arXiv:2602.04738v1 [math.AP] 4 Feb 2026

利用对数 Sobolev 不等式和对偶性论证研究 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中一类薛定谔半群的内在超收缩性

Christoph Schwerdt[1] Ilham Ouelddris[2]

[1] 罗斯托克大学数学研究所，Ulmenstraße 69, 18 057 罗斯托克，德国；电子邮件地址：christoph.schwerdt@uni-rostock.de

[2] 卡迪·阿亚德大学数学系（摩洛哥），马拉喀什，摩洛哥；

2026年2月5日

摘要

我们提出一类势函数 $q\colon\ \mathbb{R}^n \to (0,\ \infty)$，该类势函数保证<目标加权薛定谔半群 $\varphi^{-1}e^{-tH}\varphi$ 在每个时间 $t > 0$均通过对数 *Sobolev* 不等式将加权勒贝格函数空间$L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$连续地映射到加权勒贝格函数空间 $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$，其中 $H = -\Delta + q(x)$具有严格正的基态 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^n \to (0,\ \infty)$。我们利用 e^{-tH} 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的自伴性来推断出内在超收缩性，即：

$$\forall t > 0\ \exists C_t > 0\ :\ \left|e^{-tH}u(x)\right|\ \leq\ C_t\varphi(x)\|u\|_2$$

对每个 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$，在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立。

目录

1 引言 2 1.1 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的内在超收缩性.2 1.2 历史背景.3 1.3 本文的研究动机.4 2 定义与准备 5 3 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 e^{-tH} 的内在超收缩性 8 4 定理 3.1 的证明 8 4.1 $e^{-tH} \in \mathcal{B}\left(L^1_\mu(\mathbb{R}^n), L^2_\mu(\mathbb{R}^n)\right)$ .8 4.2 $e^{-tH} \in \mathcal{B}\left(L^1_\mu(\mathbb{R}^n), L^2_\mu(\mathbb{R}^n)\right)$ 的对偶论证.11

5 结论 11 A Agmon 版本的比较原理 12

1 引言

1.1 $L^2(\mathbb{R}^n)$中的内在超收缩性

量子系统在 $\mathbb{R}^n$ 中对应的哈密顿算子，是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的形式算子 $H = -\Delta + q(x)$，其中 $n \geq 3$ 为维数，且 $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$。我们关注 q 势函数，它们在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且非负，并满足存在唯一的严格正特征函数 φ，对应于 H 的最低特征值 E_0，该特征函数称为系统的基态。我们给出 q 的一个增长条件，该条件蕴含 φ 的*Rosen* 不等式，即

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma(\varepsilon) > 0 \ : \ -\ln(\varphi(x)) \ \leq \ \varepsilon q(x) + \gamma(\varepsilon) \tag{1}$$

对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$。虽然这些不等式本身并没有特别有趣之处，但它们可以推出对数 *Sobole*夫不等式，这对证明薛定谔半群 e^{-tH}的内在超收缩性至关重要，即

$$\forall t > 0 \ \exists C_t > 0 \ : \ \left|e^{-tH}u(x)\right| \ \leq \ C_t\varphi(x)\|u\|_2 \tag{2}$$

对于每个 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$，在 $\mathbb{R}^n$上几乎处处成立。注意，在每个时间 $t > 0$，此时 $e^{-tH}u$ 的渐近行为都由基态 φ 主导。特别地，对于算子 H 的归一化特征函数 v，我们得出

$$\exists C_\lambda > 0 \ : \ |v(x)| \leq C_\lambda\varphi(x) \tag{3}$$

几乎处处，其中 λ 是 v 的相应特征值。请记住，在量子物理中，特征函数被描述为系统在某一能级 λ 下电子位置的概率密度函数 H。不过，除了量子力学之外，我们也可以将内在超收缩性理解为对自由薛定谔半群生成元 $-\Delta$ 的扰动结果，其定义如下：

$$e^{t\Delta}u(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)\ dy \tag{4}$$

对于 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$。由于高斯积分核$\mathrm{e}^{t\Delta}$ 在$\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 中是压缩映射，对每个 $p \in [1,\infty]$ 都成立，并且还将$\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 连续地映射到$\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 \le p < q \le \infty$。对于 $H = -\Delta + q(x)$ 这一情形，我们引用第 110 页引理 4.2.2 中对内在超收缩性的如下刻画 [4]。

引理 1.1。 薛定谔半群 e^{-tH} 具有内在超收缩性，当且仅当对每个时间 $t > 0$，以下两个条件均成立

i) $\mathrm{e}^{-tH}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t,x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立，且对 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$

ii) $\exists C_t > 0:\quad 0 \le k(t,x,y) < C_t\ \varphi(x)\ \varphi(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中几乎处处成立

对于满足 q 的势函数 $q(x) > |x|^2$ 对几乎每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 推论 A.4 可推出$\varphi(x) \le K\mathrm{e}^{-|x|}$，其中常数为 $K > 0$，并且 $x \in \mathbb{R}^n$。因此，在内在超收缩性的情形下，e^{-tH}的积分核确实具有与 $\mathrm{e}^{t\Delta}$ 某些相似的映射性质。

