arXiv:2602.04778v1 [math.NT] 4 Feb 2026

某些正交志村簇的 R=T 定理

Hao Peng 和 Dmitri Whitmore

摘要。我们证明了一个几乎最小的 R $=\mathbb{T}$ 定理，适用于系数取自有限域且满足一种称为刚性的性质的自对偶伽罗瓦表示。我们还证明，附属于正则代数自对偶表示的一大类剩余伽罗瓦表示具有刚性性质。我们的定理基于一个针对取值于 G 的伽罗瓦表示的 Taylor–Wiles 粘合论证，其中 G 等于 GO_{2m} 或 GSp_{2m}。

目录

1. 引言 1.1. 记号与约定 1.2. 致谢 2. 预备知识 2.1. 正交Satake参数与正交Hecke代数 2.2. 自守表示 2.3. 函子提升 2.4. 几乎非分歧表示 3. 变形 3.1. 若干代数 3.2. 变形问题 3.3. Fontaine–Laffaille 变形 3.4. 温和表示 3.5. 最小分歧表示 3.6. 升层变形 4. 一个几乎最小的 R=T 定理 4.1. 刚性伽罗瓦表示 4.2. 充分子群 4.3. 变形环的有限性 4.4. 一个几乎最小的 R=T 定理 4.5. 局部计算 4.6. Taylor–Wiles 粘合论证 5. 刚性 5.1. 椭圆曲线奇数对称幂的刚性 5.2. 自守伽罗瓦表示的刚性 参考文献
1
3
5
5
5
6
8
8
10
11
11
15
17
18
22
23
23
23
24
25
27
29
33
33
34
36

1. 引言

设 F 是一个全实数域。我们证明了一个 R $=\mathbb{T}$ 定理（见定理 4.4.2），针对满足某种 刚性 性质（见定义 4.1.1）的、系数取自有限域的 自对偶伽罗瓦表示 ρ，其定义在 Gal_F 上。随后我们证明，对于任意椭圆曲线 A 定义在 F上时，附属于 A 的对称幂的剩余伽罗瓦表示在剩余特征足够大时具有刚性。更一般地，我们证明，如果 Π 是定义在 F 上的一般线性群的正则代数辛自对偶尖点表示，并且具有一个超尖点分量，那么附属于 Π 的剩余伽罗瓦表示在剩余特征足够大时具有刚性。

关于 R $=\mathbb{T}$ 的定理对于 一般线性群$_2$ 而言，是 Wiles 和 Taylor–Wiles 研究费马大定理的关键；参见[Wil95、TW95]。当考虑一个表示时，要使最初的 Taylor–Wiles 方法发挥作用

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to G(\overline{\mathbb{Q}_\ell}),$$

取值于一个（不必连通的）约化群 G时，需要

$$[F:\mathbb{Q}](\dim G - \dim B) = \sum_{v|\infty} \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v), \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})),$$

其中 B 表示 G的一个博雷尔子群，而$\mathrm{ad}^0(\rho)$表示从$\mathrm{ad}(\rho)$到其 G-余不变量的核。由于F 是全实的，这一数值巧合对 [CHT08]中定义的非连通群 $\mathscr{G}_n$ （其单位连通分支为一般线性群$_n$ ×一般线性群$_1$）成立。由此得到酉志村集的R $=\mathbb{T}$ 定理，它们在共轭自对偶伽罗瓦表示的潜在模性定理以及Sato–Tate猜想的证明中至关重要（例如参见 [Tay08] 和 [HSBT10]）。酉志村簇的情形在 [LTX$^+$24]中处理。

这一数值巧合也对 $G =$ 辛相似群$(2m)$ 或 $G =$GO$(2m)$成立。相应的R $= \mathbb{T}$定定经典群的定理在张晓宇 [Zha25]的工作中得到处理。在本文中，我们考虑与不必在每个有限处都非分歧的特殊正交群相关联的正交志村簇（包括正交志村集），并带有任意的整洁层结构；这种灵活性对我们的应用至关重要。例如，主要结果将用于第一作者的博士论文 [Pen26], ，该论文对定义于 F上的一般线性群的一大族正则代数自对偶尖点表示证明了Beilinson–Bloch–Kato 猜想；参见 [Pen25b，§1。2]。

我们陈述一个表述起来技术性较低的结果。设 Π 是一个0-REASDC 表示（即正则、本质代数、自对偶、尖点且具有平凡中心特征），定义在一般线性群$_{2m}(\mathbf{A}_F)$上，其中 m 是某个正整数（见定义2.2.2）。设 $E \subset \mathbb{C}$ 是一个数域，使得存在一个伽罗瓦表示族

$$\{\rho_{\Pi,\lambda} : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_{2m}(E_\lambda)\}_\lambda$$

