arXiv:2602.04727v1 [math.AP] 4 Feb 2026

具有时变系数的半线性波动方程

Nenad Antonić[a], Matko Grbac[a]

[a]萨格勒布大学理学院数学系，*Bijenička cesta 30*，萨格勒布，*10 000*，克罗地亚

摘要

我们证明了系数同时依赖于时间和空间变量、且连续非线性项满足符号条件的半线性波动方程的强解和弱解的存在性。在稍严格一些的假设下，我们证明了解的唯一性。此外，我们通过实际例子展示了抽象框架下所得的结果。

关键词： 半线性波动方程，变系数，初边值问题*2000*年数学主题分类： 35L05, 35L20, 35L71

1. 引言

20世纪50年代，带三次非线性项的半线性波动方程被视为量子场论中洛伦兹不变非线性交互作用的最简单模型 [21]。三维空间中整体光滑解的存在性这一数学问题，早在1961年便由 K. Jörgens 解决[14]。同一篇论文还提到 J.-L. Lions 一项未发表的结果：在较弱的假设下弱解的存在性；该结果依据 [17](另见 [20])，而强（严格）解的存在性与唯一性则在 [6]中得到确立。关于以达朗贝尔算子 $\Box = \partial_{tt} - \triangle$ 作为二阶算子的半线性方程研究成果综述，可参见 [23] (另见 [24])。这些成果促使人们自然地提出一个问题：建立一种更具一般性的算子理论框架；这一思路早已见于 J.-L. Lions 及其合作者的著作中。

在线性波动方程理论中，C. Baiocchi 遵循 Lions 的思路，已经研究了空间和时间上系数不连续的变系数 [3]，（另见 [13] 和 [9]）。研究表明，这些系数可以取为 t 中的有界变差函数。本文仅关注绝对连续依赖，更一般的情形留待未来的论文研究（参见 [12]）。

半线性波动方程是数理物理与工程学中的基本模型，所刻画的现象涵盖材料中的波传播以及时空中场的动力学。理解此类方程解的行为，对于各种应用与理论研究至关重要。我们的目标是给出具有低正则性变系数的半线性波动方程的存在性与唯一性理论。

对于与时间无关且乘以空间导数的变系数 t（即形如 $\partial_t^2 - \mathrm{div}(\mathbf{A}\nabla\cdot)$的二阶算子），已有大量结果。特别地，若再假设矩阵$\mathbf{A}$ 对称且严格正定，则该问题可重新表述为黎曼流形上带达朗贝尔算子的方程问题，其度量 g 以$\mathbf{A}$的分量为$^{-1}$ [25]，这在各种控制问题中是一种强有力的技术（关于带达朗贝尔算子的半线性波动方程之控制的经典结果，参见 [26]）。

然而，本研究的主要动机是为将均匀化的结果（参见 [4, 7]）以及微局部能量密度的传播（[2, 10, 11]）推广到具有变系数的半线性框架做好准备。

电子邮件地址：nenad@math.hr (Nenad Antonić), matko.grbac@math.hr (Matko Grbac)

在第二节中，我们首先通过假设 t 具有更高正则性，利用 Galerkin 逼近，并特别关注时变系数，从而证明强解的存在性。主要结果将在下一节中陈述并通过逼近加以证明。最后，在最后一节中，我们将说明如何将这些结果应用于波动方程，即使其具有非对称系数亦然（关于此类材料的重要性，参见 [5]）。

1.1. 记号

对于具有利普希茨边界 Γ 和 $T>0$ 的有界开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$，按照 J.-L. Lions 倡导的一般方法（参见 [19, 8]），我们考虑区域 $(0,T)\times\Omega$ 上抽象二阶半线性波动方程的初边值问题（请注意，$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{A}$ 依赖于时间变量 t）

$$
\begin{cases}
(\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) = f + g \\
u|_{[0,T]\times\Gamma} = 0 \\
u(0) = u_0 \\
u'(0) = u_1.
\end{cases} \tag{1}
$$

为简便起见，我们将 $H=\mathrm{L}^2(\Omega)$ 和 $V=\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 记作，其中 $V'=\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ 是 V 的对偶，从而 $(V,\ H,\ V')$ 构成满足以下条件的盖尔范德三元组

$$V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V',$$

同时包含两者 。H 中的内积记为 $(\cdot,\ \cdot)$，而
对偶配对 介于 V' 与 V之间，由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。

我们保留Lebesgue/Sobole夫空间/博赫纳-索伯列夫空间的标准记号（参见 [1, 16]），但对相应范数将采用更简短的记号。例如，用$\|\cdot\|_{\mathrm{W}^{k,p}(X)}$ 代替$\|\cdot\|_{\mathrm{W}^{k,p}(0,T;X)}$；当定义域中的时间区间不致引起混淆时，即采用这种写法。

我们有时也会对两个函数 f,g之间的不等式使用标准记号

$$f \lesssim g\ ,$$

意指存在常数 $C>0$ 使得 $f\le Cg$，同样地

$$f \lesssim_p g\ ,$$

如果常数 C 依赖于某个参数（或一组参数） p。

方程的非线性部分来源于函数 $F:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，并由 $\mathcal{F}(u)(t,x)\ =F(u(t,x))$给出。我们有时也用 $\mathcal{F}(u(t))$ 或 $\mathcal{F}(u)(t)$来表示固定t时的函数 $x\mapsto F(u(t,x))$。

2. 强解

我们首先明确问题（1）的假设。第一步，我们将通过假设（抽象）系数具有更高正则性，来证明解具有更高正则性。

设 $T>0$ 固定。对于算子族 $\mathcal{R}$，我们假设存在某个 $\alpha>0$

$$
\begin{cases}
\mathcal{R}\in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;\mathcal{L}(H)) \\
(\mathcal{R}(t)u,v) = (\mathcal{R}(t)v,u), \quad u,v\in H, t\in[0,T] \\
(\mathcal{R}(t)u,u) \ge \alpha\|u\|_H^2, \qquad u\in H, t\in[0,T] \quad ,
\end{cases} \tag{2}
$$

而对于 $\mathcal{A}$，我们假设其形式为 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1$，其中

$$\begin{cases}\mathcal{A}_0 \in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;\mathcal{L}(V;V')) \\ \langle \mathcal{A}_0(t)u,v\rangle = \langle \mathcal{A}_0(t)v,u\rangle, & u,v\in V, t\in[0,T] \\ \langle \mathcal{A}_0(t)u,u\rangle \geq \alpha\|u\|_V^2, & u\in V, t\in[0,T]\end{cases} \tag{3}$$

and

$$\mathcal{A}_1 \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V;H)). \tag{4}$$

此外，对于方程（1）的右端，我们假设 $f\in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;H)$ 以及 $g\in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;V')$。最后，对于非线性部分，我们先对 F 作出一个限制更强的假设，即它是
利普希茨连续，其常数记为 $\mathrm{Lip}(F)$，即

$$|F(z)-F(w)| \leq \mathrm{Lip}(F)|z-w|, \quad z,w\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

我们进一步假设 F 满足符号条件

$$zF(z)\geq 0, \qquad z\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

将其原函数记为

$$G(z)=\int_0^z F(w)dw,$$

使得 $G'=F$ 且 $G(0)=0$。

注 2.1。*(a)* 鉴于对每个巴拿赫空间 X，都有连续嵌入 $W^{1,1}(0,T;X)\hookrightarrow C([0,T];X)$，结合 (2_1) 和 (3_1)，可推出 $\mathcal{R}\in C^1([0,T];\mathcal{L}(H))$、$\mathcal{A}_0\in C^1([0,T];\mathcal{L}(V;V'))$ 以及 $\mathcal{A}_1\in C([0,T];\mathcal{L}(V;H))$。同理可得 $f\in C([0,T];H)$ 和 $g\in C^1([0,T];V')$。

(b) 对称算子 $\mathcal{R}(t)$ 对于 $t\in[0,T]$ 有上界和下界，因此其逆算子也同样如此。根据以下算子恒等式（它在 $\mathcal{L}(H)$ 中成立）

$$\mathcal{R}(t+h)^{-1}-\mathcal{R}(t)^{-1}=\mathcal{R}(t+h)^{-1}\left[\mathcal{R}(t)-\mathcal{R}(t+h)\right]\mathcal{R}(t)^{-1},$$

（将映射 $t\mapsto\mathcal{R}(t)^{-1}$ 记为 $\mathcal{R}^{-1}$ 后），我们看到 $\mathcal{R}^{-1}$ 是连续的。此外，从同一个算子恒等式也很容易推出

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{R}(t)^{-1}\right)=-\mathcal{R}^{-1}(t)\mathcal{R}'(t)\mathcal{R}^{-1}(t),$$

因此 $\mathcal{R}^{-1}\in \mathrm{C}^1([0,T];\mathcal{L}(H))$。

(c) 注意，符号条件 (6)还意味着

$$G(z)\geq 0, \qquad z\in\mathbb{R}\,, \tag{7}$$

同时，考虑到 F 的连续性，我们有 $F(0)=0$。因此，利用 (5) 我们可以得到如下界

$$|F(z)|\leq \mathrm{Lip}(F)|z|, \qquad z\in\mathbb{R},$$

以及

$$G(z)\leq \int_0^{|z|}|F(w)|dw \quad \lesssim_F |z|^2, \qquad z\in\mathbb{R}.$$

这进而意味着

$$\|\mathcal{F}(u)\|_H \lesssim_F \|u\|_H, \qquad u\in H, \tag{8}$$

and

$$\|\mathcal{G}(u)\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \lesssim_F \|u\|_H, \qquad u\in H. \tag{9}$$

当然，$\mathcal{G}$ 的定义方式与 G 中的 $\mathcal{F}$ 由 F定义的方式相同。

现在我们可以证明下一个定理给出的存在性结果。

定理 2.2. 设 $\mathcal{R}$、$\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{A}_1$ 分别满足 *(2)*、*(3)* 和 *(4)*，并设 $\mathcal{F}$ 同时满足 *(5)* 和 *(6)*。此外，取 u^0、$u^1 \in V$、$f \in W^{1,1}(0,T;\, H)$ 和 $g \in W^{2,1}(0,T;\, V')$，使得 $\mathcal{A}_0(0)u^0 - g(0) \in H$。那么方程存在唯一解

$$u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;V) \cap \mathrm{W}^{2,\infty}(0,T;H)$$

with

$$\mathcal{G}(u) \in \mathrm{L}^{\infty}(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega)) \quad \textit{and} \quad \mathcal{A}_0 u - g \in \mathrm{L}^{\infty}(0,T;H)$$

的

$$(\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) = f + g \qquad \textit{in } \mathrm{L}^2(0,T;V') \tag{10}$$