1.2 历史背景

薛定谔半群的内在超收缩性和内在超收缩性的首批结果可追溯到20世纪70年代，正如文献 [5]第336页所述。然而，直到20世纪80年代中期，人们普遍认为，$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的薛定谔半群不可能具有内在超收缩性。一个简单的例子是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的量子谐振子 $H = -\Delta + |x|^2$；只需比较特征函数与基态的渐近行为，就很容易看出 e^{-tH}不具有内在超收缩性。然而，文献 [5] 证明，对于接近 $|x|^2$ 的势函数（例如 $H = -\Delta + |x|^\beta$ 中的势函数，或任意 $\beta > 2$ 下的 $H = -\Delta + |x|^2\,(\ln(|x|+2))^\beta$ ），e^{-tH} 具有内在超收缩性。文献 [4] 还给出了更多例子，并深入研究了 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中薛定谔半群的内在超收缩性。对于边界足够光滑的有界区域$D \subset \mathbb{R}^n$，Banuelos [3] 于1990年证明了 $\mathrm{L}^2(D)$ 中薛定谔半群的内在超收缩性。21世纪初，B. Alziary 和 P. Takáč 在文献 [2] 中重新开展了关于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中内在超收缩性的早期研究，这成为文献 [7] 的起点；该文证明，对于满足 q 的势函数 $\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$，$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 e^{-tH} 具有内在超收缩性，其中

$$d\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\ f_{k,m}\left[\ln\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right] \le q(x) \le Q\left(|x|\right) \tag{5}$$

对于较大的 $|x|$, $d \in (0,1]$ 以及辅助函数

$$f_{k,m}(t) = \left(\ln^{(m)}(t)\right)^k \prod_{p=0}^{m-1} \ln^{(p)}(t)$$

对于 $k > 1$和 $m \in \mathbb{N}$ 以及较大的 t.[1] 此外，上边界函数Q: $[0,\infty) \to (0,\infty)$ 满足 $Q'(r)/Q(r)^{-3/2} \to 0$，其中 $r \to \infty$。例如

[1]请注意，$\ln^{(m)}$ 用于对数函数的第 m 次迭代，即

$$\ln^{(m)}(r) = \underbrace{\ln(\ldots(\ln(r))\ldots)}_{m\text{-times}}$$

此类 Q 在引理 3.3 中由下式给出

$$|x|^{\alpha}, |x|^2 (\ln |x|)^{\alpha}, |x|^2 (\ln |x|)^2 (\ln \ln |x|)^{\alpha}$$

对 $\alpha > 2$ 依此类推。

1.3 本文的研究动机

本文旨在降低内在超收缩性所需的势函数增长条件，同时阐明该性质背后的解析机制。

我们基于 [7], 的最新结果，其中薛定谔半群 e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 上的内在超收缩性是在涉及迭代对数之积的增长条件下建立的。相比之下，我们表明这些乘积结构是证明方法的结果，而非底层设定的结果。

更确切地说，我们证明了具有满足以下条件的非负势函数的薛定谔算子
$H = -\Delta + q(x)$的内在超收缩性

$$d \left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t \right) \left(\ln^{(m)} \left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t \right) \right)^k \leq q(x) \leq Q(|x|), \tag{6}$$

对于充分大的 $|x|$，其中 $d \in (0, 1]$、$k > 0$、$m \in \mathbb{N}$，并且 Q 是一个辅助函数，满足对 $r \to \infty$ 有 $Q'(r)/Q(r)^{-3/2} \to 0$。与 [7] 相比，q 的下边界更低且显著更简单，其中该乘积

$$\prod_{p=0}^{m-1} \ln^{(p)}(t)$$

早期研究中出现的条件不再需要，尤其是参数$k \in (0, 1)$现在也可以取值。

本文的关键见解是，这种简化并非偶然，而是源于对内在超收缩性的一种不同的解析视角。我们不再沿用经典路径（例如 [5], 所提出的路径），而是采用一种基于对偶的方法。我们仍然引入加权勒贝格空间 $\mathrm{L}^p_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 和加权薛定谔半群

$$\mathrm{e}^{-t\tilde{H}} = \frac{1}{\varphi} \mathrm{e}^{-tH} \varphi$$

不过，我们证明，我们这一类势函数 q 使加权薛定谔半群算子能够连续地将 $\mathrm{L}^1_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 映射到 $\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$。随后，$\mathrm{e}^{-tH}$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的自伴性给出了 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中的内在超收缩性。

在这一框架下，从 L^1_{μ} 到 L^2_{μ} 的过渡体现了半群的核心正则化效应，而更强的 $\mathrm{L}^2_{\mu} \to \mathrm{L}^{\infty}$ 界则可由对偶性自然推出。尽管对数 Sobolev 不等式在分析中仍发挥作用，但本方法避免了经典方法固有的若干技术层次。因此，证明更加简短、清晰，也表明以往施加的限制性对数乘积条件并非内在超收缩性的根本特征，而只是 $\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^{\infty}$ 策略带来的产物。

