arXiv:2602.04708v1 [math.ST] 4 Feb 2026

基于离散观测的随机波动方程统计推断

Anton Tiepner*、Mathias Trabs†、Eric Ziebell‡

摘要

本文基于离散测量，对由 Riesz 噪声驱动、定义在无界多维空间域上的随机波动方程的波速进行估计。我们建立了观测值在空间、时间及时空中的二阶变差的中心极限定理。在对空间和时间采样频率作出一般性假设的条件下，所得矩估计量渐近服从正态分布。离散增量的协方差结构具有闭式表示，其中涉及两种不同的 Fej´er 型核，从而能够精确分析空间贡献与时间贡献之间的相互作用。

Keywords: 离散测量、随机波动方程、中心极限定理、二阶增量、Fej´er 核

1 引言

本文根据空间和时间上的离散测量估计随机波动方程的波速 $\vartheta > 0$

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \vartheta \Delta u(t,x) + \dot{W}_\beta(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = \partial_t u(0,\cdot) \equiv 0, \\ \mathbb{E}[\dot{W}_\beta(t,x)\dot{W}_\beta(s,y)] = \delta_0(t-s)|x-y|^{-\beta}, \quad x,y \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.1}$$

。高斯噪声项 W_β 在时间上为白噪声、在空间上为有色噪声，具有固定已知参数的 Riesz 核 $\beta \in (0, \ 2 \wedge d)$ 描述了噪声的空间正则性。空间有色噪声是随机波动方程解理论中的标准假设 [12, 13, 42, 3] ，也是随机偏微分方程的自然建模假设 [33,20, 34]。特别是，随机偏微分方程（1.1）的解的点值在所有维数下都有定义；解过程的正则性、奇异性传播以及其他解析性质均已得到研究；例如参见 [10, 14, 28, 29]。

随机波动方程已被提出用于多个应用领域，包括半导体激光器线宽理论 [43]，以及对振动介质和结构的建模 [35, 15], ，例如悬空或浸没电缆、DNA 链和冲击波。系统（1.1）可视为一种理想化的高维随机波动方程，其定义在一个较大的有界区域上，具有空间有色噪声，并假设边界效应可以忽略不计。

随机偏微分方程（SPDEs）的时空结构使统计分析能够采用多种观测方案。三种主要方案是谱观测、局部观测和离散观测。尽管随机偏微分方程的统计学文献主要聚焦于抛物型方程，但关于随机波动方程统计学的研究仍然有限。对于随机波动方程以及向高阶弹性算子和阻尼算子的推广，Liu 和 Lototsky [31, 30] 以及 Delgado-Vences 和 Pavon-Espa˜nol [18]研究了谱测量。局部观测方案最初由 Altmeyer 和 Reiß [1], 用于随机热方程中未知扩散率函数的非参数估计，直到最近才应用于随机波动方程，参见 Ziebell [44]。与谱观测情形类似，Ziebell [44], 基于黎曼-勒贝格算子理论的结果，由 Tiepner 和 Ziebell [38] 借助 M, N-函数的概念推广到了更一般的二阶随机柯西问题。

*anton.tiepner∂fu-berlin•de，柏林自由大学地质科学研究所
†trabs∂kit•edu，卡尔斯鲁厄理工学院数学系
‡ziebelle∂hu-berlin•de，柏林洪堡大学数学研究所

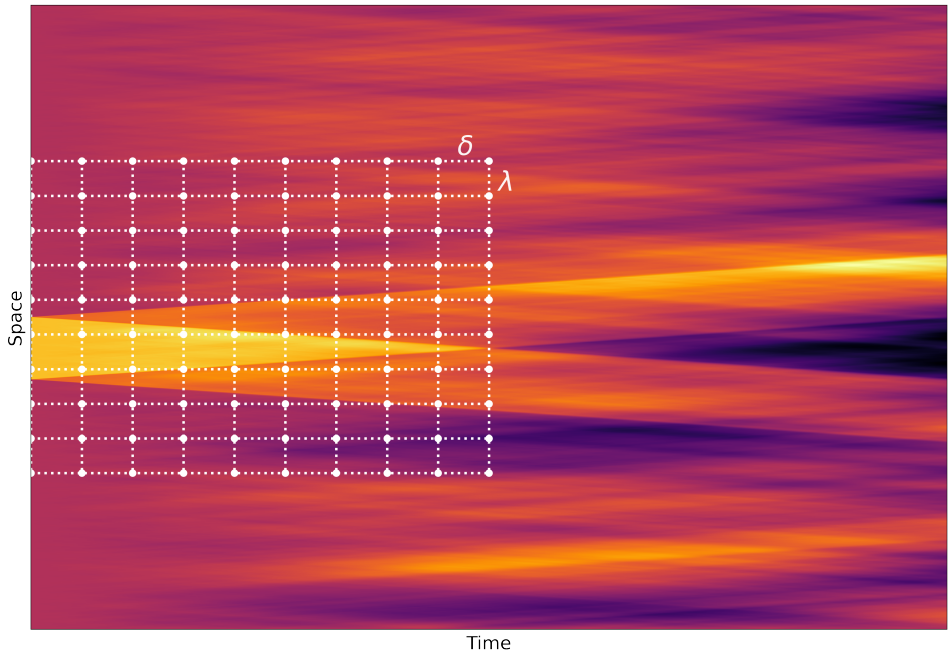


图 1：在 $d = 1$ 中，$\vartheta = \beta = 0.5$条件下随机波动方程的示意图，以及非零初始条件和包含 $n = 10$ 个空间点、$m = 10$ 个时间观测点的时空观测网格。相邻两个时间点和空间点之间的距离分别记为 δ 和 λ。该模拟基于有界区域上的半隐式欧拉格式。

Markussen [32], Cialenco 和 Huang [8] 以及 Bibinger 和 Trabs [5] 最早研究了有界空间域上一维随机热方程在空间和时间上的离散观测，而 Chong[7] 和 Bibinger 和 Trabs [4] 则研究了无界情形。Hildebrandt 和 Trabs [23] 研究了多种基于不同类型一阶时空变差的矩估计方法，从而能够精确分析空间观测点数与时间观测点数之间的相互作用。Cialenco 和 Huang [8] 也利用 Malliavin演算的工具研究了若干类似问题。Tonaki、Kaino 和 Uchida [39, 40]将研究推广至二维随机热方程，并对单位立方体上的情形进行了详细的统计分析。任意维数下的首个框架后来由 Bossert [6], 进一步发展，该框架基于已实现波动率，并能在底层模型中构造已实现波动率的预言估计量。Cialenco、Kim 和 Pasemann [9], 对离散采样的半线性随机偏微分方程的高阶变差进行了统计分析，揭示了过程的正则性与所考虑的幂变差之间的联系。

对于时空白噪声 $\beta = d = 1$，Assaad、Gamain 和 Tudor [2] 使用时间和空间上的二次变差估计了随机波动方程的波速。Markussen [32]分析了基于离散测量所诱导的似然结构以及显式矩估计量、用于检验一维抛物型方程相对于双曲型备择的近似似然比检验。其他运用Malliavin演算研究二次变差的工作包括 Khalil、Tudor 和 Zili [26], 、Khalil 和 Tudor [27]以及 Tudor 和 Yoshida [41]。Khalil 和 Tudor [27] 以及 Shevchenko [37], 估计了分数白噪声随机波动方程的赫斯特参数，其中包括首个基于盒增量的示例性中心极限定理，该方法结合了空间和时间上的测量。

我们首先考察空间或时间上的等距观测，同时保持另一个变量不变。更具体地说，我们观测以下两者之一：$(u(t, x_k)\ k = 0, \ldots\ldots, n+1)$，其中 $x_k = \lambda k\rho$ 且方向为 $\rho \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，满足$|\rho| = 1$；或者 $(u(t_i, x)\ i = 0, \ldots\ldots, m + 1)$，其中 $t_i = \delta i$，对于 $\delta, \lambda > 0$。在分析空间和时间中的二阶变差时，我们发现，两种变差的方差都与傅里叶部分和、Fej´er 核以及 Ces`aro 和有内在联系，参见 Grafakos [21]。特别地，过程的增量会转化为协方差函数的增量。然而，随机波动方程的协方差结构中自然涉及的三角函数增量本身可以通过三角函数表示，从而导向

到方 Fej´er 型核出现在方差中。这些见解构成了证明过程变差（1.1）的中心极限定理所需的理论基础，并可概括如下。记 $\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}$和 $\mathbf{V}_{\mathrm{te}}$ 分别为空间和时间观测的实现的二阶二次变差。在关于采样频率 λ 和 δ的某些一般性假设下，我们证明以下中心极限定理：

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}-\frac{tC_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}}{\vartheta}\right)&\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{t^2}{\vartheta^2}C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}\right),\qquad n\to\infty,\\ \sqrt{m}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{m^2}\mathbf{V}_{\mathrm{te}}-\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)&\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\qquad m\to\infty,\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中某些正的普适常数仅依赖于 β 和 d。

此外，我们还研究基于时空观测 $(u(t_i,\ x_k)\ i=0,\ \ldots\ldots,\ m+1,\ k=0,\ \ldots\ldots,\ n+1)$ 的盒增量。空间分量和时间分量都通过相应的 Fej´er 核进行因式分解。相关二阶变差$\mathbf{V}_{\mathrm{sp},\ \mathrm{te}}$ 的渐近行为取决于决定渐近区间的双曲采样比 $\alpha=\delta/\lambda$。当 $\alpha\to\infty$时，空间采样频率较高，且$\mathbf{V}_{\mathrm{sp},\ \mathrm{te}}$ 由空间增量主导；而当 $\alpha\to 0$时，则由时间行为主导。在这两种情况下，我们都证明了$\mathbf{V}_{\mathrm{sp},\ \mathrm{te}}$的中心极限定理：

$$\begin{aligned}\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}}}{\vartheta}\right)&\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{\vartheta^2}\right),\qquad \alpha\to\infty,\\ \sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)&\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\qquad \alpha\to 0,\end{aligned}\tag{1.3}$$

基于所考虑变差的矩估计量的渐近正态性，可由中心极限定理（1.2）和（1.3）通过 delta 方法得到。

本文结构如下。在第2 节正式介绍随机偏微分方程模型。在第3节，我们处理 ϑ 的估计问题，该问题基于过程（u（$t,\ x$） $x\in\mathbb{R}^d$）沿直线（$r\rho$: $r>0$）的空间变差。在本章中，我们还将遇到Fej´er核 $\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}$，并介绍贯穿本文所采用的证明策略。按照同样的结构，我们汇集对过程（u（$t,\ x$） $t\geq 0$）在固定空间点 $x\in\mathbb{R}^d$ 处的观测所得到的全部统计结果，见第4节。在第5 节，我们结合前几节的结果，分析空间和时间上的二阶增量。论文主体仅给出证明思路与提纲。详细证明推迟到第6。

记号 我们用$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}$和 $x\cdot\overline{y=x^\top y}$表示欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ （针对 $d\in\mathbb{N}$）上通常的范数与内积。虚数记作i。注意， $A^\top$ 表示矩阵 A的转置， f'用于表示函数 f的普通导数。若 f是多元的，则关于变量 x 的偏导数记为 $\partial_x f$。设$(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 与$(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 为两个实数序列，我们在 $a_m/b_m\to 1$ 随 $m\to\infty$ 成立时记 $a_m\sim b_m$，并在存在常数 $c>0$ 使得对所有 $m\in\mathbb{N}$都有$|a_m|\leq c|b_m|$ 时记 $a_m\lesssim b_m$。此外，我们记 $a_m\asymp b_m$，如果两个序列具有相同的数量级，即 $a_m\lesssim b_m$ 且 $b_m\lesssim a_m$。用 $|A|$ 表示集合 A的勒贝格测度。

对于 $p\in[1,\infty]$，空间 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 和 $L^p((0,\infty))$ 简写为通常的 L^p空间。对于 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^d$，我们将傅里叶变换定义为 $\mathcal{F}(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{\mathrm{i}\xi\cdot\omega}f(\omega)\mathrm{d}\omega$。类似地，我们用 $\mathcal{F}_c(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\cos(\xi\cdot\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega$表示余弦变换。对于 $\xi\in\mathbb{R}$，我们进一步定义变换 $\mathcal{F}^+(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\omega)e^{\mathrm{i}|\omega|\xi}\mathrm{d}\omega$，以及类似地，$\mathcal{F}_c^+(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\omega)\cos(|\omega|\xi)\mathrm{d}\omega$。我们通过 $\mathbb{S}^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d$ 定义单位球面： $|x|=1\}$，其中 $\sigma_{d-1}=|\mathbb{S}^{d-1}|$ 简写为单位球面的（$d-1$）维表面积。$\mathbb{S}^{d-1}$上未归一化的表面测度简写为 σ。以 $x\in\mathbb{R}$ 为中心的狄拉克δ函数简写为 δ_x。关于函数的一般增量的记号，即 $\mathcal{I}$ 和 $\mathfrak{I}$，请参见第6.5节。我们用 $\mathrm{sinc}(x)=\sin(x)/x$ 表示 sinc函数，并分别用 $\mathrm{tr}(A)$、 $\|A\|_2$ 和 $\|A\|_\infty$ 表示矩阵 A 的迹、谱范数和最大行范数。

下标 'te' 和 'sp' 分别表示时间依赖和空间依赖，且 $m,\ n\in\mathbb{N}$ 对应于时间和空间二阶增量的数量，其中 δ 和 λ 分别为它们的采样频率。式（1.2）和（1.3）中的常数已在表 1中明确给出。我们专门用 $i,\ j\in\mathbb{Z}$ 表示时间计数指标，用 $k,\ l\in\mathbb{Z}$ 表示空间计数指标。一般指标记为 $z,\ p,\ q\in\mathbb{Z}$。

2 随机偏微分方程模型

本文研究线性随机波动方程（1.1），其中 $\vartheta > 0$ 是未知波速。噪声 $\dot{W}_\beta$ 在时间上是白噪声，在空间上是有色噪声。当噪声的空间协方差由 Riesz 核给出时，随机波动方程的解存在随机场解（$u(t,x)$ $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$），即 $\mathbb{E}[\dot{W}_\beta(t,x)\,\dot{W}_\beta(s,y)] = \delta_0(t-s)|x-y|^{-\beta}$，其中 $t,s \geq 0$ 和 $x,y \in \mathbb{R}^d$，且固定已知参数 $\beta \in (0, 2 \wedge d)$ 表示空间正则性，参见 Dalang [13]。若 $\beta = d$，由 Riesz 噪声驱动的随机波动方程的协方差结构将对应于时空白噪声的情形。然而，只有当 $\beta = d = 1$ 时，由时空白噪声驱动的随机波动方程才存在逐点解。经典结果表明，随机波动方程（1.1）的解在空间和时间上具有局部 H¨older 正则性，阶数为 $1 - \beta/2$，参见 Dalang 和 Sanz-Sol´e [17, 命题 4.1]。注意，时空白噪声情形下 $d = 1$ 的所有结果也都成立。

设 G 为 $\mathbb{R}^d$上波动方程的格林函数。于是，Dalang [13]中的扩展鞅测度理论使我们能够将解写成随机积分

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_{t-s}(x-y) W_\beta(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $\dot{W}_\beta$ 是由噪声 W_β诱导的鞅测度。尽管波动方程的格林函数在更大维数下变得越来越不规则，并且依赖于 $d \in \mathbb{N}$的奇偶性，例如参见Evans[19]，其傅里叶变换始终具有如下表示

$$\mathcal{F}(G_t)(\omega) = \frac{\sin(t\sqrt{\vartheta}|\omega|)}{\sqrt{\vartheta}|\omega|} = t\mathrm{sinc}(t\sqrt{\vartheta}|\omega|), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

来自Dalang的伊藤等距 [13, 定理 2] 使我们能够利用表示（2.1），从而给出随机波动方程（1.1）协方差结构的显式刻画，这在全文中至关重要。

命题 2.1. 随机波动方程的协方差函数（1.1）由下式刻画

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[u(t,x)u(s,y)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_0^{t\wedge s} \int_{\mathbb{R}^d} \cos\left(\frac{(x-y)}{\sqrt{\vartheta}} \cdot \omega\right) \sin((t-r)|\omega|) \sin((s-r)|\omega|) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \cos\left(\frac{(x-y)}{\sqrt{\vartheta}} \cdot \omega\right) \Phi_{\mathrm{te},|\omega|}(t,s) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{te},\xi}(t,s) &:= \frac{\sin(|t-s|\xi) - \sin((t+s)\xi)}{4\xi} + \frac{1}{2}(t \wedge s)\cos((t-s)\xi) \\
&= \frac{1}{2}\left((t \wedge s)\cos((t-s)\xi) - \frac{\cos((t \vee s)\xi)\sin((t \wedge s)\xi)}{\xi}\right),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 t、$s \geq 0$、x、$y \in \mathbb{R}^d$和 $\xi \in \mathbb{R}$。

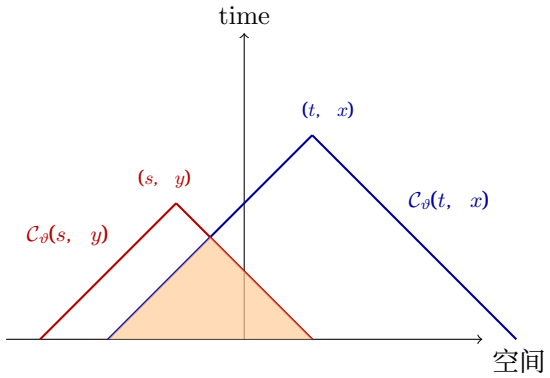
注 2.2.

(i) ($\beta = d = 1$)：关于此特殊情形中该表示的形式证明，我们参见 Khalil 和 Tudor [27,引理 1]。此外，在此情形下，随机波动方程的协方差结构具有一种便利的几何直观。设 $\mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R})$ 为 Borel σ-代数。在鞅测度方法中，[42],时空白噪声通常被解释为具有协方差结构 $\mathbb{E}[W(A)W(B)] = |A \cap B|$ 的中心高斯过程 ($W(A)$ $A \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R})$)，其中 $A, B \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R})$。于是随机波动方程由下式给出

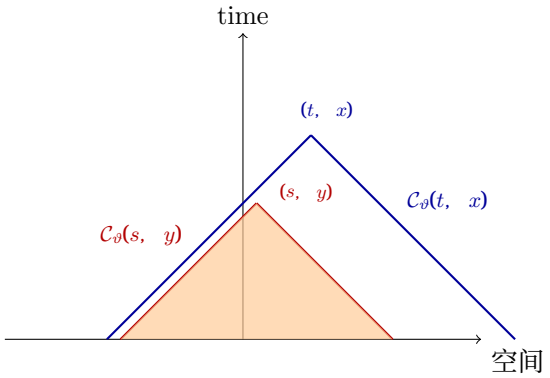
$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(|x-y| \leq \sqrt{\vartheta}(t-s)) W(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} W(\mathcal{C}_\vartheta(t,x)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

对于后向光锥 $\mathcal{C}_\vartheta(t,\ x) = \{(s,\ y) \in (0,\ \infty) \times \mathbb{R} :\ 0 \leq s \leq t,\ |x-y| \leq \sqrt{\vartheta}(t-s)\}$。因此，计算 $\beta = d = 1$ 中随机波动方程的协方差结构，就等同于计算两个后向光锥的相交面积：

$$\mathbb{E}[u(t,x)u(s,y)] = \frac{1}{2\vartheta}\mathbb{E}[W(\mathcal{C}_\vartheta(t,x))W(\mathcal{C}_\vartheta(s,y))] = \frac{1}{2\vartheta}|\mathcal{C}_\vartheta(t,x) \cap \mathcal{C}_\vartheta(s,y)|.$$



(a) 两个后向光锥的部分重叠。



(b) 两个后向光锥的完全包含关系。

图2：（a） $\beta = d = 1$中两个后向光锥部分重叠；（b）其中一个完全包含在另一个之中。橙色区域表示协方差非零。

协方差非零的情况有两种：图 2a 展示了部分重叠的情形，而一个光锥包含于另一个光锥中的情形如图 2b所示。这得到协方差结构

$$\mathbb{E}[u(t,x)u(s,y)] = \frac{1}{16\sqrt{\vartheta}}\mathbb{1}_{\{|t-s|\le\frac{|x-y|}{\sqrt{\vartheta}}<(t+s)\}}\left(t+s-\frac{|x-y|}{\sqrt{\vartheta}}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{\vartheta}}\mathbb{1}_{\{\sqrt{\vartheta}|t-s|>|y-x|\}}(t\wedge s)^2.$$

高维情况下，几何结构不再那么简单。后向光锥的交集本身不再是后向光锥。此外，当 $\beta \in (0,\ 2\wedge d)$时，Riesz 噪声会在协方差结构中引入长程依赖；即使相应的后向光锥互不相交，协方差也不再为零。

（ii）（$x = y$）：若在命题2.1中令 $x = y$，则所有被积函数都是径向的。因此，通过转换到极坐标，可以大幅简化该表示：存在一个常数$C_{\beta,\ d}$使得对于任意固定的空间点 $x \in \mathbb{R}^d$，有

$$\mathbb{E}[u(t,x)u(s,x)] = C_{\beta,d}\vartheta^{-\beta/2}\left(\frac{1}{2(3-\beta)}\left((t+s)^{3-\beta}-|t-s|^{3-\beta}\right)-(t\wedge s)|t-s|^{2-\beta}\right). \tag{2.3}$$

关于严谨的证明，请参见命题6.1。方程（2.3还表明，协方差对未知参数的依赖仅通过标量因子 $\vartheta^{-\beta/2}$体现。因此，若在随机波动方程的解中加入指标 ϑ，则该族（u_ϑ（$t,\ x$） $t \ge 0$中的所有成员，除相乘因子外，都具有相同的相关结构。等价地，有

$$(u_\vartheta(t,x), t\ge 0) \overset{d}{=} \vartheta^{-\beta/4}(u_1(t,x), t\ge 0),$$

另见 Assaad、Gamain 和 Tudor [2, 引理 4.1]。

3 空间变差

假设 $\rho \in \mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ 是观测方向，$t > 0$ 是一个固定时间点。假设我们可以获取过程 ($u(t,x)$ $x \in \mathbb{R}^d$) 在空间线段 ($r\rho, r \in (0,\infty)$) 上的离散观测。因此，对于 $x_k = \lambda_n k\rho$，我们以网格大小 $\lambda_n > 0$ 观测 $u(t,x_k)$，且 $k = 0,\dots,$ $n+1$。我们通常省略 λ_n 中的索引 n，直接写作 $\lambda = \lambda_n$，但需谨记，λ_n 可能取决于空间点的数量。图 3 展示了空间观测路径的示意图。

作为我们矩估计法型方法的关键统计量，我们考虑如下定义的二阶空间变差

$$\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} := \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k})^2, \tag{3.1}$$

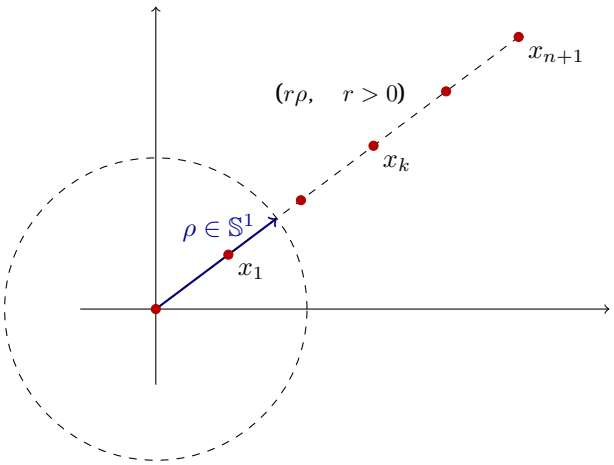


图 3：空间观测点的可视化 对于固定的 $n \in \mathbb{N}$，$\lambda \in (0, 1)$ 中空间观测点 $(x_k)_{k=0}^{n+1}$ 的可视化 $d = 2$.