其初始条件为

$$u(0) = u^0, \qquad u'(0) = u^1.$$

R注记 2.3. *(a)* 注意，对于这样的解 u，初始条件 $u(0) = u^0$ 是有意义的；由于$u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\, V)$，它也是连续的，即 $u \in \mathrm{C}([0,T];\, V)$。

(b) 由于 $u' \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\, H)$，由同样的论证可得 $u' \in \mathrm{C}([0,T];\, H)$。因此，初始条件 $u'(0) = u^1$ 至少在空间 H中是有意义的。

2.1. Galerkin 逼近

为了证明此类解的存在性，我们采用 Galerkin 方法，并精心选取一个基。我们按如下方式构造 H 的标准正交基 (w_k)：首先选取 $w_1, w_2 \in V$，使其正交归一且满足 $\mathrm{span}\{u^0, u^1\} \le \mathrm{span}\{w_1, w_2\}$，然后在 H 上加入 $-\Delta$ 的特征向量，并应用 Gram–Schmidt 正交化过程，以获得所需的标准正交基。

对于任意 $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$，记 $V_m = \mathrm{span}\ \{w_1, \ldots, w_m\}$。注意 $u^0, u^1 \in V_m$, $m \ge 2$。我们首先证明存在 $u_m \in \mathrm{W}^{3,1}(0,T;\, V_m)$，它是投影到 V_m 后所得问题的解。

$$\begin{cases} (\mathcal{R}(t)u_m'(t), w_j) + \langle \mathcal{A}_0(t)u_m(t), w_j\rangle \\ \qquad +(\mathcal{A}_1(t)u_m(t), w_j) + (\mathcal{F}(u_m(t)), w_j) = (f(t), w_j) + \langle g(t), w_j\rangle, \qquad 1 \le j \le m \\ \qquad\qquad u_m(0) = u^0 \\ \qquad\qquad u_m'(0) = u^1. \end{cases} \tag{11}$$

我们将此投影问题的解设为如下形式

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) w_j. \tag{12}$$

这导出 如下常微分方程组（为简化记号，在
以下计算 （固定为 $m \in \mathbb{N}$，后续不再将其明确写作下标）

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{C}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{d}(t)\right] + \mathbf{M}(t)\mathbf{d}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{v}(t), \tag{13}$$

其中，上述 $m \times 1$ 和 $m \times m$ 矩阵由其分量给出

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= [d_j](t) \\ C_{ij}(t) &= (\mathcal{R}(t)w_j, w_i) \\ M_{ij}(t) &= \langle \mathcal{A}_0(t)w_j, w_i\rangle + (\mathcal{A}_1(t)w_j, w_i) \\ F_j(a_1, \ldots, a_m) &= \left(\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i w_i\right), w_j\right) \\ v_j(t) &= (f(t), w_j) + \langle g(t), w_j\rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $\mathsf{C}(t)$ 是由正交向量 $\sqrt{\mathcal{R}(t)}w_j$, $j \in 1..m$ 构成的格拉姆矩阵，因此对每个 $t \in [0,T]$，它都是可逆的。此外，根据关于 $\mathcal{R}$ 的假设（2_1），我们有 $t \mapsto \mathsf{C}(t)$ 属于 $\mathsf{W}^{2,1}(0,T;\,\mathbb{R}^{m\times m})$，同理可得其逆矩阵 $\mathsf{C}(t)^{-1}$ 也属于该空间。接下来，利用关于 $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ 的假设（3_1）和（4），容易看出 $\mathsf{M} \in \mathsf{W}^{1,1}(0,T;\,\mathbb{R}^{m\times m})$，同样也有 $\mathsf{v} \in \mathsf{W}^{1,1}(0,T;\,\mathbb{R}^{m})$。最后，由于 F 是利普希茨函数，而 w_j 是 H 中的单位向量，因此 F_j 也是利普希茨函数。

在引言之后 引入一个新变量 $\mathbf{e} = \mathbf{d}'$，（13）可以改写为等价的一阶系统的常微分方程

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\\ 0 & \mathbf{C}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M} & -\mathbf{C}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{F}(\mathbf{d})\end{bmatrix},$$

根据前述关于$\mathbf{C}$可逆性的说明，可以进一步写为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\\ 0 & \mathbf{C}^{-1}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M} & -\mathbf{C}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{F}(\mathbf{d})\end{bmatrix}\right), \tag{15}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} d_j(0) = (u^0, w_j)\\ e_j(0) = (u^1, w_j)\,. \end{cases} \tag{16}$$

由于系统方程（15）的右端属于 $\mathbf{L}^2(0,T;\,\mathbb{R}^m)$，且关于 $(\mathbf{d},\mathbf{e})$是利普希茨连续的，因此卡拉西奥多里存在定理保证存在唯一的全局绝对连续解

$$(\mathbf{d},\mathbf{e}) \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)\,.$$

由（15）中的第二个方程

$$\mathbf{e}' = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{d} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{e} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{d})$$

我们还可推得 $\mathsf{e}' \in \mathsf{W}^{1,1}(0,T;\,\mathbb{R}^m)$。因此，$\mathsf{e} \in \mathsf{W}^{2,1}(0,T;\,\mathbb{R}^m)$，进而 $\mathsf{d} \in \mathsf{W}^{3,1}(0,T;\,\mathbb{R}^m)$。最后（现在我们在记号中重新引入 m），这意味着按（12）定义的 u_m属于 $\mathsf{W}^{3,1}(0,T;\,V_m)$，并且确实是（11）的一个解。

因此，我们还得到

$$\mathcal{R}u_m' \in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;H), \quad \mathcal{A}_0 u_m \in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;V') \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_1 u_m \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;H)\,. \tag{17}$$

2.2. 先验估计

接下来，我们将对解序列（u_m）推导一些先验估计。将（11_1）乘以 $d_{mj}'(t)$，并对 j 求和，可得

$$((\mathcal{R}u_m')', u_m') + \langle \mathcal{A}_0 u_m, u_m'\rangle + (\mathcal{A}_1 u_m, u_m') + (\mathcal{F}(u_m), u_m') = (f, u_m') + \langle g, u_m'\rangle\,. \tag{18}$$

我们将使用以下恒等式，这些恒等式之所以成立，是因为 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{A}_0$ 满足光滑性假设，且具有对称性 (2_2) 以及 (3_2)，此外还因为(17):

$$\begin{aligned}((\mathcal{R}u_m')', u_m') &= \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dt}(\mathcal{R}u_m', u_m') + (\mathcal{R}'u_m', u_m')\Big)\\ \langle \mathcal{A}_0 u_m, u_m'\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dt}\langle \mathcal{A}_0 u_m, u_m\rangle - \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m\rangle\Big)\,.\end{aligned}$$

将时间 t的能量 记为

$$E_m(t) := \frac{1}{2}(\mathcal{R}(t)u_m'(t), u_m'(t)) + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0(t)u_m(t), u_m(t)\rangle, \tag{19}$$

方程（18）可改写为以下形式

$$E_m'(t) = -\frac{1}{2}(\mathcal{R}'u_m', u_m') + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0'u_m, u_m\rangle - (\mathcal{A}_1u_m, u_m') - (\mathcal{F}(u_m), u_m') + (f, u_m') + \langle g, u_m'\rangle\ .$$

现在我们可以继续估计上述等式右端的各项:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}'(t)u_m'(t), u_m'(t)) \le \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\|u_m'(t)\|_H^2 \quad &\le \quad \frac{\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}}{\alpha/2}E_m(t)\\
\langle \mathcal{A}_0'u_m(t), u_m(t)\rangle \le \|\mathcal{A}_0'(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}\|u_m(t)\|_V^2 \quad &\le \quad \frac{\|\mathcal{A}_0'(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}}{\alpha/2}E_m(t)\\
(\mathcal{A}_1(t)u_m, u_m'(t)) \le \|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}(\|u_m'(t)\|_H^2 + \|u_m(t)\|_V^2) \quad &\le \quad \frac{\|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}}{\alpha/2}E_m(t)\\
(\mathcal{F}(u_m(t)), u_m'(t)) \le \|\mathcal{F}(u_m(t))\|_H\|u_m'(t)\|_H \quad &\le \quad \frac{\mathrm{Lip}(F)}{\alpha/2}E_m(t)\\
(f(t), u_m'(t)) \le \|f(t)\|_H(1 + \|u_m'(t)\|_H^2) \quad &\le \quad \|f(t)\|_H + \frac{\|f(t)\|_H}{\alpha/2}E_m(t)\ ,
\end{aligned}$$

这表明，对于每个 $0 \le t \le T$

$$E_m'(t) \le \phi(t)E_m(t) + \|f(t)\|_H + \langle g(t), u_m'(t)\rangle,$$

其中我们引入了一个辅助函数 $\phi \in \mathrm{L}^1(0,\ T)$（请注意，它不依赖于解$u_m$）

$$\phi(t) = \frac{2}{\alpha}\Big(\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|\mathcal{A}_0'(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')} + \|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)} + \|f(t)\|_H + \mathrm{Lip}(F)\Big)\ .$$

在 $E_m'(t)$ 上对前面的估计从 0 积分到 t ，我们得到

$$E_m(t) \le E_m(0) + \int_0^t \phi(s)E_m(s)ds + \int_0^t \|f(s)\|_H ds + \int_0^t \langle g(s), u_m'(s)\rangle ds\ .$$

为了估计最后一项 $\int_0^t\langle g,\ u_m'\rangle$，我们应用分部积分公式，并使用带有任意（暂时取定的）常数$\kappa > 0$的初等杨氏不等式来估计所得的表达式

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle g(s), u_m'(s)\rangle ds &= \langle g(t), u_m(t)\rangle - \langle g(0), u_m(0)\rangle - \int_0^t \langle g'(s), u_m(s)\rangle ds\\
&\le 2\kappa\|g\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(V')} + \frac{1}{4\kappa}\left(\|u_m(t)\|_V^2 + \|u_m(0)\|_V^2\right) + \int_0^t \|g'(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V ds\\
&\le 2\kappa\|g\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(V')} + \frac{1}{2\kappa\alpha}E_m(t) + \frac{1}{2\kappa\alpha}E_m(0) + \int_0^t \|g'(s)\|_{V'}(1 + \|u_m(s)\|_V^2)ds\\
&\le 2\kappa\|g\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(V')} + \|g'\|_{\mathrm{L}^1(V')} + \frac{1}{2\kappa\alpha}E_m(t) + \frac{1}{2\kappa\alpha}E_m(0) + \int_0^t \frac{\|g'(s)\|_{V'}}{\alpha/2}E_m(s)ds\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

这样我们就得到了不等式

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{2\kappa\alpha}\right)E_m(t) \le \left(1 + \frac{1}{2\kappa\alpha}\right)&E_m(0)\\
&+ 2\kappa\|g\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(V')} + \|g'\|_{\mathrm{L}^1(V')} + \|f\|_{\mathrm{L}^1(H)} + \int_0^t \tilde{\phi}(s)E_m(s)ds,
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\phi}(s) := \phi(s) + \frac{2}{\alpha}\|g'(s)\|_{V'} \in \mathrm{L}^1(0,T)$同样与解 u_m无关。此时我们可以选取κ，使得 $1 \geq \frac{1}{2\kappa\alpha} \geq \frac{1}{2}$。