2 定义与准备

我们考虑薛定谔算子 H 和基态 φ，如第 2 节所述，以及薛定谔半群e^{-tH}，定义在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$，如 [7]第5节所述。特别地，我们使用加权薛定谔半群

$$\left(\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\right)(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\,\mathrm{e}^{-tH}(\varphi u)(x) \tag{7}$$

在加权勒贝格空间 $\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中（ $p\in[1,\infty)$），相关内容也见于[7]的第5节。本文的目标是给出势函数 q 的一个特定增长条件： $\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ 的 $H=-\Delta+q(x)$，该条件可推出薛定谔半群 e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 中具有内在超收缩性。

设 $Q\colon [0,\infty)\to(0,\infty)$ 单调递增，且满足 $r^2<Q(r)$；设 $k>0, m\in\mathbb{N}$ 和 $R_m>0$ 为一个半径，使得

i.) Q 在 (R_m,∞) 上可微，

ii.) 对于 $r\to\infty$，$Q'(r)Q(r)^{-\frac{3}{2}}\to 0$，并且

iii.) $\forall r>R_m\ :\ r^2<\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)^k<Q(r).$

引理2.1。 设 Q 如上所述，并设 $q\colon\ \mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ 连续且满足

$$d\left(\int_0^{|x|}Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^{|x|}Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)^k\ \le\ q(x)\ \le\ Q(|x|)$$

对于 $d\in(0,1)$ 以及任意 $|x|\ge R_m$。于是 φ 满足 *Rosen* 不等式，即

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\gamma(\varepsilon)>0\ :\ -\ln\left(\varphi(x)\right)\ \le\ \varepsilon q(x)+\gamma(\varepsilon) \tag{8}$$

对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$。

注2.2。

i.) 注意， q 在引理 2.1 中的下边界函数比 [7] 中的小得多，也简单得多，但对于e^{-tH}的内在超收缩性而言仍然足够。因此， Q 在 [7] 中的引理3.7所列出的所有例子也满足引理 2.1 。

ii.) 引理2.1 还涵盖了与 Q 更接近的辅助势函数 r^2，例如

$$Q(r)=r^2\left(\ln^{(n)}(r)\right)^l$$

当 $n\in\mathbb{N}, l>0$ 且 r 足够大时。通过简单计算可得，$Q'(r)Q(r)^{-\frac{3}{2}}\to 0$ 对 $r\to\infty$成立。此外，注意到

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t}=\lim_{r\to\infty}\frac{2r}{r\left(\ln^{(n)}(r)\right)^{l/2}}=0$$

由洛必达法则可知。因而可推出，当 r 足够大时，$r^2 < \int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ 成立。根据 Q 的单调性，我们可以论证

$$\frac{\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t}{Q(r)} \leq \frac{rQ(r)^{1/2}}{Q(r)} = \frac{r}{Q(r)^{1/2}}$$

并且 $\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)\right)^k \leq \left(\ln^{(m)}\left(rQ(r)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^k$ 成立。因此我们得出

$$\frac{\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t}{Q(r)}\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)^k$$

当 $r\to\infty$ 且选择 $k\in(0,l/2)$ 和 $m\geq n$ 时收敛到 0，因为

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t}{Q(r)}\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)^k &\leq \frac{r}{Q(r)^{1/2}}\left(\ln^{(m)}\left(rQ(r)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^k \leq \frac{\left(\ln^{(m)}\left(r^{2+l/2}\right)\right)^k}{\left(\ln^{(n)}(r)\right)^{l/2}}\\ &\leq \frac{2^k\left(\ln^{(m)}(r)\right)^k}{\left(\ln^{(n)}(r)\right)^{l/2}} \leq 2^k\left(\ln^{(n)}(r)\right)^{k-l/2}\end{aligned}$$

当 r 足够大时成立。注意，我们对较大的 r 使用了 $\ln^{(m)}\left(r^{2+l/2}\right)\leq 2\ln^{(m)}(r)$，这需要加以证明。注意到

$$\ln^{(2)}\left(r^{2+l/2}\right) = \ln(2+l/2) + \ln^{(2)}(r) \leq 2\ln^{(2)}(r)$$

利用对数在 $(0,\infty)$ 上的单调性，可知当 r 足够大时，$\ln^{(3)}\left(r^{2+l/2}\right)\leq \ln(2) + \ln^{(3)}(r) \leq 2\ln^{(3)}(r)$。迭代地可推出，当 r 足够大时，$\ln^{(m)}\left(r^{2+l/2}\right)\leq 2\ln^{(m)}(r)$ 成立。因此我们还证明了

$$\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^r Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\right)^k < Q(r)$$

当 r、$k\in(0,l/2)$和 $m\geq n$充分大时成立。

引理*2.1*的证明。利用 [7] 中第4.1小节，对 $\psi(x) = \exp\left(-\sqrt{2}\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)$，就 $x\in\mathbb{R}^n$而言，不等式

$$-\ln(\varphi(x)) \leq \sqrt{2}\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t + C \tag{9}$$

