j\ge\tau_{i+1}:|W(j)|\ge b\},$$

然后我们定义 W 在时间 T之前的(a,b)-上穿次数

$$N_{a,b,T}(W):=\max\{i:\tau_i(a,b)<T\}.$$

对于 $r>0$，我们还定义离开时间 $\xi_r=\inf\{j:|W(j)|\ge r\}$。

引理 6.7. 设 S 为 $\mathbb{Z}^2$上的简单随机游走。则存在 C、C'，使得对所有满足 $C\log(n)\le k\le n/2$ 的k、$n\ge 2$，以及对所有 $x\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}_x[N_{k,2k,\xi_n}(S)]\le C'\log_2(n/k).$$

证明。这既可用强（KMT）耦合证明，也可直接证明。例如，由引理 6.6.7（见 [LL10],），存在 $c>0$ 使得若 $\rho_k=\inf\{j\ge 0:|W(j)|\le k\}$ 则有

$$\mathbb{P}_x(\xi_n<\rho_k)\ge p_{k,n}:=c(\log(k/n))^{-1}$$

只要 $n\ge 2k$，对与 $B(0,2k)$ 相邻的点 $x\in\mathbb{Z}^2$ 一致成立。反复应用强马尔可夫性质，我们推得 $\mathbb{P}_x[N_{k,2k,\xi_n}(S)\ge m]\le C(1-p_{k,\,n})^m$，因此 $\mathbb{E}_x[N_{k,2k,\xi_n}(S)]\le p_{k\,n,}^{-1}$，如所需。

□

下一个引理表明，简单随机游走访问靠近边界的点的概率呈多项式级别地小（因此，这也适用于环擦随机游走）。

引理 6.8. 存在 $C<\infty$ 和 $q>0$，使得对于所有正整数 n、k，以及所有 $x\in nD$，

$$\mathbb{P}(d(x,S)\le k)\le Cd(x,0)^{-q}\max(d(x,n\partial D),k)^q,$$

其中 S 是从0 出发、在离开 nD时停止的简单随机游走。

证明。将 C替换为 $\max(C,1)$ 后，不妨设 $d(x,\ n\partial D)<d(x,\ 0)$ 且 $k<d(x,\ 0)$。我们分别讨论 $k<d(x,\ n\partial D)$ 和 $k\ge d(x,\ n\partial D)$ 两种情况。

Let

$$j_0:=\lfloor \ln_2(d(x,0)/d(x,\partial D))\rfloor,$$

即满足 $2^{j_0}d(x,\ \partial D)\le d(x,\ 0)$ 的最大整数，它是非负的。对于 $j\in\{1,\dots,j_0-1\}$，考虑同心圆盘

$$\mathbb{D}_j:=\{y\in\mathbb{Z}^2:|y-x|\in[2^{j_0-j-1}d(x,n\partial D),2^{j_0-j}d(x,n\partial D))\},$$

并令1 et τ'_j 为 S 进入 $\mathbb{D}_j$的首次时间，它们构成一个递增的停止时刻序列 .

考虑事件 $E_j\subset\{\tau'_j<\infty\}$：存在 s、t满足 $\tau'_j\le s<t\le\tau'_{j+1}$，使得$S_{[s,t]}$ 绕 x不可缩。根据引理 6.6，该事件发生的概率有一个正的下界 p，且该下界与任何参数都无关。此外，要使该事件发生，S 必须离开 nD：我们用反证法，假设相反（读者可以画图验证，我们总能找到一条始终位于 D 之外、连接 $\mathbb{D}_j$两个边界分支的路径）。令 D' 为由 $S_{[s,t]}$围成的无界道路连通分支的补集。由于 nD 是单连通的且包含 $S_{[s,t]}$，_ $D'\subset nD$。由于 $S_{[s,t]}$在 $\mathbb{D}_j$上不可缩，D'包含以 x为圆心、半径为 $r=2^{j_0-j-1}d(x,n\partial D)\ge d(x,n\partial D)$ 的闭球 B。由紧致性，存在 $z\in n\partial D$使得$d(x,z)=d(x,n\partial D)$。特别地，$z\notin nD$，但 $z\in B\subseteq D'\subset nD$，因此矛盾。

因此，对于 $k<d(x,\ n\partial D)$，令 $q=\ln_2(p^{-1})$ 和 $C=p^{-2}$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(d(x,S)\le k\big)&\le\mathbb{P}\big(d(x,S)\le d(x,n\partial D)\big)\le\mathbb{P}\big(\forall j\in\{1,\dots,j_0-1\},(E_j)^c\big)\\&\le\prod_{j=1}^{j_0-1}\mathbb{P}\big((E_j)^c\big|\tau'_j<\infty\big)\le p^{j_0-1}\le Cd(x,n\partial D)^qd(x,0)^{-q}.\end{aligned}$$

