arXiv:2602.04777v1 [math.AP] 4 Feb 2026

黎曼曲面上一般 Toda 系统的爆破解

Zhengni Hu 与 Miaomiao Zhu

2026年2月5日

摘要

本文研究黎曼曲面上具有齐次 Neumann 边界条件的一般 Toda 系统。在曲面满足“k-对称”条件的假设下，我们利用奇异摄动方法构造了一族冒泡解，其中不同分量的集中速率以不同的阶出现。特别地，我们证明了 $SU(3)$ Toda系统非对称爆破解的存在性。此外，爆破点精确地位于曲面的“k-对称”中心。

关键词 Toda系统，Neumann 边界条件，爆破解， k-对称性，有限维约化

2020 年数学学科分类 主要分类：35J20、35J57；次要分类：35J61。

1 引言

给定一个带有光滑边界 $\partial\Sigma$ （可能为空）的黎曼曲面（Σ, g）和一个正整数 $N \geq 2$，我们考虑以下满足齐次Neumann边界条件的 Toda系统

$$\begin{cases} -\Delta_g u_1 = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\rho_j \left(\frac{V_j e^{u_j}}{\int_\Sigma V_j e^{u_j} dv_g} - \frac{1}{|\Sigma|_g} \right) & \text{in } \mathring{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g} u_1 = \cdots = \partial_{\nu_g} u_N = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}, \tag{1}$$

其中， $\mathring{\Sigma} = \Sigma \setminus \partial\Sigma$ 是 Σ的内部， ν_g 是$\partial\Sigma$上的外单位法向量， Δ_g 是Laplace-Beltrami算子， dv_g 是黎曼体积元，$|\Sigma|_g = \int_\Sigma dv_g$ 表示 Σ的总体积，ρ_i 是一个非负参数，$V_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ 是光滑正函数，矩阵（a_{ij}）是

秩为 N的一般单李代数的 Cartan 矩阵之一。为简单起见，我们将 Σ的体积归一化，即 $|\Sigma|_g = 1$。

本文考虑 Cartan 矩阵（a_{ij}）具有以下形式之一的情形:

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ and } \mathbf{G}_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

其中，与 Cartan 矩阵 1）相关的系统（$\mathbf{A}_N$ 通常称为 $SU(N+1)$ Toda 系统。此外，本文所采用的论证经过少量修改后，也可推广至与更一般 Cartan 矩阵相关的 Toda 系统。为简化表述，我们仅讨论上述 Cartan 矩阵。

过去几十年来，Toda 系统（1）因其与几何和物理学诸多领域的深刻联系而得到广泛研究。在微分几何中，它与调和映射理论以及映入复射影空间的全纯曲线有关 $\mathbb{CP}^N$（参见 [9, 10, 12, 17, 24] 及其中的参考文献）。特别是，当 $\Sigma = \mathbb{S}^2$时， $SU(3)$ Toda 系统的解空间与映入 $\mathbb{S}^2$ 的全纯曲线空间 $\mathbb{CP}^2$ [32]重合。在数学物理中，Toda 系统自然地出现在非阿贝尔陈–西蒙斯规范理论的研究中（参见 [18,19,37,38,41,42], 及其中的参考文献）。

由于 (1) 的解空间在加上常数后保持不变，我们考虑 N重索伯列夫空间 H^1 (Σ)零平均值子空间中的弱解。具体而言，我们定义

$$\mathcal{H} := \underbrace{\mathring{\mathrm{H}}^1 \times \cdots \times \mathring{\mathrm{H}}^1}_{N \text{ times}},$$

其中 $\mathring{\mathrm{H}}^1 := \left\{ u \in H^1(\Sigma) : \int_\Sigma u \, dv_g = 0 \right\}$.

人们已广泛研究具有 Dirichlet 边界条件的平面区域上的 Toda系统，以及闭黎曼曲面上的 Toda系统。这些研究关注该系统的多个方面，包括存在性、唯一性和爆破行为。关于存在性结果，请参阅 [8, 26–28, 30, 35] 及其中的参考文献。关于唯一性和非退化性结果，请参阅 [7, 32], ；关于爆破分析，请参阅 [14, 27, 29, 31, 33, 36], 等文献。

黎曼曲面上的 Neumann边界条件 Toda系统研究较少。在 [46], X. B. Zhu 构造了 $SU(3)$Toda系统的解，并在以下情形下将其视为相应 Euler-Lagrange泛函的极小化子： $\rho_i = 2\pi$ 对所有 $i = 1,\ 2$。

令局部极限质量 $\sigma_i(x')$ 定义为

$$\sigma_i(x') = \lim_{n\to\infty}\lim_{r\to 0}\int_{x\in\Sigma, d_g(x,x')<r}\frac{\rho_i^n V_i e^{u_i^n}}{\int_\Sigma V_i e^{u_i^n}\,dv_g}\,dv_g,$$

对于 $i = 1,\ \ldots,\ N$，其中 $d_g(\cdot,\ \cdot)$ 表示关于度量 g的 Σ 上的测地距离。

我们特别关注 $SU(3)$ Toda系统：

$$(2)\qquad \begin{cases} -\Delta_g u_1 = 2\rho_1\left(\dfrac{V_1 e^{u_1}}{\int_\Sigma V_1 e^{u_1}\,dv_g} - 1\right) - \rho_2\left(\dfrac{V_2 e^{u_2}}{\int_\Sigma V_2 e^{u_2}\,dv_g} - 1\right) & \text{in } \mathring{\Sigma}, \\ -\Delta_g u_2 = 2\rho_2\left(\dfrac{V_2 e^{u_2}}{\int_\Sigma V_2 e^{u_2}\,dv_g} - 1\right) - \rho_1\left(\dfrac{V_1 e^{u_1}}{\int_\Sigma V_1 e^{u_1}\,dv_g} - 1\right) & \text{in } \mathring{\Sigma}, \\ \partial_{\nu_g} u_1 = \partial_{\nu_g} u_2 = 0 & \text{on } \partial\Sigma. \end{cases}$$

根据经典爆破分析，对于任意一族爆破解 $u^n := (u_1^n,\ u_2^n)$，它们是具有参数 $\rho^n := (\rho_1^n,\ \rho_2^n) \to (\rho_1,\ \rho_2)$ 的 $SU(3)$ Toda系统的解，其爆破点集合为

$$\mathcal{S} := \left\{x \in \Sigma : \exists x_n \to x \text{ such that } \max_i\left(u_i^n(x_n) - \int_\Sigma V_i e^{u_i^n}\,dv_g\right) \to \infty\right\}.$$

该集合是有限的，由局部极限质量为 $(\sigma_1(x)\ \sigma_2(x))$ 且取以下值之一的点组成：

$$\left\{\left(0, \frac{1}{2}\varrho(x)\right), \left(\frac{1}{2}\varrho(x), 0\right), \left(\frac{1}{2}\varrho(x), \varrho(x)\right), \left(\varrho(x), \frac{1}{2}\varrho(x)\right), \left(\varrho(x), \varrho(x)\right)\right\},$$

对于 $x \in \mathcal{S}$，其中 $\varrho(x) = 8\pi$ 若 $x \in \Sigma$ 且 $\varrho(x) = 4\pi$ 若 $x \in \partial\Sigma$。

上述结果已在 [27, 28] 中针对内部爆破点得到证明。边界情形预计可通过类似的爆破分析得出，并且边界效应会产生半质量贡献。由于这超出了本文的研究范围，我们省略进一步细节。

根据局部极限质量的取值，我们将 $SU(3)$ Toda系统在爆破点附近的爆破现象分为以下三种情形：

- **部分爆破**： $\left(0, \frac{1}{2}\varrho(x)\right), \left(\frac{1}{2}\varrho(x)\ \ 0\right)$;
- **非对称爆破**： $\left(\frac{1}{2}\varrho(x)\ \ \varrho(x)\right), \left(\varrho(x)\ \ \frac{1}{2}\varrho(x)\right)$;
- **完全爆破**： $(\varrho(x)\ \ \varrho(x))$。

接下来，我们介绍与SU(3) Toda系统爆破解存在性相关的研究工作。

在非退化条件下，人们已在多种情形中构造出部分爆破解：在具有狄利克雷边界条件的平面区域上，见 [13], ；在闭曲面上，见 [29], ；以及在具有 Neumann 边界条件的带边界黎曼曲面上，见 [25]。

对于非对称爆破，W. Ao 和 L. Wang 在 [3]中引入了一族定义在以原点为中心的单位球上的 Toda 系统爆破解，这些解具有一个位于球心的爆破点。Musso、Pistoia 和 J. Wei 为平面区域引入了所谓的“k-对称”性质，并在 [36] 中应用奇异摄动方法，构造了一个 $SU(N+1)$ Toda 系统的爆破解。同时，D'Aprile、Pistoia 和 Ruiz 针对具有狄利克雷边界条件的平面区域，获得了与 $\rho_1 \to 8\pi$中的 SU(3) Toda 系统类似的结果，同时保持固定参数 $\rho_2 \in (4\pi,\ 8\pi)$，见 [14]。“k-对称”条件是一项技术性假设，用于确保极限线性化问题的非退化性。

对于完全爆破的情形，$V_1 = V_2$、$u_1 = u_2$和 $\rho_1 = \rho_2$这一特殊情况会将该系统化为一个平均场方程。对于有界区域中的该方程，$\mathbb{R}^2$上的相关爆破解已在 [5,21] 中构造；对于闭黎曼曲面，相关结果见 [6,20,22] ；对于带边界的黎曼曲面，相关结果见 [2] 。在一般情形下，完全爆破情形仍基本未获解决。C.-S. Lin、J. Wei 和 C. Zhao 分析了 SU(3) Toda系统的完全爆破解，并推导出其存在的必要条件，凸显了在 [34]中构造此类解所面临的巨大困难。后续研究在完全爆破解方面取得了进一步进展，例如 [4,33,45] 及其中的参考文献。

为了将 [14, 36] 中的结果推广到秩为 N、在带边界的黎曼曲面上满足齐次Neumann边界条件的 Toda 系统情形，本文旨在通过奇异摄动方法，在具有 $\rho_i \to 2\alpha_i \pi m$ 对称性的“ $i = 1$”曲面上构造满足 N 的 Toda 系统 (1) 的爆破解，其中k-对称”$k > \frac{1}{2}\alpha_N$ ，其中

$$\alpha_i = 2i \text{ for } i = 1, \dots, N-1, \text{ and } \alpha_N = \begin{cases} 2N & \text{for } \mathbf{A}_N \text{ or } \mathbf{B}_N \\ 4N-2 & \text{for } \mathbf{C}_N \\ 8 & \text{for } \mathbf{G}_2 \end{cases}.$$

参见（7），详见第2.2 节。

我们用 O(3) 表示作用于 $\mathbb{R}^3$ 上的三阶正交群。对于任意$k \in \mathbb{N}_+$，我们定义

$$\mathfrak{R}_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/k) & \sin(2\pi/k) & 0 \\ -\sin(2\pi/k) & \cos(2\pi/k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3),$$

它表示绕 z 轴旋转角度 $\frac{2\pi}{k}$。 —

定义 1.1. 设 Σ 为一个黎曼曲面。对于整数 $k \geq 1$，若 Σ 是k-对称的，则称之为k-对称，如果 Σ 可嵌入 $\mathbb{R}^3$ 且在 $\mathfrak{R}_k$作用下不变。若 x是 Σ的k-对称中心，则称 $x \in \Sigma_0$:
$= \{x \in \Sigma: \mathfrak{R}_k^i(x) = x$ 对任意 $i = 1, 2, 3, \ldots\}$均成立。

定义 1.2. 设 Σ 为一个 k-对称曲面。若函数 $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ 满足对所有 $x \in \Sigma.$，均有 $f(x) = f(\mathfrak{R}_k x)$，则称其为 $\mathfrak{R}_k$- 不变的

出于技术上的原因，我们在全文中假设 Σ 是一个 k-对称曲面，且 $k > \frac{1}{2}\alpha_N$由第7节中的（2.2）给出。由于边界的光滑性，可得 $\Sigma_0 \cap \partial\Sigma = \emptyset.$

我们现在可以陈述本文的主要结果。

定理 1.3. 设 $k > \frac{1}{2}\alpha_N$，其中 α_i由 (7) 对 $i = 1$，……，N定义，并假设 Σ 是一个 k-对称的具有光滑边界的黎曼曲面。假设势函数 V_1，……，V_N是 $\mathfrak{R}_k$-不变的，并且

$$\Sigma_0 := \left\{x \in \Sigma : \mathfrak{R}_k^i(x) = x \text{ for any } i = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

则对任意 m 个互不相同的点 ξ_1^*，……，ξ_m^* 在 Σ_0中，存在一族解$\mathbf{u}_\varepsilon = (u_{1,\varepsilon}$，……，$u_{N,\varepsilon})$ 关于 *Toda*系统 (1) 使得:

i) $\mathbf{u}_\varepsilon$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时恰好在点 ξ_1^*，……，ξ_m^* 处爆破;

ii) 参数 $\rho^\varepsilon = (\rho_1^\varepsilon$，……，$\rho_N^\varepsilon)$ 满足

$$\rho^\varepsilon \to (2\alpha_1\pi m, \ldots, 2\alpha_N\pi m);$$

iii) 对每个 $i = 1$，……，N，下列弱-$*$ 收敛成立:

$$\rho_i^\varepsilon \frac{V_i e^{u_{i,\varepsilon}}}{\int_\Sigma V_i e^{u_{i,\varepsilon}} dv_g} dv_g \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{j=1}^{m} 2\alpha_i\pi\delta_{\xi_j^*}, \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

其中 δ_x 是 Σ上集中于点 x.的狄拉克测度

作为直接推论，我们得到关于 $SU(3)$ Toda系统的如下结果。

推论*1.4.* 设 $k > 2$，并假设 Σ 是具有 k对称性的黎曼曲面，且势函数 V_1 和 V_2 具有 $\mathfrak{R}_k$不变性。假设 $\Sigma_0 \neq \emptyset$ 且 $m \leq \#\Sigma_0$，其中$\#\Sigma_0$ 表示 Σ_0的基数。那么，存在系统*(2)*的一族解，其参数为$(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \to (4\pi m, 8\pi m)$或$(8\pi m, 4\pi m)$，并恰好在 Σ_0中的 m个不同点发生爆破，呈现非对称爆破。

注记 1.5. k对称性假设较为严格，但涵盖了两种标准几何模型：球面 $\mathbb{S}^2$ 和上半球 $\mathbb{S}^2_+$。我们的结果适用于带边界紧曲面（因此包括 $\mathbb{S}^2_+$），而且该方法也允许 $\partial\Sigma = \emptyset$ 的情形（从而涵盖诸如 $\mathbb{S}^2$这样的闭曲面）。

定理 1.3中构造的这两种模型情形下的解，其爆破解位置可以更明确地描述。

- 令 $\Sigma = \mathbb{S}^2$，并假设 V_1 和 V_2 为常数。对于任意 $\xi \in \mathbb{S}^2$，存在一族 $SU(3)$ Toda系统(1)的爆破解，当 $(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \to (4\pi, 8\pi)$ 或 $(8\pi, 4\pi)$ 时，在 ξ 处爆破。此外，还存在一族爆破解，当 $(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \to (8\pi, 16\pi)$ 或 $(16\pi, 8\pi)$ 时，在对跖点对 $\{\xi, -\xi\}$处爆破，其中 $-\xi$ 表示 ξ的对跖点。

- 令 $\Sigma = \mathbb{S}^2_+$，并假设 V_1 和 V_2 均为 $\mathfrak{R}_3$-不变的。那么，存在一族 $SU(3)$ Toda系统(1)的爆破解，当 $(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \to (4\pi, 8\pi)$ 或 $(8\pi, 4\pi)$时，在北极 $\xi = (0, 0, 1)$处爆破。