与我们的观测向量相关的二阶空间增量由 b 给出 y

$$\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k} \coloneqq u(t, x_{k+1}) + u(t, x_{k-1}) - 2u(t, x_k), \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

注 3.1.

(i) 即使在时空白噪声的情况下，也就是说，假设 $\beta = d = 1$，二阶空间变差也是自然的。我们可以将二阶增量表示为两个一阶增量之差，即$\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,k} = (u(t,\ x_{k+1}) - u(t,\ x_k)) - (u(t,\ x_k) - u(t,\ x_{k-1}))$。一阶空间增量的协方差结构为

$$\mathrm{Cov}(u(t, x_{k+1}) - u(t, x_k), u(t, x_{l+1}) - u(t, x_l)) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\vartheta}\left(t - \frac{\lambda}{4\sqrt{\vartheta}}\right), & k = l, \\ -\frac{\lambda^2}{8\vartheta^{3/2}}, & k \neq l. \end{cases}$$

例如参见 Assaad、Gamain 和 Tudor [2]。因此，此情形下的协方差矩阵是一个双常数矩阵，即使增量所涉及的空间点相距甚远，一阶增量仍然相关。由于与一阶增量相关的协方差矩阵的所有非对角元素都相同，二阶增量的协方差是一个带状矩阵，满足 $\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,k},\ \mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,l}) = \frac{\lambda t}{\vartheta}$ 当 $k = l$ 时，$\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,k},\ \mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,l}) = -\frac{\lambda t}{2\vartheta}$ 当 $|k - l| = 1$ 时，以及 $\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,k},\ \mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,l}) = 0$ 在其他情况下。

(ii) 注意，如果 $\beta = d = 1$ 且空间点之间的距离足够远，那么图 2a 中观测点处的所有光锥 $x_0, \dots, x_{n+1}$ 都可能互不重叠，另见 Shevchenko [37]。这本质上是独立同分布情形，也是波动方程有限传播速度带来的另一个有趣结果。

增量（3.2）之间的协方差是命题 2.1 中协方差函数的二维二阶增量：

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}, \mathbf{I}_{\mathrm{sp},l}) = \frac{t\lambda^{2-\beta}}{2(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}^{(2)}[\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}](k,l) \left(1 - \mathrm{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)\right) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega,$$

其中函数

$$\Phi_{\mathrm{sp},\xi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \Phi_{\mathrm{sp},\xi}(x, y) \coloneqq \cos\left((x - y)\xi\right), \quad x, y, \xi \in \mathbb{R},$$

以及由下式给出的关于两个变量的二阶离散增量

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(2)}[h](q, z) \coloneqq\ & 4h(q, z) + h(q+1, z+1) + h(q+1, z-1) + h(q-1, z+1) + h(q-1, z-1) \\ & - 2\left(h(q, z+1) + h(q, z-1) + h(q-1, z) + h(q+1, z)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

对于函数 $h\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 与 $q,\ z \in \mathbb{Z}$。利用三角函数增量往往具有闭式表达式这一事实（参见第 6.5 节），我们得到两个不同的二阶空间增量 $\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,k}$ 与 $\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,l}$ 之间协方差的如下表示。

引理 3.2. 两个二阶空间增量之间的协方差由下式给出

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}, \mathbf{I}_{\mathrm{sp},l}) = \frac{8t\lambda^{2-\beta}}{(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} \cos((k-l)\rho \cdot \omega) g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) \mathrm{d}\omega$$

with

$$g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) := (1 - \mathrm{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)) \sin^4(\rho \cdot \omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}. \tag{3.4}$$

对于 $\lambda = 0$，我们通过 $g_{\mathrm{sp}}(\omega)$：$=$ 正弦$^4(\rho \cdot \omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}$ 自然地扩展定义。

注 3.3。 随机波动方程的几何性质带来的一个结果是，可以得到增量协方差的显式表示，例如引理 3.2 中的表示。原则上，这些表示在抛物型情形下也适用，参见 Hildebrandt 和 Trabs [23, 命题 2。1], 但由此得到的闭式表示在分析中并不实用，因此会立即用导数近似增量，由此产生的额外误差则需要加以处理，参见 Hildebrandt 和 Trabs [23, 命题 3。5] 以及 Bibinger 和 Trabs [5]。

引理 3.2 表明，即使在 $\beta \in (0, 2 \wedge d)$ 的一般维数情形下，与二阶增量相关的协方差矩阵仍是注 3.1中所述的托普利兹矩阵。此外，我们注意到，空间点 λ 之间的距离以及未知量 ϑ 以标量因子和积分中的 sinc 部分的形式进入协方差。因此，当 $\lambda \to 0$时，由于 sinc 项渐近趋于零，协方差应按 $\lambda^{2-\beta}$ 缩放，从而可以刻画空间变差 $\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}$的期望和方差。

命题 3.4。 假设 $\lambda \to 0$ 当 $n \to \infty$时，通过 (3.1)定义的二阶空间变差的期望满足

$$\frac{\lambda^{\beta-2}}{n} \mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}] = \frac{t}{\vartheta} C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

对于常数 $C_{\mathrm{sp},\ \mathbb{E}} > 0$ 见表 *1*。

注 3.5。

(i) 如果我们以确定性初始条件 $u(0,\cdot) = u_0$ 和 $\partial_t u(0,x) = v_0$ 启动过程 (1.1)，随机波动方程的解将包含额外的确定性项 $u_{\mathrm{det}}(t,x) := (\partial_t G_t * u_0)(x) + (G_t * v_0)(x)$。我们将 u_{det} 的二阶空间变差记为 $\mathrm{V}_{\mathrm{sp,det}}$，其定义与 (3.1) 类似，其中在 (3.2) 中以 u_{det} 替换 u。令 γ_0 和 γ_1 分别表示 u_0 和 v_0的 H¨older 正则性。算子余弦（即 $\partial_t G_t * u_0$）保持初始条件的正则性，而算子正弦（即$G_t * v_0$）则提供额外一阶正则性。令 $\mathrm{V}_{\mathrm{sp,det}}$ 表示 u_{det}的二阶变差。如果 u_{det} 具有足够的正则性，即 $\gamma = \min(\gamma_0, \gamma_1 + 1) > 1 - \beta/2$，则可得 $n^{-1}\lambda^{\beta-2}\mathbb{E}[\mathrm{V}_{\mathrm{sp,det}}] = O(\lambda^{2\gamma-(2-\beta)})$，我们的统计结果对非零初始条件也仍然成立。

(ii) 假设我们不考虑（ 1 1 $\partial_{tt}^2 u\ t\ x\ = \vartheta \Delta u\ t\ x\ +$。），而是考虑非线性随机波动方程（，）（，）$F$（$u$（$t$，$x$））$+W_\beta$（$t$，$x$），其中具有利普希茨非线性 F。那么，令 u_{lin}为（1.1）的解，则非线性方程的随机解为

$$u(t,x) = u_{\mathrm{lin}}(t,x) + u_{\mathrm{rem}}(t,x), \quad u_{\mathrm{rem}}(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_{t-s}(x-y) F(u(s,y)) \mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

因此，空间变差 V_{sp} 可以分解为三部分，即 $\mathrm{V}_{\mathrm{sp、\ lin}}$ 和 $\mathrm{V}_{\mathrm{sp、\ rem}}$，也就是 u_{lin} 和 u_{rem}的二阶变差，以及一个低阶交叉项。Conus 和 Dalang [12, 定理 7.6]指出，非线性随机波动方程的解是 α-H¨older 连续的，其阶数为 $\alpha < 1 - \beta/2$。由 F的利普希茨连续性可知，对于 F（u（s，$\cdot$））$_+$，同样成立。此外，格林函数在（2.1）中的傅里叶变换本质上是一个负一阶的傅里叶乘子，并通过因子 $|\omega|^{-1}$抑制高频。因此，由 G诱导的算子正弦函数沿方向 ρ 的导数仍然是 α-H¨older 连续的，从而得到如下形式的界 $\mathbb{E}[|\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\ k}[u_{\mathrm{rem}}]|^2] \lesssim \lambda^{2+2\alpha}\mathbb{E}[\|\partial_\rho u_{\mathrm{rem}}$（$t$，$\cdot$）$\|_{C^0,\ \alpha}^2] < \infty$。因此，$n^{-1}\lambda^{\beta-2}\mathbb{E}[\mathrm{V}_{\mathrm{sp},\ \mathrm{rem}}] = O$（$\lambda^{2\alpha+\beta}$）。通过直接利用 G 的傅里叶变换表示u_{rem}，并按照引理 3.2将二阶增量作为额外的傅里叶乘子纳入其中，或许可以进行更精确的分析。

总的来说，这表明，在对非线性项 F 作出相对温和的假设时，解的线性部分似乎占主导地位。这与非线性随机热方程中类似的现象一致，参见 Hildebrandt 和 Trabs [22]。因此，对非线性情形进行全面研究，或许是未来研究的一个有趣方向。

既然我们已经了解了统计量 $\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}$ 的期望的渐近行为，我们也想研究它的方差。

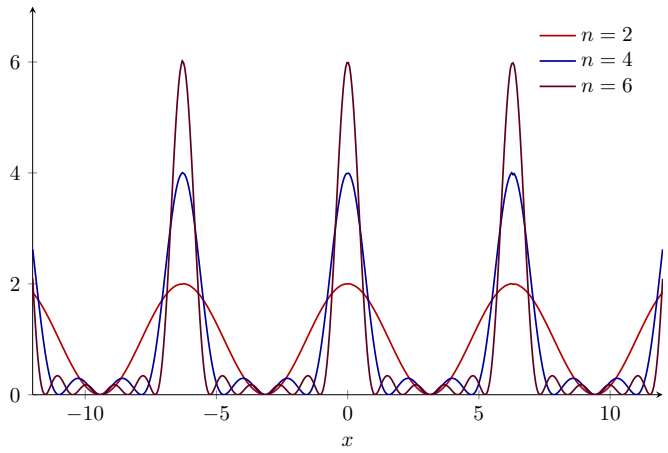


图 4：通过（Fejér 核 $\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}$ 定义的可视化（3.6），对应不同的 $n \in \mathbb{N}$。

命题 3.6。 假设 $\lambda \to 0$。那么，二阶空间变差的方差满足

$$\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}) \to \frac{t^2}{\vartheta^2} C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}},$$

常数 $C_{\mathrm{sp},\ \mathbb{V}} > 0$ 见表 *1*。

命题3.6 的证明植根于经典傅里叶分析。利用 Wick（Isserlis）定理 [24, 定理 1。28]和引理3.2，我们得到如下渐近式

$$\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}) \asymp \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\cos((k-l)\rho\cdot\omega)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2. \tag{3.5}$$

求和式（3.5可通过 Fej´er 核表示，该核的可视化见图 4，

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(x) \coloneqq \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\cos\big((k-l)x\big)}_{\text{cosine representation}} = \underbrace{\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}e^{\mathrm{i}kx}}_{\text{Fourier representation}} = \underbrace{\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}\cos(kx)}_{\text{simplification}}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.6}$$

其对称权重为 $w_{\mathrm{sp},\ k}\colon = 1-|k|/n$，它本身有几种实用的表示形式，Grafakos 中的命题 3.1[21, 。7]。我们可以先展开平方，并将（3.5）表示为关于两个不同变量的积分。结合余弦的和差化积公式以及（3.6）中的余弦表示，我们得到

$$\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}) \asymp \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big(\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1+\omega_2)) + \mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1-\omega_2))\big)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_1)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2. \tag{3.7}$$

如果现在利用（3.6）中的傅里叶表示来表示 Fej´er 核，则两个 Fej´er 核可以合并。事实上，由于 $g_{\mathrm{sp},\ \lambda}$ 是偶函数，二重积分甚至可以因式分解，从而我们可以完全通过函数 $g_{\mathrm{sp},\ \lambda}$的傅里叶系数来表示方差：

$$\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}) \asymp \sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp},\lambda})(k\rho)\right)^2 \to \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2 < \infty. \tag{3.8}$$

注释 3.7。

（i）Fej´er 核和狄利克雷核与通过傅里叶系数重建函数这一概念密切相关，例如使用傅里叶部分和或 Ces`aro 和，例如（3.8）。关于这一主题的深入论述，以及如何结合傅里叶变换衰减方面的结果，请参阅 Grafakos [21, 第 3.2 章、第 3.3 章。2]。本文始终沿用这一方法，不过，Fej´er 核也可以视为收敛到计数测度（见图 4）：

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}} \to 2\pi\mu_{2\pi\mathbb{Z}} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi k}, \quad n\to\infty,$$

而（3.7）的极限可以表示为对适当超平面的积分。这两种观点通过高维版本的泊松求和公式联系起来。

(ii) 即使在 $\beta = d = 1$的情形下，也无法得到与命题3.6 对一阶增量相同的结果，因为相关协方差矩阵中非平凡非对角元素的数量随 n呈二次增长。在（3.2）中，我们转而考虑了增量阶数二。鉴于引理3.2，增量阶数通过正弦项的幂次以及常数进入增量的协方差表示。正弦项的幂次至关重要，因为它平滑了黎斯着色项 $|\cdot|^{\beta-d-2}$在原点附近的奇异性。我们甚至要求 g_{sp} 的导数可积，以使（3.8）中的级数收敛，而一阶增量并不满足这一条件。

命题3.6 已经精确刻画了二阶空间变差的渐近行为。这是验证中心极限定理的 Lyapunov 条件的关键一步：

$$\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}]}{\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}})}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{if} \quad \frac{\left(\max_{k=1,\dots,n} \sum_{l=1}^{n} |\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}, \mathbf{I}_{\mathrm{sp},l})|\right)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}})} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

例如，参见 Hildebrandt 和 Trabs [23, 命题 3.1]。

注记 3.8. 令 $\Sigma_n = (\mathrm{Cov}(\mathrm{I}_{\mathrm{sp},k}, \mathrm{I}_{\mathrm{sp},l}))_{k,l=1,\dots,n}$ 为与二阶增量相关联的协方差矩阵。则增量向量 $(\mathrm{I}_{\mathrm{sp},1}, \dots, \mathrm{I}_{\mathrm{sp},n})$ 服从 $N(0, \Sigma_n)$，其范数为变差 V_{sp}。特别地，V_{sp} 可以用矩阵 Σ_n 的特征值表示；若 $\mathrm{tr}(\Sigma_n^4)/\mathrm{tr}(\Sigma_n^2)^2 \to 0$，则满足 Lyapunov 条件。该条件等价于 $\|\Sigma_n\|_2^2/\mathbb{V}(\mathrm{V}_{\mathrm{sp}}) \to 0$ as$n \to \infty$，并且当谱范数有界于最大绝对行范数时，可得(3.9)。

利用引理中协方差矩阵的托普利兹结构3.2，可以控制条件（3.9）中的分子，从而得到中心极限定理。

定理 3.9. 假设 $\lambda \to 0$ *as* $n \to \infty$，二阶空间变差满足

$$\sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}\right]\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{t^2}{\vartheta^2} C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}\right), \quad n \to \infty.$$

注记 3.10. 如果我们假设 $\lambda = 1$ s.t. 我们离开高频状态，那么命题3.4 中的期望表达式在 ϑ下不易求逆，因此难以构造矩估计法类型的估计量。然而，推导出方差表示式（3.8）的论证仍完全成立，只是极限常数将以非线性方式依赖于 ϑ。因此，即使 λ为常数，形式为 $n^{-1/2}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}]) \xrightarrow{d} N(0, C_{\mathrm{sp}}(\beta, d, \vartheta))$ 的中心极限定理依然成立。

还需证明，当空间点 λ之间的距离 $x_0, \dots, x_{n+1}$收敛得足够快时，我们可以在定理 $\mathbb{E}[n^{-1}\lambda^{\beta-2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}]$ 中用其极限替换3.9。由于我们已在命题 3.4 中看到，偏差的阶为λ，因此显然 $\sqrt{n}\lambda^2 \to 0$ 是一个充分条件，以下推论对此作了总结。**推论 3.11.** 假设 $\lambda = o(n^{-1/4})$。那么，二阶空间变差满足

$$\sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \frac{t}{\vartheta} C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{t^2}{\vartheta^2} C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}\right), \quad n \to \infty.$$

根据推论 3.11，现在我们可以构造一个未知波速的矩估计量$\vartheta > 0$:

$$\hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n} := \frac{t C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}}{n^{-1}\lambda^{\beta-2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}}. \tag{3.10}$$

将德尔塔方法应用于估计量（3.10），可得以下中心极限定理。

推论 3.12。 设 $\lambda = o(n^{-1/4})$。则，矩估计量 (3.10) 满足中心极限定理

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n} - \vartheta) \xrightarrow{d} N\left(0, \vartheta^2 \frac{C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}}{(C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}})^2}\right).$$

注释 3.13. 基于中心极限定理推论3.12，我们现在可以构造置信水平为 $1-\alpha$的渐近置信区间，即 $[\hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n} - (\hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n}/\sqrt{n})cq_{1-\alpha/2}, \hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n} + (\hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n}/\sqrt{n})cq_{1-\alpha/2}]$，其中 $c = C^{1/2}_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}/C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}$，且$q_{1-\alpha/2}$是标准正态分布的 $1-\alpha/2$ 分位数。

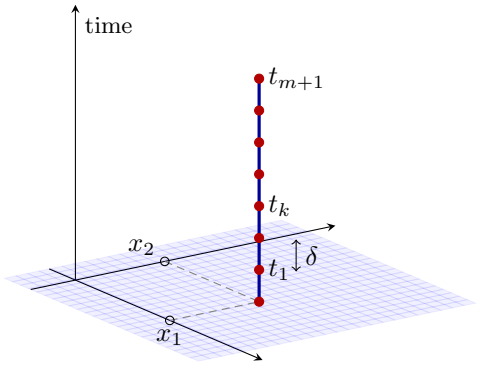


图5：在固定空间点 $x=(x_1,\ x_2)$ 处，距离为 $t_{i+1}-t_i=\delta$ 的时间离散观测 $t_0,\ t_1,\ \ldots\ldots,\ t_{m+1}$ 的可视化。

4 时间变差

与第3节不同，我们首先固定一个空间点 $x\in\mathbb{R}^d$，并假设我们可以获得过程（$u(t,\ x)\ \ t\in\mathbb{R}$）在等距时间点 t_i 处的观测，其中 $i=0,\ \ldots\ldots,\ m+1$，即我们观测 $u(t_i,\ x)$，其中 $t_i=\delta i$以及 $i=0,\ \ldots\ldots,\ m+1$。图5 给出了该观测方案的可视化。与之前一样，$\delta=\delta_m$ 可能依赖于时间点的数量。

类似于（3.1），我们采用矩方法型方法，并引入二阶时间变差

$$\mathbf{V}_{\mathrm{te}}:=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}^2, \tag{4.1}$$

以及二阶时间增量

$$\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}:=u(t_{i+1},x)+u(t_{i-1},x)-2u(t_i,x),\quad i=1,\ldots,m. \tag{4.2}$$

注4.1。考虑时空白噪声 $\beta=d=1$ 的情形。根据图 2b，过程（$u(t,\ x)\ t\geq 0$具有布朗运动的时间尺度协方差结构

$$\mathbb{E}[u(t_i,x)u(t_j,x)]=\frac{1}{4\sqrt{\vartheta}}(t_i\wedge t_j)^2=\frac{\delta^2}{4\sqrt{\vartheta}}(i^2\wedge j^2),\quad i,j=1,\ldots,m,$$

特别地，向量 $U_m=(u(t_1,x)\ldots,u(t_m,x))$ 服从多元高斯分布 $U_m\sim N(0,\delta^2/(4\sqrt{\vartheta})A_m)$，其中 $A_m=[i^2\wedge j^2]_{i,j=1,\ldots,m}$。因此，与向量 U_m 相关的对数似然 l 满足$\partial_\vartheta l(\vartheta|U_m)=m/(4\vartheta)-Q_m/(\delta^2\sqrt{\vartheta})$，其中 $Q_m=U_m^\top A_m^{-1}U_m$，由此得到最大似然估计量 $\hat{}\ \vartheta_m^{\mathrm{MLE}}=\big(\delta^2 m/(4Q_m)\big)^2$。我们注意到，计算最大似然估计需要求矩阵 A_m 的逆。根据 Seber [36, 第8页，11], 其逆矩阵是三对角矩阵 $A_m^{-1}=\mathrm{trid}[b^{(m-1)},a^{(m)},b^{(m-1)}]$，其中 $a^{(m)}\in\mathbb{R}^m$ 和 $b^{(m-1)}\in\mathbb{R}^{m-1}$分别由 $a_j^{(m)}=1/(2j-1)+1/(2j+1)$ 给出，适用于 $j=1,\ldots,m$，而 $b_j^{(m-1)}=-1/(2j+1)$ 适用于 $j=1,\ldots,m-1$。因此，Q_m 由下式给出

$$Q_m=u(t_1,x)^2+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(u(t_{j+1},x)-u(t_j,x))^2}{2j+1}+\frac{u(t_m,x)^2}{2m+1},$$