由 E 的有限处指标化，且$\rho_{\Pi,\ \lambda}$ 与$\rho^\vee_{\Pi\text{共轭},\ \lambda}(1-2m)$ （见命题2.2.3、定义2.2.5和注2.2.6）。设 Σ 是 F 的有限处的一个有限集，使得对于每个有限处 v 的F， Π_v均非分歧，且 v的底层有理素数在 F中非分歧。

考虑一对 (**V**,K)，其中

- **V** 是 F 上的一个非退化二次空间，维数为 $2m+1$，且在每个无穷位置处的符号为 (N,0) 或 ($N-2$,2)，并且
- K$=\prod_v$K$_v$ 是 SO(**V**)(**A**$_F^\infty$) 的整洁开紧子群，并且对于每个不属于 Σ 的 v， K$_v$ 都是某个自对偶格的稳定子。

我们假设存在一个 SO(V)(A$_F$) 的尖点自守表示 π，它具有非零的 K-不变向量，且有自守函子提升 Π （见定义 2.3.1）。令 $\mathbb{T}^{\mathfrak{m}}$,$_{\Sigma\cup\Sigma(\ell_\lambda)}$ 表示 SO(V) 在 Σ 及位于 ℓ 之上的位置之外的 Hecke 代数（见定义 2.1.2）。每一对这样的 (V, K) 都定义一个维数为 d(V) 的复 Shimura 簇 Sh(V, K)。 Π 的阿基米德权 ξ （见定义 2.2.2）定义了 Sh(V, K) 上的一个 O$_\lambda$-线性局部系统 $\mathscr{L}_{\xi,\lambda}$。令 $\mathbb{T}_\lambda$ 为 $\mathbb{T}^{\mathfrak{m}}$,$_{\Sigma\cup\Sigma(\ell_\lambda)}$ 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_\lambda}\left(\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathrm{V},\mathrm{K})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathscr{L}_{\xi,\lambda})\right)$ 中的像。

对于每个有限处 λ of E，我们记 ℓ_λ 为其下方的有理素数，并以$\mathcal{O}_\lambda$ 表示 E_λ的整数环。

定理 A。假设

(1) 存在有限处 v *of* F，使得 Π_v 是超尖点的，并且

(2) 局部系统 $\mathscr{L}_{\xi,\ \lambda}$ 是常值的，或者 $d(\mathbf{V})=0$。

那么，对于除有限多个以外的所有有限处 λ *of* E，我们可以为 Π 附加一个极大理想 $\mathfrak{m}_\lambda$ *of* $\mathbb{T}^{\mathfrak{m},\ \Sigma\cup\Sigma(\ell_\lambda)}$，其剩余域为 O_λ/λ，使得

(1) 局部化$\mathbb{T}_{\lambda,\ \mathfrak{m}_\lambda}$ 典范同构于一个交换 O_λ-代数R$_{\mathscr{K}_\lambda}$，该代数刻画$\rho_{\Pi,\ \lambda}$ 的剩余表示的自对偶变形；这些变形在 ℓ_λ 上方的位置处是晶体且具有正则 *Fontaine– Laffaille* 权重，并且在 Σ 及 ℓ_λ上方的位置处非分歧；以及 *(2)* 局部化 $\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathscr{K})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathscr{L}_{\xi,\lambda})_{\mathfrak{m}_\lambda}$ 是 $\mathbb{T}_{\lambda,\ \mathfrak{m}_\lambda}$上的有限自由模。

注。有限　　有限处的集合 E 在定理 A 中被排除的元素可以有效地给出界　　.

定理 A 将共轭自对偶情形下的已有结果 [CHT08,LTX+24] 推广到了自对偶情形。它是本文两项主要结果的推论，即定理 4.4.2 和定理 5.2.3。本文在某些关于 Sh(V, K) 的中间次数以外的局部化上同调消失的额外假设下，证明了适用于 B 型或 D 型正交志村簇$^{\mathbb{R}}$的一个更一般结果（见定理 4.4.2(D4)）。请注意，当 $\mathscr{L}_{\xi,\lambda}$ 为常值局部系统时，作者[Pen25a] 在 Sh(V, K) 为真时证明了这一假设，随后 Yang–Zhu [YZ25] 在一般情形下也证明了这一点。