最后，初始项

$$E_m(0) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}u_m'(0), u_m'(0)) + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0 u_m(0), u_m(0)\rangle$$

可以利用初始条件轻松估计

$$E_m(0) \leq \frac{2}{\alpha}\left(\|\mathcal{R}\|_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(H))}\|u^1\|_H^2 + \|\mathcal{A}_0\|_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(V;V'))}\|u^0\|_V^2\right).$$

综合以上各项，我们得到不等式

$$E_m(t) \lesssim_{\alpha,\mathcal{R},\mathcal{A},F,f,g} 1 + \int_0^t \tilde{\phi}(s)E_m(s)ds.$$

为了得到所需的先验估计，我们再次应用 Gronwall 不等式，从而得到不等式

$$E_m(t) \lesssim_{\alpha,\mathcal{R},\mathcal{A},F,f,g} \exp\left(\int_0^t \tilde{\phi}(s)ds\right) \lesssim_{\alpha,\mathcal{R},\mathcal{A},F,f,g} \exp\|\tilde{\phi}\|_{\mathrm{L}^1(0,T)},$$

这给出了 $E_m(t)$ 的所需一致界。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&(u_m) \text{ is a bounded sequence in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V),\\ &(u_m') \text{ is a bounded sequence in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H).\end{aligned}$$

接下来，我们的目标是对序列 (u_m) 的二阶时间导数得到先验估计。为此，我们回到近似方程

$$((\mathcal{R}u_m')', v) + \langle \mathcal{A}_0 u_m, v\rangle + (\mathcal{A}_1 u_m, v) + (\mathcal{F}(u_m), v) = (f, v) + \langle g, v\rangle, \tag{21}$$

对每个 $v \in V_m$均成立。我们将其对 t 求导（由于（17）以及我们的初始假设，已有足够的光滑性使此操作有效），并代入 $v = u_m''(t)$。因此，对每个 $0 \leq t \leq T$，我们得到了等式

$$((\mathcal{R}u_m')'', u_m'') + \langle(\mathcal{A}_0 u_m)', u_m''\rangle + ((\mathcal{A}_1 u_m)', u_m'') + ((\mathcal{F}(u_m))', u_m'') = (f', u_m'') + \langle g', u_m''\rangle. \tag{22}$$

左端的各项可以按如下方式进行变换

$$\begin{aligned}((\mathcal{R}u_m')'', u_m'') &= (\mathcal{R}''u_m', u_m'') + 2(\mathcal{R}'u_m'', u_m'') + (\mathcal{R}u_m''', u_m'')\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathcal{R}u_m'', u_m'') + \frac{3}{2}(\mathcal{R}'u_m'', u_m'') + (\mathcal{R}''u_m', u_m'')\\ \langle(\mathcal{A}_0 u_m)', u_m''\rangle &= \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m''\rangle + \langle \mathcal{A}_0 u_m', u_m''\rangle\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \mathcal{A}_0 u_m', u_m'\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0' u_m', u_m'\rangle + \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m''\rangle\\ ((\mathcal{A}_1 u_m)', u_m'') &= (\mathcal{A}_1 u_m', u_m'') + (\mathcal{A}_1' u_m, u_m'')\\ ((\mathcal{F}(u_m))', u_m'') &= (\mathcal{F}'(u_m)u_m', u_m'').\end{aligned} \tag{23}$$

记下（此表达式与能量 E_m 在（19）中的形式相同，其中将 u_m 替换为 u_m'）

$$\tilde{E}_m(t) := \frac{1}{2}(\mathcal{R}(t)u_m''(t), u_m''(t)) + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0(t)u_m'(t), u_m'(t)\rangle,$$

我们可以将（22）改写为以下展开形式

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_m'(t) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\mathcal{R}u_m'', u_m'') + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0 u_m', u_m'\rangle \\
&= ((\mathcal{R}u_m')'', u_m'') - \frac{3}{2}(\mathcal{R}'u_m'', u_m'') - (\mathcal{R}''u_m', u_m'') \\
&\quad + \langle (\mathcal{A}_0 u_m)', u_m''\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0' u_m', u_m'\rangle - \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m''\rangle \\
&= (f', u_m'') + \langle g', u_m''\rangle - ((\mathcal{A}_1 u_m)', u_m'') - ((\mathcal{F}(u_m))', u_m'') \\
&\quad - \frac{3}{2}(\mathcal{R}'u_m'', u_m'') - (\mathcal{R}''u_m', u_m'') + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0' u_m', u_m'\rangle - \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m''\rangle \\
&= (f', u_m'') + \langle g', u_m''\rangle \\
&\quad - \frac{3}{2}(\mathcal{R}'u_m'', u_m'') - (\mathcal{R}''u_m', u_m'') + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0' u_m', u_m'\rangle - \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m''\rangle \\
&\quad - (\mathcal{A}_1 u_m', u_m'') - (\mathcal{A}_1' u_m, u_m'') - (\mathcal{F}'(u_m)u_m', u_m'').
\end{aligned}$$

接下来需要估计这个等式右端出现的各项。为此，我们逐项估计，得到

$$\begin{aligned}
(f'(t), u_m''(t)) &\le \|f'(t)\|_H \left(1 + \frac{1}{\alpha/2}\tilde{E}_m(t)\right) \\
(\mathcal{R}'(t)u_m''(t), u_m''(t)) &\le \frac{\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}}{\alpha/2}\tilde{E}_m(t) \\
(\mathcal{R}''(t)u_m'(t), u_m''(t)) &\le \|\mathcal{R}''(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\left(\|u_m'(t)\|_H^2 + \|u_m''(t)\|_H^2\right) \\
&\le \frac{\|\mathcal{R}''(t)\|_{\mathcal{L}(H)}}{\alpha/2}\tilde{E}_m(t) \\
\langle \mathcal{A}_0(t)u_m'(t), u_m'(t)\rangle &\le \frac{\|\mathcal{A}_0(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}}{\alpha/2}\tilde{E}_m(t) \\
(\mathcal{A}_1(t)u_m'(t), u_m''(t)) &\le \frac{\|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}}{\alpha/2}\tilde{E}_m(t) \\
(\mathcal{A}_1'(t)u_m(t), u_m''(t)) &\le \|\mathcal{A}_1'(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}(\|u_m(t)\|_V^2 + \|u_m''(t)\|_H^2) \\
&\le \frac{\|\mathcal{A}_1'(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}}{\alpha/2}\left(E_m(t) + \tilde{E}_m(t)\right) \\
(\mathcal{F}'(u_m(t))u_m'(t), u_m''(t)) &\le \frac{\mathrm{Lip}(F)}{\alpha/2}\tilde{E}_m(t)\ .
\end{aligned}$$

将这些估计与该等式结合，并回忆上一步得到的关于 $E_m(t)$的一致界，我们可将其化简为不等式

$$\tilde{E}_m'(t) \le \frac{1}{\alpha/2}\tilde{\tilde{\phi}}(t)\tilde{E}_m(t) + \frac{\|E_m\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T)}}{\alpha/2}\|\mathcal{A}_1'(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)} + \|f'(t)\|_H + \langle g', u_m''\rangle - \langle \mathcal{A}_0' u_m, u_m''\rangle,$$

其中函数 $\tilde{\tilde{\phi}} \in \mathrm{L}^1(0,T)$ 定义为

$$\tilde{\tilde{\phi}}(t) := \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|\mathcal{R}''(t)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|\mathcal{A}_0(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')} + \|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)} + \|\mathcal{A}_1'(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)} + \mathrm{Lip}(F)\ .$$

从 0 到 $t \le T$ 对该不等式积分，得到

$$\begin{aligned}\tilde{E}_m(t) \le \tilde{E}_m(0) + \frac{1}{\alpha/2}\int_0^t \tilde{\phi}(s)\tilde{E}_m(s)ds + \frac{\|E_m\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T)}}{\alpha/2}\int_0^t \|\mathcal{A}_1'(s)\|_{\mathcal{L}(V;H)}ds \\ + \int_0^t \|f'(s)\|_H ds + \int_0^t \langle g'(s), u_m''(s)\rangle ds - \int_0^t \langle \mathcal{A}_0'(s)u_m(s), u_m''(s)\rangle ds.\end{aligned} \tag{24}$$

最后两项通过分部积分进行变换：

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle g'(s), u_m''(s)\rangle ds &= -\int_0^t \langle g''(s), u_m'(s)\rangle ds \\ &\quad + \langle g'(t), u_m'(t)\rangle - \langle g'(0), u_m'(0)\rangle \\ &\le \int_0^t \|g''(s)\|_{V'}\left(1 + \frac{1}{\alpha/2}\tilde{E}_m(s)\right)ds \\ &\quad + \frac{1+\alpha}{2\alpha}\|g'\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(V')} + \frac{1}{4}\tilde{E}_m(t) + \frac{1}{2}\tilde{E}_m(0),\end{aligned} \tag{25}$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle \mathcal{A}_0'(s)u_m(s), u_m''(s)\rangle ds &= -\int_0^t \langle \mathcal{A}_0''(s)u_m(s), u_m'(s)\rangle ds - \int_0^t \langle \mathcal{A}_0(s)u_m'(s), u_m'(s)\rangle ds \\ &\quad + \langle \mathcal{A}_0'(t)u_m(t), u_m'(t)\rangle - \langle \mathcal{A}_0'(0)u_m(0), u_m'(0)\rangle \\ &\le \frac{1}{\alpha/2}\int_0^t \|\mathcal{A}_0''(s)\|_{\mathcal{L}(V;V')}\left(E_m(s) + \tilde{E}_m(s)\right)ds \\ &\quad + \int_0^t \|\mathcal{A}_0\|_{\mathcal{L}(V;V')}\left(1 + \frac{1}{\alpha/2}\tilde{E}_m(s)\right)ds \\ &\quad + \frac{1+\alpha}{2\alpha}\|\mathcal{A}_0'\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(V;V'))} + \frac{1}{4}\tilde{E}_m(t) + \frac{1}{2}\tilde{E}_m(0)\,.\end{aligned} \tag{26}$$

接下来我们需要对该项进行估计

$$\begin{aligned}\tilde{E}_m(0) &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}(0)u_m''(0), u_m''(0)) + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_0(0)u_m'(0), u_m'(0)\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\|\mathcal{R}\|_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(H))}\|u_m''(0)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\mathcal{A}_0\|_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(V;V'))}\|u_m'(0)\|_V^2,\end{aligned}$$