对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 都成立，其中 $C>0$ 是一个常数。现在，我们使用递增函数的标准形式杨氏不等式来纳入 $\varepsilon>0$。对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 和 $k>0$，我们定义 $f_{k,\,m}\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ 如下：

$$f_{k,m}(q) = \begin{cases}\left(\ln^{(m)}(q)\right)^k, & r_m\leq q\\ q/r_m, & 0\leq q<r_m\end{cases}$$

其中 $r_m = $ 指数函数$^{(m)}(1)$。[2] 令 $g_{k,\ m}$ 为 $f_{k,\ m}$ 在 $[0,\infty)$ 上的反函数。于是

$$ab \ \leq \ \int_0^a f_{k,m}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b g_{k,m}(t)\,\mathrm{d}t \ \leq \ af_{k,m}(a) + bg_{k,m}(b)$$

对每个 $a, b > 0$ 都成立。定义 $a = \int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$ 和 $b = \frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}$，从而得出

$$\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t \ \leq \ \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\right)^k + g_{k,m}\left(\frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}\right) \quad (10)$$

当 $|x|$ 足够大时。于是我们推得

$$\begin{aligned}
-\ln\left(\varphi(x)\right) \ &\leq \sqrt{2}\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t + C \\
&\leq d\varepsilon\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\left(\ln^{(m)}\left(\int_0^{|x|} Q(t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t\right)\right)^k + \sqrt{2}\ g_{k,m}\left(\frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}\right) + C \\
&\leq \varepsilon q(x) + \underbrace{\sqrt{2}\ g_{k,m}\left(\frac{\sqrt{2}}{d\varepsilon}\right) + C}_{=\gamma(\varepsilon)}
\end{aligned}$$

对每个 $|x| > R_m$ 都成立。注意，假设 R_m 足够大，是为了不必在论证中再引入一个更大的半径。由于 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集 $B_{R_m}(0)$ 上连续，我们可以断定

$$\varphi(x) \geq \min_{y\in\overline{B_{R_m}(0)}} \varphi(y) = \delta_0 > 0$$

对每个 $x \in B_{R_m}(0)$ 都成立，因为 $\varphi(x) \ > 0$对每个 $x \in \overline{B_{R_m}(0)}$。请参见 [7]中的引理2.1和引理2.2。因此，我们选取 C 足够大，使得 Rosen 不等式（8）成立。

□

接下来，我们引用 [7] 第5.3小节中的 Rosen 引理，以便稍后论证 $\{p \mapsto \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{p,\mu}\}$ 的单调性，其中 $u \in D(\tilde{H}) \cap \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负。

引理2.3 (Rosen 引理)。

设 Q 和 q 如引理 2.1中所述。那么对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $u \in D(H) \cap \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$在 $\mathbb{R}^n$ 对数 *Sobolev* 不等式中几乎处处非负

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u(x)\right)^p\ \ln\left(\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u(x)\right)\mathrm{d}\mu(x) \leq \\
&\varepsilon\ \langle\tilde{H}\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u, (\ \mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\ )^{p-1}\rangle_\mu + \frac{2\beta(\varepsilon)}{p}\ \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|^p_{p,\mu} + \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|^p_{p,\mu}\ln\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{p,\mu}
\end{aligned}$$

可推出 $\beta\ (\varepsilon)\ = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{n}{4}\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \gamma\ \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\ + C$，其中 $C \in \mathbb{R}$ 为常数。

[2] Mind that $\exp^{(m)}(1) = \underbrace{\exp\left(\exp\left(\ldots\left(\exp(1)\right)\ldots\right)\right)}_{m-times}$.

3 e^{-tH} 在$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$中的内在超收缩性

定理 3.1。 对于势 q （如引理*2.1* 中所定义），薛定谔半群e^{-tH} 在 L^2（$\mathbb{R}^n$）中是内禀超收缩的，即

$$\forall t>0 \exists C_t>0 \ : \ \left|\mathrm{e}^{-tH}u(x)\right| \ \leq \ C_t\|u\|_2 \ \varphi(x) \tag{11}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中对每个 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 几乎处处成立。

注意， $|x|^2 \ < \ q(x)$ 对每个 $|x| \geq R$ 均成立，因此使用推论 A.5。

推论3.2。 对于满足定理*3.1* 中条件的势 q ，我们进一步得到

$$\forall t>0 \exists C_t>0 \ : \ \left|\mathrm{e}^{-tH}u(x)\right| \ \leq \ C_t \ \|u\|_2 \ \mathrm{e}^{-|x|} \tag{12}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中对每个 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 几乎处处成立。

4 定理3.1 的证明

˜**4.1** $\mathrm{e}^{-tH} \in \mathcal{B}\left(\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n), \ \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)\right)$

˜任取并固定 $t>0$ 。本小节证明， e^{-tH} 从加权勒贝格空间 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 连续映射。