沿着 [14, 36], 中的方法，我们通过奇异摄动方法构造（1）的爆破解，该方法将变分方法与 Lyapunov–Schmidt 约化相结合。我们的研究设定中一个关键的不同之处在于，我们研究曲面上的 Toda系统，因此需要使用等温坐标，将平面上的标准泡拉回曲面。此外，Neumann 边界条件带来了额外的挑战，因为最大值原理不再适用。相反，我们采用 Green 表示公式和 L^p估计来分析投影泡。

为进行有限维约化，我们计算极限线性化算子的核。由于我们研究的是高阶爆破，核中包含与近似流形的切空间不一致的非径向元素。为克服这一问题，我们在曲面上引入 k-对称性，其灵感来自 [36], ：该方法处理 k-对称子空间中的可逆性问题，并说明有限维部分是平凡的。

主要的分析难点在于处理分量间相互作用，以及 Cartan 矩阵$\mathbf{B}_N$、$\mathbf{C}_N$和$\mathbf{G}_2$的不对称性。我们通过在环域中使用局部化估计，并单独处理最后一个分量，解决了这一问题。所得解在 k-对称中心处发生爆破，且这些中心仅为内部点；由于我们的问题设定存在退化，边界爆破仍难以处理，将留待未来研究。

致谢

我们谨向审稿人致谢，感谢其提出有助于改进本文表述的宝贵意见。第一作者也由衷感谢 T. Bartsch教授和 M. Musso教授所进行的富有启发性的讨论。

记号

本文中，我们将“序列”和“子序列”这两个术语交替使用。在推导过程中，记作 C 的常数在不同公式之间，甚至在同一公式的不同推导行中，可能取不同的值。我们采用标准的渐近记号 $\mathcal{O}(1)$ 和 $o(1)$ 来描述各量的行为。更确切地说，给定函数 g 和 f，记号 $g=\mathcal{O}(f)$ 表示对于某个常数 $C>0$，$|g/f|\leq C$；而 $g=o(f)$ 则表示当 $\varepsilon\to 0$ 时，$g/f\to 0$。我们令 $\mathbb{B}_r(\hat{}y):=\{y\in\mathbb{R}^2:\ |y-\hat{}y|^2<r^2\}$，$\mathbb{B}_r=\mathbb{B}_r(0)$，以及 $\mathbb{B}_r^+=\mathbb{B}_r\cap\{y_2\geq 0\}$。对于任意 $f\in L^1(\Sigma)$，$\underline{f}:=\int_\Sigma f dv_g$.

本文其余部分安排如下。第2节介绍预备结果，包括等温坐标、格林函数和近似解。第3 节证明极限线性化算子的可逆性。第4节讨论非线性问题，通过给出误差项的估计，并利用压缩映射原理证明解的存在性。第5节完成定理1.3的证明。最后，附录A 给出技术估计，重点研究投影泡的渐近行为。

2 预备知识

我们先在第2 节介绍一些基本概念，包括等温坐标、与 Neumann 边界条件相关的格林函数，以及近似解的构造。

2.1 等温坐标与格林函数

我们先介绍一族等温坐标（例如参见 [11, 20,44], ）。对于任意 $\xi\in\Sigma$, 存在一个等温坐标系（$U(\xi)$ y_ξ），使得 y_ξ将 ξ 周围的开邻域 $U(\xi)$ 映射到

$$B^\xi=\begin{cases}\mathbb{B}_{2r_\xi} & \text{for } \xi\in\mathring{\Sigma}\\ \mathbb{B}^+_{2r_\xi} & \text{for } \xi\in\Sigma\end{cases},$$

其中 $g=\sum_{i=1}^2 e^{\hat{\varphi}_\xi(y_\xi(x))}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i$ 且 $y_\xi(\xi)=(0,\ 0)$。这里，共形因子 $\hat{}\varphi_\xi:$ $B^\xi\to\mathbb{R}$ 与黎曼曲面 $(\Sigma,\ g)$ 的高斯曲率 K_g 和测地曲率 k_g 满足以下关系式

$$-\Delta\hat{\varphi}_\xi(y)=2K_g\big(y_\xi^{-1}(y)\big)e^{\hat{\varphi}_\xi(y)}\quad\text{for all } y\in B^\xi. \tag{3}$$

此外，对于 $\xi\in\partial\Sigma$，我们有

$$-\partial_{y_2}\hat{\varphi}(y)=2k_g\circ y_\xi^{-1}(y)e^{\hat{\varphi}(y)/2},\ \text{for all } y\in B^\xi\cap\{y_2=0\}$$

且 $(y_\xi)_*(\nu_g(x)) = -e^{-\hat{\varphi}_\xi(y_2)}\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{y=y_\xi}(x)$. 对于 $\xi \in \Sigma$ 和 $0 < r \le 2r_\xi$，我们定义

$$B_r^\xi := B^\xi \cap \mathbb{B}_r \quad \text{and} \quad U_r(\xi) := y_\xi^{-1}(B_r^\xi).$$

正如 [2]，y_ξ 和 $\hat{\varphi}_\xi$ 假设在任意给定的等温坐标图中关于 ξ 光滑变化。此外，$\hat{\varphi}_\xi$ 满足 $\hat{\varphi}_\xi(\mathbf{0}) = 0$ 并且

$$\nabla\hat{\varphi}_\xi(\mathbf{0}) = \begin{cases} (0,0) & \text{if } \xi \in \mathring{\Sigma} \\ (0, -2k_g(\xi)) & \text{if } \xi \in \partial\Sigma \end{cases},$$

其中，k_g 是边界 $\partial\Sigma$的测地曲率。

令 χ 为 $C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$中的一个径向截断函数，使得

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & \text{if } |s| \le 1 \\ 0, & \text{if } |s| \ge 2 \end{cases}.$$

对于固定的 $r_0 < \frac{1}{4}r_\xi$，记 $\chi_\xi(x) := \chi(|y_\xi(x)|)$以及 $\varphi_\xi(x) := \hat{\varphi}_\xi(y_\xi(x))$。对于任意 $\xi \in \Sigma$，我们通过以下方程定义带齐次诺伊曼边界条件的Laplace-Beltrami算子的格林函数：

$$\begin{cases} -\Delta_g G^g(x,\xi) = \delta_\xi - 1 & x \in \mathring{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g} G^g(x,\xi) = 0 & x \in \partial\Sigma \\ \int_\Sigma G^g(x,\xi)\, dv_g(x) = 0 \end{cases},$$

其中，δ_ξ 是集中在 ξ处的 Σ 上的狄拉克质量。

令函数

$$\Gamma_\xi^g(x) = \Gamma^g(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\chi_\xi(x)\log|y_\xi(x)| & \text{if } \xi \in \mathring{\Sigma} \\ -\frac{1}{\pi}\chi_\xi(x)\log|y_\xi(x)| & \text{if } \xi \in \partial\Sigma \end{cases}.$$

将格林函数 $G^g(x,\xi) = \Gamma_\xi^g(x) + H_\xi^g(x)$，分解后，我们得到函数 $H_\xi^g(x) := H^g(x,\xi)$，它满足以下方程：

$$(4)\quad \begin{cases} -\Delta_g H_\xi^g &= \frac{4}{\varrho(\xi)}(\Delta_g\chi_\xi)\log\frac{1}{|y_\xi|} + \frac{8}{\varrho(\xi)}\langle\nabla\chi_\xi, \nabla\log\frac{1}{|y_\xi|}\rangle_g - 1, & \text{in } \mathring{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g} H_\xi^g &= -\frac{4}{\varrho(\xi)}(\partial_{\nu_g}\chi_\xi)\log\frac{1}{|y_\xi|} - \frac{4}{\varrho(\xi)}\chi_\xi\partial_{\nu_g}\log\frac{1}{|y_\xi|}, & \text{on } \partial\Sigma \\ \int_\Sigma H_\xi^g\, dv_g &= -\frac{4}{\varrho(\xi)}\int_\Sigma \chi_\xi\log\frac{1}{|y_\xi|}dv_g \end{cases}.$$

根据椭圆方程的正则性（参见 [1, 40]），存在唯一的光滑解 $H^g(x, \xi)$，它在霍尔德空间 $C^{2,\alpha}(\Sigma)$ 中满足方程（4），其中$\alpha \in (0, 1)$。$H^g(x, \xi)$ 是 $G^g(x, \xi)$ 的正则部分，而 $R^g(\xi) := H^g(\xi, \xi)$ 是 Σ 上的罗宾函数。显然，只需验证 $H^g(\xi, \xi)$ 与截断函数 χ 和局部坐标图的选取无关。

2.2 近似解

假设

$$\frac{\rho_1}{\int_\Sigma V_1 e^{u_1} dv_g} = \cdots = \frac{\rho_N}{\int_\Sigma V_N e^{u_N} dv_g} := \varepsilon.$$

于是，系统（1）可改写为两个耦合的 Liouville 型方程组成的系统:

$$\begin{cases} -\Delta_g u_i = \varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij}(V_i e^{u_j} - \int_\Sigma V_j e^{u_j} dv_g) & \text{in } \mathring{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g} u_i = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}, \tag{5}$$

对于 $i = 1, \ldots, N$.

我们考虑 Σ 是一个“k-对称”曲面，满足 $\Sigma_0 \neq \emptyset$ 且 $m \leq \#\Sigma_0$。给定。$\{\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*\} \subset \Sigma_0 \cap \Sigma$，我们将构造一族恰好在 $\{\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*\}$处爆破的解。为了构造（1）的爆破解，只需考虑问题（5）。

°对于固定的 $\xi^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*) \in \Xi_m := \Sigma^m \setminus \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Sigma^m : \exists \xi_j = \xi_{j'}$ 对于某个 $j \neq j'\}$，我们将构造一族爆破解$u_\varepsilon = (u_{1,\varepsilon}, \ldots, u_{N,\varepsilon})$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它们是（5）的解。

为构造近似解，我们引入以下奇异 Liouville 方程:

$$\begin{cases} -\Delta w = |y|^{\alpha-2} e^w & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \int_{\mathbb{R}^2} |y|^{\alpha-2} e^w < \infty \end{cases}, \tag{6}$$

其中 $\alpha \geq 2$。对于任意 $\alpha \geq 2$，根据 Prajapat 和 Tarantello 在 [39], 对奇异 Liouville 问题的分类，径向对称解（6）如下:

$$w_\tau^\alpha(y) := \log \frac{2\alpha^2 \tau^\alpha}{(\tau^\alpha + |y|^\alpha)^2} \quad y \in \mathbb{R}^2, \tau > 0.$$

此外，由直接计算可得 $\int_{\mathbb{R}^2} |y|^{\alpha-2} e^{w_\tau^\alpha(y)} dy = 4\pi\alpha$，对于任意 $\xi \in \Sigma$，应用等温坐标（y_ξ，U（ξ））， 我们可以将 w_τ^α拉回到 ξ 附近的黎曼曲面上,

$$U_{\tau,\xi}^\alpha := w_\tau^\alpha \circ y_\xi(x) = \log \frac{2\alpha^2 \tau^\alpha}{(\tau^\alpha + |y_\xi(x)|^\alpha)^2} \text{ in } U(\xi).$$

然后，我们通过以下方程将局部泡解投影到函数空间 $\mathring{\mathrm{H}}^1$ 中:

$$\begin{cases} -\Delta_g P U_{\tau,\xi}^\alpha = \chi_\xi e^{-\varphi_\xi} |y_\xi|^{\alpha-2} e^{U_{\tau,\xi}^\alpha} - \overline{\chi_\xi e^{-\varphi_\xi} |y_\xi|^{\alpha-2} e^{U_{\tau,\xi}^\alpha}} & \text{in } \mathring{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g} P U_{\tau,\xi}^\alpha = 0 & \text{on } \partial\Sigma \\ \int_\Sigma P U_{\tau,\xi}^\alpha dv_g = 0 \end{cases}.$$

对任意 $i \in \{1, \dots, N-1\}$，我们取

$$\alpha_i = 2i \text{ and } \alpha_N = 2 - 2(N-1)a_{NN-1} = \begin{cases} 2N & \text{for } \mathbf{A}_N \text{ or } \mathbf{B}_N \\ 4N-2 & \text{for } \mathbf{C}_N \\ 8 & \text{for } \mathbf{G}_2 \end{cases}, \tag{7}$$

其满足：对于任意 $i = 1, \dots, N$, $\alpha_i - 2 = -\sum_{i'<i} a_{ii'}\alpha_{i'}$. 集中参数

$$\delta_N = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_N}} \text{ and } \delta_i = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{N+1-i}{\alpha_i}} & \text{for } \mathbf{A}_N, \mathbf{C}_N \text{ or } \mathbf{G}_2 \\ \varepsilon^{\frac{N+2-i}{\alpha_i}} & \text{for } \mathbf{B}_N \end{cases}, \tag{8}$$

其满足 $\delta_i^{\alpha_i}\Pi_{i'>i}\delta_{i'}^{a_{ii'}\alpha_{i'}} = \varepsilon$. 显然可知

$$\frac{\delta_{i-1}}{\delta_i} = \varepsilon^{\frac{N+1}{2(i-1)i}} \text{ for } i = 2, \dots, N-1 \text{ and } \frac{\delta_{N-1}}{\delta_N} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2(N-1)}}). \tag{9}$$

令 $\delta_{i,j} := d_{i,j}\delta_i$ 对于 $i = 1, \dots, N$ 以及 $j = 1, \dots, m$，其中 $d_{i,j} > 0$ 满足以下恒等式

$$\begin{aligned} \alpha_i \log d_{i,j} + \sum_{i'>i} a_{ii'}\alpha_{i'} \log d_{i',j} &= -2\log\alpha_i \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\alpha_i + \sum_{\substack{i'=1 \\ i'\neq i}}^{N} \frac{a_{ii'}}{2}\alpha_{i'}\Big) \cdot \Big(\varrho(\xi_j)R^g(\xi_j) + \sum_{j'\neq j} \varrho(\xi_{j'})G^g(\xi_{j'}, \xi_j)\Big) + \log V_i(\xi_j). \end{aligned} \tag{10}$$

Let

$$\mathcal{A}_{ij} = \left\{x \in \Sigma : \sqrt{\delta_{i,j}\delta_{i-1,j}} \le |y_{\xi_j}(x)| \le \sqrt{\delta_{i,j}\delta_{i+1,j}}\right\}, \tag{11}$$

对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $j = 1, \dots, m$, 其中 $\delta_{0,j} := 0$ 以及 $\delta_{N+1,j} := \infty$。

对于 $\tau_0 > 0$，等温坐标图 $\{(y_{\xi_j}, U(\xi_j)) : \sum_j d_g(\xi_j, \xi_j^*) < \tau_0\}$ 满足：存在某个统一半径 $r_0 > 0$,

$$U_{4r_0}(\xi_j) \subset U(\xi_j) \subset\subset \Sigma,$$

$U_{4r_0} \cap \partial\Sigma = \emptyset$ 且对所有 $j \neq j'$, $U_{4r_0}(\xi_{j'}) \cap U_{4r_0}(\xi_j) = \emptyset$

为简单起见，我们定义 $U_j^i = U_{\xi_j,\ \delta_{i,\ j}}^{\alpha_i}$, $PU_j^i = PU_{\xi_j,\ \delta_{i,\ j}}^{\alpha_i}$, $\chi_j = \chi(\frac{|y_{\xi_j}|}{r_0})$ 和 $\varphi_j = \hat{\varphi}_{\xi_j}(y_{\xi_j})$。近似解 $\mathbf{W}_\varepsilon = (W_{1,\ \varepsilon}, \dots, W_{N,\ \varepsilon})$ 定义为

$$W_{i,\varepsilon} = \sum_{j=1}^{m} PU_j^i + \sum_{\substack{i'=1 \\ i'\neq i}}^{N}\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{ii'}}{2} PU_j^{i'}, \text{ for } i = 1, \dots, N.$$