定理 A 的证明采用 Taylor–Wiles 方法，遵循 [Whi23], ，后者在剩余像满足一个温和条件的前提下，为处理取值于任意连通约化群的伽罗瓦表示提供了框架。设 ρ 为 $\rho_{\Pi,\lambda}$ 的剩余表示，将其视为取值于 $G(\mathcal{O}_\lambda/\lambda)$ 的表示，其中 G =为辛相似群$(2m)$ 或正交相似群$(2m)$。在 Taylor–Wiles 方法中，人们考虑 ρ 的那些提升，允许在某些辅助的位置集合上分歧。在我们的设定中， F的一个 Taylor–Wiles 素位 v 满足

- $\bar{\rho}$ 在 v处非分歧；
- 剩余域 $\kappa(v)$ 满足 $\kappa(v) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \ell)$；并且
- Frobenius 元 $g = \rho(\phi_v)$ 的像是半单的，并且包含在 G 的单位连通分支中。

我们随后考虑在 [Whi23], 中定义的 Taylor–Wiles 变形问题，它由 ρ的那些提升组成，对这些提升，惯性群 I_v 取值于某个环面。由于我们的变形问题一般并不等于无约束变形问题，因此需要某种局部-全局相容性，以证明附属于 Taylor–Wiles 方法中出现的那些自守表示的伽罗瓦表示满足我们的 Taylor–Wiles 变形问题。此处的主要输入（除了半单化意义下的局部-全局相容性之外）是在[Sol25], 中构造的主系列表示的局部朗兰兹对应；其构造足够显式，使我们能够确立相伴 Weil–Deligne 表示中单值算子的必要消失，同时也与 Arthur 对经典群的局部朗兰兹构造相一致。

为了控制由此产生的万有变形环，需要存在一组 Taylor–Wiles 素位，使某个伽罗瓦上同调群（对偶 Selmer 群）必然消失。我们对ρ 施加“像足够大”的条件， G即满足 中的 [Whi23], 所提出的 ℓ-充分子群条件；当 λ（ ρ 所依托的有理素数）足够大且 ρ 绝对不可约时，可以验证该条件成立。此外，在 §5 中，我们验证了除有限多个 λ外， ρ 均绝对不可约。

最后，为了处理 F 中远离 ℓ 的有限处（ρ 在这些位置分歧），我们采用*Boo19a*中的最小分歧表示概念 [。]我们在 §4.1 中引入刚性伽罗瓦表示的概念，使得当 ρ 刚性时， ρ 的任意提升在 F 中远离 ℓ的有限处均为最小分歧。此外，在 §5 中，我们验证了除有限多个ρ 外， λ均具有刚性。我们强调，刚性证明最终依赖于经典的模性提升定理，尤其是酉情形下的经典R = $\mathbb{T}$ 定理 [CHT08、Tho12]。

1.1. 记号与约定。

记号 1.1.1。

- 令 $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ 为非负整数构成的幺半群，并令 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。我们分别用 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 表示整数、有理数、实数和复数。
- 所有环均为交换幺环，且环同态保单位元。
- 我们只对正实数取平方根，并始终取正根。
- 设 X 是一个集合。– 用 $\mathbf{1} \in X$ 表示指定的平凡元素（仅当平凡性的概念可从上下文中明确时才使用此记号）。– 用 $\#X$ 表示 X的基数。– 对于 $a, b \in X$，我们定义克罗内克符号

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 1 & \text{if } a = b \\ 0 & \text{if } a \neq b \end{cases}.$$

- 对于两个拓扑（分别为代数）群 H 和 G，若 H 是G的闭子群，则记作 $H \leq G$ 。

- F对于域 K上的每个代数群 G，我们用 G° 表示 G的中性分支 .
- 对于环上的每个方阵 M，我们将其转置记为 $M^\top$。
- 对于每个正整数 n，我们用 Sym_n 表示作用在 $\{1,\dots,n\}$上的 n 次对称群。
- 我们使用范畴论中的标准记号。集合范畴记为 Set。概形范畴记为 Sch。

- 对于每个有理素数 p，我们固定 $\mathbb{Q}_p$ 的一个代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$，其剩余域为 $\mathbb{F}_p$。对于每个整数 $r\in\mathbb{Z}_+$，我们将 $\mathbb{Q}_p$ 在 $\mathbb{Q}_p$中的唯一的 r 次非分歧扩张记为 $\mathbb{Q}_{p^r}$，并将其剩余域记为 $\mathbb{F}_{p^r}$。