˜i.) 设 $u \in D(H) \cap \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处非负，并定义p: $[0,t] \to [1,2]$ 为 $p(s) = 1+s/t$。利用 [4]第64页上的引理2.2.2，我们得出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|^{p(s)}_{p(s),\mu}\\ &= \ p(s)\langle -\tilde{H}\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u, \left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right)^{p(s)-1}\rangle_\mu + p'(s)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x)\right)^{p(s)}\ln\left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x)\right)\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

˜对每个 $s \in [0,t]$。请记住， $\mathrm{e}^{-sH}u \in \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ 对每个 $s \in [0,t]$ 都成立，因此 $\mathrm{e}^{-sH}u$ 属于 $\mathrm{L}^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ 对每个 $p \in [1,\infty)$ 因为 μ是一个概率测度。下面引入一个形式上定义的辅助函数N: $[0,t] \to \mathbb{R}$ 稍后将结合引理2.3 的对数 Sobolev 不等式来定义它。其导数

$$\ln\left(\ \mathrm{e}^{-N(s)}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu}\ \right) = -N(s) + \frac{1}{p(s)}\ln\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|^{p(s)}_{p(s),\mu}$$

等于

$$-N'(s) - \frac{p'(s)}{p(s)} \ \ln\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu} + \frac{1}{p(s)} \ \left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{-p(s)}_{p(s),\mu} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|^{p(s)}_{p(s),\mu}.$$

因此，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\left(\mathrm{e}^{-N(s)}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu}\right)=$$
$$\frac{p'(s)}{p(s)\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu}^{p(s)}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x))^{p(s)}\ln\left(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u(x)\right)\mathrm{d}\mu(x)-\frac{p(s)}{p'(s)}\left\langle\tilde{H}\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u,(\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u)^{p(s)-1}\right\rangle_{\mu}\right.$$
$$\left.-\frac{N'(s)p(s)}{p'(s)}\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu}^{p(s)}-\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu}^{p(s)}\ln\left\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\right\|_{p(s),\mu}\right\}$$

对每个 $s\in[0,t]$ 其中 $p(s)/p'(s)=s+t>0$。我们使用对数 Sobolev˜不等式 H 以及 Rosen 引理 2.3 中使用 $p(s)/p'(s)$ 作为 ε 并定义

$$N(s)=2\int_0^s\frac{\beta(\frac{p(r)}{p'(r)})}{p(r)^2}\,p'(r)\,\mathrm{d}r=2\int_0^s\frac{\beta\,(r+t)}{(r+t)\,(1+r/t)}\,\mathrm{d}r \tag{13}$$

3对于 $s\in[0,t]$，当 $\beta(r+t)=\frac{r+t}{2}-\frac{n}{4}\ln\left(\frac{r+t}{2}\right)+g_{k,\,m}(d^{2^2}(r+t))+C$ 时。然后

$$N'(s)\,\frac{p(s)}{p'(s)}=\frac{2\beta(p(s)/p'(s))}{p(s)}$$

3对每个 $s\in[0,t]$ 都成立。此外，$g_{k,\,m}(d^{2^2}(r+t))$ 在 $r\in[0,t]$ 上有界，因为

$$0<g_{k,m}\left(\frac{\sqrt{2}}{dt}\right)\leq g_{k,m}\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{d(r+t)}\right)\leq g_{k,m}\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{dt}\right)<\infty$$

由于 $g_{k,\,m}$ 在 $[0,\infty$ 上严格单调递增，因此该结论成立。于是积分

$$\int_0^s\frac{\beta\,(r+t)}{(r+t)\,(1+r/t)}\,\mathrm{d}r$$

对每个 $s\in[0,t]$ 都存在，这使得 N 成为定义良好的函数。定义辅助函数 N 后，我们只需使用 Rosen 引理 2.3 即可得出结论

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\left(\mathrm{e}^{-N(s)}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\mu}\right)\leq 0 \tag{14}$$

对每个 $s\in[0,t]$ 都成立。因此，$\left\{s\mapsto\mathrm{e}^{-N(s)}\|\mathrm{e}^{-s\tilde{H}}u\|_{p(s),\,\mu}\right\}$ 在 $[0,t]$ 上单调递减，从而

$$\mathrm{e}^{-N(t)}\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{2,\mu}\leq\mathrm{e}^{-N(t)}\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{p(t),\mu}\leq\mathrm{e}^{-N(0)}\|u\|_{p(0),\mu}=\|u\|_{1,\mu}$$

˜成立。我们来总结证明中的第一个结果。对于 $u\in D(H)\cap\mathrm{L}^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负的情形，我们已经证明

