arXiv:2602.04685v1 [math.AP] 4 Feb 2026

通过对数 Sobolev 不等式研究 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中一类薛定谔半群的内在超收缩性

Christoph Schwerdt[1], Alexander Mill[2] 和Dirk Hundertmark[3]

[1] 罗斯托克大学数学研究所，Ulmenstraße 69，18 057 罗斯托克，德国；电子邮箱地址：christoph.schwerdt@uni-rostock.de

[2] 罗斯托克大学数学研究所，Ulmenstraße 69，18 057 罗斯托克，德国；电子邮箱地址：alexander.mill@uni-rostock.de

[3] 卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）数学系，76 128 卡尔斯鲁厄，德国；电子邮箱地址： dirk.hundertmark@kit.edu

2026年2月5日

摘要

在本文的第一部分，我们给出 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上薛定谔算子 $H = -\Delta + q(x)$ 中势 q 的一个增长条件，该条件蕴含基态 φ与 H满足*Rosen* 不等式，即

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma(\varepsilon) > 0 \ : \ -\ln(\varphi(x)) \leq \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon).$$

尽管这些不等式本身并无特别意义，但它们导出了对证明相应薛定谔半群 e^{-tH} 的内在超收缩性绝对必不可少的对数 Sobolev 不等式，即

$$\forall t > 0 \exists C_t > 0 \ : \ \left|e^{-tH}u(x)\right| \ \leq \ C_t \varphi(x) \|u\|_2$$

对每个 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 几乎处处于 $\mathbb{R}^n$ 成立，我们将在本文第二部分证明这一点。为了证明 Rosen 不等式，我们着重求解一个径向薛定谔不等式，并使用 *Agmon* 版本的比较原理 和递增函数的杨不等式。我们沿用经典方法，通过加权索伯列夫函数空间、加权薛定谔半群 和对数 *Sobolev* 不等式证明 e^{-tH} 的内在超收缩性。

目录

1 引言 **2**1.1 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的内在超收缩性 .21.2 历史背景 .31.3 本文的动机 .4**2 Rosen 不等式的定义与准备** **5****3 一类 q 可推出 Rosen 不等式** **6****4 证明 Rosen 不等式的证明** **8**
4.1 预备知识 .84.2 定理 3.1 的证明 .94.3 引理 3.3 的证明 .10

5 证明内在超收缩性的准备工作 **11**
5.1 薛定谔半群的性质 .115.2 加权 L^p-空间与加权薛定谔半群 . . . . . 12Rosen 引理 .14

6 e^{-tH} **14****7 定理 6.1 的证明** **15**
7.1 预备内容 .157.2 核心论证 .167.3 最后一部分 .17

A Agmon 版本的比较原理 **18****B 薛定谔半群的正性** **19****C 杂项** **21**

1 引言

1.1 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中的内在超收缩性

量子系统对应的哈密顿量由形式算子给出

$$H = -\Delta + q(x) \tag{1}$$

在具有 $q \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 的 $n \geq 3$ 维空间中，属于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$。我们关注在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负的势 q，并假设存在唯一的严格正特征函数 φ，对应于 H 的最低特征值 E_0，它是该系统的基态。我们给出 q 的一个增长条件，该条件蕴含*Rosen* 不等式，即

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma(\varepsilon) > 0 \ : \ -\ln\left(\varphi(x)\right) \ \leq \ \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon) \tag{2}$$

对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。这些不等式本身并没有特别有趣之处，但它们蕴含对数 *Sobolev* 不等式，而这对于证明薛定谔半群 e^{-tH} 的内在超收缩性 至关重要，即

$$\forall t > 0 \exists C_t > 0 \ : \ \left|\mathrm{e}^{-tH}u(x)\right| \ \leq \ C_t\varphi(x)\|u\|_2 \tag{3}$$

对于 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中几乎处处的每个函数 $\mathbb{R}^n$。在这种情况下，$\mathrm{e}^{-tH}u$ 的渐近行为在任意时刻 $t > 0$都由基态 φ 主导。特别地，对于 v 的一个赋范特征函数 H，我们得到

$$\exists C_\lambda > 0 \ : \ |v(x)| \leq C_\lambda\varphi(x) \tag{4}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立，其中 λ 是与 v对应的特征值。请注意，在量子物理中，特征函数被刻画为电子位置在系统 H的某一能级 λ 处的概率密度函数。但在量子力学之外，我们可以将内在超收缩性解释为自由薛定谔半群的生成元 $-\Delta$ 的扰动结果，该半群表示为

$$\mathrm{e}^{t\Delta}u(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)\ \mathrm{d}y \tag{5}$$

对于 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$。由于高斯积分核 $\mathrm{e}^{t\Delta}$ 在 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 中是一个压缩映射，并且对于每个 $p \in [1,\infty]$ 还将 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 连续地映射到 $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 \leq p < q \leq \infty$。对于 $H = -\Delta + q(x)$ 的情形，我们引用以下关于内在超收缩性的刻画，即 [4]中的引理 4.2.2。

引理 1.1。 薛定谔半群 e^{-tH} 是本征超压缩的，当且仅当对每个时间 $t > 0$，以下两个条件都成立

i) $\mathrm{e}^{-tH}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t,x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中对 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$几乎处处成立

ii) $\exists C_t > 0 : \quad 0 \leq k(t,x,y) < C_t\ \varphi(x)\ \varphi(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中几乎处处成立

1.2 历史背景

关于薛定谔半群的内在超收缩性和内在超压缩性，最早的研究成果可追溯至20世纪70年代，正如 [5]第336页所述。然而，直到20世纪80年代中期，人们普遍认为，$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中的薛定谔半群不会具有内在超压缩性。量子谐振子是一个简单的例子：在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中，量子谐振子 $H = -\Delta + |x|^2$ 显然不是本征超压缩的，只需比较特征函数与基态的渐近行为即可看出这一点。然而， [5] 证明了，对于接近 $|x|^2$ 的势，例如 $H = -\Delta + |x|^\beta$ 或 $H = -\Delta + |x|^2(\ln(|x|+2))^\beta$（任意 $\beta > 2$），e^{-tH} 具有内在超压缩性。 [4] 还给出了更多例子，并深入研究了 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中的薛定谔半群的内在超压缩性。对于具有足够光滑边界的有界区域$D \subset \mathbb{R}^n$，Banuelos [3]于1990年证明了 $\mathrm{L}^2(D)$中的薛定谔半群具有内在超压缩性。到了21世纪初，B. Alziary 和 P. Takáč 在 [2]中重新研究了 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中内在超压缩性的早期工作。

提出了 q 的一个增长条件，该条件蕴含 e^{-tH}具有内在超压缩性。首次，薛定谔势 q 本身不再需要是径向的，而是被夹在两个径向辅助界势之间，使得

$$\left(\int_{r_0}^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\ P\left[\ln\left(\int_{r_0}^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right] \le q(x) \le Q\left(|x|\right) \tag{6}$$

对每个 $|x| \ge r_0$ 都成立，其中辅助函数 P 和 Q 满足 Q

$$\int_{r_0}^{\infty} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q(t)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{\gamma} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t < \infty \tag{7}$$

对于某个常数 $\gamma \in (1,2]$ 且 P 满足 $\int_0^{\infty} P\ (t)^{\ -1}\,\mathrm{d}t < \infty$。 Q 的例子见第 4105 页，包括 $|x|^{2+\delta}$、 $|x|^2(\ln\ |x|)^{2+\delta}$、 $|x|^2(\ln\ |x|)^2(\ln\ln|x|)^{2+\delta}$ 等，适用于 $\delta > 0$。

1.3 本文的动机

我们沿用 [2] 的做法，采用比较原理、递增函数的杨不等式以及对数 Sobolev 不等式的经典应用，来证明 e^{-tH} 的内在超收缩性。不过，我们不需要条件（7）。相反，我们要求

$$\frac{Q'(r)}{Q(r)^{\frac{3}{2}}}\ \to\ 0$$

对于 $r \to \infty$，这更容易针对 Q 的具体选取进行验证。此外，我们关注径向薛定谔不等式

$$-\psi''(r) - \frac{n-1}{r}\psi'(r) + Q(r)\psi(r)\ \le\ 0 \tag{8}$$

与 [2]第 4112 页上的径向薛定谔方程 (36) 相比，8) 的解更容易求得，而且就 Rosen 不等式而言，这些解已足够。因此，我们的辅助函数 ψ 比 [2]中的引理 4.4 简单得多。