显然，这归结为估计项 $\|u_m''(0)\|_H$，因为 $u_m'(0) = u^1$ 在 V中显然有界。为此，我们回到近似方程（21），取 $t = 0$ 并代入 $v = u_m''(0)$，由此得到

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(0)u_m''(0), u_m''(0)) &= (f(0), u_m''(0)) + \langle g(0) - \mathcal{A}_0(0)u_m(0), u_m''(0)\rangle \\ &\quad - (\mathcal{R}'(0)u_m'(0), u_m''(0)) - (\mathcal{A}_1(0)u_m(0), u_m''(0)) - (\mathcal{F}(u_m(0)), u_m''(0)).\end{aligned} \tag{27}$$

在 $t=0$，我们有以下估计（对某个一般常数 $C>0$ 有效）

$$
\begin{aligned}
(f(0),u_m''(0)) &\le C\|f\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(H)} + \frac{\alpha}{8}\|u_m''(0)\|^2_H \\
(\mathcal{R}'(0)u_m'(0),u_m''(0)) &\le C\|\mathcal{R}\|^2_{\mathrm{W}^{2,1}(\mathcal{L}(H))}\|u_m'(0)\|^2_V + \frac{\alpha}{8}\|u_m''(0)\|^2_H \\
(\mathcal{A}_1(0)u_m(0),u_m''(0)) &\le C\|\mathcal{A}_1\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(V;H))}\|u_m(0)\|^2_V + \frac{\alpha}{8}\|u_m''(0)\|^2_H \\
(\mathcal{F}(u_m(0)),u_m''(0)) &\le C\mathrm{Lip}(F)^2\|u_m(0)\|^2_H + \frac{\alpha}{8}\|u_m''(0)\|^2_H\ .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

回顾 11_2 对 u_m 的初始条件，我们很容易得到 $\mathcal{A}_0(0)u_m(0) - g(0) = \mathcal{A}_0(0)u^0 - g(0)$，这在 V' 中成立。然而，根据定理的假设，右端属于 H，因此我们还有

$$
\langle g(0) - \mathcal{A}_0(0)u_m(0), u_m''(0)\rangle \le C\|\mathcal{A}_0(0)u^0 - g(0)\|^2_H + \frac{\alpha}{8}\|u_m''(0)\|^2_H. \tag{29}
$$

将（28）–（29）合并可得估计

$$
\begin{aligned}
\|u_m''(0)\|^2_H &\le \frac{1}{\alpha}(\mathcal{R}(0)u_m''(0),u_m''(0)) \\
&\le C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(H)} + \|\mathcal{R}\|^2_{\mathrm{W}^{2,1}(\mathcal{L}(H))}\|u^1\|^2_V + \|\mathcal{A}_0(0)u^0 - g(0)\|^2_H \\
&\quad + \|\mathcal{A}_1\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(\mathcal{L}(V;H))}\|u^0\|^2_V + \mathrm{Lip}(F)^2\|u^0\|^2_H\Big) + \frac{5}{8}\|u_m''(0)\|^2_H,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

由此我们推得

$$
\|u_m''(0)\|_H \text{ is uniformly bounded.} \tag{31}
$$

˜在计入（24）并结合（25）–（31）给出的估计后，对（24）应用 Gronwall不等式，最终便可得到 E_m 的一致界。

2.3. 解的存在性

现在我们可以证明（10）的解存在。设 u_m 是投影问题（11）的一个解。利用上述先验估计，我们得到解序列 (u_m) 满足以下条件：

$$
\begin{aligned}
&(u_m) \text{ is bounded in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V)\\
&(u_m') \text{ is bounded in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V)\\
&(u_m'') \text{ is bounded in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H).
\end{aligned}
$$

因此，我们可以抽取一个子序列（仍记作 (u_m)），使其满足（由于导数是作用于 $\mathcal{D}'$ 上的连续算子）

$$
\begin{aligned}
u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V)\\
u_m' &\overset{*}{\rightharpoonup} u' && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V)\\
u_m'' &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

此外，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}u_m' &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{R}u' && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H)\\
(\mathcal{R}u_m')' &\overset{*}{\rightharpoonup} (\mathcal{R}u')' && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H)\\
\mathcal{A}_0u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{A}_0u && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V')\\
\mathcal{A}_1u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{A}_1u && \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

最后，我们考察非线性部分的收敛性 $\mathcal{F}(u_m)$。根据 (32_1) 中的收敛性，这意味着在 $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ 中，对 $t\in[0,T]$ 一致地，除去一个零测集，我们有

$$\|\mathcal{F}(u_m(t))-\mathcal{F}(u(t))\|_H\le \mathrm{Lip}(\mathcal{F})\|u_m(t)-u(t)\|_H\longrightarrow 0\,,$$

由此可得

$$\mathcal{F}(u_m)\longrightarrow\mathcal{F}(u)\qquad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H). \tag{34}$$

取 $n\in\mathbb{N}$ 和 $v_n\in V_n$，并令 $m\ge n$。由于 u_m 是投影问题 (11) 在 V_m上的一个解，其中包含 V_n，因此对每个 $t\in[0,T]$

$$((\mathcal{R}(t)u_m'(t))',v_n)+\langle\mathcal{A}_0(t)u_m(t),v_n\rangle+(\mathcal{A}_1(t)u_m(t),v_n)+(\mathcal{F}(u_m(t)),v_n)=(f(t),v_n)+\langle g(t),v_n\rangle.$$

将上面的等式乘以截断函数 $\vartheta\in\mathcal{D}(0,T)$，并在 $[0,T]$ 上积分，可得对$\psi_n:=\vartheta\boxtimes v_n$

$$\int_0^T\langle(\mathcal{R}u_m')',\psi_n\rangle+\langle\mathcal{A}_0u_m,\psi_n\rangle+(\mathcal{A}_1u_m,\psi_n)+(\mathcal{F}(u_m),\psi_n)\,dt=\int_0^T(f,\psi_n)+\langle g,\psi_n\rangle dt. \tag{35}$$

随后令 $m\to\infty$趋于极限，同时利用 (32)、(33) 和 (34)，得到

$$\int_0^T((\mathcal{R}u')',\psi_n)+\langle\mathcal{A}_0u,\psi_n\rangle+(\mathcal{A}_1u,\psi_n)+(\mathcal{F}(u),\psi_n)\,dt=\int_0^T(f,\psi_n)+\langle g,\psi_n\rangle dt. \tag{36}$$

由于 $\mathrm{span}\{\mathcal{D}(0,T)\boxtimes\bigcup_n V_n\}$ 在 $\mathrm{L}^2(0,T;V)$ 中稠密，因此现在可以推出

$$\int_0^T-(\mathcal{R}u',\psi')+\langle\mathcal{A}_0u,\psi\rangle+(\mathcal{A}_1u,\psi)+(\mathcal{F}(u),\psi)\,dt=\int_0^T(f,\psi)+\langle g,\psi\rangle dt$$

对每个 $\psi\in\mathrm{L}^2(0,T;V)$ 都成立，换言之，等式

$$(\mathcal{R}u')'+\mathcal{A}u+\mathcal{F}(u)=f+g$$

在以下意义下成立：$\mathcal{D}'(0,T;V')$。由此，利用 $\mathcal{D}(0,T;V)$ 中的光滑向量函数在 $\mathrm{L}^2(0,T;V)$中的稠密性（它是 $\mathrm{L}^2(0,T;V')$的预对偶），我们推得（10）。

由（$\mathcal{G}(u)\in\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))$可知（9）和（32），从而得到估计

$$\|\mathcal{G}(u(t))\|_H\lesssim_{\mathcal{F}}\|u(t)\|_H^2\lesssim 1,\qquad t\in[0,T].$$

此外，直接由方程可得

$$\mathcal{A}_0u-g=f+g-(\mathcal{R}u')'-\mathcal{A}_1u-\mathcal{F}(u)\in\mathrm{L}^\infty(0,T;H).$$

还需证明 u 满足初始条件。首先检查 $u'(0)=u^1$。

取一个截断函数 $\varphi\in\mathrm{C}^\infty([0,T])$ 使得 $\varphi(0)=1$ 且 $\varphi(T)=0$，并取 $v\in V_m$ 其中某个 m。将它们的张量积记为 $\psi=\varphi\boxtimes v\in\mathrm{C}^\infty([0,T];V)$，并将其代入（36），由此得到

$$\int_0^T((\mathcal{R}u')',\psi)+\langle\mathcal{A}_0u,\psi\rangle+(\mathcal{A}_1u,\psi)+(\mathcal{F}(u),\psi)\,dt=\int_0^T(f,\psi)dt.$$

对第一项进行分部积分后，可得

$$\int_0^T-(\mathcal{R}u',\psi')+\langle\mathcal{A}_0u,\psi\rangle+(\mathcal{A}_1u,\psi)+(\mathcal{F}(u),\psi)\,dt+(\mathcal{R}u'(0),\psi(0))=\int_0^T(f,\psi)dt.$$

另一方面，将 ψ 代入（35）并再次进行分部积分，可得

$$\int_0^T -((\mathcal{R}u_m'),\psi') + \langle \mathcal{A}_0 u_m, \psi\rangle + (\mathcal{A}_1 u_m, \psi) + (\mathcal{F}(u_m),\psi)\,dt + (\mathcal{R}u_m'(0),\psi(0)) = \int_0^T (f,\psi)dt. \tag{37}$$

现在回忆一下 $u_m'(0) = u^1$，并结合（33）和（34），即可得到

$$\int_0^T (\mathcal{R}u',\psi') + \langle \mathcal{A}_0 u, \psi\rangle + (\mathcal{A}_1 u, \psi) + (\mathcal{F}(u),\psi)\,dt + (\mathcal{R}(0)u^1,\psi(0)) = \int_0^T (f,\psi)dt. \tag{38}$$

比较（37）和（38），可推出

$$(\mathcal{R}u'(0), v) = (\mathcal{R}(0)u^1, v).$$

由于 m 和 $v \in V_m$ 是任意的，我们得出

$$\mathcal{R}(0)(u'(0) - u^1) = 0,$$

并且由于 $\mathcal{R}(0)$ 是 H的一个同构，我们得出 $u'(0) = u^1$。为了证明 $u(0) = u^0$，我们还假设 $\varphi'(0) = 1$ 和 $\varphi'(T) = 0$，并对（37）和（38）的首项再次分部积分，同时利用 $\mathcal{R}$的对称性，得到

$$\int_0^T (\mathcal{R}u',\psi')dt = -\int_0^T (u,(\mathcal{R}\psi')')dt - (u(0),\mathcal{R}\psi(0)),$$
$$\int_0^T (\mathcal{R}u_m',\psi')dt = -\int_0^T (u_m,(\mathcal{R}\psi')')dt - (u_m(0),\mathcal{R}\psi(0)).$$