且最大似然估计涉及加权二次变差。注意，

$$\mathbb{V}(u(t_{j+1},x)-u(t_j,x))=\frac{1}{4\sqrt{\vartheta}}(t_{j+1}^2-t_j^2)=\frac{\delta^2}{4\sqrt{\vartheta}}[(j+1)^2-j^2]=\frac{\delta^2}{4\sqrt{\vartheta}}[2j+1].$$

因此，最大似然估计量对方差较大的增量赋予的权重低于方差较小的增量。

我们的下一个目标是得出两个不同二阶时间增量$\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}$ 和$\mathbf{I}_{\mathrm{te},j}$之间协方差的表示。对于时间变差，虽然可以直接利用协方差的显式精确计算结果

公式（2.3），但本文统一采用同一种方法，遵循第3节概述的傅里叶方法。

两个不同二阶时间变差之间的协方差由函数 $(i,j)\mapsto \Phi_{\mathrm{te},|\omega|}(\delta i,\delta j)$ 的二维二阶增量刻画，该函数见（2.2），其显式计算见下述结果。

引理 4.2. 两个不同二阶时间增量之间的协方差为

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})=\delta^{3-\beta}\left((i\wedge j)\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\cos((i-j)|\omega|)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega+R(i,j)\right)$$

with

$$g_{\mathrm{te}}(\omega):=\sin^4(|\omega|/2)|\omega|^{\beta-d-2},\tag{4.3}$$

，以及一个显式余项，写作 (6 .6)，其一致有界，且上界为与 i 和 j 无关的常数

。**注4.3.** 与引理 3.2 相比，引理 4.2导出的时间增量协方差结构包含额外的显式余项，这些余项取决于指标 i 和 j 之间的距离。这些项的出现是因为时间过程 $(u(t,x)\ t\geq 0)$ 是非平稳的，且其协方差涉及由（2.2）定义的映射 $\Phi_{\mathrm{te},\xi}$，该映射类似于标准谐振子的协方差。仔细考虑表示式（ 2.2 ）中由绝对值和最小值产生的不同情形后，仍可显式计算映射$\Phi_{\mathrm{te},\xi}$ 的增量，这是因为该映射具有很强的三角性质。

除去余项外，引理 3.2 和引理 4.2 中协方差的两种表示在结构上非常相似。它们分别在 λ 和 δ中的尺度有所不同。事实上，整个时间协方差结构完全独立于所选取的空间点 $x\in\mathbb{R}^d$，而在（3.2）中，$g_{\mathrm{sp},\ \lambda}$ 仍然依赖于时间。此外，与空间协方差结构不同，ϑ 是高斯过程（$u(t,\ x)\ t\geq 0$）的尺度参数，因此协方差结构仅通过一个标量因子依赖于 ϑ 。对于下述结果中所考虑的时间变差 $\mathbf{V}_{\mathrm{te}}$ 的期望值而言，这一事实尤为重要，因为期望值的表达式总能在 ϑ 中反向使用。

命题 4.4。 二阶时间变差 $\mathbf{V}_{\mathrm{te}}$ 的期望值具有如下渐近行为：

$$\frac{\delta^{\beta-3}}{m^2}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{te}}]=\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}+\mathcal{O}(m^{-1})$$

对于常数 $C_{\mathrm{te},\ \mathbb{E}}>0$ 其值见表 *1*。

对于空间变差，$\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}$ 的方差自然导出 Fej´er 核的余弦表示（3.6）。假设可以忽略引理 4.2中的余项，则沿用相同的论证思路可得到如下表示

$$\frac{\delta^{2\beta-6}}{m^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}})\asymp\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\int_{\mathbb{R}^d}\cos((i-j)|\omega|)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2.$$

由于额外的因子 $(i\wedge j)$，将平方展开为两个积分后，可得到一个映射

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(x):=\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}(i\wedge j)^2\cos((i-j)x)=\sum_{|j|\leq m-1}w_{\mathrm{te},j}\cos(jx),\quad w_{\mathrm{te},j}:=\frac{1}{m^3}\sum_{i=1}^{m-|j|}i^2,\tag{4.4}$$

它取代了 Fej´er 核，证明见引理6.5。特别地，我们得到如下表示 n

$$\frac{\delta^{2\beta-6}}{m^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}})\asymp\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(|\omega_1|+|\omega_2|)+\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(|\omega_1|-|\omega_2|)\right)g_{\mathrm{te}}(\omega_1)g_{\mathrm{te}}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2,$$

这使我们能够找到一个合适的部分傅里叶和表示

$$\frac{\delta^{2\beta-6}}{m^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}})\asymp\sum_{|j|\leq m-1}w_{\mathrm{te},j}\left(\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)\right)^2.\tag{4.5}$$

注 4.5. 原则上，若固定一个空间点，则（2.1）中的所有函数都是径向函数，因此也可以立即转到极坐标，这例如会得到表示式（2.3）。在这种情况下，$(\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)$ 在（4.5）中恰好对应于映射 $r\mapsto$ 正弦$^4(r/2)r^{\beta-3}$ 在 $[0,\infty)$ 上的余弦变换。

命题 4.6. 二阶时间变差的方差具有如下渐近行为

$$\frac{\delta^{2\beta-6}}{m^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}}) \to \frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}, \quad m \to \infty,$$

对于表 C_{te}中给出的常数 $\mathbb{V} > 0$ ，见表 *1*。

备注 4.7。 在时空白噪声的情形下，一阶增量自然地出现在最大似然估计中，见备注 4.1。然而，参数 β 会影响过程的整体正则性（$u(t,\ x)\ t \geq 0$）。因此，在考虑一阶增量时，命题 4.6 的陈述一般并不成立。给定一阶变差

$$\mathbf{V}_{\mathrm{te}}^{(1)} := \sum_{i=1}^{m} (u(t_{i+1}, x) - u(t_{i-1}, x))^2,$$

例如，利用（2.3）可以验证

$$\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}}^{(1)}) \asymp \begin{cases} m^3\delta^{6-2\beta}, & \beta \in (1/2, 2), \\ m^3 \log(m)\delta^5, & \beta = 1/2, \\ m^{4-2\beta}\delta^{6-2\beta}, & \beta \in (0, 1/2). \end{cases}$$

β 的值越小，表示空间着色越强，而过程（$u(t,\ x)\ t \geq 0$）将具有更强的正则性。在某个临界点，即在 $\beta = 1/2$处，会发生相变，并且一阶（二次）变差退化。该临界点恰好对应于赫斯特系数在$H = 3/4$处出现的众所周知的相变，参见例如 Cohen 等人 [11] 及其中的参考文献。

与（3.9）类似，我们利用 Lyapunov 条件证明一个中心极限定理

$$\frac{\left(\max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} |\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}, \mathbf{I}_{\mathrm{te},j})|\right)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}})} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{4.6}$$

定理 4.8。 二阶时间变差 (4.1)满足

$$\sqrt{m}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{m^2}\mathbf{V}_{\mathrm{te}} - \frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right), \quad m \to \infty.$$

备注 4.9。 请注意，与推论 3.11不同，我们不需要对 δ施加任何额外的收敛性假设。事实上，命题4.4 中的余项即使乘以额外因子 $\sqrt{m}$，也已收敛于零。实际上，定理 4.8 默认涵盖高频率和低频率状态。鉴于备注 2.2 (ii) 指出，模型中的典型统计量在白化后与 δ 无关，这一点是自然的。从本质上说， ϑ 的估计不受抽样区间影响，只取决于样本量 m。

基于命题 4.4，我们定义矩估计量

$$\hat{\vartheta}_{\mathrm{te},m} := \left(\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{m^{-2}\delta^{\beta-3}\mathbf{V}_{\mathrm{te}}}\right)^{2/\beta} \tag{4.7}$$

通过对定理 4.8应用德尔塔方法，可得其满足以下中心极限定理**推论 4.10**。 矩估计量 (4.7)满足

$$\sqrt{m}(\hat{\vartheta}_{\mathrm{te},m} - \vartheta) \xrightarrow{d} N\left(0, \vartheta^2 \frac{4C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\beta^2 C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}^2}\right), \quad m \to \infty.$$

虽然定理 4.8 和推论4.10 中的渐近方差仍与空间点无关 x，但它确实取决于空间正则性 β、未知波速 ϑ、常数 $C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}$ 以及$C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}$。如注 3.13所述，可以基于推论 4.10，通过代入原则构造置信区间。**备注 4.11**。

(i) 对于在固定空间观测点 $x \in \mathbb{R}^d$ 进行的时间观测，不难看出收敛速率 $\sqrt{m}$ 是最优的。由于 ϑ 是高斯过程（$u(t,\ x)\ t \geq 0$）的尺度参数，观测向量（$u(t_0,\ x), \dots, u(t_{m+1},\ x)$）的协方差矩阵仅通过未知参数

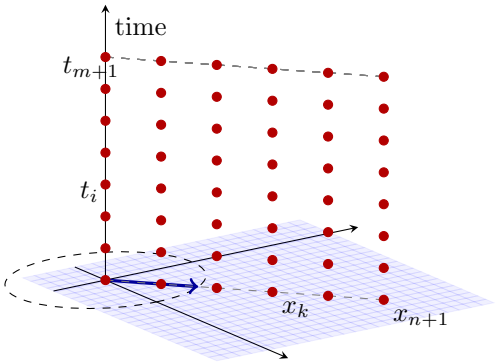


图6：时空网格（t_i，x_k）在 $d=2$ 中针对 $i=0,\ldots,m+1$ 和 $k=0,\ldots,n+1$ 的可视化。象征空间测量方向的蓝色向量为 $\rho\in\mathbb{S}^1$。

$\vartheta^{-\beta/2}$ 依赖于标量，见注 2.2 (ii)。对于两个不同的概率测度，P 和 Q，我们定义（平方）海林格距离 $H^2(P,Q)=\frac{1}{2}\int(\sqrt{P(dx)}-\sqrt{Q(dx)})^2$。对于两个不同的波速 ϑ_0 和 ϑ_1，时间离散观测（$u(t_i,x)$ $i=0,\ldots,m+1$）的概率分布$P_{\vartheta_0,m}$和 $P_{\vartheta_1,m}$之间的海林格距离为

$$H^2(P_{\vartheta_0,m},P_{\vartheta_1,m})=1-\left(1-\frac{(\vartheta_0^{\beta/2}-\vartheta_1^{\beta/2})^2}{(\vartheta_0^{\beta/2}+\vartheta_1^{\beta/2})^2}\right)^{(m+2)/4}.$$

尤其是，波速 ϑ 的估计收敛速率最优值为 $m^{-1/2}$。如备注 4.7 所述，只要 $\beta\in(0,1/2)$，基于一阶增量的矩估计量通常无法达到最优收敛速率。例如，在边界情形 $\beta=1/2$ 下，其收敛速率为 $m^{-1/2}\log(m)^2$，因而损失了一个对数因子。相反，只要 $\beta\in(1/2,2\wedge d)$，一阶增量就足以达到最优收敛速率。

^ (ii) 尽管定理 4.8 表明，矩估计法估计量$\vartheta_{\mathrm{te},m}$ 达到了最优收敛速率，但并未达到最小渐近方差。在协方差结构复杂的一般情形下，要从协方差矩阵对未知参数 ϑ 的非线性依赖关系中将其分离出来，并像备注4.1中那样确定最大似然估计，可能并不容易。这正是矩估计法成为一种稳健替代方法的原因。不过，在这个特殊情形下，由于 ϑ 是备注 2.2 (ii)中所述的尺度参数，因此可以计算最大似然估计，且其表达式为

$$\hat{\vartheta}_{\mathrm{MLE},m}:=\left(\frac{1}{\frac{1}{m+2}|\Sigma_m^{-1/2}U_m|^2}\right)^{2/\beta},$$

其中 $U_m=(u(t_0,x)\ldots,u(t_{m+1},x))$，而 Σ_m 是特殊情形$\vartheta=1$下向量 U_m 的协方差矩阵。一般而言，或许无法明确给出 $\Sigma_m^{-1/2}$的精确解析表达式，但至少可以通过数值方法进行近似。关于一维情形下效率考量的更详细讨论，请参阅 Markussen [32]。

5 时空变差

在本节中，我们结合第3节和第4节的见解，考虑如下形式的观测：$u(t_i,x_k)$，其中 $t_i=\delta i$，适用于 $i=0,\ldots,m+1$；且 $x_k=\lambda k\rho$，适用于 $k=0,\ldots,n+1$，以及 $\rho\in\mathbb{S}^{d-1}$。因此，我们考虑在时空网格 $\{(t_i,x_k)$ 上对过程 (1.1) 进行等距观测：$i=0,\ldots,m+1,k=0,\ldots,n+1\}$，如图6所示。

我们将空间和时间增量（3.2）与（4.2）的定义加以扩展，在记号中纳入固定变量。更具体地说，我们用$\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}(t)$表示时间 t 处的二阶空间增量，用$\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}(x)$表示点 $x\in\mathbb{R}^d$处的二阶时间增量。现在我们可以对剩余变量中的增量再取增量，并定义如下形式的时空盒增量

$$\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k}:=\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}(t_{i+1})+\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}(t_{i-1})-2\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}(t_i)=\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}(x_{k+1})+\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}(x_{k-1})-2\mathbf{I}_{\mathrm{te},i}(x_k).\tag{5.1}$$

相应的时空变差则由下式给出

$$\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}} \coloneqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{I}^2_{\mathrm{sp,te},i,k}. \tag{5.2}$$

我们希望推导两个盒增量之间的协方差：$\mathbf{I}_{\mathrm{sp,\ te,\ }i,\ k}$ 和$\mathbf{I}_{\mathrm{sp,\ te,\ }j,\ l}$。引理4.2 和引理3.2 中的策略仍然适用，需要注意的是，我们得到的是四维协方差函数的二阶增量。值得注意的是，命题2.1 中的协方差函数特别简单，因为时间因子和空间因子之间不存在实际的交叉依赖。因此，四维二阶增量可以分解为分别在变量 k，l和 i，j上求值的两个二维二阶增量的乘积。基于这一思路，下面的结果完整刻画了盒增量的协方差结构。

引理 5.1。 时空增量(5.1)具有如下协方差结构

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})\\
&=\delta\lambda^{2-\beta}\left(\frac{128(i\wedge j)}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)\cos((i-j)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right.\\
&\qquad\left.+R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l)\right)\\
&=\delta^{3-\beta}\left(\frac{128(i\wedge j)}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}(k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega/2)\cos((i-j)|\omega|)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right.\\
&\qquad\left.+R_{\mathrm{te}}(i,j,k,l)\right),
\end{aligned}$$

with

$$\alpha=\delta/\lambda$$

以及余项，定义见(6.13) 和(6.14)，在 i，j，k，l和 α处均一致有界，且其上界为一个与这些变量无关的常数；分别在 $\alpha\to\infty$和 $\alpha\to 0$的情形下成立。

当 $\alpha\to\infty$时，空间分辨率远高于时间分辨率，时空变差的渐近行为将由空间行为主导。反之， $\alpha\to 0$ 对应于由时间频率驱动的抽样区间，而 $\mathbf{V}_{\mathrm{sp,\ te}}$ 本质上相当于经空间平均的 $\mathbf{V}_{\mathrm{te}}$。除缩放因子外，引理5.1揭示的整个协方差结构取决于空间分辨率级别与时间分辨率级别之比。忽略余项后，二阶时空增量的方差满足

$$\begin{aligned}
\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}\frac{\mathbb{V}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k})}{i}&\asymp\frac{1}{\vartheta}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right),\\
\delta^{\beta-3}\frac{\mathbb{V}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k})}{i}&\asymp\frac{1}{\vartheta^{\beta/2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega/2)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right).
\end{aligned}\tag{5.3}$$

正弦 [4] 是有界函数，而 g_{sp} 和 g_{te} 均可积。广义黎曼-勒贝格引理（例如参见 Kahane） [25], 已被证明是随机波动方程统计学中的重要工具，参见 Ziebell[44]。事实上，若假设 $\alpha\to\infty$ 或 $\alpha\to 0$，则式（5.3）中相应积分的振荡部分将收敛于函数正弦 [4],的均值，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\vartheta}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)&\to\frac{1}{\vartheta}\left(\frac{3}{8}\int_{\mathbb{R}^d}g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right),\quad\alpha\to\infty,\\
\frac{1}{\vartheta^{\beta/2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega/2)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)&\to\frac{1}{\vartheta^{\beta/2}}\left(\frac{3}{8}\int_{\mathbb{R}^d}g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right),\quad\alpha\to 0.
\end{aligned}\tag{5.4}$$

注意到，在这两种情况下，(5.4)中的极限不再依赖于因子$\sqrt{\vartheta}$ ，这使我们能够证明以下关于(5.2)期望的有用渐近刻画。

命题 5.2。时空变差(5.2) 的期望满足

$$\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}] = \frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}}}{\vartheta} + \mathcal{O}\left(m^{-1}+\alpha^{-2}\right), \quad \alpha\to\infty,$$
$$\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}] = \frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}} + \mathcal{O}\left(m^{-1}+\alpha^{2}\right), \quad \alpha\to 0,$$

表 $C_{\mathrm{box、sp、}\mathbb{E}}$、$C_{\mathrm{box、te、}\mathbb{E}}>0$ 中给出的常数，其中 *1*。

命题 5.2中的余项由两部分组成。贡献项 m^{-1} 源自与命题 4.4 中类似的时间变差，因为增量的重标度方差会随时间增加而增大，参见（5.3）。根据渐近区间的不同，第二部分是通过黎曼-勒贝格引理对（5.4）进行近似时产生的误差。

与上一节一样，我们最终需要确保偏差渐近趋于零。中心极限定理中的预期速率恰为 $\sqrt{nm}$，从而得到以下假设。

假设 5.3。 我们假设

$$\frac{n}{m}\to 0 \tag{5.5}$$

and

$$\begin{cases}\alpha/(nm)^{1/4}\to\infty, & \alpha\to\infty,\\ \alpha(nm)^{1/4}\to 0, & \alpha\to 0.\end{cases} \tag{5.6}$$

我们已经在引理 5.1 中看到，增量协方差结构的空间分量和时间分量可以分解。因此，在研究时空变差 $\mathbf{V}_{\mathrm{sp,\ te}}$的方差时，我们可以结合第 3 节和第4节中的技巧。关于 $\alpha\to\infty$和 $\alpha\to 0$的论证在结构上非常相似，只是在处理项 $\rho\cdot\omega$ 与 $|\omega$时存在一些技术差异。这里我们描述空间渐近区间 $\alpha\to\infty$中的论证。Fej´er 核 $\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}$ 都出现在重标度方差$\delta^{-2}\lambda^{2\beta-4}n^{-1}m^{-3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,\ te}})$中，其渐近表现为

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\omega_1,\omega_2)\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(\omega_1,\omega_2)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega_1|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega_1)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega_2|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{5.7}$$

and

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\omega_1,\omega_2) \coloneqq \left(\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1+\omega_2))+\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1-\omega_2))\right),$$
$$\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(\omega_1,\omega_2) \coloneqq \left(\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(\alpha\sqrt{\vartheta}(|\omega_1|+|\omega_2|))+\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(\alpha\sqrt{\vartheta}(|\omega_1|-|\omega_2|))\right).$$

整个表达式（5.7）可因式分解，并可化简为以下傅里叶系数的二重和

$$\frac{\delta^{-2}\lambda^{2\beta-4}}{nm^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}) \asymp \sum_{\substack{|j|\le m-1\\ |k|\le n-1}} w_{\mathrm{sp},k}w_{\mathrm{te},j}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega)\cos(j\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2. \tag{5.8}$$

由于我们可以表示为

$$\cos(j\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2) = \sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_z\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)$$

对于稍后定义的某些因子 c_z ，（5.8）由包含高频余弦波的积分组成；当空间方向上的衰减，即变量 k，足够快时，根据黎曼-勒贝格引理，这些积分会消失。在这种情况下，仅有 $\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)=1$，即 $|j|\le 2$ 和 $z=-j$，对（5.8）的渐近行为构成贡献。为确保空间方向和时间方向上分别具有足够快的衰减，我们提出以下附加要求。

假设 5.4。如果 $d=1$，我们假设

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{\vartheta}\alpha}{2}\ge n, & \alpha\to\infty,\\ \frac{1}{2\sqrt{\vartheta}\alpha}\ge m, & \alpha\to 0.\end{cases} \tag{5.9}$$

以下结果的证明为（5.8）赋予了严格的含义，并推导出时空变差（5.2）方差的精确渐近式。

命题 5.5. 假设 *5.3* 和假设 *5.4*。则有

$$\frac{\delta^{-2}\lambda^{2\beta-4}}{nm^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}) \to \frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{\vartheta^2}, \quad \alpha\to\infty,$$
$$\frac{\delta^{2\beta-6}}{nm^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}) \to \frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{V}}}{\vartheta^\beta}, \quad \alpha\to 0,$$

表中给出的常数 $C_{\mathrm{box、sp、}\mathbb{V}}$、$C_{\mathrm{box、te、}\mathbb{V}}>0$ 见表 *1*。

注 5.6。 请注意，最终进行偏差的渐近分析时将需要假设5.3。对于命题 5.3 ，无论是假设 5.4 还是假设 5.5 ，在 $d\geq 3$ 时都完全不需要；对于$d=2$，则可以放宽这些条件，这一点可从引理 6.7后的讨论中看出。尽管如此，假设 5.3 和假设 5.4大大简化了证明，因此选用这些假设是为了提高稿件的可读性。更精确论证中的维数依赖性源于这样一个事实：在高维情形下，确实可以沿着 j 和 k 作用的方向，将系数的傅里叶衰减（5.8）分离开来。当 $d=1$时，这在根本上是不可能的；而 $d=2$ 则构成一种边界情形，在此情形下可以应用这些论证，但只能部分地得到高维衰减。

时空变差（5.2）满足中心极限定理所需的条件现在同时涉及空间和时间分量，即

$$\frac{\left(\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|\right)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}})}\to 0. \tag{5.10}$$

定理 5.7. 假设满足假设 *5.3* 和假设 *5.4*。那么，时空变差 (5.2)满足

$$\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}}}{\vartheta}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{\vartheta^2}\right), \quad \alpha\to\infty,$$
$$\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\frac{C_{\mathrm{box,temp},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{V}}}{\vartheta^\beta}\right), \quad \alpha\to 0.$$