此外，我们给出 P 在式 (6) 中一个具体但合理的选取，以便更好地理解。我们使用辅助函数 $f:\mathbb{R} \to [0,\infty)$ 对于 P定义如下

$$f(q) = \begin{cases} f_{k,m-1}(q), & q \ge r_0 \\ f_{k,m-1}\left(r_0\right)\mathrm{e}^{\frac{q}{r_0}-1}, & q < r_0 \end{cases}$$

其中 $r_0 = \ln\left(\int_0^{R_m} Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right) > 0$ and $f_{k,m}(t) = \left(\ln^{(m)}(t)\right)^k \prod_{p=0}^{m-1}\ln^{(p)}(t)$ 对于 $k > 1$, $m \in \mathbb{N}$ and $t > R_m$，其中 $R_m > 0$ 取足够大的值，使得 $\ln^{(m)}(t) > 0$ 成立。[1]

[1]Note that $\ln^{(0)}(t) = t$ and $\ln^{(p)}(t) = \underbrace{\ln(\ln(\ldots(\ln(t))\ldots))}_{p-\text{times}}$

2 Rosen 不等式的定义与准备

我们考虑维数 $n \geq 3$，并用 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 上取复值且可测的函数 u 的集合，其中 $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$。对于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的实值函数，我们明确写作 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$。本文中，薛定谔势 q: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处连续且非负，并且 $q(x) \to \infty$ 对于 $|x| \to \infty$ 成立。

我们将子空间 $D(h)$ 定义为 h的型定义域:

$$D(h) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \mid q^{\frac{1}{2}} u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \right\} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \tag{9}$$

其中，$H^1(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中弱可微函数构成的索伯列夫空间，其弱导数属于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$。请注意，$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq D(h)$ 成立。对于 $u, v \in D(h)$，我们定义半双线性型 h：

$$h(u,v) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j u, \partial_j v \rangle \right\} + \langle q^{\frac{1}{2}} u, q^{\frac{1}{2}} v \rangle \tag{10}$$

其中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 的内积。型 h 诱导出一个范数 $\|u\|_h = \sqrt{\langle u, u \rangle_h}$，其中 $\langle u, v \rangle_h = h(u,v) + \langle u, v \rangle$ 对于 $u, v \in D(h)$ 成立；该范数使 $D(h)$ 成为希尔伯特空间。薛定谔算子 H 定义为与型 h 相关联的算子，其定义域 $D(H)$ 为:

$$D(H) = \left\{ u \in D(h) \mid \exists v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \ : \ h(u,w) = \langle v, w \rangle \text{ for every } w \in D(h) \right\}. \tag{11}$$

因此 H 满足方程

$$\langle Hu, w \rangle = h(u,w) \tag{12}$$

对于 $u \in D(H)$ 和任意 $w \in D(h)$。此外，H 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中是自伴的，且 $(0, \infty)$ 包含于预解集 $\rho(H)$ 中。后者利用里斯表示定理，并借助 $D(h)$ 关于$\| \cdot \|_h$的完备性得以证明。卢默-菲利普斯定理推知，$-H$ 是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中由压缩算子构成的 C_0-半群$\left\{ \mathrm{e}^{-tH} \mid t \geq 0 \right\}$ 的生成元，我们称之为 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的薛定谔半群 。此外，谱 $\sigma(H)$ 仅由特征值组成，其中基态能量 $E_0 = \min \sigma(H) \in [0, \infty)$ 是单重的，且相应的特征函数 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处严格为正。我们称 φ 为 H的基态 。现在，让我们证明 φ 是 $\mathbb{R}^n$上的连续函数。

引理 2.1。 H 的基态 φ 在 $\mathbb{R}^n$上有一个连续代表元 .

证明。我们使用第200页的定理8.22，并按照定义 H in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 的相同方式，对任意给定的半径 $R > 0$，定义 $L = \Delta - q(x) + E_0$ in $\mathrm{L}^2(B_R(0))$。那么 $\varphi \in H^1(B_R(0))$ 是 $B_R(0)$ 中 $Lu = 0$ 的弱解。根据定理8.22，我们将 φ 视为 $B_{R/2}(0)$ 上的连续函数；由于 $R > 0$ 是任意选取的，因此结论成立。

□

此外，我们证明基态 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中处处严格为正。由 φ 的连续性可知，这意味着

$$\min_{x\in\overline{B_R(x_0)}} \varphi(x) = \delta_{x_0,R} > 0$$

对于所有的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $R > 0$，其中 $B_R(x_0)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心、半径为 R 的球。

引理 2.2. 基态 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中处处严格为正。

证明。 基态 φ 在 $\mathbb{R}^n$中几乎处处严格为正。我们使用 [6] 第 199 页定理 8.20 中形式的哈纳克不等式来论证 $\varphi(x) > 0$对每个 $x \in \mathbb{R}^n$都成立。

我们用反证法证明。假设存在一个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\varphi(x_0) = 0$。我们定义椭圆算子 L，如L中的引理 2.1 所述$^2(B_R(x_0))$，其中半径$R > 0$任意固定。于是 L 满足 [6] 中的定理 8.20 的所有要求，且 $L\varphi \equiv 0$ 在 $B_R(x_0)$中。因此

$$\exists C > 0 \ : \ \sup_{x\in B_{R/4}(x_0)} \varphi(x) \ \leq \ C \inf_{x\in B_{R/4}(x_0)} \varphi(x) \tag{13}$$

由此得出。请注意，定理 8.20 原本指的是本质下确界和本质上确界；由于 φ 连续，它们分别等于通常的下确界和上确界。因此，$\inf_{x\in B_{R/4}(x_0)} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$ 蕴含 $\sup_{x\in B_{R/4}(x_0)} \varphi(x) \leq 0$。然而，这与 $\varphi > 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处矛盾。因此，这样的 x_0 不存在，并且 $\varphi(x) > 0$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。

□

注2.3。

i.) 请注意，在第 φ 节中不一定需要连续性4。具体来说，我们只需要球 $C_R > 0$ 上的 φ 下边界 $B_R(0)$。不过，连续性 φ 会方便得多，而且正如我们所见，它也可以推出。

ii.) 关于薛定谔型及算子的更多信息，请参阅[8]，作者为 H. Leinfelder 和 C. G. Simader。iii.) 关于 H 的基态能量 E_0 的陈述取自 [10] 第 236 页的定理 10.11；该结论源于将佩龙–弗罗贝尼乌斯理论推广至无限维向量空间中的有界正性改善算子。

3 一类蕴含 q 的 Rosen 不等式

我们给出 $H = -\Delta + q(x)$ 中 q: $\mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ 的一个增长条件，该条件蕴含基态 $\varphi \in D(H)$ 满足 Rosen 不等式，即

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ -\ln(\varphi(x)) \ \leq \ \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon). \tag{14}$$

对于 $k>1$ 和 $m\in\mathbb{N}$，我们定义

$$f_{k,m}(t)=\left(\ln^{(m)}(t)\right)^k\prod_{p=0}^{m-1}\ln^{(p)}(t) \tag{15}$$

对于 $t>R_m$，取足够大的 $R_m>0$，使得 $\ln^{(m)}(t)>0$ 成立。[2]

定理 3.1. 设 $Q\colon[0,\infty)\to(0,\infty)$ 单调递增，且 $r^2<Q(r)$。此外，设 $m\in\mathbb{N}$、$k>1$ 和 $R_m>0$ 满足

i.) Q 在 (R_m,∞) 上可微，
ii.) $\forall r\geq R_m:\ln^{(m)}\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)>0$ 且

iii.) $\forall r\geq R_m\ \ 0<f_{k,m-1}\left(\ln\left(Q(r)\right)\right)rQ(r)^{-\frac{1}{2}}<1.$