我们定义

$$\mathcal{H}_k := \{u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{H} : u_i \text{ is } \mathfrak{R}_k\text{-invariant for } i = 1, \dots, N\}.$$

接下来，我们将构造如下形式的解 $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{W}_\varepsilon + \boldsymbol{\phi}_\varepsilon$，其中 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = (\phi_{1,\ \varepsilon}, \dots\dots, \phi_{N,\ \varepsilon}) \in \mathcal{H}_k$ 是误差项。

3 极限线性化算子

第3节重点分析极限线性化算子，并证明它在空间 $\mathcal{H}_k$中的可逆性。虽然总体策略沿用 [16, 21], 中介绍的标准方法，但由于曲面具有 k-对称性，在我们的情形下论证更为简单。不过，为了完整起见，并说明 k-对称性在哪些地方发挥作用，以及如何处理不同分量之间的相互作用，我们给出详细证明。

我们考虑与问题（5）相关的以下线性算子:

$$\mathcal{L}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) := (L^1_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}), \dots, L^N_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})), \tag{12}$$

其中，对任意 $i = 1, \dots\dots, N$

$$\begin{aligned} L^i_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) : = -\Delta_g \phi_i - \sum_{j=1}^{m} \left(\chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U^i_j} \phi_i - \overline{\chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U^i_j} \phi_i} \right) \\ - \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{ii'}}{2} \left(\chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'} - 2} e^{U^{i'}_j} \phi_{i'} - \overline{\chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'} - 2} e^{U^{i'}_j} \phi_{i'}} \right). \end{aligned}$$

关键引理是线性算子$\mathcal{L}_{\xi,\ \varepsilon}$的非退化性。具体而言，对于$i = 1$，……，$N$，$j = 1$，……，$m$，我们可以导出$L^i_{\xi,\ \varepsilon}$的局部极限算子:

$$-\Delta \phi - 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i - 2}}{(1 + |y|^{\alpha_i})^2} \phi$$

通过在 ξ_j 附近进行适当缩放，并使用等温坐标图（参见引理3.1）。Del Pino 等人在 [15] 中证明，核空间由以下函数生成（在极坐标$(r,\ \theta)$）

$$\phi^0(r,\theta) := \frac{1 - |r|^{\alpha_i}}{1 + |r|^{\alpha_i}},\ \phi^1(r,\theta) := \frac{|r|^{\frac{\alpha_i}{2}}}{1 + |r|^{\alpha_i}} \cos \frac{\alpha_i}{2}\theta,\ \phi^2(r,\theta) := \frac{|r|^{\frac{\alpha_i}{2}}}{1 + |r|^{\alpha_i}} \sin \frac{\alpha_i}{2}\theta.$$

$\mathcal{H}_k$ 的 k-对称条件（其中 $k > \frac{\alpha_N}{2}$）排除了 ϕ^1和 ϕ^2。为了获得线性化算子$\mathcal{L}_{\xi,\ \varepsilon}$的可逆性，我们需要通过在 $\mathring{\mathrm{H}}^1$中引入一族测试函数来构造 ϕ^0。令 $z_i(y) = \frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}$. 容易看出

$$-\Delta z_i(y) = 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i - 2}}{(1 + |y|^{\alpha_i})^2} z_i(y), y \in \mathbb{R}^2.$$

对于任意的 $j = 1, \dots, m$，我们定义

$$Z_{ij}(x) = \begin{cases} z_i\left(\frac{|y_{\xi_j}(x)|}{\delta_{i,j}}\right), & x \in U(\xi_j) \\ 0, & x \in \Sigma \setminus U(\xi_j) \end{cases}.$$

然后，根据以下方程将 Z_{ij} 投影到空间 $\overset{\circ}{\mathrm{H}}^1$ 中:

$$(13)\quad \begin{cases} -\Delta_g PZ_{ij} = \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}Z_{ij} - \overline{\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}Z_{ij}} & \text{in } \overset{\circ}{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g} PZ_{ij} = 0 & \text{on } \partial\Sigma \\ \int_\Sigma PZ_{ij}dv_g = 0 \end{cases}.$$

我们定义

$$\mathfrak{L}_k^0 := \left\{ h = (h_1, \dots, h_N) : \int_\Sigma h_i dv_g = 0 \text{ and } h_i \text{ is } \mathfrak{R}_k \text{ invariant} \right\}.$$

引理 3.1. 对于任意 $p > 1$，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $C > 0$，使得对于任意$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N) \in (L^p(\Sigma))^N \cap \mathfrak{L}_k^0$，存在唯一的 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in (W^{2,p}(\Sigma))^N \cap \mathcal{H}_k$ 作为解

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{h} & in\ \overset{\circ}{\Sigma} \\ \partial_{\nu_g}\boldsymbol{\phi} = 0 & on\ \partial\Sigma \\ \int_\Sigma \boldsymbol{\phi} dv_g = 0 \end{cases},$$

满足该条件的

$$\|\boldsymbol{\phi}\| \le C|\log\varepsilon|\|\mathbf{h}\|_p,$$

其中 $\|\boldsymbol{\phi}\| := \sqrt{\sum_i \|\phi_i\|^2}$ 且 $\|\mathbf{h}\|_p = \sum_i \|h_i\|_p$。

证明。我们用反证法证明。假设引理 3.1 不成立，即存在$p > 1$ 以及一个由 $\varepsilon_n \to 0$ 和 $\mathbf{h}_n := (h_{1,n}, \dots, h_{N,n}) \in (L^p(\Sigma))^N \cap \mathfrak{L}_k^0$ 和 $\boldsymbol{\phi}_n := (\phi_{1,n}, \dots, \phi_{N,n}) \in (W^{2,p}(\Sigma))^N \cap \mathcal{H}_k$ 构成的序列，它们对满足以下条件的 $\mathbf{h}_n$ 是 (14) 的解

$$\|\boldsymbol{\phi}_n\| = 1 \text{ and } |\log\varepsilon_n|\|\mathbf{h}_n\|_p := |\log\varepsilon_n| \sum_{i=1}^N \|h_{i,n}\|_p \to 0,$$

由于 $n \to +\infty$. 为简便起见，我们仍使用记号 ϕ_i, h_i, ε 代替$\phi_{i,n}, h_{i,n}$, ε_n，对于 $i = 1, \dots, N$。我们定义，对于 $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m$

$$\tilde{\phi}_{ij}(y) = \begin{cases} \chi\left(\frac{\delta_{i,j}|y|}{r_0}\right)\phi_i \circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i,j}y), & y \in \Omega_{ij} := \frac{1}{\delta_{i,j}}B^{\xi_j} \\ 0 & y \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{ij} \end{cases}.$$

接下来，我们考虑 $\alpha \ge 2$ 和 $\xi \in \Sigma$的以下空间,

$$\mathrm{L}^\alpha := \left\{ u : \left\| \frac{|y|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{1+|y|^\alpha} u \right\|_2 < +\infty \right\}$$

and

$$\mathrm{H}^\alpha := \left\{ u : \|\nabla u\|_2 + \left\| \frac{|y|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{1+|y|^\alpha} u \right\|_2 < +\infty \right\}.$$

步骤 1。 $\tilde{\phi}_{ij} \to c_{ij}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}$当 $\varepsilon \to 0$ 时，对某个 $c_{ij} \in \mathbb{R}$成立；其在 H^{α_i} 中弱收敛，并在 L^{α_i}中强收敛。

我们固定任意 $l = 1, \cdots, N$。由 Sobolev 不等式和 Hölder 不等式可得

$$\Big|\int_\Sigma h_i\phi_l\Big| \le \|\mathbf{h}\|_p\|\phi_l\|_{p'} \le \|\mathbf{h}\|_p\|\phi_l\| = o\Big(|\log\varepsilon|^{-1}\Big) \to 0, \tag{15}$$

其中 $p, p' > 1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$。此外，$|\langle\phi_i,\phi_l\rangle| \le C\|\phi_i\|\|\phi_l\| = \mathcal{O}(1)$。

将式 (14) 乘以测试函数 ϕ_l，由式 (15) 及定义 (a_{ij})，我们递归地得到，对于 $i = 1,\ldots, N-1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\phi_i\phi_l dv_g = i\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_1-2}e^{U_j^1}\phi_1\phi_l dv_g + \mathcal{O}(1),\\
&\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_N-2}e^{U_j^N}\phi_N\phi_l dv_g = \frac{N}{-a_{N-1N}}\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_1-2}e^{U_j^1}\phi_1\phi_l dv_g\\
&\qquad\qquad + \mathcal{O}(1).
\end{aligned} \tag{16}$$

将 ϕ_l 作为 $L^N_{\xi,\varepsilon}(\phi) = h_N$ 的测试函数，我们可推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(1) &= 2\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_N-2}e^{U_j^N}\phi_N\phi_l dv_g\\
&\quad + a_{NN-1}\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{N-1}-2}e^{U_j^{N-1}}\phi_{N-1}\phi_l dv_g\\
&\overset{(16)}{=} \frac{2N - a_{N-1N}a_{NN-1}(N-1)}{-a_{N-1N}}\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_1-2}e^{U_j^1}\phi_1\phi_l dv_g + \mathcal{O}(1).
\end{aligned} \tag{17}$$

由于对所有 $N \ge 2$，$2N - a_{N-1N}a_{NN-1}(N-1) \ne 0$，我们可推得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_l-2}e^{U_j^l}\phi_l^2 dv_g &= l\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_1-2}e^{U_j^l}\phi_1\phi_l dv_g\\
&\overset{(17)}{=} \mathcal{O}(1),
\end{aligned} \tag{18}$$

对于 $l = 1,\ldots, N.$，通过直接计算，对所有 $i = 1, \ldots, N$

$$\sum_{j=1}^m\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}(\tilde{\phi}_{ij}(y))^2dy = \sum_{j=1}^m\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\phi_i^2 dv_g \overset{(18)}{=} \mathcal{O}(1).$$

此外，由假设 $\|\phi\| = 1$，我们立即得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{\phi}_{ij}|^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla \phi_i|_g^2 dv_g \leq 1.$$

由此可知，$\tilde{\phi}_{ij}$ 在H^{α_i}中一致有界。应用 [23, 命题 6。1], $\mathrm{L}^{\alpha_i} \hookrightarrow \mathrm{H}^{\alpha_i}$ 是紧嵌入。因此，取一个子序列，可得 $\tilde{\phi}_{ij} \to \tilde{\phi}_{ij}^0$在$\mathrm{H}^{\alpha_i}$ 中弱收敛，并且在L^{α_i}中强收敛。对于任意 $q > 1$,

(19)
$$\int_{\Sigma} \left| \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U_j^i} \right|^q dv_g = \int_{U_{2r_0}(\xi_j)} \chi^q \Big(\frac{|y|}{r_0} \Big) \delta_{i,j}^{2-2q} \frac{|y|^{q(\alpha_i - 2)}}{(1 + |y|^{\alpha_i})^2} dy = \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{2(1-q)}).$$

对（14）进行变量代换，估计式（19）意味着

(20)
$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\phi}_{ij}(y) = 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i - 2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2} \tilde{\phi}_{ij} + \psi_{ij} & \text{in } \Omega_{ij} \\ \tilde{\phi}_{ij} = 0 & \text{on } \partial\Omega_{ij} \end{cases},$$

其中，对于 $q \in (1, \frac{4}{3})$,

$$\psi_{ij} = -\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} 2\alpha_{i'}^2 \frac{a_{ii'}}{2} \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}} \delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} |y|^{\alpha_{i'} - 2}}{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} + \delta_{i,j}^{\alpha_{i'}} |y|^{\alpha_{i'}})^2} \tilde{\phi}_{i'j} \Big(\frac{\delta_{i,j}}{\delta_{i',j}} y \Big) + \delta_{i,j}^2 h_i \circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i,j} y)$$
$$+ \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2 \sum_{i'=1}^{N} \delta_{i',j}^{\frac{2}{q} - 2}),$$

接下来，我们将证明 $\tilde{\phi}_{ij}$ 收敛到下列方程的解

(21)
$$\begin{cases} -\Delta \phi = 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i - 2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2} \phi & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \phi(y)|^2 dy < +\infty \end{cases},$$

在分布意义下。取一个任意的 $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，满足 $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \overline{\delta_i^{\mathcal{A}_{ij}} \Omega_{ij}}$，$= \Big\{ y \in \Omega_{ij} : \sqrt{\delta_{i-1,j}/\delta_{i,j}} \leq |y| < \sqrt{\delta_{i+1,j}/\delta_{i,j}} \Big\}$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，其中 $\mathcal{A}_{ij}$ 由（11）定义，$\delta_{0,j} = 0$ 且 $\delta_{N+1,j} = +\infty$.对于任意 $i \neq i'$，通过直接计算可得:

(22)
$$\int_{\mathcal{A}_{ij}} \Big| \frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} |y|^{\alpha_{i'} - 2}}{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} + |y|^{\alpha_{i'}})^2} \Big|^p dy = \int_{\frac{1}{\delta_{i',j}} \mathcal{A}_{ij}} \delta_{i',j}^{2-2p} \Big| \frac{|y|^{\alpha_{i'} - 2}}{(1 + |y|^{\alpha_{i'}})^2} \Big|^p dy$$
$$= \begin{cases} \mathcal{O}\Big(\int_{|y| \leq \frac{\sqrt{\delta_{i,j}\delta_{i+1,j}}}{\delta_{i',j}}} \delta_{i',j}^{2-2p} |y|^{(\alpha_{i'} - 2)p} dy \Big) & \text{if } i' > i \\ \mathcal{O}\Big(\int_{|y| \geq \frac{\sqrt{\delta_{i,j}\delta_{i-1,j}}}{\delta_{i',j}}} \delta_{i',j}^{2-2p} |y|^{-(\alpha_{i'} + 2)p} dy \Big) & \text{if } i' < i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathcal{O}(\delta_{i+1}^{1-p}\delta_i^{1-p}(\delta_i/\delta_{i+1})^{\frac{\alpha_{i'}p}{2}}) & i' > i \\ \mathcal{O}(\delta_{i-1}^{1-p}\delta_i^{1-p}(\delta_{i-1}/\delta_i)^{\frac{\alpha_{i'}p}{2}}) & i' < i \end{cases} \overset{(9)}{=} o(1),$$