对变差进行适当的重新缩放，对于实现渐近收敛至关重要。对于时空白噪声（即 $\beta=d=1$）以及选取 $\delta=m^{-1}$ 和 $\lambda=n^{-1}$的情形，仅基于空间增量和时间增量的二次变差 $\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}$ 和 $\mathbf{V}_{\mathrm{te}}$，无需进一步归一化即可收敛至其渐近极限；参见推论 3.12和定理 4.8；另见 Assaad、Gamain 和 Tudor [2,命题 4.1 和命题 5。1]。

当 $\beta\in(0,2\wedge d)$ 时，过程在空间和时间上的局部 H¨older 正则性为 $1-\beta/2$。因此，引理 3.2 中空间增量的方差以及引理 4.2 中时间增量的方差，分别具有大小为 $\lambda^{2-\beta}$ 和 $\delta^{2-\beta}$的标量贡献。然而，纯空间过程是平稳的，而时间过程是非平稳的，其方差还会额外增加 δi阶。与空间变差相比，时间变差在重新缩放时必须补偿这一方差增幅。

这些区间 $\alpha\to\infty$和 $\alpha\to 0$ 实质上表明，我们分别以更高的空间或时间观测频率进行观测。因此，定理**5.7**sp中的时空变差te 的重新缩放需要考虑占主导地位的空间或时间分辨率。事实上，两种归一化之间的比值

$$\frac{\delta^{3-\beta}}{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}=\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{2-\beta}=\alpha^{2-\beta}$$

恰好按照决定渐近区间的比值 α 进行缩放。

注 5.8。由于重整化根植于解的正则性，Hildebrandt 和 Trabs [23] 针对随机热方程给出的正确重新缩放方式有所不同。随机波动方程在空间和时间上的 Hölder 连续阶均为 $1-\beta/2$ ，而随机热方程在空间和时间上的相应阶分别为 $1-\beta/2$ 和 $1/2-\beta/4$ ，参见 Dalang、Khoshnevisan 和 Nualart [16], 。与双曲型情形相比，这导致了 Hildebrandt 和 Trabs [23, 命题 3.5 和定理 3.7] 中的归一化不同。此外，在抛物型情形下，相应的抽样区间按照 $r=\lambda/\sqrt{\delta}=\alpha^{-1}\sqrt{\delta}$ 缩放；而对于随机波动方程，时间和空间的贡献相同。

因此，命题 ϑ 5.5中渐近方差对波速的依赖关系与第3 节和第4节中的情况相同。由此得到的矩估计量为

$$\hat{\vartheta}_{\mathrm{box,sp},m,n}:=\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}}}{n^{-1}m^{-2}\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}}, \quad \hat{\vartheta}_{\mathrm{box,te},m,n}:=\left(\frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{E}}}{n^{-1}m^{-2}\delta^{\beta-3}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}}\right)^{2/\beta},$$

并且具有如下渐近行为。

推论 5.9。 假设*5.3*和假设*5.4*成立。则有

$$\sqrt{nm}(\hat{\vartheta}_{\mathrm{box,sp},m,n}-\vartheta)\xrightarrow{d}N\left(0,\vartheta^2\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{(C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}})^2}\right),\quad \alpha\to\infty,$$
$$\sqrt{nm}(\hat{\vartheta}_{\mathrm{box,te},m,n}-\vartheta)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{4C_{\mathrm{box,te},\mathbb{E}}}{\beta^2C^2_{\mathrm{box,te},\mathbb{E}}}\right),\quad \alpha\to 0.$$

尽管抛物型情形下的尺度机制截然不同，但推论 5.9中的实际收敛速率与 Hildebrandt 和 Trabs 的结果完全一致 [23]。

6 证明和辅助结果

接下来的四个小节将按照数值顺序证明第 2节至5节中给出的结果。我们对空间和时间变化的分析基于二阶增量之间的协方差。因此，深入理解增量结构至关重要；第 6.5节汇集了一般性结果和显式结果。此外，第 g_{sp} 和 g_{te} 这两个构成增量协方差的函数的正则性将在第 6.6节讨论。

下表总结了第 3 节至 5节中二阶变差的期望值和方差所出现的渐近常数。

变化	期望值	方差
空间	$C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}:=\frac{8(2\pi)^d\|g_{\mathrm{sp}}\|_{L^1}}{(\mathbb{R}^d)}$	$C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}:=\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho))^2$
Time	$C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}:=\frac{4(2\pi)^d\|g_{\mathrm{te}}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{}$	$C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}:=\frac{128}{3(2\pi)^{2d}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j))^2$
时空，$\alpha\to\infty$	$C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}}:=\frac{24(2\pi)^d\|g_{\mathrm{sp}}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{}$	$C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}:=\frac{2^835}{3(2\pi)^{2d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho))^2$
时空，$\alpha\to 0$	$C_{\mathrm{box,te},\mathbb{E}}:=\frac{24(2\pi)^d\|g_{\mathrm{te}}\|_{L^1(}}{\mathbb{R}^d)}$	$C_{\mathrm{box,te},\mathbb{V}}:=\frac{2^835}{3(2\pi)^{2d}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j))^2$

表 1：第 3 至 5 节中定义的空间、时间及时空重标度变差的期望和方差的渐近极限，采样频率比为 $\alpha=\delta/\lambda$。函数 g_{sp} 和 g_{te} 分别在引理3.2 和引理 4.2中引入。

第 6.1 节第 2 节的证明

命题 *2.1* 的证明。 Dalang [13] 的 Itˆo 等距性给出表示式

$$\mathbb{E}[u(t,x)u(s,y)]=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{t\wedge s}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(G_{t-r}(x-\cdot))(\omega)\overline{\mathcal{F}(G_{s-r}(y-\cdot))}(\omega)|\omega|^{\beta-d}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r.$$

利用傅里叶变换的平移性质可得

$$\mathbb{E}[u(t,x)u(s,y)]=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{t\wedge s}\int_{\mathbb{R}^d}e^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\omega}\overline{\mathcal{F}(G_{t-r}(\cdot))}(\omega)\mathcal{F}(G_{s-r}(\cdot))(\omega)|\omega|^{\beta-d}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r.$$

取实部可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(t,x)u(s,y)]&=\frac{1}{(2\pi)^d\vartheta}\int_0^{t\wedge s}\int_{\mathbb{R}^d}\cos((x-y)\cdot\omega)\sin((t-r)|\omega|\sqrt{\vartheta})\sin((s-r)|\omega|\sqrt{\vartheta})|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_0^{t\wedge s}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left(\frac{(x-y)}{\sqrt{\vartheta}}\cdot\omega\right)\sin((t-r)|\omega|)\sin((s-r)|\omega|)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

这正是所需的表示。第二种刻画可由富比尼定理直接推出。接下来计算积分。利用积化和差公式 $\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$，

我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{te},\xi}(t,s) &= \int_0^{t\wedge s} \sin((t-r)\xi)\sin((s-r)\xi)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge s}\cos((t-s)\xi)\mathrm{d}r - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge s}\cos((t+s-2r)\xi)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}(t\wedge s)\cos((t-s)\xi) + \frac{1}{2}\int_{|t-s|\xi}^{(t+s)\xi}\cos(r)\frac{\mathrm{d}r}{-2\xi} \\ &= \frac{\sin(|t-s|\xi)-\sin((t+s)\xi)}{4\xi} + \frac{1}{2}(t\wedge s)\cos((t-s)\xi).\end{aligned}$$

再应用和差化积恒等式 $\sin(x)-\sin(y)=2\cos((x+y)/2)\sin((x-y)/2)$，结合 $\sin(-x)=-\sin(x)$，得到:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(|t-s|\xi)-\sin((t+s)\xi)}{4\xi} &= \frac{\cos((|t-s|+(t+s))\xi/2)\sin((|t-s|-(t+s))\xi/2)}{2\xi} \\ &= -\frac{\cos((t\vee s)\xi)\sin((t\wedge s)\xi)}{2\xi}\end{aligned}$$

因此

$$\Phi_{\mathrm{te},\xi}(t,s) = \frac{1}{2}\left((t\wedge s)\cos((t-s)\xi) - \frac{\cos((t\vee s)\xi)\sin((t\wedge s)\xi)}{\xi}\right). \qquad \square$$

命题6.1. *T 存在常数 $C_{\beta,d}>0$，使得对于任意空间固定点 $x\in\mathbb{R}^d$，都有*

$$\mathbb{E}[u(t,x)u(s,x)] = C_{\beta,d}\vartheta^{-\beta/2}\left(\frac{1}{2(3-\beta)}\left((t+s)^{3-\beta}-|t-s|^{3-\beta}\right)-(t\wedge s)|t-s|^{2-\beta}\right). \tag{6.1}$$

证明. 考虑命题 2.1中的协方差函数表示。对于单个空间固定点，协方差积分表示中的被积函数是径向的。使用极坐标可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[u(t,x)u(s,x)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d\vartheta}\int_0^{t\wedge s}\int_{\mathbb{R}^d}\sin((t-r)\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin((s-r)\sqrt{\vartheta}|\omega|)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r \\ &= \frac{\sigma_{d-1}}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_0^{t\wedge s}\int_0^\infty \sin((t-r)\omega)\sin((s-r)\omega)\omega^{\beta-3}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

这里我们使用了变量代换，消除了积分对波速 ϑ 的依赖。再次利用 $\sin((t-r)\omega)\sin((s-r)\omega)=\frac{1}{2}(\cos((t-s)\omega)-\cos((t+s-2r)\omega))$，得到内积分

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \sin((t-r)\omega)\sin((s-r)\omega)\omega^{\beta-3}\mathrm{d}\omega \\ &= \left[\sin((t-r)\omega)\sin((s-r)\omega)\frac{\omega^{\beta-2}}{\beta-2}\right]_0^\infty \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(-(t-s)\sin((t-s)\omega)+(t+s-2r)\sin((t+s-2r)\omega)\right)\frac{\omega^{\beta-2}}{\beta-2}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2(\beta-2)}\left((t-s)\int_0^\infty\sin((t-s)\omega)\omega^{\beta-2}\mathrm{d}\omega-(t+s-2r)\int_0^\infty\sin((t+s-2r)\omega)\omega^{\beta-2}\mathrm{d}\omega\right).\end{aligned}$$

设 $c_\beta := \int_0^\infty \sin(\omega)\omega^{\beta-2}d\omega>0$，我们观察到

$$\int_0^\infty \sin((t-r)\omega)\sin((s-r)\omega)\omega^{\beta-3}\mathrm{d}\omega = \frac{c_\beta}{2(\beta-2)}\left(|t-s|^{2-\beta}-(t+s-2r)^{2-\beta}\right).$$

注意，如果 $d\geq 2$ 定义 c_β 的积分仅在 $\beta\in(0,1)$ 上绝对收敛，但它仍然是条件收敛的

在 $\beta \in [1,2)$ 上收敛，因此对所有 $\beta \in (0, 2 \wedge d)$ 都是有限的。这对 $s \le t$ 得出：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[u(t,x)u(s,x)] \\
&= \frac{\sigma_{d-1}}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_0^{t\wedge s} \frac{c_\beta}{2(\beta-2)} \left(|t-s|^{2-\beta} - (t+s-2r)^{2-\beta} \right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{\sigma_{d-1} c_\beta}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2} 2(\beta-2)} \left((t\wedge s)|t-s|^{2-\beta} - \int_0^{t\wedge s} (t+s-2r)^{2-\beta} \mathrm{d}r \right) \\
&= \frac{\sigma_{d-1} c_\beta}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2} 2(\beta-2)} \left((t\wedge s)|t-s|^{2-\beta} - \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{t+s} r^{2-\beta} \mathrm{d}r \right) \\
&= \frac{\sigma_{d-1} c_\beta}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2} 2(\beta-2)} \left((t\wedge s)|t-s|^{2-\beta} - \frac{1}{2(3-\beta)} \left((t+s)^{3-\beta} - |t-s|^{3-\beta} \right) \right) \\
&= C_{\beta,d} \vartheta^{-\beta/2} \left(\frac{1}{2(3-\beta)} \left((t+s)^{3-\beta} - |t-s|^{3-\beta} \right) - (t\wedge s)|t-s|^{2-\beta} \right).
\end{aligned}
$$

该常数由 $C_{\beta,\,d} \coloneqq \frac{\sigma_{d-1} c_\beta}{(2\pi)^d 2(2-\beta)}$ 给出。 □

第 3 节的证明6.2

我们首先求得随机波动方程空间协方差函数的一个合适表达式。**引理 6.2.** 给定固定时间 $t \ge 0$，随机波动方程在两个不同空间位置处的协方差函数为

$$
\mathbb{E}[u(t,x_k)u(t,x_l)] = \frac{t\lambda^{2-\beta}}{2(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} \cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right) \left(1 - \operatorname{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)\right) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega.
$$

证明。 这可由命题 2.1 令 $t = s$，对 $\sqrt{\vartheta}$ 重新缩放，并对 λ 使用 $\cos(x)\sin(x) = \sin(2x)/2$, 即可立即得到。 □

引理 3.2 的证明。在此证明中，我们将使用第6.5节中的记号。记 $c(k,l) = \mathbb{E}[u(t,x_k)u(t,x_l)]$ 为随机波动方程在观测点x_k处的空间协方差函数，其中 $k,l = 0,\dots,n+1$。于是，二阶空间增量的协方差可表示为协方差函数 $\mathbb{E}[\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}\mathbf{I}_{\mathrm{sp},l}] = \mathcal{I}^{(2)}[c](k,l)$ 的二阶增量。因此，将增量算子移入协方差函数的表达式中，结合引理 6.2 和引理6.11 可得

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}, \mathbf{I}_{\mathrm{sp},l}) &= \frac{t\lambda^{2-\beta}}{2(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}^{(2)}[\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}](k,l) \left(1 - \operatorname{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)\right) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{t\lambda^{2-\beta}}{2(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot(\rho^\top\omega))](k-l) \left(1 - \operatorname{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)\right) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega,
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

其中 $\Phi_{\mathrm{sp},\xi}(k,l) = \cos((k-l)\xi)$。我们已在引理 6.10 中计算了余弦的增量，得到

$$
\mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot(\rho^\top\omega))](k-l) = 16\sin^4(\rho\cdot\omega/2)\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right),
$$

将 $\mathfrak{I}^{(4)}[\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}](k-l)$ 的表示式代回式 (6.2)，即可得到结果。 □

命题3.4的证明。根据引理3.2所述空间增量的托普利兹结构，其期望满足

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k}) &= n\lambda^{2-\beta} \frac{8t}{(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} \sin^4(\rho\cdot\omega/2)(1 - \operatorname{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|))|\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega \\
&= n\lambda^{2-\beta} \frac{8t}{(2\pi)^d \vartheta} \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \operatorname{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)) g_{\mathrm{sp}}(\omega) \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

由$C_{\mathrm{sp},\ \mathbb{E}}$ 根据表1 可得

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}]-\frac{t}{\vartheta}C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}} &= \frac{8t}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &= \lambda\frac{8t}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sin(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)}{2t\sqrt{\vartheta}}g_{\mathrm{sp}}(\omega)/|\omega|\mathrm{d}\omega\\ &= \mathcal{o}(\lambda^2),\end{aligned}$$

其中最后一步使用了黎曼-勒贝格引理以及以下事实： $\nabla(g_{\mathrm{sp}}(\omega)/|\omega|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 对于$\beta\in(0,2\wedge d)$ 成立，这由引理6.15可知。 □

命题*3.6*的证明。

第1 步（关于 推导式（3.8）。利用 Wick 定理（伊瑟利斯定理）和引理3.2，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}) = \frac{2\lambda^{2\beta-4}}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp},l})^2\\ &= \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\cos((k-l)\rho\cdot\omega)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2\\ &= \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{64}{(2\pi)^{2d}}\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\cos\left((k-l)\rho\cdot(\omega_1+\omega_2)\right)+\cos\left((k-l)\rho\cdot(\omega_1-\omega_2)\right)\right)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_1)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\\ &= \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\big(\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1+\omega_2))+\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1-\omega_2))\big)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_1)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.\end{aligned}$$

代入 Fej´er 核（3.6）的表示式后，可以看出 ω_1 和 ω_2 之间的依赖关系可以因式分解，从而得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big(\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1+\omega_2))+\mathfrak{F}_{\mathrm{sp}}(\rho\cdot(\omega_1-\omega_2))\big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}e^{\mathrm{i}k\,\rho\cdot(\omega_1+\omega_2)}+\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}e^{\mathrm{i}k\,\rho\cdot(\omega_1-\omega_2)}\right)\\ &= \sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}k\,\rho\cdot(\omega_1+\omega_2)}+e^{\mathrm{i}k\,\rho\cdot(\omega_1-\omega_2)}\right)\\ &= \sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}e^{\mathrm{i}k\,\rho\cdot\omega_1}\cos(k\rho\cdot\omega_2)\\ &= \sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}\cos(k\rho\cdot\omega_1)\cos(k\rho\cdot\omega_2),\end{aligned}\tag{6.3}$$

其中最后一行是根据权重的对称性、余弦的对称性以及正弦的反对称性得到的。将（6.3）代回方差的表示式，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}})\\ &= \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\,\rho\cdot\omega_1)\cos(k\rho\cdot\omega_2)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_1)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\\ &= \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\,\rho\cdot\omega_1)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega_2)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_2\right)\\ &= \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}|\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp},\lambda})(k\rho)|^2.\end{aligned}$$

第 2 步（确定极限）。 由控制收敛定理，当 $\lambda \to 0$ 时，我们得到极限

$$\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp},\lambda})(k\rho) \to \mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho), \quad \lambda \to 0,$$

其中我们利用了引理 6.16，得到了 $g_{\mathrm{sp},\lambda}$ 的一致可积性，即级数 $((g_{\mathrm{sp},\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的一致可积性。引理 6.16 还表明，对于 $\lambda > 0$，导数仍一致可积，因此无论 λ 如何，均有 $|\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp},\lambda})(k\rho)| \lesssim |k|^{-1}$，另见 Grafakos [21, 定理 3.3。9]。因此，我们得到一致衰减 $|\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp},\lambda})(k\rho)|^2 \lesssim |k|^{-2}$。回顾一下表 1 中的 $C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}$。再应用一次控制收敛定理，即可得出结论：

$$\frac{\lambda^{2\beta-4}}{n}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}) \to \frac{t^2}{\vartheta^2}\frac{128}{(2\pi)^{2d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)|^2 = \frac{t^2}{\vartheta^2}C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}} < \infty, \quad n\to\infty, \quad \lambda\to 0.$$

注意，我们可以将有限和扩展为无限和，方法是将权重在其余所有取值处设为零。

□

引理 6.3。 分子 (3.9)满足

$$\left(\max_{k=1,\dots,n}\sum_{l=1}^{n}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp},l})|\right)^2 = \mathcal{O}\left(\lambda^{4-2\beta}\log(n)^2\right).$$

证明。 根据引理 3.2，增量向量的协方差矩阵是一个托普利兹矩阵，其元素可简记为 $r_{k-l} := \mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,k},\ \mathbf{I}_{\mathrm{sp},\,l})$。每个元素仅取决于指标之差 $k-l$。特别地，对所有可能的配置求和可得

$$\max_{k=1,\dots,n}\sum_{l=1}^{n}|r_{k-l}| \le 2\sum_{|k|\le n-1}|r_k|.$$

通过分部积分和引理 6.16，我们进一步观察到：

$$|r_k| = \lambda^{2-\beta}\frac{8t}{(2\pi)^d\vartheta}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega)g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega)\mathrm{d}\omega\right| \lesssim \lambda^{2-\beta}\frac{1}{|k|}, \quad 1\le|k|\le n-1.$$

因此，只要 $k\neq 0$，就有 $\sum_{1\le|k|\le n-1}|r_k| \lesssim \lambda^{2-\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$。该结果源于 n 阶调和数按 log(n) 的速度增长这一事实。

□

定理 *3.9* 的证明。 由引理 6.3 和命题3.6，我们观察到

$$\frac{\left(\max_{k=1,\dots,n}\sum_{l=1}^{n}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp},k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp},l})|\right)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}})} = \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^{4-2\beta}\log(n)^2}{n\lambda^{4-2\beta}}\right) = o(1), \quad n\to\infty.$$

因此，根据 Hildebrandt 和 Trabs [23, 命题 3.1]，，我们有

$$\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}-\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}]}{\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp}})}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n\to\infty.$$

因此，通过重新缩放和 Slutsky定理，由命题3.6

$$\sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}\right]\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{t^2}{\vartheta^2}C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}\right), \quad n\to\infty.$$

□

推论 *3.11* 的证明。 我们分解

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \frac{t}{\vartheta}C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}\right)\\ &= \sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}} - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}\right]\right) + \sqrt{n}\left(\frac{\lambda^{\beta-2}}{n}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp}}] - \frac{t}{\vartheta}C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}\right).\end{aligned}$$

该结果由定理3.4 和定理3.9 以及再次应用 Slutsky定理得出。

□

推论的证明 *3.12*。 我们对 $f(x) = tC_{\mathrm{sp},\ \mathbb{E}}/x$ 应用德尔塔方法。 f 的导数为 $f'(x) = -tC_{\mathrm{sp},\ \mathbb{E}}/x^2$ 因此我们得到 $f'(tC_{\mathrm{sp},\ \mathbb{E}}/\vartheta)) = -\vartheta^2/(tC_{\mathrm{sp},\ \mathbb{E}})$

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_{\mathrm{sp},n} - \vartheta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{t^2}{\vartheta^2}C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}f'(tC_{\mathrm{sp},\mathbb{E}}/\vartheta)^2\right) = N\left(0, \frac{\vartheta^2 C_{\mathrm{sp},\mathbb{V}}}{(C_{\mathrm{sp},\mathbb{E}})^2}\right).$$

□

6.3 第4节的证明

引理的证明 *4.2*。 本证明中始终使用的函数增量记号基于第 6.5 节。根据命题 2.1 协方差具有如下表示

$$\mathbb{E}[u(t_i,x)u(t_j,x)] = \frac{\delta^{3-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{\mathrm{te},|\omega|}(i,j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega,$$

with

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{te},\xi}(t,s) &= \frac{1}{2}\left((t\wedge s)\cos((t-s)\xi) - \frac{\cos((t\vee s)\xi)\sin((t\wedge s)\xi)}{\xi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((t\wedge s)\cos((t-s)\xi) + \frac{\sin(|t-s|\xi) - \sin((t+s)\xi)}{2\xi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f_{\xi,1}(t,s) + \frac{f_{\xi,2}(t,s) - f_{\xi,3}(t,s)}{2\xi}\right),\end{aligned}$$