另设 $Q'(r)Q(r)^{-\frac{3}{2}}\to 0$ 对于 $r\to\infty$，且 $d\in(0,1]$。那么，对每个满足条件的连续势函数 $q\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$

$$d\left(\int_0^{|x|}Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^{|x|}Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)\leq q(x)\leq Q\left(|x|\right) \tag{16}$$

for $|x|\geq R_m$，$H=-\Delta+q(x)$ 的基态 φ 满足 *Rosen* 不等式。

注记 3.2。
a) 注意到 $\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\geq\int_0^r t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}r^2$ 和

$$f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)\geq\ln\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)>\frac{2}{d}$$

当 r 足够大时，$q(x)>|x|^2$ 成立。因此，$|x|$ 足够大时，$q(x)>|x|^2$ 成立。

b) 我们在 q 的下界中使用辅助函数 $f_{k,\,m-1}$，以便将 ε 纳入 φ 的 Rosen 不等式中，同时避免增长过快。不过，$k>1$ 和 $\prod_{p=0}^{m-1}\ln^{(p)}(t)$ 在 $f_{k,\,m-1}$ 中保证

$$\int_{R_m}^{\infty}\frac{1}{f_{k,m}(t)}\,\mathrm{d}t<\infty$$

这是证明定理 6.1 所需要的。

我们给出一些可能的有界势的例子 Q，它们接近 r^2。请注意，这些例子取自 [2] 第 4105 页的例 2.5，且均满足定理3.1

[2] Note that $\ln^{(0)}(t)=t$ and $\ln^{(p)}(t)=\underbrace{\ln(\ln(\ldots(\ln(t))\ldots))}_{p-\text{times}}$

引理 3.3。
我们有 满足定理*3.1* 要求的辅助函数，当 r较大时：

a) $Q_1(r) = r^\alpha$ 对于 $\alpha > 2$,

b) $Q_2(r) = (\ln(r))^\alpha r^2$ 对于 $\alpha > 2$,

c) $Q_3(r) = (\ln(\ln(r)))^\alpha (\ln(r))^2 r^2$ 对于 $\alpha > 2$ 以及

d) $Q_4(r) = \left(\ln^{(l)}(r)\right)^\alpha \prod_{p=0}^{l-1} \left(\ln^{(p)}(r)\right)^2$ 对于 $\alpha > 2$ 以及任意选定的 $l \in \mathbb{N}$。

4 Rosen 不等式的证明

4.1 预备知识

首先，我们确定上界势函数 Q所需满足的条件，使得 $H = -\Delta + q(x)$的严格正基态 φ可能满足 Rosen 不等式，即

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ :\ -\ln(\varphi(x)) \leq \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon).$$

设 Q 是一个上界函数，满足 $q(x) \leq Q(|x|)$ 对 $|x| \geq R$ 成立，并设 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$是下列方程的严格正解

$$0 \geq (-\Delta\psi)(x) + Q(|x|)\psi(x) \geq (-\Delta\psi)(x) + q(x)\psi(x) \tag{17}$$

对每个 $|x| \geq R$均成立。于是 ψ 是 H 在$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n$ 中的下解：$|x| > R\}$ 在基态能级 $E_0 = \min(\sigma(H)) \geq 0$ 根据定义A.1。另一方面，基态φ是 H 在Ω_R 处于 E_0的上解。利用定理A.2 和注记A.3 可知存在常数 $c > 0$ 使得

$$\psi(x) \leq c\varphi(x)$$

对每个 $x \in \Omega_R$均成立。利用引理2.1 和引理2.2 可得 t

$$\varphi(x) \geq \min_{y \in \overline{B_R(0)}} \varphi(y) := \delta_0 > 0$$

对每个 $|x| \leq R$ 都成立。因此，

$$-\ln(\varphi(x)) = \ln\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\psi(x)}\right) + C \tag{18}$$

可推出 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立，其中 $C > 0$为适当的常数。若 ψ 还满足 s

$$\ln\left(\frac{1}{\psi(x)}\right) \leq \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon) \tag{19}$$

对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都可推出 φ 的 Rosen 不等式。接下来，我们考虑径向薛定谔不等式

$$\psi''(r) + \frac{n-1}{r}\psi'(r) \geq Q(r)\psi(r) \tag{20}$$

对于严格正的二次可微函数 $\psi \in \mathrm{L}^2((0,\ \infty)\ r^{n-1}\mathrm{d}r)$。我们定义

$$\psi(r) = \exp\left(-\sqrt{2}\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)$$

对于 $r \geq 0$。此外， $Q(r) \to \infty$ 和 $Q'(r)Q(r)^{-\frac{3}{2}} \to 0$ 对于 $r \to \infty$ 意味着

$$-\frac{1}{2} < \frac{Q'(r)}{Q(r)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n-1}{rQ(r)^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{2}$$

对于每个 $r \geq R$，以及充分大的 R。于是

$$\begin{aligned}
&\psi''(r) + \frac{n-1}{r}\psi'(r) = Q(r)\psi(r)\left(2 - \frac{Q'(r)}{\sqrt{2}Q(r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{2}(n-1)}{rQ(r)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&\geq Q(r)\psi(r)\left(2 - \sqrt{2}\left(\frac{Q'(r)}{Q(r)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n-1}{rQ(r)^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \\
&\geq Q(r)\psi(r)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq Q(r)\psi(r)
\end{aligned}$$

对每个 $r \geq R$均成立。我们得出

$$-\ln(\varphi(x)) = \ln\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\psi(|x|)}\right) + C = \sqrt{2}\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t + C \qquad (21)$$

对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|x| \geq R$。利用引理 2.1 和引理2.2 ，我们可以选取 C充分大，使得（21）对每个 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。这个解 ψ 是径向薛定谔不等式（20）的解，也是我们处理 φ 的 Rosen 不等式的基础。

4.2 定理 3.1 的证明

a）注意到

$$f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\right) \leq f_{k,m-1}\left(\ln\left(rQ(r)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \leq f_{k,m-1}\left(\ln\left(Q(r)\right)\right)$$

由于 Q 和 $Q(r) > r^2$的单调性，对每个 $r > R_m$ 均成立。因此，我们得出

$$0 < \left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right) f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\right) \leq rQ(r)^{\frac{1}{2}} f_{k,m-1}\left(\ln\left(Q(r)\right)\right) < Q(r)$$

对于 $r \geq R_m$ 根据定理 3.1中的 iii.)。因此，径向下边界函数与径向上边界函数之间确实存在一个间隔，使 q 存在于 $|x| \geq R_m$中。

b) 由（21）可得

$$-\ln(\varphi(x)) \leq \sqrt{2}\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t + C$$

对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。我们使用递增函数的杨不等式标准形式来涵盖 $\varepsilon > 0$。定义函数 $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 如下：

$$f(q) = \begin{cases} f_{k,m-1}(q), & q \geq r_0 \\ f_{k,m-1}(r_0)\, \mathrm{e}^{\frac{q}{r_0}-1}, & q < r_0 \end{cases}$$

其中 $r_0 = \ln\left(\int_0^{R_m} Q(t)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\right) > 0$。函数复合 $f \circ \ln$ 在 $(0,\infty)$ 上连续且严格递增，因此满足 $f(\ln(t)) \to 0$ for $t \to 0^+$。令 g 为 $f \circ \ln$ 在 $(0,\infty)$ 上的反函数。那么对每个 $a, b > 0$，我们可推得

$$ab \leq \int_0^a f(\ln(t))\ \mathrm{d}t + \int_0^b g(t)\ \mathrm{d}t \leq af(\ln(a)) + bg(b)$$

成立。令 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|x| \geq R_m$, $d \in (0,1)$，并令 $\varepsilon > 0$ 为任意但固定的值。定义 $a = \int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$，并得出

$$\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t \leq \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right) f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\right) + g\left(\frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}\right).$$

c) 因此我们得出

$$\begin{aligned} -\ln(\varphi(x)) &\leq \sqrt{2}\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right) + C \\ &\leq \varepsilon d\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right) f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\right) + \sqrt{2}\, g\left(\frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}\right) + C \\ &\leq \varepsilon q(x) + \underbrace{\sqrt{2}\, g\left(\frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}\right) + C}_{=\gamma(\varepsilon)} \end{aligned}$$