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{2,\mu}\;\leq\;\underbrace{\mathrm{e}^{N(t)}}_{=C_t}\|u\|_{1,\mu}. \tag{15}$$

ii.) 设 $u \in \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$在 $\mathbb{R}^n$中几乎处处非负。则可推出 $\varphi u \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$，因此存在一个序列$(v_k) \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$，使得每个 v_k 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负，并且对 $k \to \infty$， $v_k \to \varphi u$ 在 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$中成立。我们对每个 $k \in \mathbb{N}$定义 $u_k = v_k/\varphi$。那么，根据定义， $\varphi u_k = v_k \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \subset D(H)$蕴含$u_k \in D(H)$；此外，由于 v_k 在 $\mathbb{R}^n$ 中具有紧支集，且 φ在 $\mathbb{R}^n$中连续且严格正，因此 $v_k/\varphi \in \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$成立。请参见 [7]中的引理2.1和引理2.2。另

$$\|u_k - u\|^2_{2,\mu} = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)u_k(x) - \varphi(x)u(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |v_k(x) - \varphi(x)u(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

收敛到 0，这意味着 $\mathrm{e}^{-tH}u_k$在 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 $\mathrm{e}^{-tH}u$。注意，由于 μ是概率测度， u_k也在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 u，因为在 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛意味着在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛。综上，

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{2,\mu} = \lim_{k\to\infty} \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u_k\|_{2,\mu} \le C_t \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{1,\mu} = C_t\|u\|_{1,\mu} \tag{16}$$

i对于每个在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负的 $u \in \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$，都满足 s .

iii.) 设 $u \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负。注意，$\mathrm{e}^{-tH}u \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 成立，但此时我们无法确认 $\mathrm{e}^{-tH}u \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$。我们定义 $u_k = 1_{\{u\le k\}}u \in \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$。于是，$(u_k)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处逐点收敛到 u，且 $|u_k(x) - u(x)| \le u(x)$。因此，根据勒贝格定理，(u_k) 在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 u。注意，由于 e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中是压缩，故可推出 $\mathrm{e}^{-tH}u_k \to \mathrm{e}^{-tH}u$ 在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中成立。但这并不一定意味着在 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中收敛。请注意，$\mathrm{e}^{-tH}u_k \in \mathrm{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ 包含于 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$，因此根据 (16)，$(\mathrm{e}^{-tH}u_k)$ 是 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中的柯西序列。故极限$h = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{-tH}u_k$属于 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$。于是，由于 μ是概率测度，可推出 $h \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$。从

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u - h\|_{1,\mu} &\le \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u - \mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u_k\|_{1,\mu} + \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u_k - h\|_{1,\mu} \\ &\le \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u - \mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u_k\|_{1,\mu} + \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u_k - h\|_{2,\mu}\end{aligned}$$

由此得出 $\mathrm{e}^{-tH}u = h$，因此 $\mathrm{e}^{-tH}u \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$，其中

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{2,\mu} = \lim_{k\to\infty} \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u_k\|_{2,\mu} \le C_t \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{1,\mu} = C_t\|u\|_{1,\mu} \tag{17}$$

对于每个在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处非负的 $u \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$，均有。

iv.) 对于在 $\mathbb{R}^n$ 中实值但不一定几乎处处非负的 $u \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$，记 $u = u^+ - u^-$ 为 $0 \le u^+ \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$，并将 $0 \le u^- \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 记为 u 的正部和负部。由此得出

$$\|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u\|_{2,\mu} \le \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u^+\|_{2,\mu} + \|\mathrm{e}^{-t\tilde{H}}u^-\|_{2,\mu} \le C_t\left(\|u^+\|_{1,\mu} + \|u^-\|_{1,\mu}\right) = C_t\|u\|_{1,\mu}.$$

v.) 对于一般的 $u \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$，我们通过写成 $u = \mathrm{Re}\, u + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, u$来采用与上面类似的论证，其中 $\mathrm{Re}\, u$和 $\mathrm{Im}\, u$在 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中是实值的。因此，加权薛定谔半群算子 e^{-tH} 将 $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ 连续地映入 $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}^n)$。

˜注 4.1. 注意，利用下述方法，同样的论证可以证明，对于任意 $1 \le q_1 < q_2 < \infty$ ， e^{-tH} 都将 $\mathrm{L}^{q_1}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 连续地映入 $\mathrm{L}^{q_2}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$

$$p(s) = \frac{s}{t} q_2 + \left(1 - \frac{s}{t}\right) q_1$$

for $s \in [0, t]$。于是， p 严格单调递增，且 $p(0) = q_1$ ， $p(t) = q_2$.

˜4.2 对$\mathrm{e}^{-tH} \in \mathcal{B}\left(\mathrm{L}^1_{\mu}(\mathbb{R}^n), \mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)\right)$的对偶论证

˜$\mathrm{e}^{-tH} \in \mathcal{B}\left(\mathrm{L}^1_{\mu}(\mathbb{R}^n), \mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)\right)$ 的伴随算子 $S(t)$ 将 $\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 连续映射到 $\mathrm{L}^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n)$，并满足

$$\|S(t)u\|_{\infty,\mu} \le C_t \|u\|_{2,\mu}$$

˜对每个 $u \in \mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 均成立。我们必须证明这两个算子 $S(t)$ 和 e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 中相等。因此，令 $u, v \in \mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$。请记住，$\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 包含于 $\mathrm{L}^1_{\mu}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$S(t)v \in \mathrm{L}^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$$