回忆 $u_m(0) = u^0$ 以及（33）$_1$，通过比较可得

$$(u(0),\mathcal{R}(0)v) = (u^0,\mathcal{R}(0)v).$$

再次利用 $\mathcal{R}(0)$ 是 H 的一个同构这一事实，以及 m，v 是任意的这一点，我们最终得出

$$u(0) = u^0.$$

最后，我们证明解的唯一性。假设 u_1 和 u_2 是该问题的两个解，并记 $u := u_1 - u_2$。我们希望证明 $u \equiv 0$ 是该问题的唯一解

$$\begin{cases} (\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2) = 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

由于 $u' \in \mathrm{L}^2(0,T;V)$，我们可以将其用作该方程的检验函数，从而得到

$$((\mathcal{R}u')',u') + \langle \mathcal{A}_0 u, u'\rangle + (\mathcal{A}_1 u, u') + (\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2), u') = 0. \tag{39}$$

非线性项满足

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2), u') &\le \mathrm{Lip}(\mathcal{F})\|u_1(t) - u_2(t)\|_H \|u'(t)\|_H \\ &\le \mathrm{Lip}(\mathcal{F})\left(\|u(t)\|_{\mathrm{V}}^2 + \|u'(t)\|_H^2\right),\end{aligned}$$

从而允许我们将（39）改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((\mathcal{R}(t)u'(t),u'(t)) + \langle \mathcal{A}_0(t)u(t),u(t)\rangle\right) &= (\mathcal{R}'(t)u',u'(t)) + \langle \mathcal{A}_0'(t)u(t),u(t)\rangle \\ &\quad + 2(\mathcal{A}_1(t)u(t),u'(t)) + (\mathcal{F}(u_2(t)) - \mathcal{F}(u_1(t)),u'(t)) \\ &\lesssim_{\rho,\mathcal{A},F,\alpha} (\mathcal{R}u',u') + \langle \mathcal{A}_0 u, u\rangle.\end{aligned}$$

应用格朗沃尔引理，并结合 $u(0) = u'(0) = 0$ 这一事实，可得 $u \equiv 0$

3. 弱解

在上一节证明了强解的存在性之后，我们将减弱对波动方程中系数正则性的假设，以及对初始条件和非线性部分的假设。具体而言，我们作如下假设

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R} \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(H)) \text{ and satisfies } (2_{2,3})\\
&\mathcal{A}_0 \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V,V')) \text{ and satisfies } (3_{2,3})\\
&\mathcal{A}_1 \in \mathrm{L}^1(0,T;\mathcal{L}(V;H))\\
&f \in \mathrm{L}^1(0,T;H)\\
&g \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;V')\\
&F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ is a continuous function satisfying the sign condition}\\
&u^0 \in V \text{ and } u^1 \in H.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

此外，我们还将假设 $\mathcal{A}_0$(0) 是 V 与 V' 的同构，并且

$$
\mathcal{G}(u^0) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \tag{41}
$$

成立，其中 $\mathcal{G}$ 的定义与上一节（注2.1 （c））中相同。

我们将证明的结果在以下定理中明确表述。

定理 3.1。 在上述假设下，存在一个解 $u \in \mathrm{L}^\infty(0,T;V)$，其中 $u' \in \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ 满足 $\mathcal{G}(u) \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))$，并满足方程

$$
(\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) = f + g \qquad in\ \mathrm{L}^1(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega) + V'), \tag{42}
$$

满足初始条件

$$
u(0) = u^0, \qquad u'(0) = u^1.
$$

备注 3.2. 注意，这样的解 u 属于空间 $\mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;H)$；因此，初始条件$u(0) = u^0$ 在 H中有意义。另一方面，由方程我们容易推得

$$
\mathcal{R}u' \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega) + V'),
$$

因此，第二个初始条件应按以下意义理解： $\mathcal{R}u'$ 取值于 L^1(Ω) $+ V'$，且绝对连续；等式 $(\mathcal{R}u')(0) = \mathcal{R}(0)$ u^1 在 L^1(Ω) $+ V'$中成立。

3.1. 逼近问题

上述定理的证明依赖于用正则性更好的数据逼近输入数据，以便应用第二节的结果。接下来，自然要证明这些逼近解存在一个聚点，最后通过取极限证明该聚点是一个解。

我们先陈述关于非线性部分的以下逼近引理（感兴趣的读者可在 [22, Lemma2.2.] 中找到证明）。

引理 3.3。 满足符号条件的连续函数 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$可由一列同样满足符号条件的利普希茨连续函数在局部一致地逼近。

将这列函数记为 F_k，并与之前类似，定义 G_k 其对应的原函数 $G_k(z) := \int_0^z F_k(w)dw$。则数列 (F_k) 和 (G_k) 满足与（5）–（9）类似的性质，其常数为 利普希茨(F_k)。

接下来，由于 u^0 未必有界，我们用函数列 u_j^0 来逼近它，该函数列由

$$u_j^0(x) = \xi_j(u^0(x)), \qquad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

其中 ξ_j 定义为

$$\xi_j(x) := \begin{cases} -j, & x < -j \\ x, & |x| \le j \\ j, & x > j. \end{cases}$$

根据 [15], 的推论 A.5，该函数列满足

$$u_j^0 \longrightarrow u^0 \quad \text{strongly in } V,$$

以及

$$\begin{aligned} &|u_j^0(x)| \le |u^0(x)| \quad \text{for a.e } x \in \Omega \\ &u_j^0(x)u^0(x) \ge 0 \quad \text{for a.e } x \in \Omega \\ &\|u_j^0\|_V \le \|u^0\|_V \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{43}$$

此外，我们可以取出一个子序列（仍记为 u_j^0），使得我们也有几乎处处收敛

$$u_j^0 \longrightarrow u^0 \quad a.e.\, x \in \Omega\,. \tag{44}$$

现在，我们以适当的方式对方程的线性部分进行逼近。首先，设以 $p \in \mathbb{N}$ 为指标的序列：$(\mathcal{A}_{1p})$ 属于 $\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\,\mathcal{L}(V;\,H))$，$(u_p^1)$ 属于 V，且 (f_p) 属于 $\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\,H)$，并满足以下收敛条件

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1p} &\to \mathcal{A}_1 && \text{strongly in } \mathrm{L}^1(0,T;\mathcal{L}(V;H)) \\ f_p &\to f && \text{strongly in } \mathrm{L}^1(0,T;H) \\ u_p^1 &\to u^1 && \text{strongly in } H. \end{aligned} \tag{45}$$

对于其余线性项，我们需要具有某些附加性质的逼近序列，具体如下。

引理 3.4. 存在序列 $\mathcal{A}_{0p} \in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;\,\mathcal{L}(V;\,V'))$ $\mathcal{R}_p \in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;\,\mathcal{L}(H))$ 以及 $g_p \in \mathrm{W}^{2,1}(0,T;\,V')$，满足

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_p \to \mathcal{R} && \textit{strongly in } \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(H)) \\ &\mathcal{A}_{0p} \to \mathcal{A}_0 && \textit{strongly in } \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V;V')) \\ &g_p \to g && \textit{strongly in } \mathrm{W}^{1,1}(0,T;V'), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p(0) &= \mathcal{R}(0) \\ \mathcal{A}_{0p}(0) &= \mathcal{A}_0(0) \qquad \textit{for each } p \in \mathbb{N} \\ g_p(0) &= g(0) \end{aligned}$$

and

$$(\mathcal{R}_p(t)u,u)\geq\frac{\alpha}{2}\|u\|_H^2,\qquad u\in H$$
$$\langle\mathcal{A}_{0p}(t)v,v\rangle\geq\frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2,\qquad v\in V$$

且与 $t\in[0,T]$ 和 $p\in\mathbb{N}$ 均无关。

证明。 由于 $\mathcal{A}_0\in\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\,\mathcal{L}(V;\,V'))$，我们可以选取一个序列 $\Psi_p\in C_c^\infty(0,T;\,\mathcal{L}(V;\,V'))$，使得

$$\Psi_p\to\mathcal{A}_0'\qquad\text{in }\mathrm{L}^1(0,T;\mathcal{L}(V;V')).$$

令 $\mathcal{A}_{0p}(t):=\mathcal{A}_0(0)+\int_0^t\psi_p(s)ds$ 后，很容易验证，$\mathcal{A}_{0p}$ 在 $\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\,\mathcal{L}(V;\,V'))$ 中强收敛到 $\mathcal{A}_0$，且 $\mathcal{A}_{0p}(0)=\mathcal{A}_0(0)$。由于 $\mathcal{A}_{0p}$ 也在 $[0,T]$ 上一致收敛到 $\mathcal{A}_0$，因此如有必要，我们可以调整该序列，使得对每个 p，$\|\mathcal{A}_{0p}-\mathcal{A}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}(V;V'))}<\frac{\alpha}{2}$。现在

$$\langle\mathcal{A}_{0p}(t)v,v\rangle=\langle(\mathcal{A}_{0p}(t)-\mathcal{A}_0(t))v,v\rangle+\langle\mathcal{A}_0(t)v,v\rangle\geq-\frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2+\alpha\|v\|_V^2=\frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2.$$

可以用类似的方法构造逼近序列 $\mathcal{R}_p$ 和 g_p。 □

接下来，选取一个序列 $(u_{jp}^0)_p\in V$，使得

$$\begin{aligned}&u_{jp}^0\to u_j^0\qquad\text{strongly in }V\\&\mathcal{A}_0(0)u_{jp}^0-g(0)\in H.\end{aligned}\tag{46}$$

这样的序列可以按如下方式构造。由于 $\mathcal{A}_0(0)$ 是 V 与 V' 的同构，我们有 $\mathcal{A}_0(0)^{-1}H$ 在 V 中稠密。因此，可以选取一个序列 (φ_p)，使其属于 $\mathcal{A}_0(0)^{-1}H$，且 $\varphi_p\to u_j^0$ 在 V 中强收敛。此外，取一个序列 $g_p\in H$，使得 $g_p\to g(0)$ 在 V' 中强收敛。所需的序列由 $u_{jp}^0:=\varphi_p+\mathcal{A}_0(0)^{-1}(g(0)-g_p)$ 给出。

对于每个 u_{jp}^0、u_p^1、f_p、g_p 和 F_k，定理 2.2 给出一个解 u_{jpk} 满足

$$\begin{cases}u_{jpk}\in\mathrm{L}^\infty(0,T;V)\\u_{jpk}'\in\mathrm{L}^\infty(0,T;V)\\u_{jpk}''\in\mathrm{L}^2(0,T;H)\\\mathcal{G}_k(u_{jpk})\in\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega)),\end{cases}$$

每个近似问题的

$$\begin{cases}(\mathcal{R}_pu_{jpk}')'+\mathcal{A}_pu_{jpk}+\mathcal{F}_k(u_{jpk})=f_p+g_p\\u_{jpk}(0)=u_{jp}^0\\u_{jpk}'(0)=u_p^1,\end{cases}\tag{47}$$