对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|x| \geq R_m$。我们再次按照 (21) 中的论证，得到 C 可以取充分大，使得这些 Rosen 不等式对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立，由此证明了该断言。

4.3 引理3.3证明

a) 对于 $Q_1(r) = r^\alpha$ 满足 $\alpha > 2$ 定理的要求 3.1 很容易验证，因为

$$(\ln(Q(r)))^k\, rQ(r)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha^k\, (\ln(r))^k}{r^{\frac{\alpha}{2}-1}} \to 0$$

且 $Q'(r)Q(r)^{-3/2} = \alpha r^{-(\frac{\alpha}{2}+1)} \to 0$ 对于 $r \to \infty$。

b) 设 $Q_2(r) = r^2(\ln(r))^\alpha$ 对于 $\alpha > 2$ 和 $r > \mathrm{e}$ 成立。那么

$$\ln(Q_2(r)) = 2\ln(r) + \alpha \ln^2(r) \leq (2+\alpha)\ln(r)$$

对于 $r > \mathrm{e}$，上式成立。对于 $k \in (1, \frac{\alpha}{2})$，我们作如下论证：

$$\frac{r\left(\ln\left(Q_2(r)\right)\right)^k}{Q_2(r)^{\frac{1}{2}}} \leq (2+\alpha)^k \frac{(\ln(r))^k}{(\ln(r))^{\frac{\alpha}{2}}} = (2+\alpha)^k \ln(r)^{k-\frac{\alpha}{2}} \to 0$$

对 $r \to \infty$成立。因此，存在一个半径 $R > 0$，使得

$$\left(\int_0^r Q_2(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\left(\ln\left(\int_0^r Q_2(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)^k \leq rQ_2(r)^{\frac{1}{2}}\left(\ln\left(rQ_2(r)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^k$$
$$\leq rQ_2(r)^{\frac{1}{2}}\left(\ln\left(Q_2(r)\right)\right)^k < Q_2(r)$$

对每个 $r > R$ 都成立，这里我们用到了 Q_2 和 $r^2 < Q_2(r)$的单调性。

c) 设 $Q_3(r) = r^2(\ln(r))^2\left(\ln^2(r)\right)^\alpha$，对 $\alpha > 2$ 和 $r > \mathrm{e}^\mathrm{e}$成立。则

$$\begin{aligned} Q_3'(r) &= 2r\left(\ln(r)\right)^2\left(\ln^2(r)\right)^\alpha + 2r\ln(r)\left(\ln^2(r)\right)^\alpha + \alpha r\ln(r)\left(\ln^2(r)\right)^{\alpha-1} \\ &= 2\frac{Q_3(r)}{r} + 2\frac{Q_3(r)}{r\ln(r)} + \alpha\frac{Q_3(r)}{r\ln(r)\ln^2(r)} \end{aligned}$$

对每个 $r > \mathrm{e}^\mathrm{e}$都成立。因此，我们很容易看出，$Q_3'(r)Q_3(r)^{-\frac{3}{2}} \to 0$ 对$r \to \infty$成立。此外

1.) $\ln\left(Q_3(r)\right) = 2\ln(r) + 2\left(\ln^2(r)\right) + \alpha\left(\ln^3(r)\right) \leq (2+2+\alpha)\ln(r)$
2.) $\ln^2\left(Q_3(r)\right) \leq \ln(2+2+\alpha) + \ln^2(r) \leq 2\ln^2(r)$

两者对充分大的 r 均成立。因此，由1.)和2.)我们推得

$$\frac{rf_{k,1}\left(\ln\left(Q_3(r)\right)\right)}{Q_3(r)^{\frac{1}{2}}} \leq 2^k(2+2+\alpha)\frac{r\left(\ln^2(r)\right)^k\ln(r)}{r\ln(r)\left(\ln^2(r)\right)^{\frac{\alpha}{2}}} = 2^k(2+2+\alpha)\left(\ln^2(r)\right)^{k-\frac{\alpha}{2}}$$

对充分大的 r 成立。于是，对 $k \in (1, \frac{\alpha}{2})$，存在半径 $R > 0$ 使得

$$0 < \frac{rf_{k,1}\left(\ln\left(Q_3(r)\right)\right)}{Q_3(r)^{\frac{1}{2}}} < 1$$

对每一个 $r \geq R$均成立。定理3.1 的所有准则均已满足。

d) 一般情形 Q_4 可用与 Q_3相同的论证来证明。

5 证明内在超收缩性的准备

5.1 薛定谔半群的性质

我们仍然考虑薛定谔算子 H 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中，如第 2节所定义。利用第 50 页中的命题 2.5 和定理 2.6，[9]我们陈述以下性质。

引理 5.1。

i.) 集合 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ 在 e^{-tH} 作用下保持不变，其中 $t>0$。我们称 e^{-tH} 为实的。

ii.) 集合 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n;\ [0,\infty))$ 在 e^{-tH} 作用下对 $t>0$保持不变。我们称 e^{-tH} 正性 $e.$

此外，对于每个时刻 $t>0$ 函数 $\mathrm{e}^{-tH}u$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上对于 $u\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中几乎处处非负时，实际上几乎处处严格为正 $\mathbb{R}^n$。因此，我们称算子 e^{-tH} 具有正性改善。以下定理的证明见附录 B。

定理 5.2。 对于每个 $t>0$ ， 算子 e^{-tH} 都具有正性改善。

5.2 加权 L^p 空间与加权薛定谔半群

我们沿用 B. Davies 在 [4] 第 11 页第 4.2 节中的做法，引入加权勒贝格空间 $\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n)$（其中 $p\in[1,\infty)$）以及作用于 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 上的加权薛定谔半群。对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意博雷尔集 B，我们在 $\mathbb{R}^n$ 上定义概率测度 μ，如下:

$$\mu(B)=\int_B\varphi(x)^2\,\mathrm{d}x\in[0,1]$$

并且对于每个 $p\in[1,\infty)$，我们将 加权勒贝格函数空间 $\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ 记为满足以下条件的可测函数 u 的集合： $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p\ \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x<\infty.$$

此外，$\mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ 定义为 $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$；这是合理的，因为相对于 μ 的勒贝格零测集与 $\mathbb{R}^n$ 上通常勒贝格测度下的零测集重合，因为 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中严格为正。令

$$\|u\|_{p,\mu}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p\ \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

对于 $u\in$ ，$\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ 使 $\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ 成为巴拿赫空间。对于 $u\in$ ，我们在 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中通过以下方式定义 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 上的一个 C_0-压缩半群:

$$\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\mathrm{e}^{-tH}(\varphi u)(x)\tag{22}$$

我们将其称为 H 的加权薛定谔半群 。其生成元为

$$-\tilde{H}u\ =\ -\frac{1}{\varphi}H(\varphi u)\tag{23}$$

对于 $u\in D(\tilde{H})=\varphi^{-1}D(H)\subseteq\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$，其中我们采用一种不严谨的记号，将 $\varphi^{-1}D(H)$ 写作 φ^{-1} 与定义域 $D(H)$ 中每个函数的乘积所构成的集合。

定理 5.3。

i.) 对每个 $t>0$，算子e^{-tH} 是$\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$中的压缩。

ii.) 对每个 $t>0$，算子e^{-tH} 是$\mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$中的压缩。

iii.) 对每个 $t>0$ 和 $p\in(1,\infty)$ 算子e^{-tH} 是$\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n$中的压缩，$\mathbb{R})$。证明。

i.) 设 $t>0$ 为任意但固定的。

a) 设 $u\in\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\subseteq\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$在 $\mathbb{R}^n$中几乎处处非负。因此我们推断

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\,(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\,(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\left\langle\mathrm{e}^{-tH}\varphi u,\varphi\right\rangle=\left\langle\varphi u,\mathrm{e}^{-tH}\varphi\right\rangle$$

$$=\left\langle\varphi u,\mathrm{e}^{-tE_0}\varphi\right\rangle=\mathrm{e}^{-tE_0}\left\langle\varphi u,\varphi\right\rangle\leq\|u\|_{1,\mu}$$