由于 μ是概率测度。因此我们得到

$$\langle u, \mathrm{e}^{-t\tilde{H}} v \rangle_{\mu} = \langle \mathrm{e}^{-t\tilde{H}} u, v \rangle_{\mu} = \langle u, S(t)v \rangle_{\mu} \tag{18}$$

˜成立，其中第一个等式用到了 e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 中的自伴性，而在第二个等式中，我们将 u 视为 $\mathrm{L}^1_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素。算子 $S(t)$ 和˜e^{-tH} 在 $\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ 中相等，这意味着

$$\left|\mathrm{e}^{-tH}(\varphi u)(x)\right| \le C_t \varphi(x) \|\varphi u\|_2 \tag{19}$$

˜对每一个 $u \in \mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$ ，根据e^{-tH}的定义。最后令 $u = v/\varphi$ 对 $v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$成立，即证明了定理3.1。

5 结论

在本文中，我们建立了薛定谔半群e^{-tH} 在$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$上一大类非负势函数 q 的内在超收缩性。

本工作基于对偶性论证，给出了e^{-tH} 内在超收缩性的一个新证明，其结果甚至优于[7]。特别地，我们证明加权薛定谔半群从$\mathrm{L}^1_{\mu}(\mathbb{R}^n)$到$\mathrm{L}^2_{\mu}(\mathbb{R}^n)$的映射是连续的，从而由自伴性可得内在超收缩性。

这种方法不仅简化了对势函数q施加的增长假设，从而允许采用范围更广的参数 $k > 0$，还为研究加权薛定谔半群的压缩性质提供了更稳健的分析框架。

Agmon 版本的比较原理

令 h 表示第2节中引入的二次型，并令 H 表示与之关联的自伴算子，作用于$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$。

定义 A.1. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开集。

a) h 在 U 上的局部型域 定义为

$$D^U_{\mathrm{loc}}(h) := \left\{ u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(U) \;\middle|\; \chi u \in D(h) \text{ for all } \chi \in C_c^\infty(U) \right\}. \tag{20}$$

换言之， $D^U_{\mathrm{loc}}(h)$ 由所有局部属于 h 型域的函数组成。

b) 一个函数 u 称为 U 中 H 的上解，其能量为 E，如果 $u \in D^U_{\mathrm{loc}}(h)$ 并且

$$h(u,\xi) - E\langle u,\xi\rangle \geq 0 \tag{21}$$

对于所有非负测试函数 $\xi \in C_c^\infty(U)$。这里，表达式 $h(u,\xi)$ 在弱意义下理解为

$$h(u,\xi) = \langle \nabla u, \nabla \xi\rangle + \langle q(x)u, \xi\rangle,$$

即使 $u \notin D(h)$ 也是如此。

c) 若函数 u 满足 $u \in D^U_{\mathrm{loc}}(h)$，且

$$h(u,\xi) - E\langle u,\xi\rangle \leq 0 \tag{22}$$

对于所有非负测试函数 $\xi \in C_c^\infty(U)$。

以下结果是 Agmon 提出的比较原理的一个变体，对应于 [6] 中的定理 2.7。

定理 A.2 (Agmon 型比较原理)。 设 $R > 0$，且令 u 为 H 的严格正上解，其在无穷远邻域中的能量为 E，也就是说，在

$$\Omega_R := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R\}.$$

假设 v 是 H 的下解，且定义在 Ω_R 中，并且具有相同的能量 E，同时

$$\liminf_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N^2} \int_{N\leq|x|\leq\alpha N} |v(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right) = 0 \tag{23}$$

对于某个 $\alpha > 1$。

如果存在常数 $\delta > 0$ 和 $C \geq 0$，使得

$$v(x) \leq C u(x) \tag{24}$$

对于几乎处处的 x （其中 $R < |x| \leq R + \delta$），则不等式

$$v(x) \leq C u(x)$$

对几乎所有的 $x \in \Omega_R$ 都成立。

注 A.3。

i.) 在原始形式中， [1]Agmon 假设上解 u 和下解 v 在 Ω_R 中均连续。然而，附加假设u 和 v 连续，仅仅是为了保证条件（24）对某个常数 $C = c_2/c_1$ 且满足 $c_1 = \inf_{R\le|x|\le R+\delta} u(x)$ 和 $c_2 = \sup_{R\le|x|\le R+\delta} |v(x)|$以及任意 $\delta > 0$成立。详情请参见 [6] 中的第 12 页注 2.9。

ii.) 此外，对于 $v \in L^2(\Omega_R)$ 条件 (23) 已经成立。

请注意，我们考虑满足 q 条件 $|x|^2 < q(x)$ 对每个 $R < |x|$都成立的薛定谔势。利用定理 A.2 我们能够确定基态 φ 的渐近行为，其中 H。