其中 $f_{\xi,1}(t,s)=(t\wedge s)$余弦$((t-s)\xi)$, $f_{\xi,2}(t,s)=$正弦$(|t-s|\xi)$, $f_{\xi,3}(t,s)=$正弦$((t+s)\xi)$, 其中 $\xi\in\mathbb{R}$。两个时间增量之间的协方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j}) &= \frac{\delta^{3-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{I}^{(2)}[\Phi_{\mathrm{te},|\omega|}](i,j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{\delta^{3-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\left(\mathcal{I}^{(2)}[f_{|\omega|,1}](i,j) + \frac{\mathcal{I}^{(2)}[f_{|\omega|,2}](i,j) - \mathcal{I}^{(2)}[f_{|\omega|,3}](i,j)}{2|\omega|}\right)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{6.4}$$

根据引理 ，由6.10，我们得到余弦的奇增量和偶增量的闭式表示 e

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) &= 2^4\sin^4(\xi/2)\cos\left(|i-j|\xi+2\pi\right) = 2^4\sin^4(\xi/2)\cos\left(|i-j|\xi\right),\\ \mathfrak{I}^{(3)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) &= -2^3\sin(\xi)\sin^2(\xi/2)\sin(|i-j|\xi+\pi) = \mathrm{sign}(i-j)2^3\sin(\xi)\sin^2(\xi/2)\sin((i-j)\xi)\\ &= 2^3\sin(\xi)\sin^2(\xi/2)\sin(|i-j|\xi).\end{aligned} \tag{6.5}$$

显然，由于余弦是对称的，映射 $x\mapsto$余弦$(x\xi)$也具有对称性，因此可应用引理6.13，取$f_{\xi,1}$，结合（6.5）可得:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[f_{\xi,1}](i,j) &= \begin{cases}(i\wedge j)\mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) - \mathfrak{I}^{(3)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) + 4\cos(\xi) - 2\cos(2\xi), & i=j,\\ (i\wedge j)\mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) - \mathfrak{I}^{(3)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) - \cos(\xi), & |i-j|=1,\\ (i\wedge j)\mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|) - \mathfrak{I}^{(3)}[\cos(\cdot\xi)](|i-j|), & |i-j|\geq 2\end{cases}\\ &= \begin{cases}(i\wedge j)2^4\sin^4(\xi/2)\cos(|i-j|\xi) + 4\cos(\xi) - 2\cos(2\xi), & i=j,\\ (i\wedge j)2^4\sin^4(\xi/2)\cos(|i-j|\xi) - 2^3\sin^2(\xi)\sin^2(\xi/2) - \cos(\xi), & |i-j|=1,\\ (i\wedge j)2^4\sin^4(\xi/2)\cos\left(|i-j|\xi\right) - 2^3\sin(\xi)\sin^2(\xi/2)\sin(|i-j|\xi), & |i-j|\geq 2.\end{cases}\end{aligned}$$

根据引理6.14、引理6.10和引理6.11，我们进一步有

$$\mathcal{I}^{(2)}[f_{\xi,2}](i,j) = \begin{cases}-8\sin(\xi) + 2\sin(2\xi), & i=j,\\ 7\sin(\xi) + \sin(3\xi) - 4\sin(2\xi), & |i-j|=1,\\ 2^4\sin^4(\xi/2)\sin(|i-j|\xi), & |i-j|\geq 2,\end{cases}$$

and

$$\mathcal{I}^{(2)}[f_{\xi,3}](i,j) = \mathfrak{I}^{(4)}[\sin(\cdot\xi)](i+j) = 2^4\sin^4(\xi/2)\sin\left((i+j)\xi\right).$$

Plu将二阶增量的一般表示代回（6.4）可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})\\ &= \frac{8\delta^{3-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}(i\wedge j)\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(|\omega|/2)\cos((i-j)|\omega|)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega + \delta^{3-\beta}R(i,j)\end{aligned}$$

with

$$
\begin{aligned}
R(i,j) &:= R^{(1)}(i,j) + R^{(2)}(i,j) + R^{(3)}(i,j),\\
R^{(1)}(i,j) &:= \frac{4}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \sin^4(|\omega|/2) r^{(1)}_{i,j}(|\omega|) |\omega|^{\beta-d-3} \mathrm{d}\omega,\\
R^{(2)}(i,j) &:= \frac{1}{2(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^d} r^{(2)}_{i,j}(|\omega|) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega,\\
R^{(3)}(i,j) &:= \frac{1}{2(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^d} r^{(3)}_{i,j}(|\omega|) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega,
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
r^{(1)}_{i,j}(\xi) &:= \begin{cases} -\sin(2i\xi), & i=j,\\ -\sin((i+j)\xi), & |i-j|=1,\\ \sin(|i-j|\xi) - \sin((i+j)\xi), & |i-j|\geq 2, \end{cases}\\
r^{(2)}_{i,j}(\xi) &:= \begin{cases} 4\cos(\xi) - 2\cos(2\xi) - 4\mathrm{sinc}(\xi) + 2\mathrm{sinc}(2\xi), & i=j,\\ -\cos(\xi) + \frac{7}{2}\mathrm{sinc}(\xi) + \frac{3}{2}\mathrm{sinc}(3\xi) - 4\mathrm{sinc}(2\xi), & |i-j|=1,\\ 0, & |i-j|\geq 2, \end{cases}\\
r^{(3)}_{i,j}(\xi) &:= \begin{cases} 0, & i=j,\\ -8\sin^2(\xi)\sin^2(\xi/2), & |i-j|=1,\\ -8\sin(\xi)\sin^2(\xi/2)\sin(|i-j|\xi), & |i-j|\geq 2. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

余项 $R(i,j)$ 的有界性见引理 6.4。 □

引理 6.4。 余项 $R(i,j)$, $i,j \leq m$ 由 (6.6) 给出，满足

$$
\sup_{i,j\leq m} |R(i,j)| \lesssim c
$$

对于某个普适常数 c。

证明。 由于分解 (6.6)，只需证明 $R^{(z)}(i,j)$, $z \in \{1,2,3\}$, $i,j \leq m$ 一致有界。

情形 1（余项 $R^{(1)}$）。 由于 $|r^{(1)}_{i,j}(r)| \leq 2$ 和 $|\sin(r/2)| \leq (1 \wedge r)$ 对于 $r \geq 0$，通过拆分积分可立即得到

$$
\begin{aligned}
\sup_{i,j\leq m} \left| R^{(1)}(i,j) \right| &= \frac{4}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \sin^4(|\omega|/2) r^{(1)}_{i,j}(|\omega|) |\omega|^{\beta-d-3} \mathrm{d}\omega \right|\\
&\leq \frac{8\sigma_{d-1}}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_0^\infty \sin^4(r/2) r^{\beta-4} \mathrm{d}r\\
&\lesssim \int_0^1 r^\beta \mathrm{d}r + \int_1^\infty r^{\beta-4} \mathrm{d}r < \infty.
\end{aligned}
$$

情形 2（余项 $R^{(2)}$）。 考虑情形 $i=j$。于是

$$
\begin{aligned}
R^{(2)}(i,j) &= \frac{1}{2(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^d} r^{(2)}_{i,j}(|\omega|) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(4(\cos(|\omega|) - \mathrm{sinc}(|\omega|)) - 2(\cos(2|\omega|) - \mathrm{sinc}(2|\omega|))\right) |\omega|^{\beta-d-2} \mathrm{d}\omega\\
&= \frac{\sigma_{d-1}}{2(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \int_0^\infty \left(4(\cos(r) - \mathrm{sinc}(r)) - 2(\cos(2r) - \mathrm{sinc}(2r))\right) r^{\beta-3} \mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

与 $R^{(1)}$ 的情形一样，通过拆分积分，由于 $r^{\beta-3}$ 快速衰减，只需证明其在 0 附近可积。我们将证明

$$
|\cos(r) - \mathrm{sinc}(r)| \lesssim r^2, \quad r \in [0,1],
\tag{6.8}
$$

这意味着

$$
\int_0^1 |\cos(r) - \mathrm{sinc}(r)| r^{\beta-3} \mathrm{d}r < \infty.
$$

根据正弦函数和余弦函数的级数表示，对于 $r \le 1$，有

$$|\cos(r) - \operatorname{sinc}(r)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} r^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} r^{2n} \right|$$
$$\le \frac{r^2}{3} + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \le \frac{r^2}{3} + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} < r^2,$$

证明（6.8），因此 $|\cos(2r) - \operatorname{sinc}(2r)| \lesssim r^2$ 也成立。同样，相同的论证也适用于情形 $|i-j| = 1$。情形 3（余项 $R^{(3)}$）。由于 $|r_{i,j}^{(3)}(r)| \le 8(1 \wedge r^3)$ 对于 $r \ge 0$ 成立，与情形 $R^{(1)}$ 类似，我们得到上界

$$\sup_{i,j \le m} \left| R^{(3)}(i,j) \right| \lesssim 1$$

通过将积分拆分为两部分，并利用正弦函数在原点附近的正则性。 □

证明 命题 4.4 的回顾 $C_{\mathrm{te},\,\mathbb{E}}$ 见表 1。由引理 4.2 和引理 6.4，可得

$$\delta^{\beta-3} m^{-2} \mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{te},m}] = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} i \left(\frac{8}{(2\pi)^d \vartheta^{\beta/2}} \right) \int_{\mathbb{R}^d} g_{\mathrm{te}}(\omega) \mathrm{d}\omega + \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} R(i,i)$$
$$= \vartheta^{-\beta/2} C_{\mathrm{te},\mathbb{E}} + \frac{1}{m} \vartheta^{-\beta/2} C_{\mathrm{te},\mathbb{E}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right).$$ □

引理 6.5。由 (4.4) 定义的核具有如下表示

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(x) = \sum_{|j| \le m-1} w_{\mathrm{te},j} e^{\mathrm{i}jx} = \sum_{|j| \le m-1} w_{\mathrm{te},j} \cos(jx),$$

其权重为

$$w_{\mathrm{te},j} = \frac{1}{m^3} \sum_{i=1}^{m-|j|} i^2,$$

满足 $0 \le w_{\mathrm{te},j} \le 1$ 和 $w_{\mathrm{te},j} \to 1/3$，对所有 j，均有 $m \to \infty$。

证明。注意 因为余弦和 $(i \wedge j)^2$ 均具有对称性，我们立即得到恒等式 y

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(x) = \frac{1}{m^3} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (i \wedge j)^2 \cos((i-j)x) = \frac{1}{m^3} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (i \wedge j)^2 e^{\mathrm{i}(i-j)x}.$$

令 $i - j = j'$，由权重的对称性可得 $w_{\mathrm{te},j}$

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(x) = \sum_{|j'| \le m-1} \left(\frac{1}{m^3} \sum_{i,j=1,\ldots,m:\ i-j=j'}^{m} (i \wedge j)^2 \right) e^{\mathrm{i}j'x}$$
$$= \sum_{|j'| \le m-1} \left(\frac{1}{m^3} \sum_{j=1}^{m-|j'|} j^2 \right) e^{\mathrm{i}j'x} = \sum_{|j'| \le m-1} w_{\mathrm{te},j'} e^{\mathrm{i}j'x}$$
$$= \sum_{|j| \le m-1} w_{\mathrm{te},j} \cos(jx).$$

注意 到 $0 \le w_{\mathrm{te},j} \le 1$。令 $\tilde{m} = m - |j'|$ 并观察，即可立即得到极限 g

$$w_{\mathrm{te},j} = \frac{1}{m^3} \sum_{j=1}^{m-|j'|} j^2 = \frac{\tilde{m}(\tilde{m}+1)(2\tilde{m}+1)}{6m^3} \to \frac{1}{3}, \quad m \to \infty,$$

这里我们用到了 $\tilde{m}^3/m^3 \to 1$。 □

命题的证明 *4.6*。 由维克定理可知

$$\delta^{2\beta-6}m^{-3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}}) = \delta^{2\beta-6}m^{-3}2\sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})^2 \tag{6.9}$$
$$= 2m^{-3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega + R(i,j)\right)^2.$$

回顾$C_{\mathrm{te},\ \mathbb{V}}$ 来自 表1. 第一步，我们将证明主阶表达式的收敛性

$$2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2 m^{-3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2 \to \frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^\beta},\quad m\to\infty. \tag{6.10}$$

第二步，我们验证余项 $R(i,\ j),\ \ i,\ \ j\le m,$ 在（6.9）中的余项及其与主阶表达式的交叉项可以忽略，从而证明该断言。

步骤 1（确定极限）。

$$2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}r\right)^2$$
$$= 2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}(i\wedge j)^2\cos(|\omega_1|(i-j))\cos(|\omega_2|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega_1)g_{\mathrm{te}}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2$$
$$= 2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}(i\wedge j)^2[\cos((|\omega_1|+|\omega_2|)(i-j))+\cos((|\omega_1|-|\omega_2|)(i-j))]$$
$$\cdot g_{\mathrm{te}}(\omega_1)g_{\mathrm{te}}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2$$
$$= 2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}[\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(|\omega_1|+|\omega_2|)+\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(|\omega_1|-|\omega_2|)]g_{\mathrm{te}}(\omega_1)g_{\mathrm{te}}(\omega_2)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

接下来，我们可以代入引理 6.5 中的傅里叶表示，并得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(|\omega_1|+|\omega_2|)+\mathfrak{F}_{\mathrm{te}}(|\omega_1|-|\omega_2|)] &= \sum_{|j|\le m-1}w_{\mathrm{te},j}\frac{1}{2}[e^{\mathrm{i}j(|\omega_1|+|\omega_2|)}+e^{\mathrm{i}j(|\omega_1|-|\omega_2|)}]\\ &= \sum_{|j|\le m-1}w_{\mathrm{te},j}e^{\mathrm{i}j|\omega_1|}\cos(j|\omega_2|)\\ &= \sum_{|j|\le m-1}w_{\mathrm{te},j}\cos(j|\omega_1|)\cos(j|\omega_2|),\end{aligned} \tag{6.11}$$

其中，最后一个等号由权重 w_{te} 和余弦的对称性以及正弦函数的反对称性得出。将（6.11）代回倒数第二个公式可得

$$2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2$$
$$= 2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\sum_{|j|\le m-1}w_{\mathrm{te},j}|\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)|^2.$$

由引理 6.15显然， g_{te} 及其导数都属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 。由于 g_{te} 是径向的，我们有

$$\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j) = \int_{\mathbb{R}^d}g_{\mathrm{te}}(\omega)\cos(|\omega|j)\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty\cos(rj)\sin^4(r)r^{\beta-3}\mathrm{d}r.$$

因此，我们知道$|\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)|\lesssim\frac{1}{|j|}$。此外，权重满足 $0\le w_{\mathrm{te},\ j}\le 1$ ，其逐点极限为 $w_{\mathrm{te},\ j}\to 1/3$。我们可以将权重在其他位置扩展为零，即 $w_{\mathrm{te},\ j}=0$ 只要 $|j|>m-1$ ，由控制收敛定理可得

$$\sum_{|j|\le m-1}w_{\mathrm{te},j}|\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}}w_{\mathrm{te},j}|\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)|^2 \to \frac{1}{3}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_c^+(g_{\mathrm{te}})(j)|^2<\infty.$$

因此，主导阶项满足

$$2\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2\to\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^\beta},\quad m\to\infty.$$

步骤 2（余项的消除）。由引理 6.4 余项 $R(i,j)$ $i,j\le m$, 的阶为 $\mathcal{O}(1)$，且与 i 和 j无关。由双重求和的柯西-施瓦茨不等式，即

$$\left|\sum_{i,j=1}^{m}a_{i,j}b_{i,j}\right|\lesssim\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m}a_{i,j}^2\sum_{i,j=1}^{m}b_{i,j}^2},\tag{6.12}$$

结合第一步可得

$$\begin{aligned}&\delta^{2\beta-6}m^{-3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te}})\\&=2m^{-3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega+R(i,j)\right)^2\\&=2m^{-3}\sum_{i,j=1}^{m}\left((i\wedge j)\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2+\mathcal{O}(m^{-1/2})\end{aligned}$$

因为 $\sum_{i,j=1}^{m}R(i,j)^2=\mathcal{O}(m^2)$。 □

引理 6.6。 *(4.6)* 式中的分子 (4.6)满足

$$\left(\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})|\right)^2=\delta^{6-2\beta}\mathcal{O}(m^2\,(1+\log(m))^2).$$

证明。 由引理 4.2和引理 6.4，可得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})|\\&=\delta^{3-\beta}\left|(i\wedge j)\left(\frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega+R(i,j)\right|\\&\lesssim\delta^{3-\beta}\left(\sup_{i,j\le m}|R(i,j)|+(i\wedge j)\left|\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right|\right)\\&\lesssim\delta^{3-\beta}\left(1+(i\wedge j)\left|\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right|\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})|&\lesssim\delta^{3-\beta}\left(m+\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{m}(i\wedge j)\left|\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|(i-j))g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right|\right)\\&\lesssim\delta^{3-\beta}\left(m+m\sum_{1\le|j|\le m-1}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\cos(|\omega|j)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right|\right)\\&\lesssim\delta^{3-\beta}\left(m+m\sum_{1\le|j|\le m-1}\frac{1}{|j|}\right)\\&=\delta^{3-\beta}\mathcal{O}(m(1+\log(m)))\end{aligned}$$

这里用到了引理 6.15 所述的事实： g_{te} 及其导数都属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$。情形 $i-j=0$对 m阶项作出贡献。

□

定理 *4.8*的证明。 由引理 6.6 和命题4.6，可得

$$\frac{\left(\max_{i=1,\ldots,m}\sum_{j=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{te},i},\mathbf{I}_{\mathrm{te},j})|\right)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te},m})}=\mathcal{O}\left(\frac{\delta^{6-2\beta}(m+m\log(m))^2}{\delta^{6-2\beta}m^3}\right)\to 0,\quad m\to\infty.$$

因此，根据 Hildebrandt 和 Trabs [23, 命题 3.1]，我们得到

$$\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{te},m}-\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{te},m}]}{\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{te},m})}}\xrightarrow{d}N(0,1),\quad m\to\infty.$$

结合命题 4.6 命题 4.4 中的适当重新缩放，可得

$$\sqrt{m}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{m^2}\mathbf{V}_{\mathrm{te},m}-\mathbb{E}\left[\frac{\delta^{\beta-3}}{m^2}\mathbf{V}_{\mathrm{te},m}\right]\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\quad m\to\infty.$$

最后，我们注意到，命题 4.4 中的余项甚至以 m^{-1} 的速率衰减，因此乘以$\sqrt{m}$ 后仍收敛于零。由此得到的收敛性

$$\sqrt{m}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{m^2}\mathbf{V}_{\mathrm{te},m}-\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\quad m\to\infty,$$

将期望替换为其极限即可得到。 □

推论 *4.10*的证明。 考虑映射 $f(x)=(C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}/x)^{2/\beta}$。对定理 4.8应用德尔塔方法，可得

$$\sqrt{m}(\hat{\vartheta}_{\mathrm{te},m}-\vartheta)\xrightarrow{d}N\left(0,f'\left(\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\quad m\to\infty.$$

f的导数为 $f'(x)=-(2/\beta)f(x)/x$。显然，$f(C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}/\vartheta^{\beta/2})=\vartheta$，并且我们有

$$f'\left(\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)^2\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}=\left(\frac{4\vartheta^2\vartheta^{\beta}}{\beta^2C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}^2}\right)\frac{C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}=\vartheta^2\frac{4C_{\mathrm{te},\mathbb{V}}}{\beta^2C_{\mathrm{te},\mathbb{E}}^2},$$

这恰好给出了所需的渐近方差。 □

第 6.4 节的证明5

引理 *5.1* 的证明。根据命题 2.1，协方差函数为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(t_i,x_k)u(t_j,x_l)]&=\frac{1}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left(\frac{\lambda(k-l)\rho}{\sqrt{\vartheta}}\cdot\omega\right)\Phi_{\mathrm{te},|\omega|}(\delta i,\delta j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\lambda^{2-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\Phi_{\mathrm{te},\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|}(\delta i,\delta j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\delta\lambda^{2-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\Phi_{\mathrm{te},\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|}(i,j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\delta\lambda^{2-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}(k,l)\Phi_{\mathrm{te},\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|}(i,j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

其中 $\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}(k,l)=\cos((k-l)\rho\cdot\omega)$。两个二阶时空增量（5.1）的协方差可分解为乘积，并可表示为

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})=\frac{\delta\lambda^{2-\beta}}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{I}^2[\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}](k,l)\mathcal{I}^2[\Phi_{\mathrm{te},\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|}](i,j)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega.$$

二阶增量 $\mathcal{I}^2[\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}](k,l)$ 和 $\mathcal{I}^2[\Phi_{\mathrm{te},\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|}](i,j)$ 分别已在引理 3.2 和引理 4.2的证明中计算得出。具体而言，它们可表示为

$$\mathcal{I}^2[\Phi_{\mathrm{sp},\rho\cdot\omega}](k,l)=\mathfrak{I}^{(4)}[\cos(\cdot(\rho^{\top}\omega))](k-l)=16\sin^4(\rho\cdot\omega/2)\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)$$

and

$$\mathcal{I}^2[\Phi_{\mathrm{te},\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|}](i,j) = \frac{1}{2}\Big(2^4(i\wedge j)\sin^4(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|/2)\cos((i-j)\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|) \\ + 2^3\sin^4(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|/2)r_{i,j}^{(1)}(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|)|\omega|^{-1} + r_{i,j}^{(2)}(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|) + r_{i,j}^{(3)}(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|)\Big),$$

其中 $r_i^{(z)}{}_{,\,j}$， $z\in\{1,2,3\}$，由式（6.7）定义。因此，协方差总计满足

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l}) \\ = \delta\lambda^{2-\beta}\left(\frac{128(i\wedge j)}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)\cos((i-j)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega + R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l)\right),$$