成立，其中我们使用了 $\mathrm{e}^{-tH}\varphi=\mathrm{e}^{-tE_0}\varphi$ 和 $E_0\geq 0$。

b) 对于 $u\in\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$，我们将 u 的正部和负部分别记为 u^+ 和 u^-，且 $u=u^+-u^-$。利用 a)，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\,(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\leq\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u^+\,(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)+\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u^-\,(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}u^+(x)\,\mathrm{d}\mu(x)+\int_{\mathbb{R}^n}u^-(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)=\|u\|_{1,\mu}.$$

c) 现设 $u\in\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$。我们对 $k\in\mathbb{N}$ 定义序列 $u_k=1_{\{u\leq k\}}\,u$。注意 u_k 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数，因此包含在 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 中，因为 μ 是概率测度。此外，由勒贝格定理，(u_k) 在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 u，因为 u_k 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处逐点收敛到 u，并且 $|u_k-u|\leq 2|u|\in\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 同样成立。因此利用 b)，我们得出$(\mathrm{e}^{-tH}u_k)$ 是 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中的柯西序列。故存在 e^{-tH} 到 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 的唯一且有界延拓，从而证明了该结论。

ii.) 任取并固定 $t>0$，且设 $u\in\mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\subseteq\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处非负。利用 e^{-tH} 具有正性改善这一性质，我们可得

$$0<\mathrm{e}^{-tH}\left(\varphi\|u\|_\infty-\varphi u\right)(x)=\mathrm{e}^{-tH}\left(\varphi\|u\|_\infty\right)(x)-\mathrm{e}^{-tH}\left(\varphi u\right)(x)$$

$$=\|u\|_\infty\mathrm{e}^{-tE_0}\varphi(x)-\mathrm{e}^{-tH}\left(\varphi u\right)(x)$$

对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立。因此，

$$0<\mathrm{e}^{-tH}\left(\varphi u\right)(x)<\|u\|_\infty\mathrm{e}^{-tE_0}\varphi(x)=\frac{\|u\|_\infty}{\mathrm{e}^{tE_0}}\,\varphi(x)$$

对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$ 均成立，由此得到加权薛定谔半群 e^{-tH} 的 $\|\mathrm{e}^{-tH}u\|_\infty<\mathrm{e}^{-tE_0}\|u\|_\infty$。对于不一定非负的 $u\in\mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$，我们记作 $u=u^+-u^-$，并按照 i.) 中的方法论证，即可证明该结论。

iii.) 利用 i.) 与 ii.)，该结论可由黎斯-托林插值定理推出。

□

5.3 Rosen 引理

设 H 的基态 φ 满足 Rosen 不等式，即

$$-\ln\left(\varphi(x)\right) \;\leq\; \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon) \tag{24}$$

~对每个 $\varepsilon > 0$ 以及相应的 $\gamma(\varepsilon) > 0$。此外，设 $u \in D(H) \cap \mathrm{L}^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负。那么对每个 $\varepsilon > 0$， H 的对数 Sobolev~不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u(x)\right)^p \ln\left(\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u(x)\right) \mathrm{d}\mu(x) \leq$$
$$\varepsilon \left\langle \tilde{H}\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u, \left(\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\right)^{p-1}\right\rangle_{\mu} + \frac{2\beta(\varepsilon)}{p} \left\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\right\|^p_{p,\mu} + \left\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\right\|^p_{p,\mu} \ln\left\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\right\|_{p,\mu}$$

可由以下条件推出 $\beta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{n}{4}\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + C$以及常数 $C \in \mathbb{R}$. 请与第 118 页的推论 4.4.2 进行比较，然后再与 [4] 中第 67 页的引理 2.2.6 进行比较。

6 e^$-tH$ 的本征超压缩性

下文讨论定理 3.1 中的势 q: $\mathbb{R}^n \to (0,\infty)$，满足存在一个半径 $R_m > 0$, $k > 1$, $d \in (0,1]$ 以及 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$d\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right) f_{k,m-1}\left(\ln\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right) \leq q(x) \;\leq\; Q\left(|x|\right) \tag{25}$$

对每个 $|x| \geq R_m$，其中 $f_{k,\ m-1}$ 由下式给出

$$f_{k,m-1}(t) = \left(\ln^{(m-1)}(t)\right)^k \prod_{p=0}^{m-2} \ln^{(p)}(t). \tag{26}$$

定义 f: $\mathbb{R} \to (0,\ \infty)$ 如下

$$f(q) = \begin{cases} f_{k,m-1}(q), & q \geq r_0 \\ f_{k,m-1}\left(r_0\right)\mathrm{e}^{\frac{q}{r_0}-1}, & q < r_0 \end{cases}$$

其中 $r_0 = \ln\left(\int_0^{R_m} Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)$，且 g是 $f \circ \ln$ 在 $(0,\ \infty)$ 上的反函数。于是基态 φ 满足 Rosen 不等式，其中

$$\gamma(\varepsilon) = \sqrt{2}\; g\left(\frac{\sqrt{2}}{d\cdot\varepsilon}\right) + C \tag{27}$$

对于某个常数 $C > 0$。详情请参阅第 4 节。

定理 6.1。 令 q 如上所述，则薛定谔半群e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中是本征超压缩的，即

$$\forall t > 0 \exists C_t > 0 \;:\; \left|\mathrm{e}^{-tH}u(x)\right| \;\leq\; C_t\|u\|_2\;\varphi(x) \tag{28}$$

几乎处处在 $\mathbb{R}^n$ 上对每个 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 都成立。

7 定理的证明6.1

7.1 预备

我们定义 $T = \frac{\sqrt{2}}{d}\int_{\frac{1}{2}\ln(2)}^{\infty} f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r \in (0,\infty)$。积分的详细说明请参见附录 C。令 $t \in (0,T]$ 为固定值。则存在一个 $\xi(t) \geq 0$ 满足

$$\frac{\sqrt{2}}{d}\int_{\frac{1}{2}\ln(2)+\xi(t)}^{\infty} f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r = t$$

由介值定理。请注意，ξ 是一个递减函数，且对 $t \to 0$有$\xi(t) \to \infty$。我们定义一个函数

$$\varepsilon_t(p) = \frac{1}{\sqrt{2}d\ f(\frac{1}{2}\ln(p)+\xi(t))} \tag{29}$$

对于 $p \in [2,\infty)$。于是

$$\int_2^{\infty}\frac{\varepsilon_t(p)}{p}\,\mathrm{d}p = \frac{\sqrt{2}}{d}\int_{\frac{1}{2}\ln(2)+\xi(t)}^{\infty} f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r = t \tag{30}$$

is i蕴含。我们将 $p\colon [0,t) \to [2,\infty)$定义为初值问题的一个解

$$\begin{cases} p'(s) &= \frac{p(s)}{\varepsilon_t(p(s))} \text{ for } s \in (0,t) \\ p(0) &= 2 \end{cases}$$

由变量分离法。因此，$G\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$ 由下式定义

$$G(r) = \int_2^r \frac{\varepsilon_t(s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

于是，对每个 $r \geq 2$，$G'(r) = \varepsilon_t(r) > 0$ 都成立，因此 G 在 $[2,\infty)$ 上严格单调递增且连续，并且 $G(2) = 0$。利用 (30)，我们得出，对于 $r \to \infty$，$G(r) \to t$。因此，G 是从 $[2,\infty)$ 到 $[0,t)$ 的双射，我们将 p 定义为 G 在 $[0,t)$ 上的反函数 G^{-1}。因此，p 满足 $p(0) = 2$，并且

$$p'(s) = \frac{1}{G'\big(p(s)\big)} = \frac{p(s)}{\varepsilon_t(p(s))} \tag{31}$$

根据反函数定理，这对每个 $s \in [0,t)$ 都成立。最后，我们定义函数 N 如下：

$$N(s) = 2\int_0^s \frac{\beta\left(\varepsilon_t\left(p(r)\right)\right)}{\varepsilon_t\left(p(r)\right)p(r)}\,\mathrm{d}r = 2\int_2^{p(s)}\frac{\beta\left(\varepsilon_t(q)\right)}{q^2}\,\mathrm{d}q \tag{32}$$