在 $k\ge d(x,\ n\partial D)$ 的情况下，改为考虑 $j_1:=\lfloor\ln_2(d(x,\ 0)/k)\rfloor$。由于 $k<d(x,\ 0)$ 且 $k>d(x,\ n\partial D)$，有 $j_0\in\{0,\dots,j_1\}$。于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(d(x,S)\le k\big)&\le\mathbb{P}\big(\forall j\in\{1,\dots,j_1-1\},(E_j)^c\big)\le\prod_{j=1}^{j_1-1}\mathbb{P}\big((E_j)^c\big|\tau_j<\infty\big)\\&\le p^{j_1-1}\le Ck^qd(x,0)^{-q},\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

现在我们证明，环擦随机游走以多项式小的概率访问区域内部的某个点。在这里，用随机游走的值域粗略地界定循环擦除随机游走的值域是不够的（因为随机游走会访问除 对数级比例之外的所有点）。相反，我们必须依靠这样一个事实：随机游走会在所有尺度的环域中形成环，从而擦除路径之前的部分。下面的结果可以通过应用 [BLR20], 中的命题 4.11 得到，但为完整起见，我们给出证明。

引理 6.9。 存在 $C',C''<\infty$，使得对于任意满足 $C'\log(n)\le k\le n/2$ 的正整数 $k,n\ge 2$，对所有 $x\in nD\setminus\{0\}$，

$$\mathbb{P}(d(x,\gamma^{nD})\le k)\le C''\log_2(n/k)\,k^{\frac12}\,d(x,n\partial D\cup\{0\})^{-\frac12}.$$

证明。将 C'' 替换为 $\max(C'',2^{3/2})$ 后，不妨设 $4k+4<d(x,n\partial D\cup\{0\})$。

令 S 为从 0 出发、在 $\mathbb{Z}^2$ 上的简单随机游走，τ 为其首次离开 nD 的时刻，并令 γ 为 $S_{[0,\tau]}$的环擦除，其分布与 γ^{nD} 相同。

在事件 $\{d(x,\gamma)\le k\}$ 上，至少存在一对 (j_0,s)，使得 $j_0\le\tau$, $S_{j_0}=\gamma_s$，且 $|S_{j_0}-x|\le k$（例如，取 s，使得 $d(x,\gamma)=d(x,\gamma_s)$）。在 j_0 的所有可能取值中，我们选择最大的一个。

我们声称 $S_{[j_0+1,\tau]} \cap LE(S_{[0,j_0]}) = \emptyset$。令 s'' 为 $LE(S_{[0,j_0]})$ 的长度，并用反证法，假设存在 $j_1 \in [j_0+1, \tau]$ 和 $s' \in [0, s'']$，使得 $S_{j_1} = LE(S_{[0,j_0]})_{s'}$，并令 j_1 为具有此性质的最小值。于是，

$$LE(S_{[0,j_0]})_{s'} = S(j_1) \neq S_{j_0} = LE(S_{[0,j_0]})_{s''}$$

第一个等式根据（j_1，s'）的定义得出，不等式由 j_0 的极大性得出（回想 $j_1 > j_0$），最后一个等式则是因为对曲线进行环擦除会保留其端点。特别地，$s' \neq s''$，因此 $s' < s''$。由于 $LE(S_{[0,j_0]})$ 是单射，且 $LE(S_{[0,j_0]})_{s''} = \gamma_s$，我们可推得$\gamma_s \notin LE(S_{[0,j_0]})_{[0,s']} = LE(S_{[0,j_1]})$。此外，$j_0$ 的极大性确保不存在满足 $S_j = \gamma_s$的$j \geq j_1$。回想一下，环擦除是按时间顺序进行的：对于任意的 P，P′，只要 P $\oplus$ P′有定义，$LE(\mathrm{P} \oplus \mathrm{P}') = LE(LE(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{P}')$。因此，

$$\begin{aligned}\gamma_s \notin LE(S_{[0,j_1]}) \cup S_{[j_1,\tau]} = \mathrm{Range}(LE(S_{[0,j_1]}) \otimes S_{[j_1,\tau]}) &\supseteq \mathrm{Range}(LE(LE(S_{[0,j_1]}) \otimes S_{[j_1,\tau]})) \\ &= \mathrm{Range}(LE(S_{[0,\tau]})) = \mathrm{Range}(\gamma),\end{aligned}$$

由此得出矛盾。

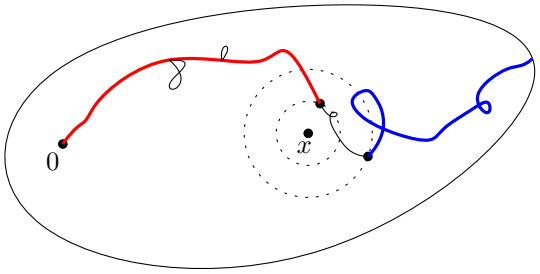

图 3：轨迹中较粗的部分（$LE(S)_{[0,s]}$ 为红色，$S_{[\sigma_{M_0},\tau]}$ 为蓝色）彼此不相交。

请注意，j_0 不是关于 S 的停时，因此我们无法在此时应用马尔可夫性质。现在我们通过使用上穿时刻来解决这一问题。令 τ_i、σ_i 和 $N_{k,\,2k,\,\tau^{D_n}}$ 分别为 $S - x$ 的 $(k,\ 2k)$-上穿时刻和上穿时刻数。由于 $2k \leq d(x,\ n\partial D)$，我们有等价关系 $(\tau_i < \tau \iff \sigma_i < \tau)$。