当 $p \in (1,\ 2)$ 充分接近1时。将 φ 作为（20）的测试函数，我们推得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \nabla\tilde{\phi}_{ij}\cdot\nabla\varphi - 2\alpha_i^2\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\tilde{\phi}_{ij}\varphi = \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \psi_{ij}\varphi \\
&= \mathcal{O}\Big(\int_{\mathcal{A}_{ij}} \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^{N} \frac{-a_{ii'}}{2} 2\alpha_{i'}^2 e^{-\varphi_j} \frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}})^2}\phi_{i'}\circ y_{\xi_j}^{-1}(y)\varphi(\delta_{i,j}^{-1}y)dy\Big) \\
&\quad + \int_{\delta_{i,j}\mathrm{supp}(\varphi)} h_i\circ y_{\xi_j}^{-1}(y)\varphi(\delta_{i,j}^{-1}y)dy + o(1) \\
&= \mathcal{O}\Big(\Big(\int_{\sqrt{\delta_{i-1,j}\delta_{i,j}}\le|y|<\sqrt{\delta_{i,j}\delta_{i+1,j}}} \Big(\sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^{N} \frac{2\alpha_{i'}^2\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y|^{\alpha_{i'}-2}}{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y|^{\alpha_{i'}})^2}\Big)^q dy\Big)^{\frac{1}{q}}\|\phi_{i'}\|\Big) \\
&\quad + \mathcal{O}\Big(\Big(\int_{\delta_{i,j}\mathrm{supp}(\varphi)} |\varphi(\delta_{i,j}^{-1}y)|^{p'}dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\|h_i\|_p\Big) + o(1) \overset{(22)\text{ and }(8)}{=} o(1),
\end{aligned}$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$、$q>1$ 充分接近于1。由于当 $\varepsilon\to 0$时，$\mathcal{A}_{ij}$ 侵入全空间$\mathbb{R}^2$，我们得到 ϕ_{ij}^0 在$\mathbb{R}^2$ 上于分布意义下求解带有 $i=1$ 的(21)，且 ϕ_{ij}^0 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$上于分布意义下求解带有 $i\in\{2,\dots,N\}$ 的(21)。根据正则性理论，对任意 $i=1$, ..., N, $j=1$, ..., $m.$, ϕ_{ij}^0 是全空间$\mathbb{R}^2$ 上的光滑解。[15] 中的结果表明，(21)的解空间由下列函数生成（在极坐标(r,θ)下）

$$\phi^0(r,\theta) := \frac{1-|r|^{\alpha_i}}{1+|r|^{\alpha_i}},\ \phi^1(r,\theta) := \frac{|r|^{\frac{\alpha_i}{2}}}{1+|r|^{\alpha_i}}\cos\frac{\alpha_i}{2}\theta,\ \phi^2(r,\theta) := \frac{|r|^{\frac{\alpha_i}{2}}}{1+|r|^{\alpha_i}}\sin\frac{\alpha_i}{2}\theta.$$

注意到 ϕ^0 是径向的，且对任意 c_1, $c_2\in\mathbb{R}$,

$$c_1\phi^1(r,\theta)+c_2\phi^2(r,\theta) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\frac{|r|^{\frac{\alpha_i}{2}}}{1+|r|^{\alpha_i}}\sin\Big(\frac{\alpha_i}{2}\theta+\theta_0\Big),$$

其中 $\theta_0\in\mathbb{R}$. 由于 $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{H}_k$ 连同 $k>\frac{\alpha_N}{2}$，我们有 $c_1=c_2=0$. 由此可得，对某个 $c_{ij}\in\mathbb{R}$，$\tilde{\phi}_{ij}^0 = c_{ij}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}$。

步骤 2. 对于 $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,m$, $\int_{\Omega_{ij}} 2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{1+|y|^{\alpha_i}}()_2\tilde{\phi}_{ij}(y)dy = o(|\log\varepsilon|^{-1})$。

将其 PZ_{ij} 作为式（14）的测试函数，得到

$$\langle\phi_i, PZ_{ij}\rangle = \int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\big(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\big)^2}\phi_i PZ_{ij}dv_g$$

$$+\sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^{N}\frac{a_{ii'}}{2}\int_\Sigma 2\alpha_{i'}^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_{i'}}|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\phi_{i'}PZ_{ij}dv_g+\int_\Sigma h_iPZ_{ij}dv_g.$$

由此可得

$$0=\int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i\left(PZ_{ij}-Z_{ij}\right)dv_g \tag{23}$$
$$+\sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^{N}\frac{a_{ii'}}{2}\int_\Sigma 2\alpha_{i'}^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_{i'}}|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\phi_{i'}PZ_{ij}dv_g+\int_\Sigma h_iPZ_{ij}dv_g.$$

由引理 A.2，我们得到 $\|PZ_{ij}\|_{p'}=\mathcal{O}(1)$ 对于 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$。此外，考虑到$\|\mathbf{h}\|_p=o(|\log\varepsilon|^{-1})$，结合 Hölder 不等式与 Moser–Trudinger 不等式可得

$$\left|\int_\Sigma h_iPZ_{ij}dv_g\right|\leq\|PZ_{ij}\|_{p'}\|h_i\|_p=\mathcal{O}(\|h\|)=o(|\log\varepsilon|^{-1}). \tag{24}$$

再次应用引理 A.2，我们推得

$$\begin{aligned}
&(\log\varepsilon)\int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i\left(PZ_{ij}-Z_{ij}\right)dv_g \\
&=(\log\varepsilon)\int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i\left(1+\mathcal{O}(\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|)\right)dv_g \\
&=(1+\mathcal{O}(\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|))(\log\varepsilon)\int_{\Omega_{ij}}2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)^2}\tilde{\phi}_{ij}(y)dy+\mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}|\log\varepsilon|) \\
&\overset{(8)}{=}(\log\varepsilon)\int_{\Omega_{ij}}2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)^2}\tilde{\phi}_{ij}(y)dy+o(1),
\end{aligned} \tag{25}$$

由于 $\varepsilon\to 0$. 对于 $i\neq i'$，由引理 A.2，我们有

$$PZ_{ij}\circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i',j}y)=\begin{cases}\mathcal{O}\left(\left(\frac{\delta_{i,j}}{\delta_{i',j}}\right)^{\alpha_i}\frac{1}{|y|^{\alpha_i}}+\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|\right) & \text{if } i<i'\\ 2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{\delta_{i',j}}{\delta_{i,j}}\right)^{\alpha_i}|y|^{\alpha_i}+\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|\right) & \text{if } i'<i\end{cases}. \tag{26}$$

由此可得，对于 $i\neq i'$

(27)

$$(\log\varepsilon)\int_\Sigma 2\alpha_{i'}^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\phi_{i'}PZ_{ij}dv_g$$

$$= (\log\varepsilon)\int_{\Omega_{i'j}} 2\alpha_{i'}^2 \frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{(1+|y|^{\alpha_{i'}})^2}\tilde{\phi}_{i'j}(y)PZ_{ij}\circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i',j}y)dy + \mathcal{O}(|\log\varepsilon|\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}})$$

$$\overset{(26)}{=} \begin{cases} \mathcal{O}\left(|\log\varepsilon|\int_{\Omega_{i'j}} 2\alpha_{i'}^2 \frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{(1+|y|^{\alpha_{i'}})^2}|\tilde{\phi}_{i'j}(y)|\left(\left(\frac{\delta_{i,j}}{\delta_{i',j}}\right)^{\alpha_i}\frac{1}{|y|^{\alpha_i}} + \delta_{i,j}^2\log\delta_{i,j}\right)dy\right) \\ \qquad\qquad \text{if } i<i' \\ 2(\log\varepsilon)\int_{\Omega_{i'j}} 2\alpha_{i'}^2 \frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{(1+|y|^{\alpha_{i'}})^2}\tilde{\phi}_{i'j}(y)dy \\ +\mathcal{O}\left(|\log\varepsilon|\int_{\Omega_{i'j}} 2\alpha_{i'}^2 \frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{(1+|y|^{\alpha_{i'}})^2}|\tilde{\phi}_{i'j}(y)|\left(\left(\frac{\delta_{i',j}}{\delta_{i,j}}\right)^{\alpha_i}|y|^{\alpha_i} + \delta_{i,j}^{\alpha_i}\right)dy\right) \\ \qquad\qquad \text{if } i'<i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} o(1) & \text{if } i<i \\ 2(\log\varepsilon)\int_{\Omega_{i'j}} 2\alpha_{i'}^2 \frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{(1+|y|^{\alpha_{i'}})^2}\tilde{\phi}_{i'j}(y)dy + o(1) & \text{if } i'<i \end{cases}.$$

将（24）、（25）和（27）代入（23），并对 $i=1,\dots,N$,应用归纳法，我们得到 $(\log\varepsilon)\int_{\Omega_{ij}} 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i-2}}{1+|y|^{\alpha_i}}()_2\tilde{\phi}_{ij}(y)dy = o(1)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，对于 $i=1,\dots,N$。

步骤3。 $c_{ij}=0$ 对于 $i=1,\cdots,N$ 和 $j=1,\cdots,m$。

将 PU_j^i 作为（14）的测试函数，我们推导得出

$$\begin{aligned} (28)\qquad & \int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i dv_g \\ &= \int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i PU_j^i dv_g \\ &\quad + \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^N \frac{a_{ii'}}{2}\int_\Sigma 2\alpha_{i'}^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_{i'}}|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\phi_{i'}PU_j^i dv_g + \int_\Sigma h_i PU_j^i dv_g. \end{aligned}$$

（$L.H.S$）的28意味着

$$\begin{aligned} \int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i dv_g &= \int_{\Omega_{ij}} 2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\tilde{\phi}_{ij}(y)dy + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}) \\ &= o(1), \end{aligned}$$

如步骤 2所示。此外，由引理A.1可知 $\|PU_j^i\|_\infty = \mathcal{O}(|\text{对数 }\varepsilon|)$。由此可得 $\left|\int_\Sigma h_i PU_j^i dv_g\right| \le \|h_i\|_p\|PU_j^i\|_{p'} = o(1)$，根据 Hölder 不等式，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 接着，结合 Hölder 不等式与 Moser–Trudinger 不等式，可得以下估计：

$$\begin{aligned} &\delta_{i,j}\int_{\Omega_{ij}} 2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}|\tilde{\phi}_{ij}(y)||y|dy \\ &\le 2\alpha_i^2\delta_{i,j}\delta_{i,j}^{\frac{2(1-q)}{q}}\|\phi_i\|_{q'}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{|y|^{\alpha_j-1}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\right)^q dy\right)^{1/q} = O\left(\delta_{i,j}^{\frac{2-q}{q}}\right) = o(1), \end{aligned}$$

其中 $q \in (1,2)$ 满足 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$。

对于 $i=1,\ \ldots\ldots,\ N$，应用引理A.1，步骤 1和步骤 2，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma 2\alpha_i^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i PU_j^i dv_g\\
=&\int_\Sigma 2\alpha_i^2\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}}{\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)^2}\phi_i\left(-2\chi_j\log\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)+\frac{\alpha_i\varrho(\xi_j)}{2}H^g(\cdot,\xi_j)\right.\\
&\left.+\mathcal{O}(\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|)\right)dv_g\\
=&\int_{\Omega_{ij}}\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)^2}\tilde{\phi}_{ij}(y)\left(-2\alpha_i\log\delta_{i,j}-2\log\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)+\frac{\alpha_i\varrho(\xi_j)}{2}R^g(\xi_j)\right)dy\\
&+O\left(\int_{\Omega_{ij}}2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)^2}\left|\tilde{\phi}_{ij}(y)\right|\left(\delta_{i,j}|y|+\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|\right)dy\right)+\mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i})\\
\to&-2c_{ij}\int_{\mathbb{R}^2}2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)^2}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}\log(1+|y|^{\alpha_i})dy=4\alpha_i\pi c_{ij},
\end{aligned}
$$

由于 $\varepsilon\to 0$，其中最后的收敛性用到了以下事实

$$
\int_{\mathbb{R}^2}2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_i}\right)^2}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}dy=0
$$

且 $\int_{\mathbb{R}^2}2\alpha_i^2\ \frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}\log(1+|y|^{\alpha_i})dy=-2\pi\alpha_i$.对于任意 $i'\neq i$，由引理A.1，再次应用步骤 1 和步骤 2，可得当 $\varepsilon\to 0$时，

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma 2\alpha_{i'}^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\phi_{i'}PU_j^i dv_g\\
=&\int_\Sigma 2\alpha_{i'}^2\chi_j e^{-\varphi_j}\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\phi_{i'}\left(-2\chi_j\log\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}\right)\right.\\
&\left.+\frac{\alpha_i\varrho(\xi_j)}{2}H^g(\cdot,\xi_j)+\mathcal{O}(\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|)\right)dv_g\\
=&\int_{\Omega_{i'j}}2\alpha_{i'}^2\frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\tilde{\phi}_{i'j}\left(-2\log\left(\delta_{i,j}^{\alpha_i}+\delta_{i',j}^{\alpha_i}|y|^{\alpha_i}\right)+\frac{\alpha_i\varrho(\xi_j)}{2}R^g(\xi_j)\right)dy\\
&+O\left(\int_{\Omega_{i'j}}2\alpha_{i'}^2\frac{|y|^{\alpha_{i'}-2}}{\left(1+|y|^{\alpha_{i'}}\right)^2}\left|\tilde{\phi}_{i'j}(y)\right|\left(\delta_{i',j}|y|+\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|\right)dy\right)+\mathcal{O}(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}})\\
\to&\begin{cases}-2\alpha_i c_{i'j}\int_{\mathbb{R}^2}2\alpha_i^2\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}\log|y|dy & \text{if } i<i'\\ 0 & \text{if } i>i'\end{cases}\\
=&\begin{cases}8\pi\alpha_i c_{i'j} & \text{if } i<i'\\ 0 & \text{if } i>i'\end{cases},
\end{aligned}
$$

其中我们用到了 $\int_{\mathbb{R}^2} 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}dy = 0$ 以及

$$\int_{\mathbb{R}^2} 2\alpha_i^2 \frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\frac{1-|y|^{\alpha_i}}{1+|y|^{\alpha_i}}\log|y|dy = -4\pi.$$

对指标 $i' \in \{1,\dots,N\}$求和后， $R.H.S.$（28）具有如下估计：

$$\begin{cases} 4\pi\alpha_i\left(c_{ij} - \sum_{i'>i}(-a_{ii'})c_{i'j}\right) + o(1) & \text{if } i = 1,\cdots,N-1 \\ 4\pi\alpha_i c_{ij} + o(1) & \text{if } i = N \end{cases}.$$

因此，对于任意 $c_{ij} = 0$ $i = 1$，……， N，以及 $j = 1$，……， m.