对于 $s \in [0,t)$。利用附录C，我们将 N对于 $s \to t$定义为 $M(t) = \lim_{s\to t} N(s)$因为 $p(s) \to \infty$对于 $s \to t$。

7.2 核心论证

˜设 $u \in D(H) \cap \mathrm{L}^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处非负。根据加权薛定谔半群的定义，$\mathrm{e}^{-tH}u \in \mathrm{L}^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{L}^{p}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 对每个 $p \in [2,\infty)$ 均成立，因为 μ 是概率测度。此外，

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{\infty,\mu} = \lim_{s\to t} \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu} \tag{33}$$

成立，并且

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu} \;\le\; \|\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{H}}\|_{p(s)\to p(s),\mu}\, \|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu} \;\le\; \|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu} \tag{34}$$

对每个 $s \in (0,t)$ 都成立，因为 $\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{H}}$ 是 $\mathrm{L}^{p(s)}_{\mu}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 上的压缩映射，这由定理 5.3 得出。我们着重证明

$$\left\{ s \mapsto \|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu} \right\}$$

˜在 $[0,t)$ 上单调递减，其中 $\|\mathrm{e}^{-0H}u\|_{p(0),\mu} = \|u\|_{2,\mu} = \|\varphi u\|_2$ 成立。根据 [4] 第 64 页上的引理 2.2.2，我们可推出

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|^{p(s)}_{p(s),\mu} \\
&= p(s)\langle -\tilde{H}\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u, \left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right)^{p(s)-1}\rangle_{\mu} + p'(s)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x)\right)^{p(s)} \ln\left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x)\right)\mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

成立。为在论证中使用 N 的对数˜Sobolev 不等式，我们将函数 H 纳入论证，该不等式在第 5.3 节中提到。注意，

$$\ln\left(\,\mathrm{e}^{-N(s)}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu}\,\right) = -N(s) + \frac{1}{p(s)}\ln\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|^{p(s)}_{p(s),\mu}$$

等于

$$-\underbrace{\frac{2\beta\left(\varepsilon_t\left(p(s)\right)\right)}{\varepsilon_t\left(p(s)\right)p(s)}}_{=N'(s)} \underbrace{-\frac{1}{p(s)\varepsilon_t\left(p(s)\right)}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{p(s)}} \ln\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{p(s)}_{p(s),\mu} + \frac{1}{p(s)}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{-p(s)}_{p(s),\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{p(s)}_{p(s),\mu}.$$

因此，我们最终得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\left(\,\mathrm{e}^{-N(s)}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu}\,\right) = \\
&\frac{1}{\varepsilon_t\left(p(s)\right)}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{-p(s)}_{p(s),\mu}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x))^{p(s)}\ln\left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x)\right)\mathrm{d}\mu(x)\right. \\
&-\varepsilon_t\left(p(s)\right)\left\langle\tilde{H}\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u,(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u)^{p(s)-1}\right\rangle_{\mu} - \frac{2\beta\left(\varepsilon_t\left(p(s)\right)\right)}{p(s)}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{p(s)}_{p(s),\mu} \\
&\left.-\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{p(s)}_{p(s),\mu}\ln\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu}\right\} \le 0
\end{aligned}$$

˜对每一个 $s \in [0,t)$ 由于对数 Sobolev 不等式，即 H 在 Rosen 引理5.3中所给出的。因此，

$$\mathrm{e}^{-N(s)}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu} \;\le\; \mathrm{e}^{-N(0)}\|u\|_{p(0),\mu} = \|u\|_{2,\mu} \tag{35}$$

对 $s \in [0, t$ 成立）。因此，对每一个 $t \in (0,\ T]$ 我们推断

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{\infty,\mu} \ = \ \lim_{s\to t}\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu} \leq \ \lim_{s\to t}\mathrm{e}^{N(s)}\ \|u\|_{2,\mu} = \mathrm{e}^{M(t)}\ \|u\|_{2,\mu} \tag{36}$$

由（34）和（35）可知成立。对于 $t > T$，存在一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $kT < t \leq$（$k+1$）T，这意味着 $0 < t - kT \leq T$。因此我们得出

$$\left|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u(x)\right| = \left|\mathrm{e}^{-(t-kT)\tilde{H}}\left(\mathrm{e}^{-kT\tilde{H}}u\right)(x)\right| \leq \mathrm{e}^{M(t-kT)}\ \|\mathrm{e}^{-kT\tilde{H}}u\|_{2,\mu} \leq \mathrm{e}^{M(t-kT)}\ \|u\|_{2,\mu}$$

由（36）可知，在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立。因此，对于每个 $t > 0$，存在常数 $C_t > 0$˜，使得 $\|\mathrm{e}^{-tH}u\|_{\infty,\ \mu} \leq\ C_t\ \|u\|_{2,\ \mu}$，这意味着

$$\left|\left(\mathrm{e}^{-tH}\varphi u\right)(x)\right| \ \leq\ C_t\ \varphi(x)\ \|\varphi u\|_2 \tag{37}$$

˜在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立，其中 $u \in D(H) \cap \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负。

7.3 最后一部分

利用 D（$\tilde{H}$）$= \varphi^{-1}D$（H）我们将（37）改写为

$$\left|\left(\mathrm{e}^{-tH}v\right)(x)\right| \ \leq\ C_t\varphi(x)\|v\|_2 \tag{38}$$

对于每个满足 ${}^1_\varphi v \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的非负 $v \in D(H)$，由引理 2.1 和引理 2.2 可知，φ^{-1} 在 $\mathbb{R}^n$ 中的每个紧集 M 上有界。因此，对于每个属于 $C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \subseteq D(H)$ 的非负函数 v，我们得出 ${}^1_\varphi v$ 有界。因此，（38）对每个非负的 $v \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$˜都成立，进而由稠密性论证可知，它对 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的每个非负函数都成立。

现在，设 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 是实值函数，但在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处不一定非负。我们使用 u 的正部和负部 u^+ 以及 u^-，它们属于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$，并且在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负。根据引理 5.1，算子 e^{-tH} 不仅是线性的，而且还是正的。因此，我们得出 $\left(\mathrm{e}^{-tH}u\right)^+ = \mathrm{e}^{-tH}u^+$ 成立，这意味着 $\mathrm{e}^{-tH}u$ 的正部由 $\mathrm{e}^{-tH}u^+$ 给出。对于 $\mathrm{e}^{-tH}u$ 的负部，也可以作类似的论证。因此，对于任意实值函数 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$，(38) 也成立。

最后，设 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 但不一定是实值函数。接下来论证类似，因为 u 的实部和虚部都是定义在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 上的实值函数，并且根据引理 e^{-tH} 再次是线性且实值的5.1。由此可得，对于一般函数 38，式（ $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 成立，这就证明了定理 6.1。

Agmon 版比较原理

与 [2] 不同，我们在 [7]中使用 Agmon 版本的比较原理。设 h 为第 2 节中的二次型，其对应的薛定谔算子为 H，定义在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$上。

定义 A.1。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开集。

a) 局部二次型定义域 $D^U_{loc}(h)$ 定义为

$$D^U_{loc}(h) = \left\{u \in \mathrm{L}^2_{loc}(U) \ : \ \chi u \in D(h) \text{ for every } \chi \in C^\infty_c(U)\right\}. \tag{39}$$