3.2. 能量估计与一个解

与上一节中获得先验估计的方法类似，我们首先在记作

$$E_{jpk}(t):=\frac{1}{2}(\mathcal{R}_pu_{jpk}',u_{jpk}')+\frac{1}{2}\langle\mathcal{A}_{0p}u_{jpk},u_{jpk}\rangle+\|\mathcal{G}_k(u_{jpk})\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)},$$

以下不等式

$$E_{jpk}'(t)\leq\phi_p(t)E_{jpk}(t)+\|f_p(t)\|_H+\langle g_p(t),u_{jpk}'(t)\rangle,$$

其中

$$\phi_p(t)=\frac{1}{\alpha/4}\left(\|\mathcal{R}_p'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}+\|\mathcal{A}_{0p}'(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}+\|\mathcal{A}_{1p}(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}+\|f_p(t)\|_H\right).$$

从 0 积分到 t，其中 $t \le T$，可得

$$E_{jpk}(t) \le E_{jpk}(0) + \|f_p\|_{\mathrm{L}^1(H)} + \int_0^t \langle g_p(s), u'_{jpk}(s)\rangle + \int_0^t \phi_p(s) E_{jpk}(s). \tag{48}$$

由于 $\|f_p\|$ 在 $\mathrm{L}^1(0,\ T;\ H)$中强收敛，项$\|f_p\|_{\mathrm{L}^1(H)}$ 被一个与 j、p和 k无关的常数所控制。含有 g_p 的项可以通过分部积分处理，按照与（20）相同的方式得到

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle g_p(s), u'_{jpk}(s)\rangle ds &= -\int_0^t \langle g'_p(s), u_{jpk}(s)\rangle ds + \langle g_p(t), u_{jpk}(t)\rangle - \langle g_p(0), u_{jpk}(0)\rangle \\ &\le 2\kappa \|g_p\|^2_{\mathrm{W}^{1,1}(V')} + \|g'_p\|_{\mathrm{L}^1(V')} + \frac{1}{\kappa\alpha} E_{jpk}(t) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa\alpha} E_{jpk}(0) + \int_0^t \frac{\|g'_p(s)\|_{V'}}{\alpha/4} E_{jpk}(s) ds.\end{aligned}$$

由于 g_p 在 $\mathrm{W}^{1,1}(0,\ T;\ V')$ 中收敛，右侧前两项现在有界。常数κ再次选取为使 $\frac{1}{\kappa\alpha} \le \frac{1}{2}$ 成立。

还需给出 $E_{jpk}(0)$的估计。回顾（43）、(45_1)、引理3.4和（46），我们推得 $E_{jpk}(0)$中前两项有界，且与 j、p、k无关。现在来处理项$\|\mathcal{G}_k(u^0_{jp})\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$。由于对每个 $j \in \mathbb{N}$，u^0_j 都是有界函数，$\mathcal{F}_k(u^0_j)$在 Ω 上一致收敛到$\mathcal{F}(u^0_j)$，因此有

$$\begin{aligned}|G_k(u^0_j(x)) - G(u^0_j(x))| &\le \left| \int_0^{u^0_j(x)} F_k(u^0_j(w)) - F(u^0_j(w)) dw \right| \\ &\le j \sup_{w\in[-j,j]} |F_k(w) - F(w)| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\end{aligned}$$

推导

$$\mathcal{G}_k(u^0_j) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{G}(u^0_j) \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(\Omega).$$

因此，由于 Ω 有界，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$\|\mathcal{G}_k(u^0_j) - \mathcal{G}(u^0_j)\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \le |\Omega| \|\mathcal{G}_k(u^0_j) - \mathcal{G}(u^0_j)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

因此，我们可以从 $\mathcal{G}_k(u^0_j)$ 中抽取一个对角子序列 $\mathcal{G}_j(u^0_j) := \mathcal{G}_{k(j)}(u^0_j)$（现在简记为 $\mathcal{G}_j$），使得

$$\int_\Omega |\mathcal{G}_j(u^0_j) - \mathcal{G}(u^0_j)| \to 0.$$

此外，由于 $\mathcal{G}$ 连续，(44) 给出

$$\mathcal{G}(u^0_j) \longrightarrow \mathcal{G}(u^0) \text{ a.e.}$$

现在，$\mathcal{F}$上的符号条件意味着 $\mathcal{G}$在 $(-\infty, 0)$ 上非增，在 $(0, \infty)$上非减。结合 (43) 可得 $\mathcal{G}(u^0_j) \le \mathcal{G}(u^0)$ 几乎处处成立。因此，假设 (41) 允许我们应用勒贝格控制收敛定理，从而得到

$$\mathcal{G}(u^0_j) \longrightarrow \mathcal{G}(u^0) \quad \text{in } \mathrm{L}^1(\Omega).$$

因此，我们得出结论

$$\mathcal{G}_j(u^0_j) \to \mathcal{G}(u^0) \quad \text{strongly in } \mathrm{L}^1(\Omega) \text{ as well as a.e.}$$

最后，由对每个 $j \in \mathbb{N}$ 都成立的初等不等式

$$|G_j(z_2) - G_j(z_1)| \le \mathrm{Lip}(F_j)(|z_1| + |z_2|)|z_2 - z_1|,$$

我们对每个 $p \in \mathbb{N}$ 都有

$$\|\mathcal{G}_j(u_{jp}^0) - \mathcal{G}_j(u_j^0)\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leq \mathrm{Lip}(F_j) \left(\|u_{jp}^0\|_H + \|u_j^0\|_H\right) \|u_{jp}^0 - u_j^0\|_H.$$

因此，对每个 $j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{G}_j(u_{jp}^0) \xrightarrow{p\to\infty} \mathcal{G}_j(u_j^0) \quad \text{in } \mathrm{L}^1(\Omega).$$

于是，我们再次可以选取 u_{jp}^0 的一个子序列，记为 u_{jj}^0，使得

$$\mathcal{G}_j(u_{jj}^0) \longrightarrow \mathcal{G}(u^0) \quad \text{in } \mathrm{L}^1(\Omega).$$

由此，我们还得到项 $\|\mathcal{G}_j(u_j^0)\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$的一致有界性。现在将上述得到的 u_{jp}^0（对角）子序列记为 $u_k^0 := u_{kk}^0$ 相应地，将 u_k 记为与 u_{kk}对应的序列。考虑前面的说明，回到式（48）后，我们得到如下形式的不等式:

$$E_k(t) \lesssim 1 + \int_0^t (\phi_k(s) + \|g'(s)\|_{V'}) E_k(s) ds,$$

再简单应用 Gronwall引理，即可得到 E_k 的一致界。因此，我们有

$$\begin{aligned} &(u_k) \text{ is bounded in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V) \\ &(u_k') \text{ is bounded in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \\ &\mathcal{G}_k(u_k) \text{ is bounded in } \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega)) \,. \end{aligned} \tag{49}$$

我们再次可以提取一个子序列，使得

$$\begin{aligned} u_k &\overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;V) \\ u_k' &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \qquad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H). \end{aligned} \tag{50}$$

回想一下， u_k 满足

$$(\mathcal{R}_k u_k')' + \mathcal{A}_k u_k + \mathcal{F}_k(u_k) = f_k + g_k \qquad \text{in } \mathrm{L}^2(0,T;V'). \tag{51}$$

现在，我们希望用任意的 $\psi \in \mathcal{D}((0,T)\times\Omega)$ 检验此方程，并令 $k \to \infty$ 趋于极限。首先注意到，在 $\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(H))$ 中的强收敛 $\mathcal{R}_k \to \mathcal{R}$ 以及前述弱-* 收敛 u_k' 意味着

$$\mathcal{R}_k u_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{R} u' \qquad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \,. \tag{52}$$

类似地，我们可推出

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0k} u_k &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{A}_0 u \qquad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0.T;V') \\ \mathcal{A}_{1k} u_k &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{A}_1 u \qquad \text{in } \mathrm{L}^1(0,T;H). \end{aligned} \tag{53}$$

剩下需要以某种意义检验项 $\mathcal{F}_k(u_k)$ 的收敛。为此，我们参考 [22, 定理 1.1], ，其内容如下

˜定理 3.5. 设 Ω 是一个有限测度空间， X 和 Y 是巴拿赫空间。设 (u_k) 是一列从 Ω 到 X的˜强可测函数。设 $(\mathcal{F}_k)$ 是一列从 X 到 Y 的函数，满足

(a) (F_k) 在 B 上对 X 的任意有界子集 B，于 Y 中一致有界，

(b) $F_k(u_k(x))$ 是强可测的，且

$$\sup_k \int_{\tilde{\Omega}} \|u_k(x)\|_X \|F_k(u_k(x))\|_Y dx < \infty,$$

(c) $\|F_k(u_k(x)) - v(x)\|_Y \to 0$ 几乎处处。

那么 $v \in \mathrm{L}^1(\tilde{\Omega};\ Y)$，并且

$$\|F_k(u_k) - v\|_{\mathrm{L}^1(\tilde{\Omega},Y)} \to 0.$$

我们打算将此定理应用于序列 (u_k) 和 (F_k)，其中 $\Omega = [0,T] \times \Omega$，$X = Y = \mathbb{R}$。为此，我们需要找到以下项的一致界（由于符号条件，不带绝对值）：

$$\int_0^T (\mathcal{F}_k(u_k), u_k) dt\,,$$

以及相应的几乎处处收敛。

回顾 (47) 中的方程，将其乘以 u_k 并在 $[0,T]$ 上积分，我们得到

$$\int_0^T (\mathcal{F}_k(u_k), u_k) dt = \int_0^T (f, u_k) - \langle (\mathcal{R}u_k')', u_k\rangle - \langle \mathcal{A}_0 u_k, u_k\rangle - \langle \mathcal{A}_1 u_k, u_k\rangle\, dt.$$

对涉及 $\mathcal{R}$ 的项进行分部积分后，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T (\mathcal{F}_k(u_k), u_k) dt = &\int_0^T (f_k, u_k) + \langle g_k, u_k\rangle dt \\ &- \int_0^T (\mathcal{R}_k u_k', u_k') + \langle \mathcal{A}_{0k} u_k, u_k\rangle + \langle \mathcal{A}_{1k} u_k, u_k\rangle\, dt \\ &+ (\mathcal{R}_k u_k'(0), u_k(0)) - (\mathcal{R}_k u_k'(T), u_k(T)),\end{aligned}$$

由此可轻易得到一致界。由于 $\mathcal{F}_k$ 逐点收敛到 $\mathcal{F}$，我们有

$$\mathcal{F}_k(u_k) \to \mathcal{F}(u_k) \qquad \text{a.e. in } (0,T)\times\Omega.$$