与 g_{sp} 引理3.2以及

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l) &:= R_{\mathrm{sp}}^{(1)}(i,j,k,l) + R_{\mathrm{sp}}^{(2)}(i,j,k,l) + R_{\mathrm{sp}}^{(3)}(i,j,k,l),\\
R_{\mathrm{sp}}^{(1)}(i,j,k,l) &:= \frac{64}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|/2)r_{i,j}^{(1)}(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|)|\omega|^{-1}g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega,\\
R_{\mathrm{sp}}^{(2)}(i,j,k,l) &:= \frac{8}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)r_{i,j}^{(2)}(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega,\\
R_{\mathrm{sp}}^{(3)}(i,j,k,l) &:= \frac{8}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)r_{i,j}^{(3)}(\sqrt{\vartheta}\alpha|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

通过在所有积分中进行变量代换 $\omega\mapsto\alpha\sqrt{\vartheta}\omega$，我们进一步得到协方差的第二种表示

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l}) \\ = \delta^{3-\beta}\left(\frac{128(i\wedge j)}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}(k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega/2)\cos((i-j)|\omega|)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega \right.\\ \left. + R_{\mathrm{te}}(i,j,k,l)\right),$$

with

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{te}}(i,j,k,l) &:= R_{\mathrm{te}}^{(1)}(i,j,k,l) + R_{\mathrm{te}}^{(2)}(i,j,k,l) + R_{\mathrm{te}}^{(3)}(i,j,k,l),\\
R_{\mathrm{te}}^{(1)}(i,j,k,l) &:= \frac{64}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\left(\sqrt{\vartheta}\alpha\right)\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((\sqrt{\vartheta}\alpha)^{-1}(k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4((\sqrt{\vartheta}\alpha)^{-1}\rho\cdot\omega/2),\\
&\qquad\qquad\cdot r_{i,j}^{(1)}(|\omega|)(|\omega|^{-1}g_{\mathrm{te}}(\omega))\mathrm{d}\omega,\\
R_{\mathrm{te}}^{(2)}(i,j,k,l) &:= \frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}(k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4((\sqrt{\vartheta}\alpha)^{-1}\rho\cdot\omega/2)r_{i,j}^{(2)}(|\omega|)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega,\\
R_{\mathrm{te}}^{(3)}(i,j,k,l) &:= \frac{8}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}(k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4((\sqrt{\vartheta}\alpha)^{-1}\rho\cdot\omega/2)r_{i,j}^{(3)}(|\omega|)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

注意，$r_i^{(z)}{}_{,\,j}(\xi)$，$\xi\in\mathbb{R}$，$z\in\{1,2,3\}$，关于 ξ 一致有界，且与 i，j，z 无关。因此，$R_{\mathrm{sp}}(i,\ j,\ k,\ l)$ 一致有界，即

$$\sup_{i,j\le m}\sup_{k,l\le n}|R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l)|\lesssim c$$

对于某个普适常数 c，这立即可得，因为 $g_{\mathrm{sp}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 和 $|\cdot|^{-1}g_{\mathrm{sp}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$。余项 $(i,\ j,\ k,\ l)$ 的有界性论证可立即归结为引理6.4，若我们进一步假设 α保持有界；在时间区域 $\alpha\to 0$中这一条件成立。

□

命题的证明 5.2。在整个证明过程中，我们将多次使用以下黎曼-勒贝格论证。注意，$\sin^4(x) = 3/8-\cos(2x)/2+\cos(4x)/8$。因此，由于 $\partial_i\partial_j g_{\mathrm{sp}},\partial_i\partial_j g_{\mathrm{te}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$，根据

引理 6.15 对所有 $i,j=1,\dots,d$，利用黎曼-勒贝格引理，我们得到渐近展开

$$\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{3}{8}\int_{\mathbb{R}^d}g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega+o(\alpha^{-2}),\quad \alpha\to\infty \tag{6.15}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega/2)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{3}{8}\int_{\mathbb{R}^d}g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega+o(\alpha^{2}),\quad \alpha\to 0, \tag{6.16}$$

参见 Grafakos [21, 表 3。1]。进一步注意，如引理 5.1 中所述，余项 $R_{\mathrm{sp}}(i,\ j,\ k,\ l)$ 和$R_{\mathrm{te}}(i,\ j,\ k,\ l)$ 在 (6.13) 和 (6.14) 中定义，并满足以下粗略上界

$$\sup_{i,j\le m}\sup_{k,l\le n}|R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l)|\lesssim c; \tag{6.17}$$

$$\sup_{i,j\le m}\sup_{k,l\le n}|R_{\mathrm{te}}(i,j,k,l)|\lesssim c,\quad \alpha\lesssim 1, \tag{6.18}$$

对于某个普适常数 c。回忆表 $C_{\mathrm{box、\ sp、\ \mathbb{E}}}$、$C_{\mathrm{box、\ te、\ \mathbb{E}}}$ 中的常数1。

步骤 1（$\alpha\to\infty$）。根据引理 5.1，我们得到如下表示

$$\begin{aligned}\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}]&=\frac{1}{nm^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{128i}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega+R_{\mathrm{sp}}(i,i,k,k)\right)\\&=\frac{64}{(2\pi)^d\vartheta}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)\\&\quad+\frac{64}{m(2\pi)^d\vartheta}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)+\frac{1}{nm^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}R_{\mathrm{sp}}(i,i,k,k)\\&=\vartheta^{-1}C_{\mathrm{box,sp,\mathbb{E}}}+o(\alpha^{-2})+\mathcal{O}(m^{-1}),\end{aligned}$$

其中我们用到了 $m^{-2}\sum_{i=1}^{m}i=1/2-1/(2m)$、（6.15）和（6.17）。

步骤 2（$\alpha\to 0$）。对于 $\alpha\to 0$这一情形，我们将利用引理 5.1 中的第二种表示，得到

$$\begin{aligned}\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}]&=\frac{1}{nm^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{128i}{(2\pi)^d\vartheta^{\beta/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\sin^4((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega/2)g_{\mathrm{te}}(\omega)\mathrm{d}\omega+R_{\mathrm{te}}(i,i,k,k)\right)\\&=\vartheta^{-\beta/2}C_{\mathrm{box,te,\mathbb{E}}}+o(\alpha^{2})+\mathcal{O}(m^{-1})\end{aligned}$$

满足（6.16）和（6.18）。 □

命题 5.5 的证明。回顾表 $C_{\mathrm{box、\ sp、\ \mathbb{V}}}$、$C_{\mathrm{box、\ te、\ \mathbb{V}}}$ 中的内容 1 .

情形 1（$\alpha\to\infty$）。由 Wick 定理和引理 5.1 可知

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^{-2}\lambda^{2\beta-4}}{nm^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}})\\&=\frac{2\delta^{-2}\lambda^{2\beta-4}}{nm^3}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{n}\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})^2\\&=\frac{2}{nm^3}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{n}\left(\frac{128(i\wedge j)}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)\cos(\alpha\sqrt{\vartheta}(i-j)|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right.\\&\qquad\left.+R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l)\right)^2.\end{aligned} \tag{6.19}$$

步骤1（确定极限）。利用表示式（3.6）和（4.4），并运用（6.3）和（6.11）中的因式分解，我们可以将（6.19）中的主表达式改写为

$$2\frac{1}{m^3}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{1}{n}\sum_{l,k=1}^{n}\left(\frac{128(i\wedge j)}{(2\pi)^d\vartheta}\int_{\mathbb{R}^d}\cos\left((k-l)\rho\cdot\omega\right)\cos(\alpha\sqrt{\vartheta}(i-j)|\omega|)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2 \tag{6.20}$$

$$=\frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{te},j}w_{\mathrm{sp},k}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega)\cos(j\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2$$

由于 $\sin^4(x) = 3/8 - \cos(2x)/2 + \cos(4x)/8$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \cos(k\rho\cdot\omega)\cos(j\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega \\
&= \sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} \frac{(3-|z|)(-1)^{|z|}}{|z|!8}\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega \\
&= \sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_z C_{\mathrm{sp},k,j,z}
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sp},k,j,z} &:= \int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\rho\cdot\omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega, \\
c_z &:= \frac{(3-|z|)(-1)^{|z|}}{|z|!8}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

注意到 $C_{\mathrm{sp},\ k,\ j,\ z} = \mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)$ 当且仅当 $j+z=0$，即 $z=-j$，这仅在 $|j|\le 2$ 且恰有一个 $z\in\{0,\pm1,\pm2\}$时才可能成立。因此，我们可以将式（6.20）改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{te},j}w_{\mathrm{sp},k}\left(\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_z C_{\mathrm{sp},k,j,z}\right)^2 \\
&= \frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_{z_1}c_{z_2}w_{\mathrm{te},j}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2} \\
&= \frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1=z_2=-j}} c_{z_1}c_{z_2}w_{\mathrm{te},j}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2} \\
&\quad + \frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1\ne -j \text{ or } z_2\ne -j}} c_{z_1}c_{z_2}w_{\mathrm{te},j}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2} \\
&= \frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_z^2 w_{\mathrm{te},j}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2 \\
&\quad + \frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1\ne -j \text{ or } z_2\ne -j}} c_{z_1}c_{z_2}w_{\mathrm{te},j}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2} \\
&\to \frac{2^{15}}{3(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_z^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2 \\
&= \frac{2^8 35}{3(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2 = \frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{\vartheta^2},
\end{aligned}$$

其中最后一行使用了 $\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}} c_z^2 = 35/128$。倒数第二行的收敛性由引理 6.5、命题 3.6 的证明可得，即 $w_{\mathrm{te},\ j}\to 1/3$ 以及 $\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},\ k}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2 \to \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2$，

以及以下界

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^2}\sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1\neq -j \text{ or } z_2\neq -j}} c_{z_1}c_{z_2}w_{\mathrm{te},j}\sum_{|k|\le n-1} w_{\mathrm{sp},k}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2}\right| \\
&\lesssim \sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1\neq -j \text{ or } z_2\neq -j}}\sum_{|k|\le n-1}|C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2}| \\
&\le \sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1\neq -j \text{ or } z_2\neq -j}}\left(\sum_{|k|\le n-1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{|k|\le n-1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2}^2\right)^{1/2} \\
&= \sum_{|j|\le m-1}\sum_{\substack{z_1,z_2\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z_1,z_2\neq -j}}\left(\sum_{|k|\le n-1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_1}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{|k|\le n-1}C_{\mathrm{sp},k,j,z_2}^2\right)^{1/2} \\
&\quad + 2\sum_{|j|\le 2}\sum_{\substack{z\in\{0,\pm1,\pm2\}\\ z\neq -j}}\left(\sum_{|k|\le n-1}C_{\mathrm{sp},k,j,z}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{|k|\le n-1}\left(\mathcal{F}_c(g_{\mathrm{sp}})(k\rho)\right)^2\right)^{1/2} \\
&\lesssim \begin{cases} mn\alpha^{-4}+n\alpha^{-4}, & d=1,\\ \alpha^{-1}\log(m)+\alpha^{-1/2}, & d\ge 2,\end{cases} \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

由引理 6.7、引理 6.8并结合假设 5.3 和假设 5.4。步骤 2（控制余项）。 对于（6.19）中的余项，我们由引理 5. 1

$$
\frac{2}{nm^3}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{n}R_{\mathrm{sp}}(i,j,k,l)^2=\frac{1}{nm^3}\mathcal{O}(m^2n^2)=\mathcal{O}\left(\frac{n}{m}\right)\to 0,
$$

其中收敛性立即由（5.5）在假设 5.3 中得到。正如命题 4.6 中所讨论的那样，由柯西-施瓦茨不等式，交叉项仍为低阶项。

情形 2（$\alpha\to 0$）。 关于 $\alpha\to 0$ 的证明完全相同。我们由引理 5.1、引理 6.7 和引理6.8 得到收敛

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^{2\beta-6}}{nm^3}\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}})&=\frac{2\delta^{2\beta-6}}{nm^3}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{n}\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})^2 \\
&=\frac{2^{15}}{(2\pi)^{2d}\vartheta^{\beta}}\sum_{|k|\le n-1}w_{\mathrm{sp},k}\sum_{|j|\le m-1}w_{\mathrm{te},j}\left(\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}}c_zC_{\mathrm{te},k,j,z}\right)^2+\mathcal{o}(1) \\
&\to\frac{2^8 35}{3(2\pi)^{2d}\vartheta^{\beta}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{F}_c^{+}(g_{\mathrm{te}})(j)\right)^2=\frac{C_{\mathrm{box,temp},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}
\end{aligned}
$$

其中 c_z 来自（6.21），且

$$
C_{\mathrm{te},k,j,z}\coloneqq\int_{\mathbb{R}^d}\cos(j|\omega|)\cos((k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega)\sin^4(|\omega|/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega. \qquad \square
$$

引理 6.7。 设 k、$j\in\mathbb{Z}$、 $\alpha>0$ 和 $z\in\{-2,-1,0,1,2\}$。考虑系数 s

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{sp},k,j,z}&=\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot\omega)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\rho\cdot\omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega,\\
C_{\mathrm{te},k,j,z}&=\int_{\mathbb{R}^d}\cos(j|\omega|)\cos((k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega)\sin^4(|\omega|/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

假设 $d \geq 2$。若 $|j+z| \geq 1$，则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{\mathrm{sp},k,j,z}^2 \lesssim \frac{1}{\alpha|j+z|}, \tag{6.22}$$

并且如果 $|k+z| \geq 1$，那么

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} C_{\mathrm{te},k,j,z}^2 \lesssim \frac{\alpha}{|k+z|}. \tag{6.23}$$

证明。
步骤 1（证明（6.22））。$C_{\mathrm{sp},\,k,\,j,\,z}$ 仅通过 $|\omega|$ 和 $\rho\cdot\omega$ 依赖于 ω。由旋转不变性，我们可以旋转坐标系，并假设 $\rho = e_1$，从而得到

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{sp},k,j,z} &= \int_{\mathbb{R}^d} \cos(k\rho\cdot\omega)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\rho\cdot\omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega, \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \cos(k\omega_1)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\omega_1/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(ks)\sin^4(s/2)H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{6.24}$$

with

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s) &\coloneqq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \cos\left((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}\sqrt{s^2+|\omega|^2}\right)\left(s^2+|\omega|^2\right)^{\frac{\beta-d-2}{2}}\mathrm{d}\omega \\ &= \sigma_{d-2}\int_0^\infty \cos\left((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}\sqrt{s^2+r^2}\right)\left(s^2+r^2\right)^{\frac{\beta-d-2}{2}} r^{d-2}\mathrm{d}r \\ &= \sigma_{d-2}\int_{|s|}^\infty \cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}v)v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{\frac{d-3}{2}}\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

其中，我们将积分改写为极坐标形式，然后应用变换 $v(r) = \sqrt{s^2+r^2}$。接下来，注意到 $\cos(ks)$ 和 $\sin^4(s/2)$ 是 2π-周期的。因此，将 $\mathbb{R}$ 拆分为长度为 2π 的区间后，我们可以改写为

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{sp},k,j,z} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k(s+2\pi l))\sin^4((s+2\pi l)/2)H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s+2\pi l)\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ks)\sin^4(s/2)\sum_{l\in\mathbb{Z}} H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s+2\pi l)\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ks) f_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 $f_{\mathrm{sp},\,\alpha,\,j}(s) = \sin^4(s/2)\sum_{l\in\mathbb{Z}} H_{\mathrm{sp},\,\alpha,\,j}(s+2\pi l)$。现在，只要 $f_{\mathrm{sp},\,\alpha,\,j}$ 有定义且属于 $L^2((-\pi,\,\pi))$，我们便得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{\mathrm{sp},k,j,z}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ks)f_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s)\mathrm{d}s\right)^2 = 2\pi\|f_{\mathrm{sp},\alpha,j}\|_{L^2((-\pi,\pi))}^2. \tag{6.25}$$

接下来，我们研究映射 $H_{\mathrm{sp},\,\alpha,\,j}$。在 $\varepsilon > 0$ 处分割积分后，我们可以将 $H_{\mathrm{sp},\,\alpha,\,j}$ 改写为

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s) = &\int_{|s|}^{|s|+\varepsilon} \cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}v)v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{\frac{d-3}{2}}\mathrm{d}v \\ &+ \int_{|s|+\varepsilon}^{\infty} \cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}v)v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{\frac{d-3}{2}}\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{6.26}$$

注意，对于 $v \geq |s|$，我们有

$$\begin{aligned} v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{(d-3)/2} &= v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{-1/2}(v^2-s^2)^{(d-2)/2} \\ &\leq v^{\beta-d-1}v^{d-2}((v-|s|)(v+|s|))^{-1/2} \\ &\leq v^{\beta-3}|s|^{-1/2}(v-|s|)^{-1/2} \\ &\leq |s|^{\beta-7/2}(v-|s|)^{-1/2}\mathbb{1}_{[|s|,|s|+\varepsilon]}(v) + v^{\beta-7/2}\varepsilon^{-1/2}\mathbb{1}_{(|s|+\varepsilon,\infty)}(v). \end{aligned}$$

我们将直接估计第一个积分，并对第二个积分使用分部积分。在 $d=2$ 的特殊情形下，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{|s|+\varepsilon}^{\infty}\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}v)v^{\beta-3}(v^2-s^2)^{-1/2}\mathrm{d}v\\
&=\left[\frac{\sin((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}v)}{(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}}v^{\beta-3}(v^2-s^2)^{-1/2}\right]_{|s|+\varepsilon}^{\infty}-\int_{|s|+\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}v)}{(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(v^{\beta-3}(v^2-s^2)^{-1/2}\right)\mathrm{d}v\\
&\le\frac{|s|^{\beta-7/2}\varepsilon^{-1/2}}{|j+z|\alpha\sqrt{\vartheta}}+\int_{|s|+\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{|j+z|\alpha\sqrt{\vartheta}}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(v^{\beta-3}(v^2-s^2)^{-1/2}\right)\right|\mathrm{d}v\\
&=\frac{|s|^{\beta-7/2}\varepsilon^{-1/2}}{|j+z|\alpha\sqrt{\vartheta}}-\frac{1}{|j+z|\alpha\sqrt{\vartheta}}\int_{|s|+\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(v^{\beta-3}(v^2-s^2)^{-1/2}\right)\mathrm{d}v\\
&\le\frac{2|s|^{\beta-7/2}\varepsilon^{-1/2}}{|j+z|\alpha\sqrt{\vartheta}},
\end{aligned}$$

而倒数第二个等式在 $d\ge 3$ 中不成立。在这种情况下，我们利用三角不等式对 $v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{(d-3)/2}$ 的导数进行估计，并分别考虑每一项。总之，

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s)&\lesssim|s|^{\beta-7/2}\left(\varepsilon^{1/2}+\frac{1}{\alpha|j+z|\varepsilon^{1/2}}\right)\\
&\le|s|^{\beta-7/2}\varepsilon^{1/2}+\frac{1}{\alpha|j+z|\varepsilon^{1/2}}\\
&=|s|^{\beta-7/2}\frac{1}{\alpha^{1/2}|j+z|^{1/2}}
\end{aligned}$$

对于　选择 $\varepsilon=\alpha^{-1}|j+z|^{-1}$。将最后一个显示式代入（6.25），可得关于范数

$$\begin{aligned}
\|f_{\mathrm{sp},\alpha,j}\|_{L^2((-\pi,\pi))}^2\lesssim&\frac{1}{\alpha|j+z|}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^8(s/2)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}|s+2\pi l|^{\beta-7/2}\right)^2\mathrm{d}s.\\
&\lesssim\frac{1}{\alpha|j+z|}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^8(s/2)\left(|s|^{\beta-7/2}+\sum_{l\in\mathbb{Z},|l|\ge1}|l|^{\beta-7/2}\right)^2\mathrm{d}s\\
&\lesssim\frac{1}{\alpha|j+z|}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^8(s/2)(|s|^{2\beta-7}+1)\mathrm{d}s\\
&\lesssim\frac{1}{\alpha|j+z|},
\end{aligned}$$

从而证明了该断言。

步骤 2（证明（6.23））。分析 $C_{\mathrm{te},\ k,\ j,\ z}$ 的结构基本相似。在分析 $C_{\mathrm{sp},\ k,\ j,\ z}$ 时，我们分离出方向 $\rho\cdot\omega=\omega_1$，并将关于 j 以及 α 的所有依赖关系纳入映射 $f_{\mathrm{sp},\ a,\ j}$ 中。同样，对于 $C_{\mathrm{te},\ k,\ j,\ z}$，我们首先将积分变换到极坐标，即

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{te},k,j,z}&=\int_{\mathbb{R}^d}\cos(j|\omega|)\cos((k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot\omega)\sin^4(|\omega|/2)|\omega|^{\beta-d-2}\mathrm{d}\omega\\
&=\int_0^{\infty}\cos(jr)\sin^4(r/2)r^{\beta-3}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\cos((k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot(r\omega))\mathrm{d}\sigma(\omega)\right)\mathrm{d}r\\
&=\int_0^{\infty}\cos(jr)\sin^4(r/2)r^{\beta-3}H_{\mathrm{te},\alpha,k}(r)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

with

$$H_{\mathrm{te},\alpha,k}(r)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\cos((k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\rho\cdot(r\omega))\mathrm{d}\sigma(\omega).\tag{6.27}$$

现在，周期化得到

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}C_{\mathrm{te},k,j,z}^2\lesssim\|f_{\mathrm{te},\alpha,k}\|_{L^2([-\pi,\pi])}^2,$$

with

$$f_{\mathrm{te},\alpha,k}(r)=\mathbb{1}_{(0,\infty)}(r)\sin^4(r/2)\sum_{l\in\mathbb{Z}}H_{\mathrm{te},\alpha,k}(r+2\pi l)|r+2\pi l|^{\beta-3}.$$

根据经典的Funk-Hecke公式并经过代换，我们可以将（6.27）改写为

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{te},\alpha,k}(r)&=2\sigma_{d-2}r^{-1}\int_0^r\cos((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}(k+z)s)((r^2-s^2)/r^2)^{(d-3)/2}\mathrm{d}s\\&=2\sigma_{d-2}r^{-d+2}\int_0^r\cos((\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}(k+z)s)(r^2-s^2)^{(d-3)/2}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

与 $H_{\mathrm{sp},\ \alpha,\ j}$ 的情形相同，我们可以继续在 $r-\varepsilon$ 处拆分积分。利用

$$(r^2-s^2)^{(d-3)/2}\le r^{d-5/2}\left(\varepsilon^{-1/2}\mathbb{1}_{(0,r-\varepsilon)}(s)+(r-s)^{-1/2}\mathbb{1}_{[r-\varepsilon,r]}\right),$$