推论 A.4. 令 q 满足 $|x|^2 \le q(x)$，其中 $R < |x|$ 且给定半径 $R > 0$。此外，令 $E_0 = \min(\sigma(H)) \ge 0$ 为 H 的基态能量，且其基态 φ连续且严格正。那么存在常数 $C > 0$，使得

$$\varphi(x) \le Ce^{-|x|} \tag{25}$$

对每个 $x \in \mathbb{R}^n$都成立。

证明. i.) 我们使用定理 A.2。因此，请注意，对于任意半径 $r > 0$， $\varphi \in D(H) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ 是 H 的下解，其在 Ω_r 中的能量为 E_0。我们将使用 $|x|^2 \le q(x)$，其中 $R < |x|$，来定义 H的一个正且连续的上解u: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其在 $\Omega_{\tilde{R}}$ 中满足 E_0，对应半径 $R > R$。于是 φ 满足条件 (23)，因为它包含于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中。此外，由于 φ 和 u 的连续性，根据注 A.3，条件 (24) 成立。因此存在常数 $K \ge 0$，使得

$$\varphi(x) \le Ku(x)$$

对每个 $x \in \Omega_{\tilde{R}}$。

ii.) 我们关注以下特征值不等式的解

$$0 \le \left(-\Delta + |x|^2\right) u(x) - E_0 u(x) \tag{26}$$

对于半径 $R > 0$ 和 $|x| \ge R$。现在的思路是找到一个 $\beta \in \mathbb{R}$ 使得$u(x) = \exp\left(-|x|^\beta\right)$ 是（26）的解。稍微滥用一下记号，我们写作 $u(r) = \exp\left(-r^\beta\right)$ 并考虑径向薛定谔不等式

$$\begin{aligned} 0 &\le -u''(r) - \frac{n-1}{r}u'(r) + r^2 u(r) - E_0 u(r) \\ &= u(r)\left(-\beta^2 r^{2(\beta-1)} + \beta(\beta - 2 + n)\, r^{\beta-2} + r^2 - E_0\right). \end{aligned}$$

我们选取 $\beta = 1$ 使得 $u(x) = e^{-|x|}$ 满足（26），其中 $|x| \ge (1 + E_0)^{\frac{1}{2}}$。

iii.) 令 $\tilde{R} = \max\left(R, (1+E_0)^{\frac{1}{2}}\right)$ 和 $\xi \in C_c^\infty(\Omega_{\tilde{R}})$ 均为非负数。则

$$0 \leq \langle \left(-\Delta + |x|^2 - E_0\right) u, \xi \rangle \leq \langle (-\Delta + q(x) - E_0)\, u, \xi \rangle = h(u,\xi) - E_0 \langle u, \xi \rangle \quad (27)$$

由此可知存在常数 $K \geq 0$ 使得 $\varphi(x) \leq K \mathrm{e}^{-|x|}$ 成立。对每个 $x \in \Omega_{\tilde{R}}$ 根据定理 A.2。注意，对于 $|x| \leq R$ 我们可得

$$\varphi(x) \leq \max_{|x| \leq \tilde{R}} \varphi(x) =: m \leq m \mathrm{e}^{\tilde{R}}\, \mathrm{e}^{-|x|}.$$

因此，$\varphi(x) \leq (K + m\mathrm{e}^{R})\, \mathrm{e}^{-|x|}$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。

□

对于给定的内在超收缩性 e^{-tH}（其中 $|x|^2 < q(x)$ 对每个 $R < |x|$ 都成立），$\mathrm{e}^{-tH}u$ 的渐近行为由每个时间 t 处的 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 决定。

推论 A.5。设 q 满足 $|x|^2 \leq q(x)$，其中 $R < |x|$ 且半径为 $R > 0$。此外，设薛定谔半群 e^{-tH} 具有内在超收缩性。那么，对每个 $t > 0$，存在常数 $C_t > 0$ 满足

$$\left|\mathrm{e}^{-tH} u(x)\right| \leq C_t\, \mathrm{e}^{-|x|} \|u\|_2 \quad (28)$$

对每个 $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 以及几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$。

参考文献

[1] Shmuel Agmon。薛定谔算子特征函数指数衰减的界限。第 1–38 页，1985 年。[2] Bénédicte Alziary 和 Peter Takáč。 $\mathbb{R}^N$ 中薛定谔半群的内在超收缩性。《泛函分析杂志》，256(12):4095–4127，2009 年。[3]Rodrigo Bañuelos。薛定谔算子的内在超收缩性与特征函数估计。《泛函分析杂志》，100(1):181–206，1991 年。[4] Edward Brian Davies。热核与谱理论。剑桥大学出版社，2007 年。[5] Edward Brian Davies 和 Barry Simon。薛定谔算子与狄利克雷拉普拉斯算子的超收缩性及热核。《泛函分析杂志》，59(2):335–395，1984 年。[6] Dirk Hundertmark、Michal Jex 和 Markus Lange。临界边缘的量子系统：束缚态的存在性、临界势与维数。《数学论坛：*Sigma*》，11:e61，2023 年。[7] Christoph Schwerdt、Alexander Mill 和 Dirk Hundertmark。利用对数 Sobolev 不等式证明一类薛定谔半群的内在超收缩性，定义于 $L^2(\mathbb{R}^n)$。2025 年。