步骤 4. 导出一个矛盾。

我们通过如下高斯消元法将 Cartan 矩阵（a_{ij}）化为对角矩阵：

$$-\Delta_g \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\phi_1 + \frac{2}{3}\phi_2 \\ \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{3}{2}\phi_2 + \frac{3}{4}\phi_3 \\ \vdots \\ \frac{N-3}{N-2}\phi_{N-3} + (1+\frac{N-2}{N})\phi_{N-2} + \frac{N-1}{N}\phi_{N-1} \\ \frac{N-2}{N-1}\phi_{N-2} + (1+\frac{a_*}{2-a_*})\phi_{N-1} + \frac{-a_{N-1N}}{2-a_*}\phi_N \\ \phi_N + (-a_{NN-1})\frac{N-1}{N}\phi_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{ij})\mathbf{\Psi} + o(1), \tag{29}$$

where $a_* = \frac{N-1}{N}(a_{NN-1}a_{N-1N}) = \begin{cases} \frac{N-1}{N} & \text{for } \mathbf{A}_N \\ 2\frac{N-1}{N} & \text{for } \mathbf{B}_N, \mathbf{C}_N \\ \frac{3}{2} & \text{for } \mathbf{G}_2 \end{cases}$,

$$(\tilde{a}_{ij}) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{N}{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2-a_* \end{pmatrix}$$

and

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \left(\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_1-2}e^{U_j^1}\phi_1 - \overline{\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_1-2}e^{U_j^1}\phi_1}\right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \left(\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_N-2}e^{U_j^N}\phi_N - \overline{\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_N-2}e^{U_j^N}\phi_N}\right) \end{pmatrix}.$$

˜由于 $\phi_{ij} \to 0$ 属于 L^{α_i}，我们有

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2}\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\phi_i^2 dv_g = \sum_{j=1}^m \mathcal{O}(\|\tilde{\phi}_{ij}\|^2_{\mathrm{L}^{\alpha_i}}) = o(1).$$

取 ϕ_i 作为（29）的测试函数，其中 $i=1$、……、 N，我们推得

$$
\begin{aligned}
&(1+\frac{1}{3})\|\phi_1\|^2+\frac{2}{3}\langle\phi_2,\phi_1\rangle=o(1),\\
&(1+\frac{1}{2})\|\phi_2\|^2+\frac{1}{2}\langle\phi_1,\phi_2\rangle+\frac{3}{4}\langle\phi_3,\phi_2\rangle=+o(1),\\
&\cdots\cdots\\
&(1+\frac{N-2}{N})\|\phi_{N-2}\|^2+\frac{N-3}{N-2}\langle\phi_{N-3},\phi_{N-2}\rangle+\frac{N-1}{N}\langle\phi_{N-1},\phi_{N-2}\rangle=o(1),\\
&(1+\frac{a_*}{2-a^*})\|\phi_{N-1}\|^2+\frac{N-2}{N-1}\langle\phi_{N-2},\phi_{N-1}\rangle+\frac{-a_{N-1N}}{2-a_*}\langle\phi_N,\phi_{N-1}\rangle=o(1),\\
&\|\phi_N\|^2+\frac{N-1}{N}(-a_{NN-1})\langle\phi_{N-1},\phi_N\rangle=o(1),
\end{aligned}
$$

其中我们应用了（15），并且 $\int_\Sigma\phi_i dv_g=0$. 通过将上述估计相加，利用柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式可得

$$
\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\Big)\sum_{i=1}^{N}\|\phi_i\|^2=o(1),
$$

这与假设 $\|\boldsymbol{\phi}\|=1$相矛盾。引理3.1 得证。 □

对于任意 $p>1$，令 $i_p^*:L^p(\Sigma)\to\mathring{\mathrm{H}}^1$ 为与浸入 $i:\mathring{\mathrm{H}}^1\to L^{\frac{p}{p-1}}$ 和 $\tilde{i}^*:\cup_{p>1}L^p(\Sigma)\to\mathring{\mathrm{H}}^1$相对应的伴随算子。对于任意 $f\in L^p(\Sigma)$，定义 $i^*(f):=\tilde{i}^*(f-\bar{f})$，即对于任意 $h\in\mathring{\mathrm{H}}^1$，有 $\langle i^*(f)\ h\rangle=\int_\Sigma(f-\bar{f})h dv_g$.由 [43]，我们得到紧黎曼曲面上的 Moser–Trudinger 型不等式如下：

$$
\log\int_\Sigma e^u dv_g\ \ \le\ \ \tfrac{1}{8\pi}\int_\Sigma|\nabla_g u|^2dv_g+C,\ \text{for any } u\in\mathring{\mathrm{H}}^1,
$$

其中 $C>0$ 是一个常数。由此可知，$\mathring{\mathrm{H}}^1\to L^p(\Sigma)$ $u\mapsto e^u$ 是连续的。

设 $f_i(u_i)=2\varepsilon V_i e^{u_i}-2\varepsilon V_i e^{\overline{u_i}}$，对于 $i=1$、……、 N，以及

$$
F(\mathbf{u})=\begin{pmatrix} f_1(u_1)+\sum_{i'\neq1}\frac{a_{1i'}}{2}f_{i'}(u_{i'})\\ \vdots\\ f_N(u_N)+\sum_{i'\neq N}\frac{a_{Ni'}}{2}f_{i'}(u_{i'})\end{pmatrix}. \tag{30}
$$

问题（5）等价于以下形式：

$$
\begin{cases}\mathbf{u}=(u_1,u_2)=i^*(F(\mathbf{u}))\\ u\in\mathcal{H}\end{cases}. \tag{31}
$$

我们定义 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi})=i^*(\mathcal{L}_{\xi,\ \varepsilon}(\boldsymbol{\phi}))$，对于 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\ \cdots\cdots,\ \phi_N)\in\mathcal{H}_k$。

命题 3.2。 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $C > 0$，使得对于任意 $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_k$，都存在一个常数 $C > 0$ 和唯一的解 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{H}_k$ 满足

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{h}, \tag{32}$$

其中 $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq C|\log \varepsilon|$，对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$。

证明。 注意到 $\boldsymbol{\phi} \mapsto i^* \left(\chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U_j^i} \phi_i\right)$ 是 $\mathcal{H}_k$ 中的紧算子，对任意 $j = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, N$。因此，我们推知 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{H}_k$. 中的 Fredholm 算子。假设 $\boldsymbol{\phi}$ 是方程 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}) = 0$. 的解。由引理3.1，可得 $\boldsymbol{\phi} = 0$。根据这一推论并应用 Fredholm择一定理，可以证明（32）在$\mathcal{H}_k$中的解具有唯一性和存在性。

接下来需要估计 $\mathcal{L}$的逆算子。给定任意 $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_k$，我们已经证明存在唯一的 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_N) \in \mathcal{H}_k$ 使得$i^* \circ \mathcal{L}_{\xi,\,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{h}$。引理 3.1 表明

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{h})\| = \|\boldsymbol{\phi}\| \leq C|\log \varepsilon| \|\mathcal{L}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p \leq C|\log \varepsilon| \|\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi})\| \leq C|\log \varepsilon| \|\mathbf{h}\|,$$

其中 $p > 1$。 □

4 非线性问题

在本节中，我们首先证明与近似解相关的误差项足够小。随后，我们利用压缩映射原理证明非线性问题的可解性。

预期解 $\mathbf{W}_\varepsilon + \boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ 满足（5），当且仅当 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}_k$ 中满足以下问题：

$$\mathcal{L}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) = \mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) + \mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\phi) + \mathcal{R}_{\xi,\varepsilon}. \tag{33}$$

这里，$\mathcal{L}_{\xi,\,\varepsilon}$ 表示式（12）中定义的线性算子，且

$$\mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) := \left(S^1_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}), \ldots, S^N_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\right),$$

表示一个高阶线性算子，对每个 $i=1$，……，N定义如下

$$
\begin{aligned}
S^i_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) := & \Big(-\sum_{j=1}^{m} \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U^i_j} + 2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} \Big) \phi_i \\
& - \overline{\Big(-\sum_{j=1}^{m} \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U^i_j} + 2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} \Big) \phi_i} \\
& + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} (-a_{ii'}) \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'} - 2} e^{U^{i'}_j} - \varepsilon V_{i'} e^{W_{i',\varepsilon}} \Big) \phi_{i'} \\
& - \overline{\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} (-a_{ii'}) \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'} - 2} e^{U^{i'}_j} - \varepsilon V_{i'} e^{W_{i',\varepsilon}} \Big) \phi_{i'}},
\end{aligned}
$$

$\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) := \big(N^1_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \ldots, N^N_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\big)$ 是非线性项，定义如下：

$$
\begin{aligned}
N^i_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) : = & \, 2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} \left(e^{\phi_i} - 1 - \phi_i \right) - \overline{2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} \left(e^{\phi_i} - 1 - \phi_i \right)} \\
& - \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} (-a_{ii'}) \left(\varepsilon V_{i'} e^{W_{i',\varepsilon}} \left(e^{\phi_{i'}} - 1 - \phi_{i'} \right) - \overline{\varepsilon V_{i'} e^{W_{i',\varepsilon}} \left(e^{\phi_{i'}} - 1 - \phi_{i'} \right)} \right),
\end{aligned}
$$

对于每个 $i=1,\ldots,N$，以及 $\mathcal{R}_{\xi,\varepsilon} := (R^1_{\xi,\varepsilon}, \ldots, R^N_{\xi,\varepsilon})$ 是误差项，对每个 $i=1,\ldots,N$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
R^i_{\xi,\varepsilon} = & \, \Delta_g W_{i,\varepsilon} + 2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} - \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} (-a_{ii'}) \varepsilon V_{i'} e^{W_{i',\varepsilon}} \\
& - \overline{\Big(2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} - \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} (-a_{ii'}) \varepsilon V_{i'} e^{W_{i',\varepsilon}} \Big)}.
\end{aligned}
$$

首先，我们将证明误差项沿着 $\varepsilon \to 0$ 趋于零。为此，我们引入一个函数族，以处理投影泡之间的相互作用。对于 $i=1$，……，N，$j=1$，……，m，以及 $y \in \Omega_{ij} := \overline{\delta^{-1}_{i,j} B^{\xi_j}}$，

$$
\begin{aligned}
(34) \quad \Theta_{ij}(y) := & \exp \Big\{ \varphi_j \circ y^{-1}_{\xi_j}(\delta_{i,j} y) + \Big(PU^i_j - U^i_j + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} \frac{a_{ii'}}{2} PU^{i'}_j \Big) \circ y^{-1}_{\xi_j}(\delta_{i,j} y) \\
& + \sum_{j' \neq j} \Big(PU^i_{j'} + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} \frac{a_{ii'}}{2} PU^{i'}_{j'} \Big) \circ y^{-1}_{\xi_j}(\delta_{i,j} y) + \log V_i \circ y^{-1}_{\xi_j}(\delta_{i,j} y)
\end{aligned}
$$

$$+\log(a_{ii}\varepsilon)-(\alpha_i-2)\log|\delta_{i,j}y|\Big\}.$$

我们取 $d_{i,\ j}$，其取值如（10）所示，以确保 Θ_{ij} 对于$i=1,\ \ldots\ldots,\ N,\ j=1,\ \ldots\ldots,\ m$足够小，正如引理 A.3所述。

引理 4.1。 存在 $p_0>1$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意 $p\in(1,p_0)$ 和$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，均有 $\|\mathcal{R}_{\xi,\varepsilon}\|_p:=\sum_{i=1}^N\|R^i_{\xi,\varepsilon}\|_p=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\right)$. ——

证明。 根据定义，误差项的 i 阶分量可表示如下:

$$\begin{aligned}R^i_{\xi,\varepsilon}=&\Big(2\varepsilon V_ie^{W_{i,\varepsilon}}-\sum_{j=1}^m\chi_je^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}\Big)\\&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^N(-a_{ii'})\Big(2\varepsilon V_{i'}e^{W_{i',\varepsilon}}-\sum_{j=1}^m\chi_je^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}e^{U^{i'}_j}\Big)\\&\overline{-\Big(2\varepsilon V_ie^{W_{i,\varepsilon}}-\sum_{j=1}^m\chi_je^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}\Big)}\\&\overline{+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^N(-a_{ii'})\Big(2\varepsilon V_{i'}e^{W_{i',\varepsilon}}-\sum_{j=1}^m\chi_je^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_{i'}-2}e^{U^{i'}_j}\Big)}.\end{aligned}$$

对于任意 $p>1$，由 Hölder 不等式和引理 A.4 可得

$$\begin{aligned}&\Big|\int_\Sigma\Big(\sum_{j=1}^m\chi_je^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}-2\varepsilon V_ie^{W_{i,\varepsilon}}\Big)dv_g\Big|\\\le&\Big\|\sum_{j=1}^m\chi_je^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}-\varepsilon V_ie^{W_{i,\varepsilon}}\Big\|_p\le C\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}},\end{aligned}$$

对于某个常数 $C>0$，鉴于 $|\Sigma|_g=1$. 因此，我们得出引理 4.1。 □

下面的引理表明，高阶线性算子 $\mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}$ 在 $\mathcal{H}$ 上有界，且其算子范数随着 $\varepsilon\to0$ 趋于零。

引理 4.2。 存在 $p_0>1$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意 $p\in(1,\ p_0)$ 和$\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$,

$$\|\mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\|\boldsymbol{\phi}\|\right),\ for\ \boldsymbol{\phi}\in\mathcal{H}.$$

证明。 应用引理A.4 以及 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p &= \sum_{i=1}^{N}\|S^i_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p \\ &= O\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big\|\Big(-\sum_{j=1}^{m}\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}+2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}\Big)\phi_i\Big\|_p\Big) \\ &\quad + O\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big|\int_{\Sigma}\Big(-\sum_{j=1}^{m}\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}+2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}\Big)\phi_i dv_g\Big|\Big) \\ &= O\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big(\Big\|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}-\sum_{j=1}^{m}\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U^i_j}\Big\|_p\Big)\|\phi_i\|_{\frac{p}{p-1}}\Big) \\ &= O\Big(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\sum_{i=1}^{N}\|\phi_i\|\Big) = O\Big(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\|\boldsymbol{\phi}\|\Big),\end{aligned}$$

对任意充分接近1的 $p>1$， $\varepsilon\to 0$ 成立。 □

为研究非线性部分$\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}$的渐近行为，我们有如下引理:

引理 4.3. 存在 $s_0>1$ 与 $\varepsilon_0>0$，使得对任意满足$pr\in(1,\ s_0)$与 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$的 $p>1$、$r>1$，

$$\|\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2N}\frac{1-pr}{pr}}\|\boldsymbol{\phi}\|^2\right)$$

and

$$\|\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^0)-\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^1)\|_p = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2N}\frac{1-pr}{pr}}\|\boldsymbol{\phi}^0-\boldsymbol{\phi}^1\|(\|\boldsymbol{\phi}^1\|+\|\boldsymbol{\phi}^0\|)\right)$$

对任意 $\boldsymbol{\phi}$、$\boldsymbol{\phi}^0$、$\boldsymbol{\phi}^1\in\{\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\ \phi_2)\in\mathcal{H}:\ \|\phi_i\|\le 1、\ i=1、\ .....、\ N\}$均成立 .

证明. 类似于引理 A.5 的证明，我们可以得到该结果。此处省略细节。 □

接下来，我们将利用不动点定理求解非线性问题（33）。

命题 *4.4.* 给定 $p_0>1$、$\varepsilon_0>0$ 和 $R_0>0$，使得对于任意 $p\in(1,p_0)$、$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 和 $R\ge R_0$，存在唯一的 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon=(\phi^1_\varepsilon,\dots\phi^N_\varepsilon)\in\mathcal{H}_k$，满足$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，使得 $W_\varepsilon+\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ 是参数为 ε 的 *Toda*系统 *(5)* 的解，并满足

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|\le R\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}|\log\varepsilon|.$$

证明。 我们定义算子

$$\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) := \mathcal{L}_{\xi,\varepsilon}^{-1}(\mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) + \mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) + \mathcal{R}_{\xi,\varepsilon})$$

在 $\mathcal{H}_k$. 为了找到 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon \in \mathcal{H}_k$ 使得 $\mathbf{W}_\varepsilon + \boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ 满足（5），只需找到 $\mathcal{T}_{\xi,\ \varepsilon}$: $\mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$ 的一个不动点。我们选取 p_0， $r > 1$ 充分接近 1，使得

$$\frac{2-p_0}{4Np_0} + \frac{1-p_0 r}{2Np_0 r} > 0.$$

由引理 3.1 和引理 4.1-引理 4.3，我们推出存在 $R_0 > 1$充分大且 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小，使得对任意 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_1)$ $R \geq R_0$， $p \in (1,\ p_0)$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\| &\leq C|\log\varepsilon|\left(\|\mathcal{S}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p + \|\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})\|_p + \|\mathcal{R}_{\xi,\varepsilon}\|_p\right) \\
&\leq C|\log\varepsilon|\left(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\|\boldsymbol{\phi}\| + \varepsilon^{\frac{1}{2N}\frac{1-pr}{pr}}\|\boldsymbol{\phi}\|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\right) \\
&\leq R\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}|\log\varepsilon|,
\end{aligned}$$