令 m_0 为满足 $\tau_{m_0} \leq j_0 < \tau_{m_0+1}$的唯一随机整数。由于 $|S_{j_0} - x| \leq k$，我们有 $\tau_{m_0} \leq j_0 < \sigma_{m_0} < \tau_{m_0+1}$（若有 $\sigma_{m_0} \leq j_0$，则在 τ_{m_0}和 σ_{m_0}之间会有一次上穿，随后在 σ_{m_0} 和 j_0之间会有一次下穿，因此我们就会有 $\tau_{m_0+1} \leq j_0$）。此外，在事件 $\{d(x,\ \gamma)$ 上，$\leq k\}$ $\tau_{m_0} \leq j_0 < \tau$，因此 $\sigma_{m_0} < \tau$。

由于对于所有 $j \geq j_0$，$LE(S_{[0,j_0]}) \cap S_{[j_0+1,\tau]} = \emptyset$, $LE(S_{[0,j]})_{[0,j_0]} = LE(S_{[0,j_0]})$。对于一条简单曲线$\eta$，令 $\pi(\eta)$ 表示将 η 限制在首次满足 $|\eta_j - x| \leq k$ 的时间 j 之前所得的部分。因此，

$$\begin{aligned}j_0 \leq \tau &\implies \sigma_{m_0} < \tau, LE(S_{[0,\sigma_{m_0}]})_{[0,\tau_{m_0}]} \cap S_{[\sigma_{m_0}+1,\tau]} = \emptyset \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N} : \sigma_m < \tau, LE(S_{[0,\sigma_m]})_{[0,\tau_m]} \cap S_{[\sigma_m+1,\tau]} = \emptyset \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N} : \sigma_m < \tau, \pi(LE(S_{[0,\sigma_m]})) \cap S_{[\sigma_m+1,\tau]} = \emptyset.\end{aligned}$$

对于任意给定的 m，现在我们可以在停时 σ_m 处应用马尔可夫性质：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(x,\gamma) \leq k) &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\pi(LE(S_{[0,\sigma_m]})) \cap S_{[\sigma_m+1,\tau]} = \emptyset) \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\eta} \sup_y \mathbb{P}(\sigma_m \leq \infty,\ \pi(LE(S_{[0,\sigma_m]}) = \eta)\ \mathbb{P}_y(S'([1,\tau]) \cap \eta = \emptyset) \\ &\leq \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sigma_m \leq \infty)\Big) \sup_{y,\eta} \mathbb{P}_y(S'_{[1,\tau']}) \cap \eta = \emptyset) \\ &= \mathbb{E}[N_{k,2k,\tau}] \sup_{y,\eta} \mathbb{P}_y(S'_{[0,\tau']}) \cap \eta = \emptyset),\end{aligned}$$

其中，η 遍历 $\mathbb{Z}^2$上从0出发、在首次满足$|\eta_j - x| \leq k$的 j 时停止的简单路径集合，y 遍历 $\{y \in nD :\ |y - x| \in [2k, 2k+1)\}$，$S'$ 是在 $\mathbb{P}_y$下从 y出发的随机游走，而 τ' 是其离开 nD的离开时间。在这些集合中，y 与 η 之间的距离小于 $3k$，且离开时间 τ' 大于

$$\xi := \inf\{j : |S'(j) - y| \geq d(x, n\partial D \cup \{0\}) - 2k - 1\},$$

由离散Beurling估计 [LL10，定理6.8，可知1] 存在一个普适常数 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{P}_y(S'_{[0,\tau']} \cap \eta = \emptyset) \le c\sqrt{\frac{k}{d(x, n\partial D \cup \{0\}) - 2k - 1}} \le \frac{c}{2}\sqrt{\frac{k}{d(x, n\partial D \cup \{0\})}}.$$

由于 $k \in [C\log(n)\ n/2]$，由引理 6.7 及 $t \mapsto N_k$ 的单调性可知，$_{2k,\ t}$ 对于常数 C'，有 $\log(n/k)$，其中该常数仅取决于 D 的直径。因此，

$$\mathbb{P}(d(x,\gamma) \le k) \le \frac{cC'}{2}\log(n/k)\sqrt{\frac{k}{d(x, n\partial D \cup \{0\})}}. \qquad \square$$

我们可以将前面两个估计合并为一个不等式，如下所示。

命题 6.10。存在 C_0、$C' < \infty$ 和 $\nu \in (0,\ 1/2)$，使得对于任意整数 $n \ge 2$ 和 $k \ge C'\log(n)$，对所有 $x \in nD \setminus \{0\}$，

$$\mathbb{P}_0(d(x, \gamma^{nD}) \le k) \le C_0 d(x,0)^{-\nu} k^{\nu} \max(1, \log(n/k)).$$