类似地，选择 $\varepsilon=\alpha\sqrt{\vartheta}/|k+z|$ 后可得

$$H_{\mathrm{te},\alpha,k}(r)\lesssim r^{-1/2}\frac{\alpha^{1/2}}{|k+z|^{1/2}}.$$

因此，

$$\|f_{\mathrm{te},\alpha,k}\|^2_{L^2((-\pi,\pi))}\lesssim\frac{\alpha}{|k+z|}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^8(r/2)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}^{n}|r+2\pi l|^{\beta-7/2}\right)^2\mathrm{d}r\lesssim\frac{\alpha}{|k+z|}.$$ □

对 $|j|\ge2$ 将式（6.22）求和，根据假设 5.3

$$\sum_{|j|\ge2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}C^2_{\mathrm{sp},k,j,z}\lesssim\log(m)\alpha^{-1}\to0.$$

最后一个公式中的收敛性是证明命题 5.5 收敛性所必需的。如备注 5.6 所述，当假设 5.5 在 $d\ge3$ 中也成立，即使假设 5.3 不满足，命题 6.7 的结论仍然成立。这可以通过显著改进引理 6.22 来实现；也就是说，我们可以证明比式（6.22）更强的结论

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}C^2_{\mathrm{sp},k,j,z}\lesssim\frac{1}{\alpha^2|j+z|^2},\quad d\ge3,\tag{6.28}$$

由此可得

$$\sum_{|j|\ge2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}C_{\mathrm{sp},k,j,z}\lesssim\alpha^{-2}\to0,\quad\alpha\to\infty.$$

事实上，我们无需采用式（6.26）中的拆分论证，而是可以直接进行分部积分，利用

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(v^{\beta-d-1}(v^2-s^2)^{(d-3)/2}\right)\right|&\lesssim\begin{cases}v^{\beta-5},&d=3,\\v^{\beta-d-2}(v^2-s^2)^{(d-3)/2}+v^{\beta-d}(v^2-s^2)^{(d-5)/2},&d>3,\end{cases}\\&\lesssim\begin{cases}v^{\beta-5},&d=3,\\v^{\beta-5}+v^{\beta-4}|s|^{1/2}(v-|s|)^{-1/2},&d>3.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，

$$H_{\mathrm{sp},\alpha,j}(s)\lesssim\frac{1}{\alpha|j+z|}|s|^{\beta-4}$$

and

$$\|f_{\mathrm{sp},\alpha,j}\|^2_{L^2((-\pi,\pi))}\lesssim\frac{1}{\alpha^2|j+z|^2},$$

证明（6.28）。原则上，（6.28）还可以进一步细化，即在不断增大的维数中多次应用分部积分。直观上，这源于将时间指标 j 与空间指标 k分别作用的方向加以分离的想法。 $\rho\cdot\omega$ 对 $|\omega|$ 的贡献在低维中变得显著更为重要，从而使分离更加困难。情形 $d=2$ 构成一个边界情形，从而导致更慢的傅里叶衰减，而在 $d=1$中分离则变得不可能。在该情形下，假设5.4 提供了一种用以控制余弦频率 k 和 $j\alpha$的工具，并用来直接界定系数$C_{\mathrm{sp},k,j,z}$ 。

引理 6.8. 假设 $d=1$ 且 $j,k\in\mathbb{Z}$ 并设假设5.4成立。设 $z\in\{0,\pm1,\pm2\}$。若 $|j+z|\geq 1$，则$C_{\mathrm{sp},k,j,z}$ （定义于引理6.7）满足

$$C_{\mathrm{sp},k,j,z}^2\lesssim\alpha^{-4}.$$

同样，如果 $|k+z|\geq 1$，则 $C_{\mathrm{te},\ k,\ j,\ z}$ 引理 6.7 中定义的量满足

$$C_{\mathrm{te},k,j,z}^2\lesssim\alpha^{4}.$$

证明。
步骤 1（关于 $C_{\mathrm{sp},\ k,\ j,\ z}$ 的论证）。 如果 $d=1$，我们可以直接假设 $\rho=1$。通过直接计算

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{sp},k,j,z}&=\int_{\mathbb{R}}\cos(k\omega)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}\omega)\sin^4(\omega/2)|\omega|^{\beta-3}\mathrm{d}\omega\\&=2\int_0^{\infty}\cos(k\omega)\cos((j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}\omega)\omega/2)\sin^4(\omega/2)\omega^{\beta-3}\mathrm{d}\omega\\&=\int_0^{\infty}\Big(\cos((k+(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta})\omega)+\cos((k-(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta})\omega)\Big)\,g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

注意到 $g_{\mathrm{sp}}(0)=g_{\mathrm{sp}}'(0)=0$。因此，应用两次分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}|C_{\mathrm{sp},k,j,z}|&\lesssim\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}}\left(\frac{1}{|k+(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|^2}+\frac{1}{|k-(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|^2}\right)\|g_{\mathrm{sp}}''\|_{L^1((0,\infty))}\\&\lesssim\alpha^{-2},\end{aligned}$$

其中，由于假设 5.4，我们使用了 $|\overline{k}\pm(j+z)\alpha\sqrt{\vartheta}|\geq||j+z|\alpha\sqrt{\vartheta}-|k||\geq\alpha\sqrt{\vartheta}-n\geq\alpha\sqrt{\vartheta}/2$。步骤 2（关于 $C_{\mathrm{te},\ k,\ j,\ z}$ 的论证）。 如果 $d=1$，则有

$$C_{\mathrm{te},k,j,z}=\int_{\mathbb{R}}\cos(j\omega)\cos((k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}\omega)\sin^4(\omega/2)|\omega|^{\beta-3}\mathrm{d}\omega.$$

类似地，

$$|C_{\mathrm{te},k,j,z}|\lesssim\sum_{z\in\{0,\pm1,\pm2\}}\left(\frac{1}{|j+(k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}|^2}+\frac{1}{|j-(k+z)(\alpha\sqrt{\vartheta})^{-1}|^2}\right)\|g_{\mathrm{te}}''\|_{L^1((0,\infty))}\lesssim\alpha^{-2}.\qquad\square$$

引理 6.9. 假设 5.3 和假设 5.4。那么，在渐近区间 $\alpha\to\infty$中，(5.10)中的分子满足

$$\left(\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|\right)^2=\begin{cases}\mathcal{O}(\delta^2\lambda^{4-2\beta}(n^2m^2+n^2m^4\alpha^{-4})), & d=1,\\ \mathcal{O}(\delta^2\lambda^{4-2\beta}(n^2m^2+nm^3\alpha^{-1})), & d\geq 2,\end{cases}$$

且对 $\alpha\to 0$

$$\left(\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|\right)^2=\begin{cases}\mathcal{O}(\delta^2\lambda^{4-2\beta}(n^2m^2+n^2m^4\alpha^{4})), & d=1,\\ \mathcal{O}(\delta^2\lambda^{4-2\beta}(n^2m^2+nm^3\alpha)), & d\geq 2.\end{cases}$$

证明。 我们证明以下情形下的结论： $\alpha\to\infty$。对于 $\alpha\to 0$，证明过程相同。根据引理 5.1，我们可以得到如下界

$$\begin{aligned}&\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|\\&\lesssim\delta\lambda^{2-\beta}\left(nm+m\sum_{|j|\leq m-1}\sum_{|k|\leq n-1}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\cos(k\rho\cdot w)\cos(j\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|)\sin^4(\alpha\sqrt{\vartheta}|\omega|/2)g_{\mathrm{sp}}(\omega)\mathrm{d}\omega\right|\right)\\&\lesssim\delta\lambda^{2-\beta}\left(nm+m\sum_{|j|\leq m-1}\sum_{z\in\{0,\pm1\pm2\}}\sum_{|k|\leq n-1}|C_{\mathrm{sp},k,j,z}|\right)\end{aligned}$$

其中 $C_{\mathrm{sp},\ k,\ j,\ z}$ 由式（6.21）给出。按照命题 5.5的证明思路，进一步利用柯西-施瓦茨不等式、引理 6.7 和引理 6.8

$$\sum_{|j|\le m-1}\sum_{z\in\{0,\pm1\pm2\}}\sum_{|k|\le n-1}|C_{\mathrm{sp},k,j,z}| \lesssim \sqrt{n}\sum_{|j|\le m-1}\left(\sum_{\substack{z\in\{0,\pm1\pm2\}\\ z=-j}}+\sum_{\substack{z\in\{0,\pm1\pm2\}\\ z\neq -j}}\right)\left(\sum_{|k|\le n-1}C^2_{\mathrm{sp},k,j,z}\right)^{1/2}$$
$$\lesssim \sqrt{n}\begin{cases}1+m\sqrt{n}\alpha^{-2}, & d=1,\\ 1+\sqrt{m}\alpha^{-1/2}, & d\ge 2.\end{cases}$$

总之，

$$\left(\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|\right)^2=\begin{cases}\mathcal{O}(\delta^2\lambda^{4-2\beta}(n^2m^2+n^2m^4\alpha^{-4})), & d=1,\\ \mathcal{O}(\delta^2\lambda^{4-2\beta}(n^2m^2+nm^3\alpha^{-1})), & d\ge 2.\end{cases}$$

□

定理 5.7 的证明。由引理 6.9 和命题5.5，可得

$$\frac{(\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}})}=\begin{cases}\mathcal{O}(nm^{-1}+nm\alpha^{-4}), & d=1,\\ \mathcal{O}(nm^{-1}+\alpha^{-1}), & d\ge 2,\end{cases}$$

and

$$\frac{(\max_{j=1,\dots,m}\max_{l=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Cov}(\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},i,k},\mathbf{I}_{\mathrm{sp,te},j,l})|)^2}{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}})}=\begin{cases}\mathcal{O}(nm^{-1}+nm\alpha^{4}), & d=1,\\ \mathcal{O}(nm^{-1}+\alpha), & d\ge 2,\end{cases}$$

分别在条件 $\alpha\to\infty$ 和 $\alpha\to 0$下。由假设 5.3 可知，这些表达式趋于零。总之，我们有

$$\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\mathbb{E}[\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}]}{\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}})}}\xrightarrow{d}N(0,1),$$

由此可得以下收敛关系

$$\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\mathbb{E}\left[\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}\right]\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{\vartheta^2}\right),\quad \alpha\to\infty,$$

and

$$\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\mathbb{E}\left[\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}\right]\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\quad \alpha\to 0.$$

由命题5.2 和假设5.3，我们可以将上式中的期望替换为其极限，从而得到

$$\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{-1}\lambda^{\beta-2}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{E}}}{\vartheta}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,sp},\mathbb{V}}}{\vartheta^2}\right),\quad \alpha\to\infty,$$

and

$$\sqrt{nm}\left(\frac{\delta^{\beta-3}}{nm^2}\mathbf{V}_{\mathrm{sp,te}}-\frac{C_{\mathrm{box,temp},\mathbb{E}}}{\vartheta^{\beta/2}}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{C_{\mathrm{box,te},\mathbb{V}}}{\vartheta^{\beta}}\right),\quad \alpha\to 0.$$

□

6.5 关于增量的一般结果

令 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且 $h:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$。令 $q,\ z\in\mathbb{Z}$。回顾式（3.3）中的二元二阶离散增量，即

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z)=4h(q,z)+h(q+1,z+1)+h(q+1,z-1)+h(q-1,z+1)+h(q-1,z-1)$$
$$-2\left(h(q,z+1)+h(q,z-1)+h(q-1,z)+h(q+1,z)\right).$$

令 $p \in \mathbb{N}$ 表示增量的数量。 f 的第一、第二、第三和第四阶增量以及指标 z定义如下:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{(1)}[f](z) &= f(z+1) - f(z-1), \\
\mathfrak{I}^{(2)}[f](z) &= f(z+1) + f(z-1) - 2f(z), \\
\mathfrak{I}^{(3)}[f](z) &= f(z+2) - 2f(z+1) + 2f(z-1) - f(z-2), \\
\mathfrak{I}^{(4)}[f](z) &= f(z+2) - 4f(z+1) + 6f(z) - 4f(z-1) + f(z-2).
\end{aligned} \tag{6.29}$$

式（6.29）所描述的模式可以形式化如下。若 p 为偶数，我们将增量算子作用于实函数 f 定义为

$$\mathfrak{I}^{(p)}[f](z) \coloneqq \underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[f](z - p/2),$$

其中，前向增量算子为

$$\underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[f](z) = \sum_{q=0}^{p} (-1)^{p-q} \binom{p}{q} f(z+q).$$

若 p 为奇数，则有

$$\mathfrak{I}^{(p)}[f](z) \coloneqq \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{q} \binom{p-1}{q} \left(f(z+q+1-(p-1)/2) - f(z+q-1-(p-1)/2) \right).$$

引理 6.10. 余弦和正弦的增量可表示为

$$\mathfrak{I}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z) = \begin{cases} 2^p \sin^p(r/2) \cos\left(zr + \frac{p\pi}{2}\right), & p \ \textit{even}, \\ -2^p \sin(r) \sin^{p-1}(r/2) \sin(zr + (n-1)\pi/2), & p \ \textit{odd}, \end{cases}$$

and

$$\mathfrak{I}^{(p)}[\sin(\cdot r)](z) = \begin{cases} 2^p \sin^p(r/2) \sin\left(zr + \frac{p\pi}{2}\right), & p \ \textit{even}, \\ 2^p \sin(r) \sin^{p-1}(r/2) \cos(zr + (p-1)\pi/2), & p \ \textit{odd}. \end{cases}$$

证明。

情形1（p 为偶数）。我们先从较简单的情形入手，即增量阶数 p为偶数。现在注意到，对于余弦函数，有

$$\underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{q=0}^{p} (-1)^{p-q} \binom{p}{q} \exp(\mathrm{i}r(z+q)) \right) = \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}rz} \sum_{q=0}^{p} (-1)^{p-q} \binom{p}{q} \exp(\mathrm{i}rq) \right).$$

注意，由于 t 增量的系数源自帕斯卡三角形，我们很自然地观察到 e

$$\underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z) = \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}rz} (e^{\mathrm{i}r} - 1)^p \right), \quad \underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\sin(\cdot r)](z) = \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}rz} (e^{\mathrm{i}r} - 1)^p \right).$$

接下来，注意到

$$e^{\mathrm{i}r} - 1 = e^{\mathrm{i}r} - e^{\mathrm{i}r/2} e^{-\mathrm{i}r/2} = e^{\mathrm{i}r/2} (e^{\mathrm{i}r/2} - e^{-\mathrm{i}r/2}).$$

因此，代入欧拉公式，我们得到

$$e^{\mathrm{i}r/2} - e^{-\mathrm{i}r/2} = 2\mathrm{i} \sin(r/2).$$

因此，我们得到

$$\underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z) = \operatorname{Re}\left(\sin^p(r/2) (2\mathrm{i})^p e^{\mathrm{i}r(z+p/2)} \right) = 2^p \sin^p(r/2) \operatorname{Re}\left(\mathrm{i}^p e^{\mathrm{i}r(z+p/2)} \right).$$

注意到 $\mathrm{i}^p = e^{p\mathrm{i}\pi/2}$ ，我们可以将后一个对象写成一个指数项，使得

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z) &= 2^p \sin^p(r/2) \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}(rz + rp/2 + p\pi/2)} \right) = 2^p \sin^p(r/2) \cos\left(zr + \frac{pr}{2} + \frac{p\pi}{2} \right), \\
\underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\sin(\cdot r)](z) &= 2^p \sin^p(r/2) \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}(rz + rp/2 + p\pi/2)} \right) = 2^p \sin^p(r/2) \sin\left(zr + \frac{pr}{2} + \frac{p\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

因此，对于对称差分，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z) &= \underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\cos(\cdot r)](z-p/2) = 2^p \sin^p(r/2)\cos\left((z-\frac{p}{2})r+\frac{pr}{2}+\frac{p\pi}{2}\right)\\ &= 2^p\sin^p(r/2)\cos\left(zr+\frac{p\pi}{2}\right),\\ \mathfrak{I}^{(p)}[\sin(\cdot r)](z) &= \underline{\mathfrak{I}}^{(p)}[\sin(\cdot r)](z-p/2)\\ &= 2^p\sin^p(r/2)\sin\left(zr+\frac{p\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

N请注意，由于我们假设 p 为偶数，因此这只是将阶数平移 π。

情形 2（p 为奇数）。利用 $\mathfrak{I}^{(p)} = \mathfrak{I}^{(p-1)}\mathfrak{I}^{(1)}$，我们可以将奇数情形化归为偶数情形。特别地，对于一阶增量 $\mathfrak{I}^{(1)}[\sin(\cdot r)](z) = 2\sin(r)\cos(zr)$ 和 $\mathfrak{I}^{(1)}[\cos(\cdot r)](z) = -2\sin(r)\sin(zr)$，我们计算得。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(p)}[\cos(r\cdot)](z) &= -2\sin(r)2^{p-1}\sin^{p-1}(r/2)\sin\left(zr+\frac{(p-1)\pi}{2}\right),\\ \mathfrak{I}^{(p)}[\sin(r\cdot)](z) &= 2\sin(r)2^{p-1}\sin^{p-1}(r/2)\cos\left(zr+\frac{(p-1)\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

□

接下来，我们将给出几个结果，以建立 $\mathcal{I}^{(2)}$ 与（3.3）中的增量（6.29）之间的关系。**引理6.11**。有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) &= \mathfrak{I}^{(4)}[f](q+z), \quad h(q,z) = f(q+z),\\ \mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) &= \mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z), \quad h(q,z) = f(q-z).\end{aligned}$$

证明。当 $h(q,z) = f(q+z)$时，只需观察即可立即得出证明

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) &= 4f(q+z)+f(q+z+2)+f(q+z)+f(q+z)+f(q+z-2)\\ &\quad -2(f(q+z+1)+f(q+z-1)+f(q+z-1)+f(q+z+1))\\ &= 6f(q+z)+f(q+z+2)+f(q+z-2)-4f(q+z+1)-4f(q+z-1)\\ &= \mathfrak{I}^{(4)}[f](q+z)\end{aligned}$$

对于情形 $h(q,z) = f(q-z)$，证明也类似。 □

引理 6.12。设有函数 $h(x,y) = xf(x-y)$。则有

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = i\mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z) + \mathfrak{I}^{(3)}[f](q-z).$$

证明。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z)\\ &= 4qf(q-z)+(q+1)f(q-z)+(q+1)f(q-z+2)+(q-1)f(q-z-2)+(q-1)f(q-z)\\ &\quad -2\Big(qf(q-z-1)+qf(q-z+1)+(q-1)f(q-z-1)+(q+1)f(q-z+1)\Big)\\ &= q\Big(6f(q-z)+f(q-z+2)+f(q-z-2)-4f(q-z-1)-4f(q-z+1)\Big)\\ &\quad +\Big(f(q-z+2)-f(q-z-2)+2f(q-z-1)-2f(q-z+1)\Big)\\ &= q\mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z)+\mathfrak{I}^{(3)}[f](q-z).\end{aligned}$$

□

引理 6.13. 假设 $h(x,y) = (x\wedge y)f(x-y)$，且 f 是对称的。那么，我们有

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = \begin{cases}(q\wedge z)\mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|) - \mathfrak{I}^{(3)}[f](|q-z|) + 4f(1) - 2f(2), & q = z,\\ (q\wedge z)\mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|) - \mathfrak{I}^{(3)}[f](|q-z|) - f(1), & |q-z| = 1,\\ (q\wedge z)\mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|) - \mathfrak{I}^{(3)}[f](|q-z|), & |q-z| \geq 2.\end{cases}$$

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) &= 4(q\wedge z)f(q,z)\\ &\quad + ((q+1)\wedge(z+1))f(q+1,z+1) + ((q+1)\wedge(z-1))f(q+1,z-1)\\ &\quad + ((q-1)\wedge(z+1))f(q-1,z+1) + ((q-1)\wedge(z-1))f(q-1,z-1)\\ &\quad - 2\Big((q\wedge(z+1))f(q,z+1) + (q\wedge(z-1))f(q,z-1)\\ &\qquad + ((q-1)\wedge z)f(q-1,z) + ((q+1)\wedge z)f(q+1,z)\Big)\\ &= 4(q\wedge z)f(q-z)\\ &\quad + ((q+1)\wedge(z+1))f(q-z) + ((q+1)\wedge(z-1))f(q-z+2)\\ &\quad + ((q-1)\wedge(z+1))f(q-z-2) + ((q-1)\wedge(z-1))f(q-z)\\ &\quad - 2\Big((q\wedge(z+1))f(q-z-1) + (q\wedge(z-1))f(q-z+1)\\ &\qquad + ((q-1)\wedge z)f(q-z-1) + ((q+1)\wedge z)f(q-z+1)\Big).\end{aligned} \tag{6.30}$$

情形 1 ($|q-z|\geq 2$.)。设 $q+1\leq z-1$。那么，(6.30) 中最小值里的所有 z 都将直接消失，结果便化为 $x\leq y$ 且 $h(x,y)=xf(x-y)$ 的情形。类似地，由于我们假设 f 是对称的，情形 $z+1\leq q-1$ 可归结为对 $y\leq x$ 以及 $h(x,y)=yf(y-x)$ 的分析。因此，只要 $|q-z|\geq 2$，引理 6.12 就给出了二阶增量的表示：

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = \begin{cases} q\mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z) + \mathfrak{I}^{(3)}[f](q-z), & q+2\leq z,\\ z\mathfrak{I}^{(4)}[f](z-q) + \mathfrak{I}^{(3)}[f](z-q), & z+2\leq q.\end{cases} \tag{6.31}$$

注意，由于三阶增量是奇增量，而四阶增量是偶增量，我们有如下性质

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(3)}[f](q-z) &= f(q-z+2) - 2f(q-z+1) + 2f(q-z-1) - f(q-z-2)\\ &= f(z-q-2) - 2f(z-q-1) + 2f(z-q+1) - f(z-q+2)\\ &= -\mathfrak{I}^{(3)}[h](z-q),\\ \mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z) &= f(q-z+2) - 4f(q-z+1) + 6f(q-z) - 4f(q-z-1) + f(q-z-2)\\ &= f(z-q-2) - 4f(z-q-1) + 6f(z-q) - 4f(z-q+1) + f(z-q+2)\\ &= f(z-q+2) - 4f(z-q+1) + 6f(z-q) - 4f(z-q-1) + f(z-q-2)\\ &= \mathfrak{I}^{(4)}[f](z-q).\end{aligned} \tag{6.32}$$