它是由在 $D(h)$ 中局部定义的函数构成的向量空间。

b) 若 u (H) 且满足以下条件，则称 u 是 U 中能量为 E 的 H 上解:

$$h(u,\xi) - E\langle u,\xi\rangle \ \geq \ 0 \tag{40}$$

对每个非负的 $\xi \in C^\infty_c(U)$，以下条件均成立。请注意，这里我们稍微滥用了记号，因为 u 未必包含在 $D(h)$ 中；但我们将 $h(u,\xi)$ 理解为 $\langle \nabla u, \nabla \xi\rangle + \langle q(x)u, \xi\rangle$。

c) u 是 U 中的 H 的下解，其能量为 E，如果满足 $u \in D^U_{loc}(h)$ 且

$$h(u,\xi) - E\langle u,\xi\rangle \ \leq \ 0 \tag{41}$$

对每个非负的 $\xi \in C^\infty_c(U)$ 都成立。

定理 A.2 取自 [7]，形式为第 11 页上的定理 2.7。

定理 A.2 （Agmon 版本的比较原理）。
设 $R > 0$ 和 u 是无穷远邻域 $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| > R\}$中的 H 的正上解，其能量为 E。此外，设 v 是Ω_R中的 H 的下解，其能量为 E，并且满足

$$\liminf_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N^2}\int_{N\leq|x|\leq\alpha N} |v|^2 \, \mathrm{d}x\right) = 0 \tag{42}$$

对某个 $\alpha > 1$ 成立。如果对某个 $\delta > 0$ 和 $0 \leq C < \infty$，有

$$v(x) \ \leq \ Cu(x) \tag{43}$$

在 th e a环域 $R < |x| \leq R + \delta$ 中，则 $v(x) \ \leq \ Cu(x)$ 对几乎处处的 $x \in \Omega_R$ 成立。

注释 A.3。

i.) 在其原始形式中， [1]Agmon 假设上解 u 以及下解 v 在 Ω_R 上都是连续的。然而，额外假设u 和 v 连续，仅仅是为了保证条件 (43) 对某个常数 $C = c_2/c_1$ 成立，其中 $c_1 = \inf^{R\leq|x|\leq R+\delta} u(x)$ 和 $c_2 = \sup_{R\leq|x|\leq R+\delta} |v(x)|$，且 $\delta > 0$任意。更多细节请参见 [7] 第 12 页的注释 2.9。

ii.) 此外，对于 $v \in \mathrm{L}^2(\Omega_R)$ 条件（42）已自动满足。

B 薛定谔半群的正性

要使用引理 B.2 我们首先必须证明 h满足所要求的性质。

命题 B.1。 令 u、 $v \in D(h)$ 的支集不相交。则 $h(u$、 $v) = 0$ 成立。

证明。 令 u, $v \in D(h)$, 其中 $\mathrm{supp}(u) \cap \mathrm{supp}(v) = \emptyset$。

首先, 考虑 u 的支集为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\emptyset$ 的特殊情形。如果 $\mathrm{supp}(u) = \mathbb{R}^n$, 则 $\mathrm{supp}(v)$ 必须为空。这意味着 v 在$\mathbb{R}^n$ 中几乎处处为 0, 从而 $h(u$, $v) = 0$。对于 $\mathrm{supp}(u) = \emptyset$ 的情形, 同样的论证也成立。此时, u 是在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处为 0 的函数。同样地, 在这种情况下, $h(u$, $v) = 0$ 成立。

现在, 设 $\mathrm{supp}(u)$ 和 $\mathrm{supp}(v)$ 均不是 $\emptyset$ 或 $\mathbb{R}^n$。我们将闭集 S_1 定义为 $\mathrm{supp}(u)$, 将 S_2 定义为 $\mathrm{supp}(v)$。记住, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$。u 的 j 阶弱导数在 $\mathbb{R}^n \setminus S_1$ 上等于 0。对于满足 $\mathrm{supp}(\psi) \subset \mathbb{R}^n \setminus S_1$ 的 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我们得到

$$0 = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \overline{\partial_j \psi(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j u(x)\, \overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n \setminus S_1} \partial_j u(x)\, \overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}x.$$

变分法基本引理指出, $\partial_j u$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus S_1$上为 0。对于 v的第 j阶弱导数, 在 $\mathbb{R}^n \setminus S_2$ 上也有类似结论。因此 $\partial_j u = 1_{S_1} \partial_j u$和 $\partial_j v = 1_{S_2} \partial_j v$ 成立。我们得出

$$h(u,v) = \{\sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j u, \partial_j v \rangle\} + \langle q^{\frac{1}{2}} u, q^{\frac{1}{2}} v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle 1_{S_1} \partial_j u, 1_{S_2} \partial_j v \rangle = 0$$

这就证明了该结论。

□

W我们将 [9] 中的以下刻画作为第 54 页的推论 2.11 给出。

引理 B.2. 若 h 满足 $h(u, v) = 0$, 且函数 $u, v \in D(h)$ 的支集不相交, 则以下陈述等价:

i.) 对每个 $t > 0$, 算子e^{-tH} 都是正性改善的。

ii.) 若$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 对每个 $u \in D(h)$ 都满足 $1_\Omega\, u \in D(h)$, 则Ω 或 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 是勒贝格零测集。

We 使用此引理B.2 证明e^{-tH} 对每个 $t > 0$都是正性改善的。

定理 B.3. 对于每个 $t > 0$, 算子 e^{-tH} 都是正性改善的。

证明。 我们用反证法，假设 $\{\mathrm{e}^{-tH} \mid t \geq 0\}$ 不是正性改善的。根据引理 B.2 ，存在集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ，使得 $1_\Omega u$ 包含于 $D(h)$对每个 $u \in D(h)$ 均成立，Ω 和 $\Omega^C = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 却都不是勒贝格零测集。我们将 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度记为 λ。

i.) 我们证明存在一个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得对于任意半径 $r > 0$，$\Omega \cap B(x_0, r)$ 和 $\Omega^C \cap B(x_0, r)$ 都不是勒贝格零测集。

我们假设这一结论不成立。那么对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都存在一个半径为 $r = r(x)$ 的 > 0，使得 $\Omega \cap B(x, r)$ 或 $\Omega^C \cap B(x, r)$ 是勒贝格零测集。我们定义集合 Ω_1 如下

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0 \ : \ \lambda(\Omega \cap B(x, r)) = 0\}$$

并将 Ω_2 定义为 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0 : \ \lambda(\Omega^C \cap B(x, r)) = 0\}$。于是，$\mathbb{R}^n = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 成立。此外，注意这两个集合互不相交。若存在一个 $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$，则

$$0 = \lambda(\Omega \cap B(x, r)) + \lambda(\Omega^C \cap B(x, r)) = \lambda\big(B(x, r)\big) > 0$$

当 $r > 0$ 取得足够小的适当值时，这一结论便成立。因此，$\Omega_1 \cap \Omega_2$ 必为空。显然，Ω_1 和 Ω_2 都是 $\mathbb{R}^n$中的开集。但由于 $\mathbb{R}^n$ 是连通的，$\mathbb{R}^n = \Omega_1$ 或 $\mathbb{R}^n = \Omega_2$ 必有一个成立。

设 $\mathbb{R}^n = \Omega_1$ 成立。我们选取一个紧集 $K \subseteq \Omega$，使得 $\lambda(K) > 0$。这是可能的，因为Ω在 $\mathbb{R}^n$中不是纯点集。对每一个 $x \in K$，存在$r = r(x) > 0$，使得

$$\lambda(B(x, r) \cap \Omega) = 0$$

由于 $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n = \Omega_1$。由 K 的紧性，我们得出

$$K \subseteq B(x_1, r_1) \cup \cdots \cup B(x_m, r_m)$$

对某些 x_1，.....，$x_m \in K$ 成立，其中 r_j 由Ω_1给出。但这样一来

$$0 < \lambda(K) = \lambda(K \cap \Omega) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda\big(B(x_j, r_j) \cap \Omega\big) = 0$$

显然是一个矛盾。对 $\mathbb{R}^n = \Omega_2$ 使用同样的论证也会导致矛盾。因此必定存在一个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得对任意半径 $r > 0$，$\Omega \cap B(x_0, \ r)$与$\Omega^C \cap B(x_0, \ r)$都不是勒贝格零测集。

ii.) 设 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq D(h)$ 是一个函数，使得 $u(x_0) = 1$。因此，如我们在本证明一开始所提到的，$1_\Omega u$ 包含于 $D(h)$ 中。特别地，$1_\Omega u$ 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的一个元素，且 $\partial_j(1_\Omega u) = 1_\Omega \partial_j u$。但最后一个等式需要进一步说明。首先请记住，$\Omega$ 不是勒贝格零测集。因此我们选取 $v \in C_c^\infty(\Omega)$。于是

$$\int_\Omega (\partial_j u)(x)\overline{v(x)} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\overline{(\partial_j v)(x)} \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} (1_\Omega u)(x)\overline{(\partial_j v)(x)} \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j(1_\Omega u)(x)\overline{v(x)} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_j(1_\Omega u)(x)\overline{v(x)} \, \mathrm{d}x$$