证明。将 C_0 替换为 $\max(C_0, 2^{\nu}\mathrm{Diam}(D)^{\nu}$后，不妨设 $k \le n/2$。令 C，C'，C''，q为引理 6.8 和 6.9中的常数。回忆一下，对于 $k \in [C'\log(n)\ n/2]$，我们得到

$$\mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k) \le \mathbb{P}(d(x,S) \le k) \le Cd(x,0)^{-q} d(x, n\partial D)^{q}, \tag{24}$$

and

$$\mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k) \le C''\log_2(n/k) k^{\frac{1}{2}} d(x, n\partial D)^{-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

设 $\theta := q/(q + 1/2) \in (0,1)$，且 $\nu := (1-\theta)q = \theta/2 < 1/2$。根据 k、$d(x, n\partial D)$ 和 $d(x,0)$ 之间的相对顺序，我们讨论四种情形。

- 情形 $d(x,0) \le d(x, n\partial D)$. 由于 $2\nu < 1$，利用 (25)，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k) \le \mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k)^{2\nu} &\le C''^{2\nu}\log(n/k)^{2\nu} k^{\nu} d(x, n\partial D)^{-\nu} \\ &\le C''^{2\nu}\max(1, \log(n/k)) k^{\nu} d(x,0)^{-\nu}.\end{aligned}$$

- 情形 $d(x, n\partial D) \le d(x,0) \le k$。我们直接使用

$$\mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k) \le 1 \le d(x,0)^{-\nu} k^{\nu}.$$

- 情形 $d(x, n\partial D) \le k \le d(x,0)$。由于 $\nu = (1-\theta)q \le q$，(24) 可直接推出

$$\mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k) \le Cd(x,0)^{-q} k^{q} \le Cd(x,0)^{-\nu} k^{\nu}.$$

- 情形 $k \le d(x, n\partial D) \le d(x,0)$。我们在 (24) 和 (25) 之间插值：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k) &= \mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k)^{1-\theta} \mathbb{P}(d(x, \gamma^{nD}) \le k)^{\theta} \\ &\le C^{1-\theta} C''^{\theta} \log_2(n/k)^{\theta} k^{\theta/2} d(x,0)^{-(1-\theta)q} d(x, n\partial D)^{-\theta/2} d(x, \partial D)^{(1-\theta)q} \\ &= C^{1-\theta} C''^{\theta} \log_2(n/k)^{\theta} k^{\nu} d(x,0)^{\nu} < C^{1-\theta} C''^{\theta} \log_2(n/k) k^{\nu} d(x,0)^{\nu}.\end{aligned}$$

最后，取 $C_0 = \max(1, C, C'')$，即可得出结论。 $\square$

Coro推论 6.11。存在 C'、$C_1 < \infty$ 和 $\nu > 0$，使得对于所有正整数 n，a nd $k \ge C$ $\log(n)$，

$$\mathbb{E}[\#\{x \in nD : d(x, \gamma^{nD}) \le k\}] \le C_1 k^{\nu} n^{2-\nu}.$$

证明。最终将 C_1 替换为$\max(C_1, 2^{\nu}\lambda(D))$，我们可以假设 $k < n/2$。设

$$C_{\nu} := \sup_{n \ge 1}\ n^{\nu-2} \sum_{x \in nD \setminus \{0\}} d(x,0)^{-\nu},$$

它对所有 $\nu \in (0,2)$都是有限的。事实上，令 K 满足 $D \subset [-K,K]^2$。则，

$$\begin{aligned}\sum_{x\in nD\setminus\{0\}} d(x,0)^{-\nu} &\le \sum_{x\in nD\setminus\{0\}} \int_{x+[-1/2,1/2]^2} (|z|-\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\nu}\mathrm{d}z \\ &\le \sum_{x\in nD\setminus\{0\}} \int_{x+[-1/2,1/2]^2} (\frac{2-\sqrt{2}}{2})^{-\nu}|z|^{-\nu}\mathrm{d}z \quad (\, r-\frac{1}{\sqrt{2}} \ge (1-\frac{1}{\sqrt{2}})r \text{ for } r\ge 1) \\ &\le (1-\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\nu}\int_{[-nK+1/2,nK+1/2]^2} |z|^{-\nu}\mathrm{d}z \\ &= (1-\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\nu} n^{2-\nu}\int_{[-K-1/(2n),K+1/(2n)]^2} |u|^{-\nu}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

最后一个积分不超过其在 $n=1$处的取值；当 $\nu<2$时，该取值有限，因此 $C_\nu<\infty$。令 $\nu\in(0,$ $_{1\ 2}$)，并令 C_0 由命题6.10给出。我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\#\{x\in nD : d(x,\gamma^{nD})\le k\}] &= \sum_{x\in nD}\mathbb{P}(d(x,\gamma^{nD})\le k) \\ &\le 1 + C_0\log_2(n/k)k^\nu \sum_{x\in nD\setminus\{0\}} d(x,0)^{-\nu} \\ &\le 1 + C_0\log_2(n/k)k^\nu n^{2-\nu}C_\nu \\ &\le C_1(k/n)^{\nu'}n^2,\end{aligned}$$