对任意 $\boldsymbol{\phi} \in \{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{H} :\ \|\boldsymbol{\phi}\| \leq R\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}|\log\varepsilon|\}$. 接下来，我们将证明 $\mathcal{T}_{\xi,\ \varepsilon}$ 是一个压缩映射。给定 $\boldsymbol{\phi}^0$， $\boldsymbol{\phi}^1 \in \{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{H} :\ \|\boldsymbol{\phi}\| \leq R\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}|\log\varepsilon|\}$，引理 3.1和引理 4.1-4.3 蕴含存在 $\varepsilon_0 \in (0,\ \varepsilon_1)$ 使得对任意 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^1) - \mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^0)\| \leq C|\log\varepsilon|\left(\|S_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^0 - \boldsymbol{\phi}^1)\|_p + \|\mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^0) - \mathcal{N}_{\xi,\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}^1)\|_p\right) \\
&\leq C|\log\varepsilon|\left(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}\|\boldsymbol{\phi}^0 - \boldsymbol{\phi}^1\| + \varepsilon^{\frac{1}{2N}\frac{1-pr}{pr}}(\|\boldsymbol{\phi}^0\| + \|\boldsymbol{\phi}^1\|)\|\boldsymbol{\phi}^0 - \boldsymbol{\phi}^1\|\right) \\
&\leq C\left(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}|\log\varepsilon| + \varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}+\frac{1}{2N}\frac{1-pr}{pr}}|\log\varepsilon|^2\right)\|\boldsymbol{\phi}^0 - \boldsymbol{\phi}^1\| \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\phi}^0 - \boldsymbol{\phi}^1\|.
\end{aligned}$$

利用压缩映射原理，我们证明，对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，算子$\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}$.存在一个不动点 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon \in \left\{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{H}_k :\ \|\boldsymbol{\phi}\| \leq R\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-p}{p}}|\log\varepsilon|\right\}$ ——

□

5 主要结果的证明

本节结合前几节的结果，完成定理 1.3 的证明。根据命题 4.4，要完成爆破解的构造，只需验证其性质（ii）和（iii）。

定理 *1.3* 的证明。 我们首先证明 ii)，即

$$\rho^\varepsilon = (\rho_1^\varepsilon, \ldots, \rho_N^\varepsilon) \to (2\pi m\alpha_1, \ldots, 2\pi m\alpha_N)$$

因为 $\varepsilon \to 0$. 应用引理 A.3 和命题 4.4，我们推得

$$\begin{aligned}
\rho_i^{\varepsilon} &:= \int_{\Sigma} \varepsilon V_i e^{u_{i,\varepsilon}} dv_g \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{U(\xi_j)} \frac{\alpha_i^2 |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y_{\xi_j}(x)|^{\alpha_i})^2} \exp\Big\{ \Big(PU_j^i - U_j^i + \frac{a_{ii'}}{2} \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} PU_j^{i'} \Big) \\
&\quad + \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^{m} \Big(PU_{j'}^i + \frac{a_{ii'}}{2} \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{N} PU_{j'}^{i'} \Big) + \log V_i + \log(2\varepsilon) - (\alpha_i - 2) \log |y_{\xi_j}| \\
&\quad + \phi_{1,\varepsilon} \Big\} dv_g + \mathcal{O}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_{ij}} \frac{\alpha_i^2 |y|^{\alpha_i - 2}}{(1 + |y|^{\alpha_i})^2} e^{\Theta_{ij}} dy + o(1) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_{ij}} \frac{\alpha_i^2 |y|^{\alpha_i - 2}}{(1 + |y|^{\alpha_i})^2} (1 + \mathcal{O}(\delta_{i,j}|y| + \varepsilon^{\frac{1}{2i}})) dy + o(1) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j)}{4} + o(1) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j^*)}{4} + o(1) = 2\pi \alpha_i m + o(1),
\end{aligned}$$

在应用了 $\xi_j^* \in \mathring{\Sigma}$后，积分$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{}{(1+|y|^2)^2} dy = \pi$和 $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|y|^2}{(1+|y|^4)^2} dy = \frac{\pi}{2}$. 根据命题4.4的结果，得出定理1.3。

为证明性质 iii)，我们引入不等式 $|e^s - 1| \leq Ce^{|s|}|s|$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$成立。对于任意 $\psi \in C^{\infty}(\Sigma)$，由命题4.4 和引理A.4，可得

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \varepsilon V_i e^{u_{i,\varepsilon}} \psi dv_g &= \int_{\Sigma} \varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} \psi dv_g + o(1) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U_j^i} \psi dv_g \\
&\quad + \mathcal{O}\Big(\int_{\Sigma} \frac{1}{2} \Big| \sum_j \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U_j^i} - \varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} \Big| \cdot |\psi| dv_g \Big) + o(1) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j^*)}{4} \psi(\xi_j^*) + o(1) = \sum_{j=1}^{m} 2\pi \alpha_i \psi(\xi_j^*) + o(1).
\end{aligned}$$

因此，性质 iii) 得证。 □

一种技术估计方法

在附录A中，我们给出了支持主要分析的详细技术估计。

下面的引理给出了投影泡PU_j^i在 $j = 1, \ldots, m$ 以及 $i = 1, \ldots, N$时的渐近行为。

引理 A.1. 对于 $j = 1, \dots, m$ 以及 $i = 1, \dots, N$，有：

$$PU_j^i = \chi_j \cdot (U_j^i - \log(2\alpha_i^2 \delta_{i,j}^{\alpha_i})) + \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j)}{2} H^g(\cdot, \xi_j) + \begin{cases} \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2 |\log \delta_{i,j}|) & i = 1 \\ \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2) & i \geq 2 \end{cases},$$

当 $\delta_{i,j} \to 0$. 对于任意 $x \in \Sigma \setminus \{\xi_j\}$,

$$PU_j^i = \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j)}{2} G^g(\cdot, \xi_j) + \begin{cases} \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2 |\log \delta_{i,j}|) & i = 1 \\ \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2) & i \geq 2 \end{cases},$$

当 $\delta_{i,j} \to 0$.

证明。令 $\eta_{ij} = PU_j^i - \chi_j \cdot (U_j^i - \log(2\alpha_i^2 \delta_{i,j}^{\alpha_i})) - \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j)}{2} H^g(\cdot, \xi_j)$。若 $\xi_j \in \mathring{\Sigma}$，$\partial_{\nu_g} \eta_{ij} \equiv 0 \quad \partial\Sigma$ $x \in \partial\Sigma \cap U$ ξ_j $\partial_{\nu_g} |y_{\xi_j} x|^2 =$在 . 我们注意到，对于任意 ( )，$\underline{\quad}( ) - e^{-\frac{1}{2}\hat{\varphi}_{\xi_j}(y)} \frac{\partial}{\partial y_2} |y|^2 \Big|_{y = y_{\xi_j}} (x) = 0$. 若 $\xi_j \in \partial\Sigma$，对于任意 $x \in \partial\Sigma$，我们有当 $\delta_{i,j} \to 0$

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_g} \eta_{ij}(x) &= 2\partial_{\nu_g} \left(\chi_j \log \left(1 + \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y_{\xi_j}(x)|^{\alpha_i}} \right) \right) \\ &= 2(\partial_{\nu_g} \chi_j) \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y_{\xi_j}(x)|^{\alpha_i}} - 2\chi_j \partial_{\nu_g} \log \left(1 + \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y_{\xi_j}(x)|^{\alpha_i}} \right) + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{2\alpha_i}) \\ &= \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}). \end{aligned}$$

因此，对于任意 $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m$，$\partial_{\nu_g} \eta_{ij} = \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i})$ 当 $\delta_{i,j} \to 0$.

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \eta_{ij} dv_g &= \int_\Sigma 2\chi_j \log \left(1 + \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}} \right) dv_g = 2 \int_{B_{r_0}^{\xi_j}} e^{\hat{\varphi}_{\xi_j}(y)} \log \left(1 + \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y|^{\alpha_i}} \right) dy \\ &\quad + 2 \int_{B_{2r_0}^{\xi_j} \setminus \mathbb{B}_{r_0}} \chi\Big(\frac{|y|}{r_0}\Big) e^{\hat{\varphi}_{\xi_j}(y)} \left(\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y|^{\alpha_i}} + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{2\alpha_i}) \right) dy \\ &= 2\delta_{i,j}^2 \int_{\frac{1}{\delta_{i,j}} B_{r_0}^{\xi_j}} \log \left(1 + \frac{1}{|y|^{\alpha_i}} \right) e^{\hat{\varphi}(\delta_{i,j} y)} dy + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}) \\ &= 2\delta_{i,j}^2 \int_{\frac{1}{\delta_{i,j}} B_{r_0}^{\xi_j}} (1 + \mathcal{O}(\delta_{i,j}|y|)) \log \left(1 + \frac{1}{|y|^{\alpha_i}} \right) dy + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}) \\ &= \begin{cases} \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2 |\log \delta_{i,j}|), & i = 1 \\ \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2), & i \geq 2 \end{cases}, \end{aligned}$$

这里我们运用了这一事实：

$$0 \leq \int_{|y| < \frac{r_0}{\delta_{i,j}}} \log \left(1 + \frac{1}{|y|^{\alpha_i}} \right) dy = 2\pi \int_0^{r_0/\delta_{i,j}} \log \left(1 + \frac{1}{r^{\alpha_i}} \right) r dr$$

$$\leq \pi \int_0^{r_0^2/(\tau\rho)^2} \log\left(1+\frac{1}{t}\right) dt \leq 2\pi \int_1^{r_0/\delta_{i,j}} r^{1-\alpha_i} dr + \mathcal{O}(1)$$
$$= \begin{cases} \mathcal{O}(|\log \delta_{i,j}|) & i = 1 \\ \mathcal{O}(1) & i \geq 2 \end{cases}.$$

对于任意的 $x \in U_{2r_0}(\xi)$, $-\Delta_g U_j^i = e^{-\varphi_j} e^{U_j^i}$。由此可得

$$-\Delta_g \eta_{ij} = 2(\Delta_g \chi_j) \log \frac{|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}}{\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y_{\xi_j}|^{\alpha_i}} + 4\Big\langle \nabla\chi_j, \nabla \log \frac{|y_{\xi_j}|^{\alpha_i}}{\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y_{\xi_j}|^{\alpha_i}} \Big\rangle_g$$
$$+ \frac{1}{|\Sigma|_g}\Big(\frac{1}{2}\alpha_i \varrho(\xi_j) - \int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U_j^i} dv_g\Big).$$

我们注意到 $\Delta_g \chi_j \equiv 0$ 和 $\nabla \chi_j \equiv 0$ 在 $U_{2r_0}(\xi_j) \setminus U_{r_0}(\xi_j)$。对于任意 $x \in U_{2r_0}(\xi_j) \setminus U_{r_0}(\xi_j)$，我们有 $-2\log\left(1 + \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y_{\xi_j}(x)|^{\alpha_i}}\right) = -2\delta_{i,j}^{\alpha_i} |y_\xi(x)|^{-\alpha_i} + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{2\alpha_i})$，并且

$$-2\nabla \log\left(1 + \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{|y_{\xi_j}(x)|^{\alpha_i}}\right) = -2\delta_{i,j}^{\alpha_i} \nabla |y_{\xi_j}(x)|^{-\alpha_i} + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{2\alpha_i}),$$

因为 $\delta_{i,j} \to 0$。此外，直接计算该积分可得

$$\int_\Sigma \chi_j e^{-\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2} e^{U_j^i} dv_g = \int_{B_{2r_0}^\xi} 2\alpha_i^2 \chi\Big(\frac{|y|}{r_0}\Big) \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i} |y|^{\alpha_i - 2}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y|^{\alpha_i})^2} dy$$
$$= \int_{B_{r_0}^\xi} 2\alpha_i^2 \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i} |y|^{\alpha_i - 2}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y|^{\alpha_i})^2} dy + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i})$$
$$= \frac{\alpha_i \varrho(\xi_j)}{2} + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}),$$

其中我们应用了以下事实：$\int_{|y|<r} 2\alpha_i^2 \frac{\delta_i^{\alpha_i} \delta_{i,j}^{\alpha_i} |y|^{\alpha_i - 2}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y|^{\alpha_i})^2} dy = 4\pi\alpha_i \Big(1 - \frac{\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{\delta_{i,j}^{\alpha_i} + r^{\alpha_i}}\Big)$ 对于任意$r \geq 0$. 因此，当 $\delta_{i,j} \to 0$, $-\Delta_g \eta_{ij} = \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i})$。根据椭圆方程的正则性理论（例如参见 [1, 40], ）以及 Sobolev 嵌入，我们推得，当

$$\delta_{i,j} \to 0,\ \eta_{ij} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2 |\log \delta_{i,j}|) & i = 1 \\ \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2) & i \geq 2 \end{cases} \text{ in } C(\Sigma). \qquad \square$$

采用引理 A.1 的相同方法，我们可以推导出 PZ_{ij} 的渐近展开如下：

引理 A.2。对于任意 $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, m$，当 $\delta_{i,j} \to 0$

$$PZ_{ij} = Z_{ij} + 1 + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i} |\log \delta_{i,j}|) = \frac{2\delta_{i,j}^{\alpha_i}}{\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y_{\xi_j}|^{\alpha_i}} + \begin{cases} \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2 |\log \delta_{i,j}|), & i = 1 \\ \mathcal{O}(\delta_{i,j}^2), & i \geq 2 \end{cases}. \tag{35}$$

引理 A.3。令 Θ_{ij} 由 (34)定义。对于 $i=1,\dots,N$、$j=1,\dots,m$，有 $|\Theta_{ij}(y)| = \mathcal{O}\Big(\delta_{i,j}|y| + \varepsilon_{1}^{2i}\Big)$，$y \in \overline{\mathcal{A}_{ij}}$，尤其是，上确界 $|\Theta_{ij}(y)| = \mathcal{O}(1)$ 当 $\varepsilon \to 0$.