成立，其中最后一个等式是由于 v 在 Ω 中的支集。因此我们看到，$\partial_j u$ 在 Ω 中等于 $\partial_j(1_\Omega u)$，这同样是由于变分法基本引理。现在我们记得 Ω^C 也不是勒贝格零测集。我们对 $v \in C_c^\infty(\Omega^C)$ 使用类似的论证。于是

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\mathbb{R}^n} (1_\Omega u)(x)\overline{(\partial_j v)(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j(1_\Omega u)(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega^C} \partial_j(1_\Omega u)(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由于 v 在 Ω^C中的支集，这一结论成立。因此， $\partial_j(1_\Omega u)$在 Ω^C中为 0。总之，我们已经证明 $\partial_j(1_\Omega u) = 1_\Omega \partial_j u$ 确实成立。
由于 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，我们推知 $1_\Omega u$ 属于索伯列夫空间 $W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n)$，对每个 $p \geq 2$均成立。索伯列夫嵌入定理表明， $1_\Omega u$ 在 $\mathbb{R}^n$上有一个连续代表元。为避免拘泥于数学上的严谨性，我们将 $1_\Omega u$ 视为连续函数。

请记住，对于 x_0，我们已经证明，对每个 $k \in \mathbb{N}$，$\Omega \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ 和 $\Omega^C \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ 都不是勒贝格零测集。因此，我们通过 $x_k \in \Omega \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ 和 $y_k \in \Omega^C \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ 选取两个序列。于是

$$|(1_\Omega u)(x_k) - (1_\Omega u)(y_k)| = |u(x_k)|$$

当 $k \to \infty$ 时收敛到 $|u(x_0)|$。但是，由于根据 u 的选取， $u(x_0)$ 等于 1，这与 $1_\Omega u$ 的连续性矛盾。因此，我们的假设导致矛盾，从而证明了该断言。

□

C 杂项

引理 C.1. $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \ln(2)\ f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r \in (0, \infty)$

证明。 我们使用第 f 节中的定义， 6。注意

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\ln^{m-1}(r)\right)^{1-k} = \frac{1}{1-k} f_{k,m-1}(r)^{-1}$$

对每个 $r > r_0$ 都成立。因此我们得出

$$\int_{\frac{1}{2}\ln(2)} f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r = f_{k,m-1}(r_0) \int_{\frac{1}{2}\ln(2)}^{r_0} \mathrm{e}^{1-\frac{r}{r_0}}\,\mathrm{d}r + (k-1)\left(\ln^{m-1}(r_0)\right)^{1-k}.$$

□

对于以下命题，请记住， f 和 g 定义于第6 节，而 ε_t 取自第 7.1节。

命题 C.2。 $\int_2^\infty \beta\big(\varepsilon_t\ (p)\ \big)p^{-2}\,\mathrm{d}p \in \mathbb{R}$

证明。 首先，我们陈述

$$\beta\left(\varepsilon_t(p)\right)=\frac{\varepsilon_t(p)}{2}-\frac{n}{4}\ln(\frac{\varepsilon_t(p)}{2})+\sqrt{2}\ g(\frac{1}{\sqrt{2}d\varepsilon_t(p)})+C$$

由 β Rosen 引理 5.3 和 γ 式（27）的定义给出。

i.) 显然，$0\leq\int_2^\infty \varepsilon_t\ (p)\ p^2\,\mathrm{d}p\leq\int_2^\infty \varepsilon_t\ (p)\ p\,\mathrm{d}p=t$ 成立。

ii.) 此外，$\int_2^\infty Cp^{-2}\,\mathrm{d}p=\frac{C}{2}$ 成立。

iii.) 现在我们关注 $\ln(^{\varepsilon_t\ (p)}{}_2)$。根据 ε_t 的定义，我们有

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_t(p)}{2}\right)=K-\ln\left(f(\frac{1}{2}\ln(p)+\xi(t))\right)$$

对于某个常数 $K\in\mathbb{R}$，该式成立。对于 $r\geq1$，我们使用 $f(r)\leq\exp(\mathrm{e}^r)$。于是

$$\ln\left(f(\frac{1}{2}\ln(2)+\xi(t))\right)\leq\ln\left(f(\frac{1}{2}\ln(p)+\xi(t))\right)\leq\mathrm{e}^{\xi(t)}p^{\frac{1}{2}}$$

由于 f的单调性，当 $\max\{2,\exp\left(2(1-\xi(t))\right)\}\leq p$ 时，该式成立。上界函数的反常积分为

$$\int_2^\infty \mathrm{e}^{\xi(t)}p^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}p=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\xi(t)}.$$

对于下界函数

$$\int_2^\infty\frac{\ln\left(f(\frac{1}{2}\ln(2)+\xi(t))\right)}{p^2}\,\mathrm{d}p=\frac{\ln\left(f(\frac{1}{2}\ln(2)+\xi(t))\right)}{2}$$

成立。因此 $\ln(^{\varepsilon_t(p)}{}_2)p^{-2}$ 的反常积分满足——

$$\frac{K}{2}-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\xi(t)}\ \leq\ \int_2^\infty\ln(\frac{\varepsilon_t(p)}{2})p^{-2}\,\mathrm{d}p\ \leq\ \frac{K}{2}-\frac{\ln\left(f(\frac{1}{2}\ln(2)+\xi(t))\right)}{2}.$$

iv.) 最后，我们关注 $g(\frac{1}{\sqrt{2}d\varepsilon_t(p)})p^{-2}$ 在 $(2,\infty)$ 上的反常积分。这些方程

$$\int_2^\infty g\left(\frac{1}{\sqrt{2}d\varepsilon_t(p)}\right)p^{-2}\,\mathrm{d}p=\int_2^\infty g\left(f\left(\frac{1}{2}\ln(p)+\xi(t)\right)\right)p^{-2}\,\mathrm{d}p$$

$$=\int_2^\infty\exp\left(\frac{1}{2}\ln(p)+\xi(t)\right)p^{-2}\,\mathrm{d}p=\mathrm{e}^{\xi(t)}\int_2^\infty p^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}p=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\xi(t)}$$

在此处取值，其中我们在 $\mathbb{R}$ 上使用了 $g\circ f=\exp$；这由 g 是 $f\circ\ln$ 在 $(0,\infty)$ 上的反函数可知。

□

参考文献

[1] Shmuel Agmon. 薛定谔算子特征函数指数衰减的界. 第 1–38 页，1985 年。[2] Bénédicte Alziary 和 Peter Takáč. $\mathbb{R}^N$ 中薛定谔半群的内在超收缩性. 《函数分析杂志》，256(12):4095–4127，2009 年。[3]Rodrigo Bañuelos. 薛定谔算子的内在超收缩性与特征函数估计. 《函数分析杂志》，100(1):181–206，1991 年。[4] Edward Brian Davies. 热核与谱理论. 剑桥大学出版社，2007 年。[5] Edward Brian Davies 和 Barry Simon. 薛定谔算子与狄利克雷拉普拉斯算子的超收缩性及热核. 《函数分析杂志》，59(2):335–395，1984 年。[6] David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger. 二阶椭圆偏微分方程. 施普林格，柏林，海德堡，2001 年。[7] Dirk Hundertmark、Michal Jex 和 Markus Lange. 濒临边缘的量子系统：束缚态的存在性、临界势与维数. 《数学论坛：西格玛》，11:e61，2023 年。[8] Herbert Leinfelder 和 Christian G. Simader. 带奇异磁矢势的薛定谔算子. 《数学杂志》，176(1):01–19，1981 年。[9] El-Maati Ouhabaz. 区域上的热方程分析. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2005 年。[10] Gerald Teschl. 量子力学中的数学方法. 美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009 年。