对于任意的 $\nu'\in(0,\ \nu)$，以及足够大的 C_1。 □

注 6.12。 对于 K 紧包含于 D的情形，我们可以由引理*6.9* 推出以下界

$$n^{-2}\mathbb{E}[\#\{x\in nK : d(x,\gamma^{nD})\le k\}] \le C|\log(k/n)|(k/n)^{\frac{1}{2}}.$$

我们应当预期最优指数。左侧实际上是$(k/n)^{\frac{3}{4}+o_{(1)}}$量级。命题 *6.10* 给出了一个较差的界，但使我们能够将 K 替换为 D。

命题 6.13。 存在 $C<\infty$ 和 $\nu>0$，使得对所有正整数 n 和 k，

$$\mathbb{E}\Big[\#\{\mathsf{L}\in\mathbb{L}^{nD}_{\gamma^{nD}} : t_{\mathsf{L}}=k\}\Big] \le Cn^{2-\nu}k^{-2}\max(\sqrt{k},\log(n))^\nu.$$

因此（回忆一下，$T_{\le\delta}(\mathcal{X}^n)$ 表示 $\mathcal{X}^n$ 在持续时间小于 δn^2 的环上花费的总时间），存在 $C<\infty$，使得对于所有 $n\ge 1$ 及所有 $\delta>0$，

$$\mathbb{E}[T_{\le\delta}(\mathcal{X}^n)] \le C((\log\log n)(\log n)^\nu n^{-\nu} + \delta^{\frac{\nu}{2}}). \tag{26}$$

证明。 我们在整个证明过程中假设 k 为偶数，否则左端等于 0。设 L 的分布为从 0 出发、具有 k 步的 $\mathbb{P}_k$上的简单随机游走环，并令

$$r_{\mathsf{L}} := \max\{|\mathsf{L}(t)-\mathsf{L}(0)| : t\in\{0,\dots,k\}\}.$$

关于 r_{L} 尾部的下述估计是经典结果，为求完整起见，我们在此给出证明。

引理 6.14。 存在一个普适常数 $C>0$，使得

$$\mathbb{P}_k(r_{\mathsf{L}}\ge R\sqrt{k}) \le C\exp(-R^2). \tag{27}$$

引理 *6.14* 的证明。 令 $(X_n, n\ge 0)$ 表示从 $X_0=0$ 出发、在 $\mathbb{Z}^2$ 上的简单随机游走，并令 $M_n=$ 最大值$\{|X_j|:\ 0\le j\le n\}$。由长度为 k 的随机游走桥的对称性和可逆性，只需证明

$$\mathbb{P}(M_{k/2}\ge R\sqrt{k}|X_k=0) \le (C/2)\exp(-R^2). \tag{28}$$

（回想一下，假设 k 为偶数。）现在，令 j 在 $k/2$ 为偶数时等于 $k/2$，否则等于 $k/2+1$。应用马尔可夫性质，并令 $p_n(x,y)$ 表示在 $\mathbb{Z}^2$上随机游走的转移概率，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{k/2}\ge R\sqrt{k}; X_k=0) &\le \mathbb{P}(M_j\ge R\sqrt{k}; X_k=0) \\ &\le \mathbb{E}(1_{\{M_j\ge R\sqrt{k}\}}p_{k-j}(X_j,0)).\end{aligned}$$

现在，利用柯西–施瓦茨不等式以及简单随机游走在 $\mathbb{Z}^2$ 上的可逆性，众所周知，对于任意与 0 奇偶性相同的 $x \in \mathbb{Z}^2$，都有 $p_{2n}(x,0) \le p_{2n}(0,0)$。当 x 与 0 的奇偶性不同时，这一结论也显然成立。因此（由于我们选取的 j 为偶数，所以 $k-j$也为偶数），可推得

$$\mathbb{P}(M_{k/2} \ge R\sqrt{k}; X_k = 0) \le p_{k-j}(0,0)\mathbb{P}(M_j \ge R\sqrt{k}) \tag{29}$$

由最大阿祖马–霍夫丁不等式，

$$\mathbb{P}(M_j \ge R\sqrt{k}) \le \exp(-2\tfrac{R^2 k}{j}) \le \exp(-R^2).$$

此外，由局部中心极限定理，存在一个普适常数 $C > 0$ 使得$p_{k-j}(0,\ 0) \le Cp_k(0,\ 0)$。代入（29）可得

$$\mathbb{P}(M_{k/2} \ge R\sqrt{k}; X_k = 0) \le C\exp(-R^2)p_k(0,0).$$

除以 $P(X_k = 0) = p_k(0,\ 0)$ 得到条件概率，这就证明了（28）（将 C 的值乘以二）所需的结论。 □

现在回到命题 6.13 的证明。对于任意 $k \ge 1$,

$$\mathbb{E}[\#\{\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2} : t_{\mathsf{L}} = k, \mathsf{L}(0) = 0\}] = \frac{4^{-k}}{k}\binom{k}{k/2}^2 \le Ck^{-2} \tag{30}$$