由于紧嵌入 $V \hookrightarrow H$，应用 Aubin–Lions 引理可得强收敛

$$u_k \to u, \quad \text{in } \mathrm{L}^2((0,T)\times\Omega),$$

经过可能的进一步子序列提取后，可得

$$u_k \to u \quad \text{a.e. in } (0,T)\times\Omega.$$

由于 F 连续，这也意味着

$$\mathcal{F}(u_k) \to \mathcal{F}(u) \quad \text{a.e. in } (0,T)\times\Omega.$$

因此，我们得出

$$\mathcal{F}_k(u_k) \to \mathcal{F}(u) \quad \text{a.e. in } (0,T)\times\Omega. \tag{54}$$

现在可以应用上述定理，得出

$$\mathcal{F}_k(u_k) \longrightarrow \mathcal{F}(u) \text{ strongly in } \mathrm{L}^1((0,T)\times\Omega). \tag{55}$$

现在取 $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ 和 $v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \cap V$，并将方程 (51) 与 $\varphi \boxtimes v$ 相乘（按 $\mathrm{L}^2(0,T;\ V')$ 和 $\mathrm{L}^2(0,T;\ V)$ 之间的对偶意义）。利用收敛关系 (50)、(52)、(53)、(55) 和 (45)，我们得到

$$\int_0^T -(\mathcal{R}u', v)\varphi' + \langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle\varphi + (\mathcal{A}_1 u, v)\varphi + (\mathcal{F}(u), v)\varphi\, dt = \int_0^T (f, v)\varphi + \langle g, v\rangle\varphi.$$

由于 $v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \cap V$ 是任意的，我们得出

$$(\mathcal{R}u')' = f + g - \mathcal{A}u - \mathcal{F}(u) \qquad \text{in } \mathcal{D}'(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega) + V')$$

因此，

$$(\mathcal{R}u')' \in \mathrm{L}^1(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega) + V'),$$

结合该方程

$$(\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) = f + g$$

现在在 $\mathrm{L}^1(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega) + V')$ 的意义下成立。

此外，如同（54）中那样，我们有

$$\mathcal{G}_k(u_k) \to \mathcal{G}(u) \qquad \text{a.e. in } (0,T) \times \Omega,$$

并且应用 Fatou 引理，结合（49_3）可得

$$\|\mathcal{G}(u)\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))} \le \liminf_k \|\mathcal{G}_k(u_k)\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))} \lesssim 1.$$

在注 3.2 的意义下，初始条件现在已按标准方式得到验证。

3.3. 唯一性及特殊情形下的一些改进

通过施加额外条件，可以对解作出一些改进，包括证明其唯一性。

定理 3.6. 在 $d \ge 3$ 的情形下，进一步假设 $\mathcal{A}_1$ 满足

$$\mathcal{A}_1 \in \mathrm{L}^1(0,T;\mathcal{L}(H,V')), \tag{56}$$

且 F 是一个属于 C^1 类、满足增长条件的函数

$$|F'(z)| \le C|z|^p,$$

存在某个 $-\frac{1}{d} \le p \le \frac{2}{d-2}$。那么，(42) 的解是唯一的，而且等式

$$(\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) = f + g$$

在$\mathrm{L}^1(0,T;\ V')$的意义下成立。

证明。 方程成立的空间可通过重复定理 3.1 证明中的步骤来改进；我们仅简要概述所需的调整。

在这种情况下，无需对非线性项进行近似；也无需用有界函数序列逼近 u^0 。完成对线性部分和初始条件的近似后（特别是，我们只需要由一个参数索引的序列，下文记为 k），即可得到唯一解 $u_k \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\ V) \cap \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\ H)$，满足

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_k u_k')' + \mathcal{A}_k u_k + \mathcal{F}(u_k) = f_k + g_k \\ u_k(0) = u_k^0 \\ u_k'(0) = u_k^1, \end{cases}$$

将时间 t 时的能量记为

$$E_k(t) := \frac{1}{2}(\mathcal{R}_k(t)u_k(t), u_k(t)) + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_{0k}(t)u_k(t), u_k(t)\rangle + \|\mathcal{G}(u_k(t))\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)},$$

以类似的方式，结合以下因素可得到能量估计以及聚点 $u \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\, V) \cap \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\, H)$：增长条件与符号条件意味着

$$|F(z)| \lesssim 1 + |z|^{\frac{d}{d-2}}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

因此，对于任意 $v \in V$，我们有

$$\|\mathcal{F}(v)\|_H \lesssim 1 + \|v\|_{\mathrm{L}^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \lesssim 1 + \|v\|_V,$$

因此 $\mathcal{F}(v) \in H$。类似地， $\mathcal{G}(v) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$。最后的区别在于考察项 $\mathcal{F}(u_k)$ 的收敛。这里我们对该序列应用引理 1.3（见 [18] ），得到

$$\mathcal{F}(u_k) \rightharpoonup \mathcal{F}(u) \qquad \text{weakly in } \mathrm{L}^2(0,T;H).$$

接下来很容易验证， u 满足

$$(\mathcal{R}u')' + \mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) = f + g \qquad \text{in the sense of } \mathrm{L}^1(0,T;V').$$

为证明唯一性，假设 u_1, u_2 是两个解，并记 $u = u_1 - u_2$。由于 u' 的正则性不足，不能将其用作检验函数，我们采用标准论证来规避这一问题。固定$0 < s < T$并定义

$$v(t) := \begin{cases} -\int_s^t u(\tau)d\tau, & 0 \le t \le s, \\ 0, & s < t \le T. \end{cases}$$

于是 $v \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\, V)$，因此我们得到

$$\int_0^s \langle (\mathcal{R}u')', v\rangle + \langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle + (\mathcal{A}_1 u, v) + (\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2), v)\, dt = 0.$$

由于 $(\mathcal{R}u')(0) = v(s) = 0$，对第一项进行分部积分可得

$$\int_0^s -(\mathcal{R}u', v') + \langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle + (\mathcal{A}_1 u, v) + (\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2), v)\, dt = 0.$$

对于 $0 \le t \le s$，根据 $v' = -u$，我们可以写出

$$\int_0^s (\mathcal{R}u', u) - \langle \mathcal{A}_0 v', v\rangle + (\mathcal{A}_1 u, v) + (\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2), v)\, dt = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(s)u(s), u(s)) + \langle \mathcal{A}_0(0)v(0), v(0)\rangle &= \int_0^s \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big((\mathcal{R}u, u) - \langle \mathcal{A}_0 v, v\rangle\Big)\, dt \\ &= \int_0^s -(\mathcal{R}'u, u) - \langle \mathcal{A}_0' v, v\rangle + (\mathcal{A}_1 u, v) - (\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2), v)\, dt.\end{aligned}$$

于是，左端可以估计如下：

$$\|u(s)\|_H^2 + \|v(0)\|_V^2 \le \frac{1}{\alpha}\left((\mathcal{R}(s)u(s), u(s)) + \langle \mathcal{A}_0(0)v(0), v(0)\rangle\right).$$

对于右端，我们先处理非线性部分。由增长条件和中值定理可得不等式

$$|\mathcal{F}(z_1) - \mathcal{F}(z_2)| \le C \max\{|z_1|^p, |z_2|^p\}|z_1 - z_2|.$$

因此，对 $\frac{1}{q}+\frac{1}{d}+\frac{1}{2}=1$ 应用扩展霍尔德不等式可得 - - -

$$\begin{aligned}\int_0^s (\mathcal{F}(u_1)-\mathcal{F}(u_2),v)dt &\lesssim \int_0^s (\max\{|u_1|^p,|u_2|^p\}|u_1-u_2|,|v|)dt\\ &\lesssim \int_0^s ((|u_1|^p+|u_2|^p)|u_1-u_2|,|v|)\,dt\\ &\lesssim \int_0^s \||u_1(t)|^p+|u_2(t)|^p\|_{\mathrm{L}^d(\Omega)}\,\|u(t)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}\,\|v(t)\|_H\,dt.\end{aligned}$$

由于 $q>2$，我们有 $\|u(t)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}\le\|u(t)\|_{H^1}$。接下来，由于 $1\le dp\le q=\frac{2d}{d-2}$，根据索博列夫嵌入定理可得

$$\begin{aligned}\||u_1(t)|^p+|u_2(t)|^p\|_{\mathrm{L}^d(\Omega)} &\le \||u_1(t)|^p\|_{\mathrm{L}^d(\Omega)}+\||u_2(t)|^p\|_{\mathrm{L}^d(\Omega)}\\ &\lesssim \|u_1(t)\|_V^p+\|u_2(t)\|_V^p\\ &\lesssim \|u_1\|^p_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V)}+\|u_2\|^p_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V)}.\end{aligned}$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^s \||u_1(t)|^p+|u_2(t)|^p\|_{\mathrm{L}^d(\Omega)}\,\|u(t)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}\,\|v(t)\|_H\,dt\\ &\quad\lesssim \left(\|u_1\|^p_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V)}+\|u_2\|^p_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V)}\right)\int_0^s \|u(t)\|_H\|v(t)\|_H\,dt\\ &\quad\lesssim \left(\|u_1\|^p_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V)}+\|u_2\|^p_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V)}\right)\int_0^s \|u(t)\|_H^2+\|v(t)\|_V^2\,dt.\end{aligned}$$

回顾（56），我们进一步估计

$$\begin{aligned}&\int_0^s -(\mathcal{R}'u,u)-\langle\mathcal{A}_0'v,v\rangle+(\mathcal{A}_1u,v)\\ &\quad\le \int_0^s \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\|u\|_H^2+\|\mathcal{A}_0'(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}\|v(t)\|_V^2+\|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}\|u\|_H\|v\|_V\,dt\\ &\quad\le \int_0^s \left(\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}+\|\mathcal{A}_0(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}+\|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}\right)\left(\|u(t)\|_H^2+\|v(t)\|_V^2\right)\,dt\,.\end{aligned}$$

综合以上结果可得（对某个常数 $C>0$）

$$\|u(s)\|_H^2+\|v(0)\|_V^2\le C\int_0^s \beta(t)\left(\|u(t)\|_H^2+\|v(t)\|_V^2\right)\,dt, \tag{57}$$

其中，β 表示函数（正值）

$$\beta(t)=\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{L}(H)}+\|\mathcal{A}_0(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')}+\|\mathcal{A}_1(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)}+\mathrm{Lip}(F)\,.$$

注意，我们有 $\beta\in\mathrm{L}^1(0,T)$。

对 $0\le t\le T$ 定义

$$w(t):=\int_0^t u(\tau)d\tau\,.$$

(57) 中的不等式于是变为

$$\|u(s)\|_H^2+\|w(s)\|_V^2\le C\int_0^s \beta(t)\left(\|u(t)\|_H^2+\|w(s)-w(t)\|_V^2\right)\,dt.$$