证明。利用引理 A.1 以及泰勒展开 $f(\delta_{i,j}y) = 1 + \mathcal{O}(\delta_{i,j}|y|)$，对于任意 $f \in C^1(\Omega_{ij})$，可得

(36)

$$
\begin{aligned}
\Theta_{ij}(y) = &-\log(2\alpha_i^2\delta_{i,j}^{\alpha_i}) + \frac{\alpha_i}{2}\Big(\varrho(\xi_j)R^g(\xi_j) + \sum_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{m}\varrho(\xi_{j'})G^g(\xi_j,\xi_{j'})\Big)\\
&+\sum_{i'<i}\frac{a_{ii'}}{2}\Big(-2\alpha_{i'}\log(\delta_{i,j}|y|) + \frac{\alpha_{i'}}{2}\Big(\varrho(\xi_j)R^g(\xi_j) + \sum_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{m}\varrho(\xi_{j'})G^g(\xi_j,\xi_{j'})\Big)\\
&+\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}}|y|^{-\alpha_{i'}}\Big)\Big) + \sum_{i'>i}\frac{a_{ii'}}{2}\Big(-2\alpha_{i'}\log\delta_{i',j} + \frac{\alpha_{i'}}{2}\Big(\varrho(\xi_j)R^g(\xi_j)\\
&+\sum_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{m}\varrho(\xi_{j'})G^g(\xi_{j'},\xi_j)\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}|y|^{\alpha_{i'}}\Big)\Big) + \log V_i(\xi_j) + \log(a_{ii}\varepsilon)\\
&-(\alpha_i-2)\log(\delta_{i,j}|y|) + \mathcal{O}\Big(\sum_{l=1}^{N}\sum_{j'=1}^{m}\varepsilon_{l,j'} + \delta_{i,j}|y|\Big)\\
=\ &-2\log\alpha_i - (\alpha_i\log d_{i,j} + \sum_{i'>i}a_{ii'}\alpha_{i'}\log(d_{i',j})) + \frac{1}{2}\Big(\alpha_i + \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^{N}\frac{a_{ii'}}{2}\alpha_{i'}\Big)\\
&\times\Big(\varrho(\xi_j)R^g(\xi_j) + \sum_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{m}\varrho(\xi_{j'})G^g(\xi_{j'},\xi_j)\Big) + \log V(\xi_j) - \Big(\alpha_i\log\delta_i\\
&+\sum_{i'>i}a_{ii'}\alpha_{i'}\log\delta_{i'} - \log\varepsilon\Big) + \Big(-(\alpha_i-2) - \sum_{i'<i}a_{ii'}\alpha_i'\Big)\log(\delta_{i,j}|y|)\\
&+\sum_{i'<i}\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}}|y|^{-\alpha_{i'}}\Big) + \sum_{i'>i}\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}|y|^{\alpha_{i'}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\sum_{l=1}^{N}\sum_{j'=1}^{m}\varepsilon_{l,j'} + \delta_{i,j}|y|\Big),
\end{aligned}
$$

其中，$\varepsilon_{l,j'}$ 表示当 $l=1$ 时的 $\mathcal{O}(\delta_{l,j'}^2|\log\delta_{l,j'}|)$，以及当 $l\geq 2.$ 时的 $\mathcal{O}(\delta_{l,j'}^2)$。回顾一下，$\alpha_i$、$\delta_{i,j}$ 和 $d_{i,j}$ 分别由 (7)、(8) 和 (10) 定义。由此立即可知，(36) 中的前三项为零。因此，我们有

$$
\Theta_{ij}(y) = \sum_{i'<i}\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}}|y|^{-\alpha_{i'}}\Big) + \sum_{i'>i}\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}|y|^{\alpha_{i'}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\sum_{l=1}^{N}\sum_{j'=1}^{m}\varepsilon_{l,j'} + \delta_{i,j}|y|\Big). \tag{37}
$$

估计式（7）和（8）意味着 $\mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i}|\log\delta_{i,j}|) = \mathcal{O}(\varepsilon\log|\varepsilon|)$，对于 $i=1,\dots,N$ 和 $j=1,\dots,m.$。对于 $y\in\frac{1}{\delta_{i,j}}\mathcal{A}_{ij}$，我们有

$$\sqrt{\delta_{i-1,j}/\delta_{i,j}}\le|y|<\sqrt{\delta_{i+1,j}/\delta_{i,j}}.$$

如果 $i'<i$,

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}|y|^{\alpha_{i'}}}\Big)=\mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\delta_{i',j}^2}{\delta_{i,j}\delta_{i-1,j}}\Big)^{\alpha_{i'}/2}\Big)=\mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\delta_{i-1,j}}{\delta_{i,j}}\Big)^{\alpha_{i'}/2}\Big)\overset{(9)}{=}\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2i}});$$

如果 $i'>i$,

$$\sum_{i'>i}\mathcal{O}\Big(\frac{\delta_{i,j}^{\alpha_{i'}}|y|^{\alpha_{i'}}}{\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}}}\Big)=\mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\delta_{i,j}\delta_{i+1,j}}{\delta_{i',j}^2}\Big)^{\alpha_{i'}/2}\Big)=\mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\delta_{i,j}}{\delta_{i+1,j}}\Big)^{\alpha_{i'}/2}\Big)\overset{(9)}{=}\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2i}}).$$

此外，$\mathcal{O}(\delta_{i,j}|y|)=\mathcal{O}(1)$。引理 A.3 已证完。 □

引理 A.4。对于 $i=1,\dots,N$，存在 $p_0>1$，使得对于任意 $p\in(1,p_0)$

$$\Big\|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}-\sum_{j=1}^m\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\Big\|_p=\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{2-p}{4N}}\right),$$

如 $\varepsilon\to0.$

证明。应用引理 A.1，对于任意 $x\in\Sigma\setminus\bigcup_{j=1}^m U_{r_0}(\xi_j)$，

$$\begin{aligned}W_{i,\varepsilon}(x)&=\sum_{j=1}^m PU_j^i+\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^N\frac{a_{ii'}}{2}\sum_{j=1}^m PU_j^{i'}\\&=\sum_{j=1}^m\frac{\varrho(\xi_j)}{2}\Big(\alpha_i+\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^N\frac{a_{ii'}}{2}\alpha_{i'}\Big)G^g(x,\xi_j)+\mathcal{O}\Big(\sum_{i=1}^N\delta_{i,j}^2|\log\delta_{i,j}|\Big)\\&=\mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

通过直接计算，我们推导得出

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma\Big|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}-\sum_{j=1}^m\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\Big|^p dv_g\\&=\sum_{j=1}^m\int_{U_{r_0}(\xi_j)}\Big|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}-e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\Big|^p dv_g+\mathcal{O}\left(\varepsilon^p+\delta_{i,j}^{\alpha_i p}\right)\\&=\sum_{j=1}^m\int_{\frac{1}{\delta_{i,j}}B_{r_0}^{\xi_j}(\xi_j)}\Big|2\varepsilon V_i\circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i,j}y)e^{\varphi_{\xi_j}\circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i,j}y)}e^{W_{i,\varepsilon}\circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i,j}y)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- |\delta_{i,j}y|^{\alpha_i-2} e^{U_j^i \circ y_{\xi_j}^{-1}(\delta_{i,j}y)}\Big|^p dv_g + \mathcal{O}\left(\varepsilon^p + \delta_{i,j}^{\alpha_i p}\right) \\
&= (2\alpha_i^2)^p \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_{ij}} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left|e^{\Theta_{ij}(y)} - 1\right|^p dy + \mathcal{O}\left(\varepsilon^p + \delta_{i,j}^{\alpha_i p}\right).
\end{aligned}
$$

我们将通过将积分$\int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{\delta_i}{\delta_{i,j}}}(0)} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left|e^{\Theta_{ij}(y)} - 1\right|^p dy$ 划分为若干区域来计算：$\Omega^{ij} \cap B_{\frac{1}{\delta_i}}(\mathcal{A}_{1j}, \ldots, \Omega^{ij} \cap B_{\frac{1}{\delta_i}}(\mathcal{A}_{Nj}$。引理A.3 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{ij})} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left|e^{\Theta_{ij}(y)} - 1\right|^p dy \\
&= \mathcal{O}\Big(\int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{ij})} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} |\Theta_{ij}(y)|^p dy \Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{ij})} |\delta_{i,j}|^{2-2p} \frac{|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left|\delta_{i,j}|y| + \varepsilon^{\frac{1}{2i}}\right|^p dy \Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\delta_{i,j}^{2-p} + \delta_{i,j}^{2-2p} \varepsilon^{\frac{1}{2pi}} \Big) \overset{(8)}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^{(2-p)\frac{1}{4i}} + \varepsilon^{\frac{1}{2ip} - \frac{(p-1)N}{2}}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2-p}{4i}}),
\end{aligned}
$$

当 $p > 1$ 充分接近 1时。对于 $i' \neq i$，由（8）

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{i'j})} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left|e^{\Theta_{ij}(y)} - 1\right|^p dy \\
&\leq 2^p \int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{i'j})} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} dy \\
&\quad + 2^p \int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{i'j})} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left|e^{\Theta_{ij}(y)}\right|^p dy.
\end{aligned} \tag{38}
$$

对于 $R.H.S.$（38）中的第一项，应用（8）和（9），可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{ij}\cap B_{\frac{1}{\delta_{i,j}}}(\mathcal{A}_{i'j})} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} dy \\
&= \mathcal{O}\Big(\int_{\frac{\sqrt{\delta_{i'-1,j}\delta_{i',j}}}{\delta_{ij}} \leq |y| \leq \frac{\sqrt{\delta_{i',j}\delta_{i'+1,j}}}{\delta_{ij}}} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} dy \Big) \\
&= \begin{cases}
O\Big(\delta_{i,j}^{2-2p} \left(\frac{\sqrt{\delta_{i',j}\delta_{i'+1,j}}}{\delta_{i,j}}\right)^{(\alpha_i-2)p+2}\Big) = O\Big(\delta_{i,j}^{2-2p} \left(\frac{\delta_{i',j}}{\delta_{i'+1,j}}\right)^{\frac{(\alpha_i-2)p+2}{2}}\Big) & \text{if } i > i' \\
O\Big(\delta_{i,j}^{2-2p} \left(\frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{\delta_{i'-1,j}\delta_{i',j}}}\right)^{(\alpha_j+2)p-2}\Big) = O\Big(\delta_{i,j}^{2-2p} \left(\frac{\delta_{i'-1,j}}{\delta_{i',j}}\right)^{\frac{(\alpha_i+2)p-2}{2}}\Big) & \text{if } i < i'
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
O\left(\varepsilon^{-N(p-1)+\frac{1}{2N}}\right) & \text{if } i > i' \\
O\left(\varepsilon^{-N(p-1)+\frac{2p-1}{2N}}\right) & \text{if } i < i'
\end{cases} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2-p}{4N}}),
\end{aligned}
$$

当 $p>1$ 充分接近1时。为估计（38）中的第二项，由引理A.1 可得

$$\int_{\Omega_{ij}\cap\frac{1}{\delta_{i,j}}\mathcal{A}_{i'j}}\frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p}|y|^{(\alpha_i-2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}}\left|e^{\Theta_{ij}(y)}\right|^p dy$$
$$=\int_{\delta_{i,j}\Omega_{ij}\cap\mathcal{A}_{i'j}}|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}(y_{\xi_j}^{-1}(y))|^p dy=\mathcal{O}\left(\mathcal{I}_j^{(i,i')}\right),$$

其中 $\mathcal{I}^{(i,i')}{}_j:=\varepsilon^p\int_{\delta_{i,\ j}\Omega_{ij}\cap\mathcal{A}_{i'j}}\left(\frac{\Pi_{l\neq i}}{(\delta_l^{\alpha_l}{}_{,\ j}+|y|^{\alpha_l})^2}\right)^{-a_{il}})^p dy.$

$\delta_i^{\alpha_i}{}_{,\ j}+|y|^{\alpha_i})$

我们通过考虑指标 i 的三种不同情况来计算 $\mathcal{I}^{(i,i')}{}_j$：

(1) $i=1$; (2) $i=N$; (3) $2\le i\le N-1$。

对于 $i=1$，我们有 $i'\ge 2$，且对于所有 $l>2$，$a_{il}=0$。由此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j^{(i,i')}&=\varepsilon^p\int_{\delta_{1,j}\Omega_{1j}\cap\mathcal{A}_{i'j}}\left(\frac{(\delta_{2,j}^{\alpha_2}+|y|^{\alpha_2})^{-a_{12}}}{(\delta_{1,j}^{\alpha_1}+|y|^{\alpha_1})^2}\right)^p dy\\&=\mathcal{O}\Big(\varepsilon^p\delta_{1,j}^{2-2\alpha_1 p}\delta_{2,j}^{(-a_{12})\alpha_2 p}\int_{\left\{|y|>\frac{\sqrt{\delta_{i',j}\delta_{i'-1,j}}}{\delta_{1,j}}\right\}}\frac{(1+\delta_{1,j}^{\alpha_2}\delta_{2,j}^{-\alpha_2}|y|^{\alpha_2})^{-a_{12}p}}{(1+|y|^{\alpha_1})^{2p}}dy\Big)\\&=\mathcal{O}\Big(\varepsilon^p(\delta_1\delta_2)\frac{\delta_2^{(-a_{12})\alpha_2 p}}{(\delta_1\delta_2)^{\alpha_1 p}}+\varepsilon^p(\delta_1\delta_2)^{1-\alpha_1 p+\frac{(-a_{12})\alpha_2 p}{2}}\Big)\\&=\mathcal{O}(\varepsilon^{(\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-1)+\frac{1}{2})p})=\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{p}{4}}),\end{aligned}$$

当 $p>1$ 充分小时，其中我们应用了（7）和（8）。

对于 $i=N$，我们有 $i'\le N-1$ 和 $a_{il}=0$ 对所有 $l<N-1$均成立。由此可知 t

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j^{(i,i')}&=\varepsilon^p\int_{\delta_{N,j}\Omega_{Nj}\cap\mathcal{A}_{i'j}}\left(\frac{(\delta_{N-1,j}^{\alpha_{N-1}}+|y|^{\alpha_{N-1}})^{-a_{NN-1}}}{(\delta_{N,j}^{\alpha_N}+|y|^{\alpha_N})^2}\right)^p dy\\&=\mathcal{O}\Big(\varepsilon^p\delta_{N,j}^{2-2\alpha_N p}\int_{\left\{|y|<\frac{\sqrt{\delta_{i',j}\delta_{i'+1,j}}}{\delta_{N,j}}\right\}}\left(\frac{\delta_{N-1,j}^{(-a_{NN-1})\alpha_{N-1}}}{(1+|y|^{\alpha_N})^2}\right)^p dy\\&\quad+\varepsilon^p\delta_{N,j}^{2-2\alpha_N p-a_{NN-1}\alpha_{N-1}p}\int_{\left\{|y|<\frac{\sqrt{\delta_{i',j}\delta_{i'+1,j}}}{\delta_{N,j}}\right\}}|y|^{(-a_{NN-1})\alpha_{N-1}p}dy\Big)\\&=\mathcal{O}\Big(\varepsilon^p(\delta_N\delta_{N-1})\frac{\delta_{N-1}^{(-a_{NN-1})\alpha_{N-1}p}}{\delta_N^{2\alpha_N P}}+\left(\frac{\delta_{N-1}}{\delta_N}\right)^{(1-\frac{1}{2}(-a_{NN-1})\alpha_{N-1})p}\Big)\\&=\mathcal{O}(\varepsilon^p+\varepsilon^{\frac{1}{2(N-1)}\frac{\alpha_N}{2}p})=\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{p}{2}}),\end{aligned}$$

其中我们应用了（7）和（8）。

对于情形 $2 \le i \le N-1$，我们有 $N \ge 3$ 和 $|a_{il}| = 0$，对所有 $|i-l| \ge 2$. 均成立。由于 $\delta_{l,\ j}$ 关于指标 i 单调递增，当 ε 充分小时，$\mathcal{I}^{(i,i')}{}_j$ 可化简如下：对于 $i < i'$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_j^{(i,i')} &= \mathcal{O}\Big(\varepsilon^p \Pi_{\substack{l \ge i'+1 \\ l \ne i}} \delta_{l,j}^{p(-a_{il}\alpha_l)} \int_{\delta_{i,j}\Omega_{ij} \cap \mathcal{A}_{i'j}} \Pi_{\substack{l' \le i'-1 \\ l' \ne i}} |y|^{p(-a_{il'}\alpha_{i'})} \\
&\quad \times \Big(\frac{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} + |y|^{\alpha_{i'}})^{-a_{ii'}}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y|^{\alpha_i})^2} \Big)^p dy \Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\varepsilon^p \Pi_{l \ne i} \delta_{l,j}^{p(-a_{il}\alpha_l)} \delta_i^{2-2\alpha_i p} \int_{\frac{\mathcal{A}_{i'j}}{\delta_{i,j}}} \Big(\frac{|y|^{(-a_{ii-1})\alpha_{i-1} + (-a_{ii+1})\alpha_{i+1}}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2} \Big)^p dy \Big) \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^p \Pi_{l \ne i} \delta_{l,j}^{(-a_{il}\alpha_l)p} \delta_i^{2-2\alpha_i p}).
\end{aligned}$$

由构造 (7) 和 (8，可得 $\delta_{i-1}^{\alpha_{i-1}} = \varepsilon^{N+2-i}$，$\delta_i^{\alpha_i} = \varepsilon^{N+1-i}$ 和$\delta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N-i})$，这意味着

$$\Pi_{l \ne i} \delta_{l,j}^{p(-a_{il}\alpha_l)} \delta_i^{-2\alpha_i p} = \mathcal{O}(1). \tag{39}$$