˜其中 C 为普适常数。令 ν，C'，C_1 为推论 6.11 中的常数，令 C 为命题 6.13 中的常数，并令 $n \ge 2$。对于 R 非负整数，将推论 6.11应用于 $k_R := \lceil \max((R+1)\sqrt{k},\ C'\log(n))\rceil$:

$$\mathbb{E}[\#\{x \in nD : d(x, \gamma^{nD}) \le k_R\}] \le C_1 n^{2-\nu} k_R^{\nu}. \tag{31}$$

要使以 x 为根的 L 与 γ^{nD} 相交，必须有 $r_{\mathsf{L}} \ge d(x, \gamma^{nD})$。令 $\mathbb{E}^*$ 表示给定路径 γ^{nD} 时关于环汤的条件期望（即固定 γ^{nD} 的实现，并仅对环汤 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 取期望）。由 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 与 γ^{nD} 的独立性以及 $\mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2}$ 的平移不变性，对于所有 $\delta \in (0, 1/2]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\Big[\#\{\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}_{\gamma^{nD}} : t_{\mathsf{L}} = k\}\Big] &= \sum_{R=0}^{\infty} \mathbb{E}^*\big[\#\{\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}_{\gamma^{nD}} : t_{\mathsf{L}} = k, r_{\mathsf{L}} \in [R\sqrt{k}, (R+1)\sqrt{k})\}\big] \\
&\le \sum_{R=0}^{\infty} \mathbb{E}^*\big[\#\{\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2} : \mathsf{L}(0) \in nD,\ d(\mathsf{L}(0), \gamma^{nD}) \le (R+1)\sqrt{k}, \\
&\qquad\qquad t_{\mathsf{L}} = k, r_{\mathsf{L}} \in [R\sqrt{k}, (R+1)\sqrt{k})\}\big] \\
&\le \sum_{R=0}^{\infty} \#\{x \in nD : d(x, \gamma^{nD}) \le (R+1)\sqrt{k}\} \\
&\qquad \cdot \mathbb{E}^*\big[\#\{L \in \mathbb{L}^{\mathbb{Z}^2} : L(0) = 0, t_{\mathsf{L}} = k, r_{\mathsf{L}} \in [R\sqrt{k}, (R+1)\sqrt{k}\}\big] \\
&\le \sum_{R=0}^{\infty} \#\big\{x \in nD : d(x, \gamma^{nD}) \le (R+1)\sqrt{k}\big\}\big(Ck^{-2}\big)\big(\tilde{C}\exp(-R^2)\big) \quad \text{by (30,27)}
\end{aligned}$$

现在对 γ^{nD} 取期望并应用 (31)，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\#\{\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}_{\gamma^{nD}} : t_{\mathsf{L}} = k\}\Big] &\le \sum_{R=0}^{\infty} \big(C_1 n^{2-\nu} k_R^{\nu}\big)\big(Ck^{-2}\big)\big(\tilde{C}\exp(-R^2)\big) \\
&= \tilde{C}CC_1 k^{-2} n^{2-\nu} \sum_{R=0}^{\infty} \exp(-R^2) k_R^{\nu}.
\end{aligned}$$

由于 $k_R \le 2(R+1)(\max(\sqrt{k}, \log(n)))$ 且 $\sum_{R=0}^{\infty} \exp(-R^2)(R+1)^{\nu} < \infty$，我们推得命题 6.13 的第一条结论。

对 $k = 1$ 求和至 $\lceil \log(n)^2 \rceil$，并从 $k = \lceil \log(n)^2 \rceil$ 求和至 δn^2，其中 $\delta > 0$ 任意，我们推得存在一个常数 C'，使得对于所有 $n \ge 1$ 和所有 $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}[T_{\le \delta}(\mathcal{X}^n)] = n^{-2} \sum_{k=1}^{\lfloor \delta n^2 \rfloor} k\mathbb{E}[\#\{\mathsf{L} \in \mathbb{L}^{nD}_{\gamma^{nD}} : t_{\mathsf{L}} = k\}] \le C'((\log\log n)(\log n)^{\nu} n^{-\nu} + \delta^{\frac{\nu}{2}}).$$

这证明了（26）。 □

定理 6.15。 当 $n \to \infty$, $t_{\mathcal{X}^n}$ 依概率收敛到 $t_{\mathcal{X}}$ 时。

证明。回忆 $\mathcal{X} = (\gamma, \mathcal{L})$，其中 γ 是一条径向 SLE_2 曲线。因此， γ 几乎必然具有有限的d维闵可夫斯基含量，其中某个 $d < 2$ （事实上可以取 $d = 5/4$ [LR15], ，但此处无关紧要）。由引理5.6, 仅对环汤取期望 $\mathbb{E}'$ 时， $\mathbb{E}'[t_{\mathcal{X}}] < \infty$。

考虑事件 F_k ，使得 $t_{\mathcal{X}} \le k$。首先注意，由于 $t_{\mathcal{X}} < \infty$ 几乎必然成立，因此我们有$\mathbb{P}(F_k) \to 1$ ，当 $k \to \infty$ 时。