然而

$$\|w(t)-w(s)\|_V^2 \le 2(\|w(t)\|_V^2+\|w(s)\|_V^2)\,,$$

因此，继续上述估计，我们得到

$$\|u(s)\|_H^2+(1-2C\|\beta\|_{\mathrm{L}^1(0,s)})\|w(s)\|_V^2 \le C\int_0^s \beta(t)\left(\|u(t)\|_H^2+\|w(t)\|_V^2\right)\,dt.$$

选取 T_1 使得$\left(1-2C\|\beta\|_{\mathrm{L}^1(0,T_1)}\right)\ge\frac{1}{2}$。则对每个 $0\le s\le T_1$，我们有

$$\|u(s)\|_H^2+\|w(s)\|_V^2 \le C\int_0^s \beta(t)\left(\|u(t)\|_H^2+\|w(t)\|_V^2\right)\,dt.$$

应用Gronwall不等式，我们在 $[0,T_1]$上得到 $u\equiv 0$。通过对区间 $[T_1,2T_1]$、$[2T_1,3T_1]$等使用同样的论证，我们最终在 $[0,T]$上得到 $u\equiv 0$。 □

4. 一些例子和扩展

为了用一个具体例子说明上一节的结果，让我们考虑如下问题

$$(\rho u')'-\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u)+\mathbf{b}\cdot\nabla u+cu+u|u|^p=f+g \tag{58}$$

并带有预先给定的初始条件

$$u(0)=u^0,\qquad u'(0)=u^1.$$

为了使　　该问题符合既定框架，我们施加以下假设：

- 函数 ρ属于空间 $\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\Omega))$，并且在 $(0,T)\times\Omega$ 上几乎处处满足 $\rho\ge\alpha>0$。
- 我们将$\mathbf{A}$写为其对称部分与反对称部分之和，

  $$\mathbf{A_s}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T),\qquad \mathbf{A_a}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T).$$

  我们假设对称部分满足

  $$\mathbf{A_s}\in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))\quad\text{and}\quad \mathbf{A_s}(t,x)\ge\alpha\mathbf{I}.$$

  对于反对称部分，我们假设

  $$\operatorname{div}\mathbf{A_a}\in \mathrm{L}^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^d),$$

  其中，$\operatorname{div}\mathbf{A_a}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的一个向量，其各分量为$\mathbf{A_a}$相应列的（标准）散度。

- 低阶项中的系数满足

  $$\mathbf{b}\in \mathrm{L}^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^d),\quad c\in \mathrm{L}^1((0,T)\times\Omega).$$

- 方程的右端为

  $$f\in \mathrm{L}^1(0,T;H),\qquad g\in \mathrm{W}^{1,1}(0,T;V').$$

- 初始条件满足 $u^0\in V$和 $u^1\in H$。

现在我们可以定义适当的算子 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{A}$。显然， $\mathcal{R}$对应于乘以 ρ，即

$$\mathcal{R}(t)v = \rho(t)v, \qquad v \in H.$$

在我们的假设下， ρ满足（40_1）。接下来，我们将算子 $\mathcal{A}$确定为

$$\mathcal{A}(t)v = -\operatorname{div}(\mathbf{A}(t)\nabla v) + \mathbf{b}(t)\cdot\nabla v + cv.$$

利用分解 $\mathbf{A} = \mathbf{A_s} + \mathbf{A_a}$，我们进一步对 $v \in V$ 定义，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0(t)v &= -\operatorname{div}(\mathbf{A_s}\nabla v),\\ \mathcal{A}_1(t)v &= -\operatorname{div}(\mathbf{A_a}\nabla v) + \mathbf{b}\cdot\nabla v + cv.\end{aligned}$$

同样，由前述假设可立即得出 $\mathcal{A}_0$ 满足（40_2）。

此外，算子 $\mathcal{A}_1$ 中含有 $\mathbf{b}$ 与 c 各项的部分属于 $\mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V,H))$。为验证散度部分同样成立，我们取 $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ 与 $v \in H$，从而得到

$$\begin{aligned}|(-\operatorname{div}(\mathbf{A_a}(t)\nabla u), v)| &\le |((-\operatorname{div}\mathbf{A_a}(t))\cdot\nabla u, v)| + |\langle \mathbf{A_a}(t)\cdot\nabla^2 u, v\rangle|\\ &= |((-\operatorname{div}\mathbf{A_a}(t))\cdot\nabla u, v)|\\ &\le \|\operatorname{div}\mathbf{A_a}(t)\|_{\mathrm{L}^\infty}\|u\|_V\|v\|_H,\end{aligned}$$

这表明 $-\operatorname{div}(\mathbf{A_a}\nabla\cdot)$ 属于 $\mathrm{L}^1(0,T;\mathcal{L}(V,H))$。（在上述等式中，我们刚刚指出反对称 $\mathbf{A_a}$ 与对称海森矩阵的点积为零。）此外，同样的论证表明它也属于空间 $\mathrm{L}^1(0,T;\mathcal{L}(H,V'))$。由于对 $v \mapsto \mathbf{b}\cdot\nabla v + cv$ 显然同样成立，我们还可得出 $\mathcal{A}_1 \in L^1(0,T;\mathcal{L}(H,V'))$。

最后，在这种情况下，非线性部分由光滑函数 $F(z) = z|z|^p$ 给出，其最弱假设为 $p > 0$。注意，此时它的原函数为

$$G(z) = \frac{1}{p+2}|z|^{p+2}.$$

因此， F 满足符号条件，并且

$$|F'(z)| = (p+1)|z|^p.$$

如果不对 p 施加其他假设，只需要求 $u^0 \in \mathrm{L}^{p+2}(\Omega)$。此时定理 3.1 适用，可得存在一个函数

$$u \in \mathrm{L}^\infty(0,T;V\cap\mathrm{L}^{p+2}(\Omega)), \qquad u' \in \mathrm{L}^\infty(0,T;H),$$

使得（58）在 $\mathrm{L}^1(0, T; V' + \mathrm{L}^1(\Omega)$ 的意义下成立。

如果我们还假设 $\frac{1}{d} \le p \le \frac{2}{d-2}$，那么解是唯一的，并且方程在 $\mathrm{L}^1(0, T; V')$ 的意义下成立。

5. 致谢

Matko Grbac 部分获得克罗地亚科学基金会项目 IP-2022-10-7261 的资助。

参考文献

[1] Robert A. Adams 和 John J. F. Fournier，《Sobole夫空间》，纯数学与应用数学丛书第 140 卷（阿姆斯特丹），Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，第 2 版，2003 年。↑ 2.[2] Nenad Antonić 和 Martin Lazar，《双曲系统的微局部能量密度》，载于《应用数学与科学计算》（杜布罗夫尼克，2001），Kluwer/Plenum，纽约，2003 年，第 179–190 页。↑ 1.[3] Claudio Baiocchi，《希尔伯特空间中一阶和二阶线性抽象微分方程》，Ann. Mat. Pura Appl. (4), 76 (1967), 第 233–304 页。↑ 1.[4] Safia Brahim-Otsmane、Gilles A. Francfort 和 François Murat，《波动方程与热方程均匀化的校正子》，J. Math. Pures Appl. (9), 71 (1992), 第 197–231 页。↑1.[5] Marc Briane 和 Graeme W. Milton，《反对称有效霍尔矩阵》，SIAM J. Appl. Math., 70 (2010), 第 1810–1820 页。↑ 2.[6] Felix E. Browder，《关于非线性波动方程》，Math. Z., 80 (1962), 第 249–264 页。↑ 1.[7] Juan Casado-Díaz、Julio Couce-Calvo、Faustino Maestre 和 José D. Martín-Gómez，《时间系数不连续时波动方程的均匀化与校正子》，J. Math. Anal. Appl., 379 (2011), 第 664–681 页。↑ 1.[8] Robert Dautray 和 Jacques-Louis Lions，《科学与技术的数学分析与数值方法》第 5 卷，Springer-Verlag，柏林，1992 年。《演化问题 I》，由 Michel Artola、Michel Cessenat 和 Hélène Lanchon 合作编写，Alan Craig 从法语译出。↑ 2.[9] Luciano de Simon 和 Giovanni Torelli，《希尔伯特空间中系数不连续的线性二阶微分方程》，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 1 (1974), 第 131–154 页。↑ 1.[10] G. A. Francfort 和 F. Murat，《波动方程中的振荡与能量密度》，Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), 第 1785–1865 页。↑ 1.[11] Patrick Gérard，《半线性色散波动方程中的振荡与集中效应》，J. Funct. Anal., 141 (1996), 第 60–98 页。↑ 1.[12] Matko Grbac，《H-测度在演化方程中的应用》，博士论文，数学系，萨格勒布大学理学院，2024年12月。↑ 1.[13] A. E. Hurd 和 D. H. Sattinger，《关于系数不连续的双曲方程的存在性与唯一性问题》，Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), 第 159–174 页。↑ 1.[14] Konrad Jörgens，《一类非线性波动方程的整体初值问题》，Math. Z., 77 (1961), 第 295–308 页。↑ 1.[15] David Kinderleher 和 Guido Stampacchia，《变分不等式及其应用导论》，SIAM，2000 年。↑ 14.[16] Giovanni Leoni，《Sobole夫空间入门》，数学研究生课程第 181 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第 2 版，2017 年。↑ 2.[17] Jacques-Louis Lions，《算子微分方程与边值问题》，数学科学基础丛书第 111 卷，Springer-Verlag，柏林-哥廷根-海德堡，1961年。↑ 1.

[18]Jacques-Louis Lions，《非线性边值问题的若干求解方法》，Dunod，巴黎；Gauthier-Villars，巴黎，1969。↑ 20.[19] Jacques-Louis Lions 和 Enrico Magenes，《非齐次边值问题及其应用》。第 I 卷，数学科学基础丛书第 181 卷，Springer-Verlag，纽约-海德堡，1972。由 P. Kenneth 从法语译出。↑ 2.[20] Jacques-Louis Lions 和 W. A. Strauss，《一些非线性演化方程》，法国数学会通报，93（1965），第 43–96 页。↑ 1.[21] Irving Segal，《非线性半群》，数学年刊（第 2 辑），78（1963），第 339–364 页。↑ 1.[22] Walter A. Strauss，《半线性双曲方程的弱解》，巴西科学院年刊，42（1970），第 645–651 页。↑ 13，17。[23] Walter A. Strauss，《非线性波动方程》，数学科学会议委员会数学区域会议丛书第 73 卷，数学科学会议委员会，华盛顿特区；由美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，1989。↑ 1.[24] Michael Struwe，《半线性波动方程》，美国数学会通报（新系列），26（1992），第 53–85 页。↑ 1.[25] Peng-Fei Yao，《振动与结构动力学中的建模与控制》，Chapman & Hall/CRC应用数学与非线性科学丛书，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2011。微分几何方法。↑ 1.[26] Enrike Zuazua，《半线性波动方程的精确能控性》，J. Math. Pures Appl.（第 9 辑），69（1990），第 1–31 页。↑ 1。