若 $i > i'$，我们可以立即推出

$$\mathcal{I}_j^{(i,i')} = \mathcal{O}\Big(\varepsilon^p \delta_{i-1,j}^{(-a_{ii-1}\alpha_{i-1})p} \delta_{i+1,j}^{(-a_{ii+1}\alpha_{i+1})p} \delta_i^{2-2\alpha_i p}\Big) \overset{(39)}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^p).$$

接下来，我们考虑情形 $i < i'$。有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_j^{(i,i')} &= \mathcal{O}\Big(\varepsilon^p \Pi_{\substack{l \ge i'+1 \\ l \ne i}} \delta_{l,j}^{p(-a_{il}\alpha_l)} \int_{\delta_{i,j}\Omega_{ij} \cap \mathcal{A}_{i'j}} \Pi_{\substack{l' \le i'-1 \\ l' \ne i}} |y|^{p(-a_{il'}\alpha_{i'})} \\
&\quad \times \Big(\frac{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} + |y|^{\alpha_{i'}})^{-a_{ii'}}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y|^{\alpha_i})^2} \Big)^p dy \Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\varepsilon^p \int_{\delta_{i,j}\Omega_{ij} \cap \mathcal{A}_{i'j}} \Pi_{\substack{l' \le i'-1 \\ l' \ne i}} |y|^{p(-a_{il'}\alpha_{i'})} \Big(\frac{(\delta_{i',j}^{\alpha_{i'}} + |y|^{\alpha_{i'}})^{-a_{ii'}}}{(\delta_{i,j}^{\alpha_i} + |y|^{\alpha_i})^2} \Big)^p dy \Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\varepsilon^p \int_{\delta_{i,j}\Omega_{ij} \cap \mathcal{A}_{i'j}} \frac{1}{|y|^{(2\alpha_i - (-a_{ii-1})\alpha_{i-1} - (-a_{ii+1})\alpha_{i+1})p}} dy \Big) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^p),
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $2 - (2\alpha_i - (-a_{ii-1})\alpha_{i-1} - (-a_{ii+1})\alpha_{i+1})p > 0$。

因此，我们得到，对于任意 $i \ne i'$

$$\int_{\Omega_{ij} \cap \frac{1}{\delta_{i,j}} \mathcal{A}_{i'j}} \frac{|\delta_{i,j}|^{2-2p} |y|^{(\alpha_i - 2)p}}{(1+|y|^{\alpha_i})^{2p}} \left| e^{\Theta_{ij}(y)} \right|^p dy = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2-p}{4N}}).$$

□

引理 A.5. 对于任意 $p \geq 1$ 和 $r > 1$，存在正常数 c_1、c_2，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，以下估计对任意 ϕ_1、$\phi_2 \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}^1$ 以及任意$i = 1, \ldots, N$均成立：

$$\|\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}(e^{\phi_1} - 1 - \phi_1)\|_p \leq c_1 \varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-2pr}{pr}} e^{c_2\|\phi_1\|^2}\|\phi_1\|^2, \tag{40}$$

and

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}(e^{\phi_1} - e^{\phi_2} - (\phi_1 - \phi_2))\|_p \\ &\leq c_1 \varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-2pr}{pr}} e^{c_2\sum_{h=1}^2\|\phi_h\|}(\sum_{h=1}^2\|\phi_h\|)\|\phi_1 - \phi_2\|.\end{aligned} \tag{41}$$

证明。 根据中值定理，对于某个 $s \in (0,1)$

$$|e^{\phi_1} - e^{\phi_2} - \phi_1 + \phi_2| \leq \left|e^{s\phi_1 + (1-s)\phi_2} - 1\right| |\phi_1 - \phi_2| \leq e^{\sum_{h=1}^2|\phi_h|}|\phi_1 - \phi_2|\sum_{h=1}^2|\phi_h|.$$

由 Hölder 不等式、Sobolev 不等式和 Moser-Trudinger 不等式可得

$$\begin{aligned}&\Big(\int_\Sigma V_i^p e^{p\sum_{j=1}^m\left(PU_j^i + \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^N \frac{a_{ii'}}{2}PU_j^{i'}\right)}|e^{\phi_1} - e^{\phi_2} - (\phi_1 - \phi_2)|^p dv_g\Big)^{1/p} \\ &\leq C\sum_{h=1}^2\Big(\int_\Sigma V_i^p e^{p\sum_{j=1}^m\left(PU_j^i + \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^N \frac{a_{ii'}}{2}PU_j^{i'}\right)}(e^{|\phi_1|+|\phi_2|}|\phi_1 - \phi_2||\phi_h|)^p dv_g\Big)^{1/p} \\ &\leq C\sum_{h=1}^2\Big(\int_\Sigma V_i^{pr} e^{pr\left(PU_j^i + \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^N \frac{a_{ii'}}{2}PU_j^{i'}\right)} dv_g\Big)^{\frac{1}{pr}}\Big(\int_\Sigma e^{ps(|\phi_1|+|\phi_2|)}dv_g\Big)^{\frac{1}{ps}} \\ &\quad\times\Big(\int_\Sigma |\phi_1 - \phi_2|^{pt}|\phi_h|^{pt}dv_g\Big)^{\frac{1}{pt}} \\ &\leq C\sum_{h=1}^2\Big(\int_\Sigma V_i^{pr} e^{pr\left(PU_j^i + \sum_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^N \frac{a_{ii'}}{2}PU_j^{i'}\right)} dv_g\Big)^{\frac{1}{pr}} e^{\frac{ps}{8\pi}(\sum_{h=1}^2\|\phi_h\|^2)}\|\phi_1 - \phi_2\|\|\phi_h\|,\end{aligned}$$

其中 r，s，$t \in (1, +\infty)$ $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$。应用引理 A.4，可得

$$\begin{aligned}\|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}}\|_{pr} &\leq \Big\|2\varepsilon V_i e^{W_{i,\varepsilon}} - \sum_{j=1}^m \chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i - 2}e^{U_j^i}\Big\|_{pr} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m\Big\|\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\Big\|_{pr} \\ &\leq \sum_{j=1}^m\Big\|\chi_j e^{-\varphi_j}|y_{\xi_j}|^{\alpha_i-2}e^{U_j^i}\Big\|_{pr} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{4N}\frac{2-pr}{pr}}).\end{aligned}$$

由引理 A.1 以及式（8）中的定义可知

$$\int_\Sigma \chi_j^{pr} e^{-pr\varphi_j} |y_{\xi_j}|^{pr(\alpha_i-2)} e^{prU_j^i} dv_g = \mathcal{O}\Big(\delta_{i,j}^{2-\alpha_i pr} \int_{\Omega_{ij}} \Big(\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\Big)^{pr} dy\Big) + \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{\alpha_i rp})$$
$$= \mathcal{O}(\delta_{i,j}^{2-2pr}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2-2pr}{4N}}).$$

令 $\phi_2 \equiv 0$, （40）立即成立。 □

参考文献

[1] Shmuel Agmon、Avron Douglis 和 Louis Nirenberg. 满足一般边界条件的椭圆偏微分方程解在边界附近的估计. I. 《纯粹与应用数学通讯》, 12:623–727, 1959.[2] Mohameden Ahmedou、Thomas Bartsch 和 Zhengni Hu. 黎曼曲面上 Keller-Segel 系统稳态的爆破解, 2024. arXiv 预印本：2409.00519.[3] Weiwei Ao 和 Liping Wang. SU(3) Toda 系统的新集中现象. 《微分方程杂志》, 256:1548–1580, 2014.[4] Weiwei Ao. B_2 Toda 系统完全鼓泡解的精确估计. 《离散与连续动力系统》, 36(4):1759–1788, 2016.[5] Sami Baraket 和 Frank Pacard. 二维半线性椭圆方程奇异极限的构造. Calc. Var. Partial Differential Equations, 6(1):1–38, 1998.[6] Daniele Bartolucci、Changfeng Gui、Yeyao Hu、Aleks Jevnikar 和 Wen Yang. 环面上的平均场方程：均匀对称爆破解的存在性与唯一性. 《离散与连续动力系统》, 40(6):3093–3116, 2020.[7] Daniele Bartolucci、Aleks Jevnikar、Jiaming Jin、Chang-Shou Lin 和 Senli Liu. 有界区域上一般奇异 Toda 系统解的非退化性与唯一性. 《数学分析及其应用杂志》, 525(2):论文编号 127132, 14, 2023.[8] Luca Battaglia、Aleks Jevnikar、Andrea Malchiodi 和 David Ruiz. 紧曲面上 Toda 系统的一般存在性结果. 《数学进展》, 285:937–979, 2015.[9] John Bolton、Gary R. Jensen、Marco Rigoli 和 Lyndon M. Woodward. 关于 S^2 到 $\mathbb{C}P^n$的共形极小浸入. 《数学年刊》, 279(4):599–620, 1988.

[10] John Bolton 和 Lyndon M. Woodward. 二维 Toda 方程的若干几何方面. 载于 *Geometry, Topology and Physics*, 第 69–81 页 , 柏林 , 1997 年 . Campinas, de Gruyter.[11] Shiing-shen Chern. 曲面上等温参数存在性的一种初等证明. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:771–782, 1955.[12] Shiing-Shen Chern 和 Jon G. Wolfson. 从二维球面到复 Grassmann 流形的调和映射. II. *Ann. of Math.*, 125(2):301–335, 1987.[13] Teresa D'Aprile、Angela Pistoia 和 David Ruiz. SU(3) Toda 系统中表现出部分爆破的连续统解. *Proc. Lond. Math.Soc.*, 111(4):797–830, 2015.[14] Teresa D'Aprile、Angela Pistoia 和 David Ruiz. SU(3) Toda 系统的非对称爆破. *J. Funct. Anal.*, 271(3):495–531, 2016.[15] M. Del Pino、P. Esposito 和 M. Musso. 奇异 Liouville 方程整体解的非退化性. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140:581–588, 2012.[16] Manuel del Pino、Michal Kowalczyk 和 Monica Musso. Liouville 型方程中的奇异极限. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 24(1):47–81, 2005.[17] Adam Doliwa. 全纯曲线与 Toda 系统. *Lett. Math. Phys.*, 39(1):21–32, 1997.[18] Gerald V. Dunne. 自对偶 ***Chern-Simons*** 理论. Lecture Notes in Physics. Springer, 柏林, 1995.[19] Gerald V. Dunne、R. Jackiw、So-Young Pi 和 Carlo A. Trugenberger. 自对偶 Chern-Simons 孤子与二维非线性方程. *Phys.Rev. D*, 43:1332–1345, 1991.[20] Pierpaolo Esposito 和 Pablo Figueroa. 紧黎曼曲面上的奇异平均场方程. *Nonlinear Anal.*, 111:33–65, 2014.[21] Pierpaolo Esposito、Massimo Grossi 和 Angela Pistoia. 平均场方程爆破解的存在性. *Ann. Inst. H. PoincaréAnal. Non Linéaire.*, 22(2):227–257, 2005.[22] Pablo Figueroa. 紧黎曼曲面上具有可变强度的平均场方程冒泡解. *J. Anal. Math.*, 152(2):507–555, 2024.[23] Massimo Grossi 和 Angela Pistoia. sinh-Poisson 方程的多重爆破现象. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 209(1):287–320, 2013.

[24] Martin A. Guest.《调和映射、环群与可积系统》，伦敦数学会学生教材第38卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。[25] Zhengni Hu、Mohameden Ahmedou 和 Thomas Bartsch。黎曼曲面上 SU(3) Toda 系统中的部分爆破现象，2024年。arXiv预印本：arXiv:2408.17372。[26] Aleks Jevnikar、Sadok Kallel 和 Andrea Malchiodi。任意亏格紧曲面上的拓扑连接构造与 Toda 系统。《分析与偏微分方程》，8(8):1963–2027，2015年。[27] Jürgen Jost、Changshou Lin 和 Guofang Wang。Toda系统的解析方面：II. 鼓泡行为与解的存在性。《纯粹与应用数学通讯》，58(4):526–558，2005年。[28] Jürgen Jost 和 Guofang Wang。Toda系统的解析方面：I. Moser-Trudinger 不等式。《纯粹与应用数学通讯》，54(11):1289–1319，2001年。[29] Youngae Lee、Chang-Shou Lin、Juncheng Wei 和 Wen Yang。二阶Toda系统的度数计算与影子系统：单点鼓泡。《微分方程杂志》，264(7):4343–4401，2018年4月。[30] Jiayu Li 和 Yuxiang Li。黎曼曲面上的 Toda 系统解。比萨高等师范学校科学年刊 (5)，4(4):703–728，2005 年。[31] Chang-Shou Lin、Juncheng Wei 和 Lei Zhang。SU(3)奇异Toda系统爆破解的分类。《分析与偏微分方程》，8(4):807–837，2015年。[32] Chang-Shou Lin、Juncheng Wei 和 Dong Ye。带奇异源项的 $SU(n+1)$ Toda系统的分类与非退化性。《数学年刊》，190(1):169–207，2012年。[33] Chang-Shou Lin、Juncheng Wei 和 Lei Zhang。SU($n+1$) Toda 系统完全鼓泡解的局部轮廓。《欧洲数学会杂志》(JEMS)，18(8):1707–1728，2016年。[34] Chang-Shou Lin、Juncheng Wei 和 Chunyi Zhao。SU(3) Toda系统完全鼓泡解的精确估计。《几何与泛函分析》，22(6):1591–1635，2012年。[35] Andrea Malchiodi 和 Cheikh Birahim Ndiaye。闭曲面上 Toda 系统的一些存在性结果。《林琴科学院数学与应用评论》，18:391–412，2007年。

[36] Monica Musso、Angela Pistoia 和 Juncheng Wei。SU(N+ 1) Toda系统的新爆破现象。《微分方程杂志》，260(7):6232–6266，2016年4月。[37] Margherita Nolasco 和 Gabriella Tarantello。Chern-Simons理论中的双涡旋凝聚。《变分法与偏微分方程》，9:31–94，1999年。[38] Margherita Nolasco 和 Gabriella Tarantello。SU(3) Chern-Simons理论中的涡旋凝聚。《数学物理通讯》，213(3):599–639，2000年。[39] Jagadeesh Prajapat 和 Gabriella Tarantello Tarantello。一类椭圆问题中的对称性与唯一性结果，$\mathbb{R}^2$。《爱丁堡皇家学会会刊A辑》，131(4):967–985，2001年。[40] Katrin Wehrheim。Uhlenbeck紧性。欧洲数学会，2004年。[41] Yisong Yang。相对论非阿贝尔Chern-Simons方程。《数学物理通讯》，186(1):199–218，1999年。[42] Yisong Yang。《场论与非线性分析中的孤子》。Springer数学专著。Springer，纽约，2001年。[43] Yunyan Yang。带边界的二维紧黎曼流形上 Moser-Trudinger不等式的极值函数。《国际数学杂志》，17(3):313–330，2006年。[44] Yunyan Yang 和 Jie Zhou。紧黎曼曲面边界处使用等温坐标的爆破分析。《数学分析及其应用杂志》，504(2):125440，2021年。[45] Lei Zhang。奇异源处 $SU(n+1)$ Toda 系统完全鼓泡解的消失估计。《国际数学研究通知》，2020(10):3107–3155，2020年。[46] Xiao Bao Zhu。带边界黎曼曲面上的 Toda 系统解。《数学学报（英文版）》，27(8):1501–1520，2011年。Zhengni Hu 数学科学学院，上海交通大学 中国上海市东川路800号，邮编：200240 电子邮箱：zhengni_hu2021@outlook.com
Miaomiao Zhu 数学科学学院，上海交通大学 中国上海市东川路800号，邮编：200240 电子邮箱：mizhu@sjtu.edu.cn