令 $\epsilon > 0$。固定 k，使得 $\mathbb{P}(F_k) \ge 1 - \epsilon/2$。令 $f(\epsilon) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{F_k} T_\epsilon(\mathcal{X})]$。由于 $t_{\mathcal{X}} < \infty$几乎必然成立，我们有 $T_{\le\epsilon}(\mathcal{X}) \to 0$，当 $\epsilon \to 0$时，几乎必然成立，因此由控制收敛定理， $f(\epsilon) \to 0$，当 $\epsilon \to 0$时也成立。令 $\delta > 0$，使得 $C\delta^{\frac{\nu}{2}} + f(\delta) < \epsilon^2/2$，其中 C取自式 (26)。令 $\eta \in (0, \delta)$。令 $I_{\eta,n}$表示存在一个从 $\mathcal{X}$ 出发的 η-同构，且该同构是 δ-适配的事件（回忆引理 4.3）。结合引理 4.3 和命题 6.4，我们有 $\limsup_{\eta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I^c_{\eta,n}) = 0$。特别地，我们可以选取充分小的 $\eta > 0$ （特别是 $\eta < \delta$），使得 $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I^c_{\eta,n}) \le \epsilon/2$。

对所有 $n \ge 0$ 使得 $\delta \ge \epsilon_n$，由于$I_{\eta,\,n} \subset E_{\delta,\,n} \subset E_n$ 其中$E_{\delta,\,n}$ 是命题6.4 中的良事件，且 E_n 是定理6.1中的良事件，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|t_{\mathcal{X}^n} - t_{\mathcal{X}}|\mathbb{1}_{I_{\eta,n}\cap F_k}] &\le \mathbb{E}[T_{\le\delta}(\mathcal{X}_n)|] + \mathbb{E}[T_{\le\delta}(\mathcal{X})|1_{F_k}] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_n} \sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}} |t_\ell - t_{\phi\circ\psi(\ell)}|] \\ &\le C(\log\log n(\log n)^\nu n^{-\nu} + \delta^{\frac{\nu}{2}}) + f(\delta) + \alpha n^{-2}\mathbb{E}[\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}].\end{aligned}$$

因此，由马尔可夫不等式

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|t_{\mathcal{X}^n} - t_{\mathcal{X}}| \ge \epsilon) &\le \mathbb{P}(I^c_{\eta,n}) + \mathbb{P}(F^c_k) + \epsilon^{-1}(C(\log\log n(\log n)^\nu n^{-\nu} + \delta^{\frac{\nu}{2}}) + f(\delta) + \alpha n^{-2}\mathbb{E}[\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}]) \\ &\le \mathbb{P}(I^c_{\eta,n}) + \epsilon/2 + C\epsilon^{-1}\log\log n(\log n)^\nu n^{-\nu} + \epsilon^{-1}\alpha n^{-2}\mathbb{E}[\#\mathcal{L}_{\gamma,\ge\delta}]\end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|t_{\mathcal{X}^n} - t_{\mathcal{X}}| \ge \epsilon) \le \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

由于 ϵ 是任意的，证明至此结束。 □

7 开放问题

◇ **(可测性 γ。)** 自然地，我们的证明并未给出任何形式的唯一性，尤其无法回答这样一个问题：能否“擦除平面布朗运动的环”，从而得到一条 SLE_2 路径。更确切地说，可以提出以下问题：能否在一条 SLE_2 路径 γ 上添加环汤 $\mathcal{L}$ ，得到布朗运动W ，并使得在这种耦合中， γ （以及 $\mathcal{L}_\gamma$）是 W 的可测函数?

◇ **(几乎必然（非）单射性。)** 一个自然的出发点是考察映射 Ξ 是否为单射。事实上，可以证明它不是。这留下了以下问题： Ξ 几乎必然有唯一的原像吗？我们认为也不是；更确切地说，几乎必然存在无穷多个原像。

◇ (**三维。**) 若能在三维情形下证明类似结果，将尤其有趣。在这种情况下，附着映射 Ξ 在给定条件下不具备（确定性的）连续性，因为满足γ、ℓ且 γ 与 ℓ 相交的点对集合不再是开集（微小变形可能使 ℓ脱离 γ）。然而，很自然地会认为，对于循环擦除随机游走的标度极限 γ ，存在某种几乎必然的连续性：“典型的”微小扰动仍应与 γ相交。事实上，这类想法早已用于 [SS 18]的证明中。

◇ （**SLE_2 环的类比。**）是否可以将单位布朗环描述为一种 SLE_2 环，并在其上装饰独立的布朗环汤?

◇ （**其他取值的 κ。**）我们的构造表明，对于其他的 κ，可以将强度任意的环汤 λ 附加到弦状 SLE_κ 上，从而得到一条连续路径 $W^{\kappa,\,\lambda}$。此外，已知当环汤的强度为

$$\lambda = \lambda(\kappa) = \frac{(8 - 3\kappa)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$

那么，最终得到的凸包（即填补所有空洞后）给出一个指数为$\alpha = (6 - \kappa)/(2\kappa)$的限制测度。但在这种情况下，最终得到的连续轨迹 $W^{\kappa,\,\lambda}$ 的分布是什么？当 $\kappa \ge 2$时，它是否对应于一条部分擦除环的布朗运动?