其中我们用到了 f 的对称性。因此，(6.32) 使我们能够得到 (6.31) 的以下更紧凑表示：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) &= \begin{cases} q\mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z) + \mathfrak{I}^{(3)}[f](q-z), & q+2\leq z,\\ z\mathfrak{I}^{(4)}[f](z-q) + \mathfrak{I}^{(3)}[f](z-q), & z+2\leq q,\end{cases}\\ &= (q\wedge z)\mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|) - \mathfrak{I}^{(3)}[f](|q-z|).\end{aligned} \tag{6.33}$$

情形 2 ($z=q$)。 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,q) &= 4qf(0) + (q+1)f(0) + (q-1)f(2) + (q-1)f(-2) + (q-1)f(0)\\ &\quad - 2\Big(qf(-1) + (q-1)f(1) + (q-1)f(-1) + qf(1)\Big)\\ &= q\left(6f(0) + f(2) + f(-2) - 4f(-1) - 4f(1)\right) - f(2) - f(-2) + 2f(1) + 2f(-1)\\ &= q(6f(0) + 2f(2) - 8f(1)) + 4f(1) - 2f(2).\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(4)}[f](0) &= f(2) - 4f(1) + 6f(0) - 4f(-1) + f(-2) = 6f(0) + 2f(2) - 8f(1)\\ \mathfrak{I}^{(3)}[f](0) &= 0,\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,q) &= q\mathfrak{I}^{(4)}[f](0) + 4f(1) - 2f(2)\\ &= (q\wedge z)\mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|) - \mathfrak{I}^{(3)}[f](|q-z|) + 4f(1) - 2f(2), \quad q=z.\end{aligned}$$

情形 3 ($|q-z|=1$). 首先假设 $z=q+1$。我们观察到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,q+1) &= 4qf(-1)+(q+1)f(-1)+qf(1)+(q-1)f(-3)+(q-1)f(-1)\\ &\quad -2\Big(qf(-2)+qf(0)+(q-1)f(-2)+(q+1)f(0)\Big)\\ &= q(7f(1)+f(3)-4f(2)-4f(0))+2f(2)-2f(0)-f(3).\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(4)}[f](1) &= 7f(1)+f(3)-4f(2)-4f(0),\\ \mathfrak{I}^{(3)}[f](1) &= f(3)-f(1)+2f(0)-2f(2),\end{aligned}$$

从而得到

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,q+1) = q\mathfrak{I}^{(4)}[f](1)-\mathfrak{I}^{(3)}[f](1)-f(1).$$

类似地，我们可以推导出情形 $z=q-1$，总的来说得到

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = (q\wedge z)\mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|)-\mathfrak{I}^{(3)}[f](|q-z|)-f(1),\quad |q-z|=1. \qquad \square$$

引理 6.14。设 $h(x,y)=f(|x-y|)$。则有

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = \begin{cases} 6f(0)-8f(1)+2f(2), & |q-z|=0,\\ 7f(1)+f(3)-4f(2)-4f(0), & |q-z|=1,\\ \mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|), & |q-z|\geq 2.\end{cases}$$

证明。
情形 1 ($|q-z|\geq 2$)。首先假设 $q>z$。根据定义（3.3）可得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) &= f(|q-z+2|)-4f(|q-z+1|)+6f(|q-z|)-4f(|q-z-1|)+f(|q-z-2|)\\ &= f(q-z+2)-4f(q-z+1)+6f(q-z)-4f(q-z-1)+f(q-z-2)\\ &= \mathfrak{I}^{(4)}[f](q-z).\end{aligned}$$

若 $z>q$，由 $|\cdot|$ 的对称性，我们同样得到 $\mathcal{I}^{(2)}[h](q-z)=\mathfrak{I}^{(4)}[f](z-q)$。因此，总体而言，这相当于

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = \mathfrak{I}^{(4)}[f](|q-z|).$$

情况 2 ($q=z$)。我们有

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = 6h(0)-8h(1)+2h(2).$$

情况 3 ($z=q+1$)。由式（3.3）可直接得出

$$\mathcal{I}^{(2)}[h](q,z) = 7f(1)+f(3)-4f(2)-4f(0). \qquad \square$$

6.6 辅助结果

引理 6.15。考虑

$$\begin{aligned}g_{\mathrm{te}}(\omega) &= \sin^4(|\omega|/2)|\omega|^{\beta-d-2},\quad \omega\in\mathbb{R}^d,\\ g_{\mathrm{sp}}(\omega) &= \sin^4(\rho\cdot\omega/2)|\omega|^{\beta-d-2},\quad \omega\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

对于所有 $i,j=1,\ldots,d$，我们有 $g_{\mathrm{te}},g_{\mathrm{sp}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$、$\nabla g_{\mathrm{te}},\nabla g_{\mathrm{sp}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 以及 $\partial_i\partial_j g_{\mathrm{te}},\partial_i\partial_j g_{\mathrm{sp}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$。

证明。我们对 g_{te} 证明该结果。g_{sp} 的证明类似。
步骤 1 ($g_{\mathrm{te}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$). 我们注意到，$\sigma_{d-1}$ 是 $\mathbb{S}^{d-}$ 的表面测度 [1]:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|g_{\mathrm{te}}(\omega)|\mathrm{d}\omega &= \sigma_{d-1}\int_0^\infty \sin^4(r/2)r^{\beta-d-2}r^{d-1}\mathrm{d}r\\ &= \sigma_{d-1}\int_0^\infty \sin^4(r/2)r^{\beta-3}\mathrm{d}r\\ &\leq \sigma_{d-1}\frac{1}{2^4}\int_0^1 r^{\beta+1}\mathrm{d}r+\sigma_{d-1}\int_1^\infty r^{\beta-3}\mathrm{d}r<\infty,\end{aligned}$$

因为 $\beta-3<-1$ 和 $\beta+1>-1$ 当 $\beta\in(0,\ 2\wedge d)$ 时。

步骤 2 ($\nabla g_{\mathrm{te}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$)。我们可以将 $g_{\mathrm{te}}(\omega) = \widetilde{g_{\mathrm{te}}}(|\omega|)$ 改写为 $\widetilde{g_{\mathrm{te}}}(r) = \sin^4(r/2) r^{\beta-2-d}$。根据链式法则，我们有 $\partial_{\omega_i} g_{\mathrm{te}}(\omega) = \widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|)\partial_{\omega_i}|\omega|$。特别地，存在 $\partial_{\omega_i}|\omega| = \frac{\omega_i}{|\omega|}$，使得 $\partial_{\omega_i} g_{\mathrm{te}}(\omega) = \widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|) \frac{\omega_i}{|\omega|}$。因此，$\nabla g_{\mathrm{te}}(\omega) = \widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|) \frac{\omega}{|\omega|}$ 且 $|\nabla g_{\mathrm{te}}(\omega)| = |\widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|)|$。一接下来，利用乘积法则，我们观察到

$$\widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(r) = 2\cos\left(\frac{r}{2}\right)\sin^3\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-2} + (\beta-d-2)\sin^4\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-3}.$$

接下来, 我们希望证明 $\nabla g_{\mathrm{te}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$。首先，我们得到上界

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g_{\mathrm{te}}(\omega)| \mathrm{d}\omega &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|)| \mathrm{d}\omega = \sigma_{d-1}\int_0^\infty |\widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(r)| r^{d-1}\mathrm{d}r \\ &= \sigma_{d-1}\int_0^\infty \left|2\cos\left(\frac{r}{2}\right)\sin^3\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-2} + (\beta-d-2)\sin^4\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-3}\right| r^{d-1}\mathrm{d}r \\ &\le 2\sigma_{d-1}\int_0^\infty |\sin^3(r/2)| r^{\beta-3}\mathrm{d}r + |\beta-d-2|\sigma_{d-1}\int_0^\infty |\sin^4(r/2)| r^{\beta-4}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

接下来，我们可以将每个积分拆分为两部分，分别对应第一步中的原点附近区域和尾部，并由此得出 $\nabla g_{\mathrm{te}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$。

步骤 3 ($\partial_i\partial_j g \in L^1(\mathbb{R}^d)$)。我们有 $g_{\mathrm{te}}(\omega) = \widetilde{g_{\mathrm{te}}}(|\omega|)$。因此，二阶导数满足

$$\partial^2_{i,j} g_{\mathrm{te}}(\omega) = \widetilde{g_{\mathrm{te}}}''(|\omega|)\frac{\omega_i\omega_j}{|\omega|^2} + \widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|)\left(\frac{\mathbb{1}(i=j)}{|\omega|} - \frac{\omega_i\omega_j}{|\omega|^3}\right),$$

因此

$$|\partial^2_{i,j} g_{\mathrm{te}}(\omega)| \lesssim |\widetilde{g_{\mathrm{te}}}''(|\omega|)| + \frac{|\widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|)|}{|\omega|}.$$

显然，映射 $\omega \mapsto |\widetilde{g_{\mathrm{te}}}'(|\omega|)||\omega|^{-1}$ 已经属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$，因为 $\beta - 1 > -1$ 和 $\beta - 3 < -1$。显式计算后，同样可以得到二阶导数的情况

$$\begin{aligned}\widetilde{g_{\mathrm{te}}}(r) = &-\sin^4\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-2} + 3\cos^2\left(\frac{r}{2}\right)\sin^2\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-2} \\ &+ 4(\beta-d-2)\cos\left(\frac{r}{2}\right)\sin^3\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-3} + (\beta-d-3)(\beta-d-2)\sin^4\left(\frac{r}{2}\right) r^{\beta-d-4},\end{aligned}$$

并转到极坐标。 □

引理 6.16. *考虑函数 $g_{\mathrm{sp},\lambda}$ 定义于 (3.4):*

$$g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) = (1 - \mathrm{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)\sin^4(\rho\cdot\omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}.$$

于是，序列 $(g_{\mathrm{sp},\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\nabla g_{\mathrm{sp},\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 一致可积。

证明. 我们首先将 $g_{\mathrm{sp},\lambda}$ 改写为 $g_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) = h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega)g_{\mathrm{sp}}(\omega)$，其中 $h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) = (1 - \mathrm{sinc}(2t\sqrt{\vartheta}\lambda^{-1}|\omega|)$ 且 $g_{\mathrm{sp}}(\omega) = \sin^4(\rho\cdot\omega/2)|\omega|^{\beta-d-2}$。通过额外注意到，对于任意 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 和 $\lambda > 0$，$h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) \le 2$，可类似于引理 6.15 证明 $(g_{\mathrm{sp},\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的一致可积性。接下来，我们希望一致地界定导数

$$\partial_j[h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega)g_{\mathrm{sp}}(\omega)] = \partial_j g_{\mathrm{sp}}(\omega)h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) + g_{\mathrm{sp}}(\omega)\partial_j h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega).$$

显然，我们有

$$\|\partial_j(g_{\mathrm{sp}}h_{\mathrm{sp},\lambda})\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \|(\partial_j g_{\mathrm{sp}})h_{\mathrm{sp},\lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g_{\mathrm{sp}}(\partial_j h_{\mathrm{sp},\lambda})\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

该函数$h_{\mathrm{sp},\ \lambda}$ 在 λ 中保持一致有界，因此一旦 $\partial_j g_{\mathrm{sp}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$，我们也有 e

$$\|(\partial_j g_{\mathrm{sp}})h_{\mathrm{sp},\lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j g_{\mathrm{sp}}(\omega)||h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega)|\mathrm{d}\omega \le 2\|\partial g_{\mathrm{sp}}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

对于另一项，我们利用 $a = 2t\sqrt{\vartheta}\lambda_n^{-1}$ 进行计算

$$\partial_j h_{\mathrm{sp},\lambda}(\omega) = -\partial_j \mathrm{sinc}(a|\omega|) = -\frac{\omega_j}{|\omega|}\frac{1}{|\omega|}\left(\cos(a|\omega|) - \mathrm{sinc}(a|\omega|)\right).$$

特别是，余弦与 sinc 核之差始终不超过 1，因此得到如下统一上界

$$\begin{aligned}\|g_{\mathrm{sp}}(\partial_j h_{\mathrm{sp},\lambda})\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\le \int_{\mathbb{R}^d} |g_{\mathrm{sp}}(\omega)| \left| -\frac{\omega_j}{|\omega|}\frac{1}{|\omega|}\left(\cos(a|\omega|) - \mathrm{sinc}(a|\omega|)\right)\right| \mathrm{d}\omega \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} |g_{\mathrm{sp}}(\omega)||\omega|^{-1}\frac{|\omega_j|}{|\omega|}\mathrm{d}\omega \le \int_{\mathbb{R}^d} |g_{\mathrm{sp}}(\omega)||\omega|^{-1}\mathrm{d}\omega < \infty.\end{aligned}$$

请注意，额外的奇异性 $|\omega|^{-1}$ 仍受到 $\sin^4$ 在零点附近正则性的制约 o. □

致谢 EZ 的研究部分由德国研究联合会（DFG）通过 SFB1294/1-318763901 资助。

参考文献

[1] Altmeyer, R. 和 Reiß, M. “基于局部测量对线性随机偏微分方程进行非参数估计”。载于：《应用概率年刊》31.1（2021年），第1–38页。 DOI: 10.1214/20-AAP1581。[2] Assaad, O.、Gamain, J. 和 Tudor, C. A. “时空白噪声驱动的随机波动方程的二次变差与漂移参数估计”。载于：《随机性与动力学》22.07（2022年），第2240014页。 DOI: 10.1142/S0219493722400147。[3] Balan, R. M. 和 Tudor, C. A. “分数噪声驱动的随机波动方程：一种随机场方法”。载于：《随机过程及其应用》120.12（2010年），第2468–2494页。 DOI: 10.1016/j.spa.2010.08.006。[4] Bibinger, M. 和 Trabs, M. “关于随机热方程解的幂变差中心极限定理”。载于：施普林格数学与统计学会议录294（2019年），第69–84页。 DOI: 10.1007/978-3-030-28665-1_5。[5] Bibinger, M. 和 Trabs, M. “利用高频观测估计随机偏微分方程的波动率”。载于：《随机过程及其应用》130.5（2020年），第3005–3052页。 DOI: 10.1016/j.spa.2019.09.002。[6] Bossert, P. “多重空间维度下二阶随机偏微分方程的参数估计”。载于：《随机过程统计推断》27（2023年），第485–583页。 DOI: 10.1007/s11203-024-09318-1。[7] Chong, C. “抛物型随机偏微分方程的高频分析”。载于：《统计年刊》48.2（2020年），第1143–1167页。 DOI: 10.1214/19-AOS1841。[8] Cialenco, I. 和 Huang, Y. “关于离散采样随机偏微分方程参数估计的一则注记”。载于：《随机性与动力学》20.03（2020年），第2050016页。 DOI: 10.1142/S0219493720500161。[9] Cialenco, I.、Kim, H.-J. 和 Pasemann, G. “离散采样半线性随机偏微分方程的统计分析：幂变差方法”。载于：《随机性与偏微分方程：分析与计算》12.1（2024年），第326–351页。 DOI: 10.1007/s40072-022-00285-3。[10] Clarke, J. 和 Tudor, C. “分数彩色噪声驱动的随机波动方程的击中时刻”。载于：《伊比利亚美洲数学杂志》30（2014年），第685–709页。 DOI: 10.4171/RMI/796。[11] Cohen, S. 等。“分数过程的奇异函数：在分数布朗曲面中的应用”。载于：亨利·庞加莱研究所年刊（B辑）《概率与统计》42.2（2006年），第187–205页。 DOI: 10. 1016/j.anihpb.2005.03.002。[12] Conus, D. 和 Dalang, R. “高维非线性随机波动方程”。载于：电子概率杂志13（2008年），第629–670页。 DOI: 10.1214/EJP.v13-500。[13] Dalang, R. “扩展鞅测度随机积分及其在空间齐次随机偏微分方程中的应用”。载于：电子概率杂志4（1999年），第1–29页。 DOI: 10.1214/EJP.v4-43。[14] Dalang, R. 和 Sanz-Sol´e, M. “三维随机波动方程解的H¨lder–Sobolev正则性”。载于：美国数学学会回忆录199.931（2006年）。 DOI: 10.1090/memo/ 0931。[15] Dalang, R. 等。《随机偏微分方程小型课程》。第1962卷。数学讲义。柏林、海德堡：Springer，2009年。 DOI: 10.1007/978-3-540-85994-9。[16] Dalang, R. C.、Khoshnevisan, D. 和 Nualart, E. “空间维度为 $k \ge 1$时非线性随机热方程组的击中概率”。载于：《随机偏微分方程：分析与计算》1.1（2013年），第94–151页。 DOI: 10.1007/s40072-013-0005-3。

[17] Dalang, R. C. 和 Sanz-Sol´e, M. “击中概率判据及其在随机波动方程组中的应用”。载于：Bernoulli 16.4（2010年），第1343–1368页。 DOI: 10.3150/09-BEJ247。[18] Delgado-Vences, F. 和 Pavon-Espa˜nol, J. J. “利用Malliavin–Stein方法对随机波动方程进行统计推断”。载于：《随机分析与应用》41.3（2023年），第447–473页。 DOI: 10 . 1080 / 07362994.2022.2029712。[19] Evans, L. C.《偏微分方程》。第19卷。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，2022年。DOI: 10.1090/gsm/019。[20] Faugeras, O. 和 Inglis, J. “随机神经场方程：严谨的理论基础”。载于：《数学生物学杂志》71.2（2015年），第259–300页。 DOI: 10.1007/s00285-014-0807-6。[21] Grafakos, L.《经典傅里叶分析》。第2卷。纽约：Springer，2008年。 DOI: 10.1007/978-0-387-09432-8。[22] Hildebrandt, F. 和 Trabs, M. “基于离散观测对随机反应扩散方程进行非参数校准”。载于：《随机过程及其应用》162（2023年），第171–217页。 DOI: 10.1016/j.spa.2023. 04.019。[23] Hildebrandt, F. 和 Trabs, M. “基于时空离散观测的随机偏微分方程参数估计”。载于：《电子统计学杂志》15.1（2021年），第2716–2776页。 DOI: 10.1214/21-EJS1848。[24] Janson, S.《高斯希尔伯特空间》。剑桥数学丛书。剑桥：剑桥大学出版社，1997年。 DOI: 10.1017/CBO9780511526169。[25] Kahane, C. S. “黎曼–勒贝格引理和康托尔–勒贝格引理的推广”。载于：《捷克斯洛伐克数学杂志》30.1（1980年），第108–117页。 DOI: 10.21136/CMJ.1980.101660。[26] Khalil, M.、Tudor, C. A. 和 Zili, M. “加性时空白噪声驱动的随机线性波动方程解的空间变差”。载于：《随机性与动力学》18.05（2018年），第1850036页。 DOI: 10.1142/S0219493718500363。[27] Khalil, M. 和 Tudor, C. A. “分数噪声驱动的波动方程解的相关结构、二次变差与参数估计”。载于：《电子统计学杂志》12.2（2018年），第3639–3672页。 DOI: 10.1214/18-EJS1488。[28] Lee, C. Y. 和 Xiao, Y. “随机波动方程的局部非确定性与精确连续模”。载于：《概率电子通信》24（2019年），第1–8页。 DOI: 10.1214/19-ECP264。[29] Lee, C. Y. 和 Xiao, Y. “随机波动方程的奇异性传播”。载于：《随机过程及其应用》143（2022年），第31–54页。 DOI: 10.1016/j.spa.2021.09.013。[30] Liu, W. 和 Lototsky, S. V.《随机波动方程中速度与阻尼的估计》。预印本，arXiv: 0810.0046。2008年。[31] Liu, W. 和 Lototsky, S. “双曲多通道模型中的参数估计”。载于：《渐近分析》68.4（2010年），第223–248页。 DOI: 10.3233/ASY-2010-0992。[32] Markussen, B. “离散观测随机偏微分方程的似然推断”。载于：Bernoulli 9.5（2003年），第745–762页。 DOI: 10.3150/bj/1066418876。[33] M´endez, V. 等。“受环境随机性影响的孤立种群的灭绝条件”。载于：《理论种群生物学》77.4（2010年），第250–256页。 DOI: 10.1016/j.tpb.2010.02.006。[34] Newhall, K. A. “空间相关噪声驱动的随机偏微分方程入门”。载于：《凝聚态物理年度评论》16.1（2025年），第195–208页。 DOI: 10.1146/annurev-conmatphys- 042624-033003。[35] Rega, G. “悬索的非线性振动——第一部分：建模与分析”。载于：《应用力学评论》57.6（2004年），第443–478页。 DOI: 10.1115/1.1777224。[36] Seber, G. A. F.《统计学家矩阵手册》。第1版。新泽西州霍博肯：Wiley，2007年。 DOI: 10 . 1002 / 9780470226797。[37] Shevchenko, R. “关于分数白噪声波动方程的二次变差”。载于：《概率论与数理统计》108（2023年），第185–207页。 DOI: 10.1090/tpms/1192。[38] Tiepner, A. 和 Ziebell, E. “基于多次测量的双曲线性随机偏微分方程参数估计”。载于：《随机过程及其应用》190（2025年），第104768页。 DOI: 10.1016/j.spa.2025.104768。

[39] Tonaki, Y.、Kaino, Y.与Uchida, M. “基于高频数据的二维空间线性抛物型随机偏微分方程的参数估计”. 载于：斯堪的纳维亚统计学杂志 50.4（2023年），第1568–1589页。DOI: 10.1111/sjos.12663.[40] Tonaki, Y.、Kaino, Y.与Uchida, M. “基于时间和空间增量的二维空间线性抛物型随机偏微分方程的参数估计”. 载于：Metrika：国际理论与应用统计学杂志 88.5（2025年），第601–656页。 DOI: 10.1007/s00184-024-00969-x.[41] Tudor, C. A.与Yoshida, N. “维纳泛函的高阶渐近展开”. 载于：随机过程及其应用 164（2023年），第443–492页。 DOI: 10.1016/j.spa.2023.07.001.[42] Walsh, J. B. “随机偏微分方程导论”. 载于： ´Ecole d’ ´Et ´e de Probabilit ´es de Saint Flour XIV - 1984. Hennequin, P. L.编. 柏林，海德堡：Springer Berlin Heidelberg，1986年，第265–439页。 DOI: 10.1007/BFb0074920.[43] Wenzel, H.等. “半导体激光器线宽理论再探”. 载于：应用科学 11.13（2021年），第6004页。 DOI: 10.3390/app11136004.[44] Ziebell, E. “随机波动方程的非参数估计”. 载于：《电子统计学杂志》20（2026年）。 DOI: 10.1214/26-EJS2491.