◇ (**粗糙路径拓扑中的连续性。**) 稍作调整后应用命题2.4，我们可以推导出 p-变差估计

$$\|X\|_{p-var} \leq C_p(\|\gamma\|_{p-var} + \sum_{\ell \in \mathcal{L}_\gamma} \|\ell\|_{p-var})$$

对于一个显式常数 C_p。我们能否证明 Ξ 关于 α-H¨older 距离或 p-变差距离的某种连续性？粗糙路径拓扑又如何？这些拓扑下的连续性或许成立，但仅沿着 $\mathscr{R}'$上的尖点成立；也就是说，对于给定的 $\mathcal{X} \in \mathscr{R}$，只考虑满足 $\lambda \geq Cd_{\mathscr{R}_0}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')^\beta$的$(\mathcal{X}', \lambda)$，其中 β经过精心选择， C 固定，且 $d_{\mathscr{R}_0}$适配相应的范数。

致谢

N.B. 感谢奥地利科学基金（FWF）提供资助，资助项目为 10.55776/F1002“离散随机结构：计数与标度极限”和 10.55776/PAT1878824“随机共形场”。

I.S. 感谢埃尔温·薛定谔研究所提供初级研究员奖学金（研究规范理论与高斯乘法混沌），这使此次合作得以实现。他还感谢维也纳大学在其访问期间给予的热情接待。本研究的部分工作是在他任职于华威大学期间（获 EPSRC 项目 EP/W006227/1 资助）以及在里昂高等师范学院期间（获 Milyon 卓越实验室资助）完成的。谨此一并感谢这两家机构及其提供的经费支持。

我们感谢 Adri en Kassel 和 Xinyin Li 提供的一些有益讨论 。

参考文献

[BHS24] Nathana¨el Berestycki 和 Levi Haunschmid-Sibitz。近临界二聚体与有质量 SLE。arXiv 预印本 v2，2024 年。[BLR20] Nathana¨el Berestycki、Benoit Laslier 和 Gourab Ray。二聚体与虚几何。《概率年刊》，48(1):1–52，2020 年。[BMR26] Nathana¨el Berestycki、Scott Mason 和 Lucas Rey。近临界二聚体与正弦-戈登模型的有质量全纯性。准备中，2026 年。[BN26] Nathana¨el Berestycki 和 James Norris。施拉姆–勒夫纳演化讲义。讲义，可在作者网页上获取，2026 年。[CW21] Dmitry Chelkak 和 Yijun Wan。关于有质量环删除随机游走收敛到有质量 SLE(2) 曲线。《电子概率学报》，26(none):1–35，2021 年。[Kin93] J. F. C. Kingman。泊松过程，牛津概率学研究丛书第 3 卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1993 年。牛津科学出版物。[LL10] Gregory F. Lawler 和 Vlada Limic。随机游走：现代导论，剑桥高等数学研究丛书第 123 卷。剑桥：剑桥大学出版社，2010 年。[LR15] Gregory F. Lawler 和 Mohammad A. Rezaei。施拉姆–勒夫纳演化的闵可夫斯基含量与自然参数化。《概率年刊》，43(3):1082–1120，2015 年。[LSW03] Gregory F. Lawler、Oded Schramm 和 Wendelin Werner。共形限制：弦状情形。《美国数学会杂志》，16(4):917–955，2003 年。[LSW04] Gregory F. Lawler、Oded Schramm 和 Wendelin Werner。平面环删除随机游走与均匀生成树的共形不变性。《概率年刊》，32(1B):939–995，2004 年。[LTF07] Gregory F. Lawler 和 Jos´e A. Trujillo Ferreras。随机游走环汤。《美国数学会汇刊》，359(2):767–787，2007 年。[LV21] Gregory F. Lawler 和 Fredrik Viklund。径向环删除随机游走在自然参数化下的收敛。《杜克数学杂志》，170，2021 年。[LW04] Gregory F. Lawler 和 Wendelin Werner。布朗环汤。《概率论与相关领域》，128(4):565–588，2004 年。[MS10] Nikolai Makarov 和 Stanislav Smirnov。偏离临界的格点模型与有质量 SLE。第十六届国际数学物理大会，页码 362–371，2010 年。

[Qia26] 钱伟。所有多项式尺度下布朗环汤与随机游走环汤的耦合。*arXiv* 预印本 *arXiv:2601.02992*，2026 年。[SS18] 阿尔乔姆·萨波日尼科夫和白石大辅。关于布朗运动、简单路径与环。《概率论与相关领域》，172(3-4):615–662，2018 年。[Wer96] Wendelin Werner。通过一维布朗运动证明贝尔林投影定理。《剑桥哲学学会数学会刊》，119(4):729–738，1996 年。[Zha11] 詹大鹏。平面布朗运动的环擦除。《数学物理通讯》，303(3):709–720，2011 年。