- 我们固定一个全实数域 F及其代数闭包 $\overline{F}$。令 $\mathsf{Gal}_F:=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$。
- 我们固定一个整数 $m\geq 1$ 和一个元素 $\mathfrak{d}\in F$，使得 $(-1)^m\mathfrak{d}$ 全非负（即，对于每个嵌入 $\tau\colon F\to\mathbb{R}$，都有 $(-1)^m\tau(\mathfrak{d})\geq 0$）。将通过整体类域论与伽罗瓦扩张 $F(\sqrt{\mathfrak{d}})/F$ 对应的特征记为 $\chi_{\mathfrak{d}}\colon F^\times\backslash\mathbf{A}_F^\times\to\mathbb{C}^\times$（它要么是平凡的，要么是二次的）。

- 我们将 Mat_{2m}（分别将 GL_{2m}）记为定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 $2m\times 2m$ 阶方阵（分别为可逆 $2m\times 2m$ 阶方阵）的概形。
- 我们定义 $N=2m+\delta_{\mathfrak{d},\,0}$，并假设 $N\geq 3$。
- 对每个正整数 k，我们将 $\mathsf{GL}_N(\mathbb{Z})$ 的单位元素记为 I_k。令 $J_k=\sum_{i=1}^k e_{1,\,k+1-i}$，它是 $\mathsf{Mat}_k(\mathbb{Z})$ 中的反对角 $k\times k$ 矩阵；令 $J_k'=\sum_{i=1}^k(-1)^{i-1}e_{i,\,k+1-i}$，它是 $\mathsf{Mat}_k(\mathbb{Z})$ 中的反对角 $k\times k$ 矩阵；再令 $N_k=\sum_{i=1}^{k-1}e_{i,\,i+1}$，它是一个幂零矩阵。
- 将 F 的实嵌入集合记为 Σ^∞，将 F 的有限处集合记为 Σ^{fin} .
- 对任意有理素数集 S，用 $\Sigma(S)$ 表示 F 的所有满足 $\mathrm{char}\,\kappa_v\in S$ 的有限处 v 所成的集合。若 $S=\{p\}$ 为单元素集，我们简记 $\Sigma(p):=\Sigma(\{p\})=\{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}F}\colon v|p\}$。
- 令 Σ_{bad} 表示 F 的那些有限处所成的（有限）集合，其底有理素数在$F(\sqrt{\mathfrak{d}})$中分歧。

- 对 F 的每个有限位置集 Σ，我们记

$$\mathbf{A}_{F,\Sigma}:=\prod_{v\in\Sigma}F_v,\quad \mathbf{A}_F^\Sigma:=\prod_{v\in\Sigma_F\smallsetminus\Sigma}{}'F_v,\quad \mathbf{A}_F:=\mathbf{A}_F^\infty\times(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$$

- 对 F 的每个位置 v，我们
  – 记 O_v 与 F_v 为 O_F（相应地，F）在 v处的完备化；– 令 κ_v 表示剩余域，$\|v\|:=\#\kappa_v$，并记 $\mathrm{char}\,\kappa_v$ 为剩余特征。– 我们固定 F_v 的一个代数闭包 $\overline{F_v}$，其剩余域为 κ_v，以及一个嵌入 $\iota_v\colon F\hookrightarrow F_v$，它延拓 $F\hookrightarrow F_v$；经由 ι_v，我们将 $\mathsf{Gal}_{F_v}:=\mathrm{Gal}(F_v/F_v)$ 视为 Gal_F 的一个分解子群；– 对任意映射 $r\colon\mathsf{Gal}_F\to X$，我们记 $r_v:=r|_{\mathrm{Gal}_{F_v}}$；– 令 $\mathsf{I}_{F_v}\subset\mathsf{Gal}_{F_v}$ 为惯性子群；– 令 $W_{F_v}\subset\mathsf{Gal}_F$ 为韦伊群。– 固定一个算术弗罗贝尼乌斯元素 $\phi_v\in\mathsf{Gal}_{F_v}$。

- 对于 F 的每个有限处有限集 Σ，我们用 $\mathsf{Gal}_{F,\,\Sigma}$ 表示 F/F 的最大子扩张的伽罗瓦群，该扩张在 $\Sigma\cup\Sigma^\infty$ 之外非分歧。
- 对于每个有理素数 ℓ，我们用 $\varepsilon_\ell\colon\mathsf{Gal}_F\to\mathbb{Z}_\ell^\times$ 表示 ℓ-进分圆特征。
- 设 Γ,G 是群，L 是环。– 我们用 Γ^{ab} 表示 Γ 的最大阿贝尔商群；– 对于同态 $\rho\colon\Gamma\to$ 一般线性群$_r(L)$（其中 $r\in\mathbb{Z}_+$），我们用 $\rho^\vee\colon\Gamma\to$ 一般线性群$_r(L)$ 表示对偶同态，其定义公式为 $\rho^\vee(x)=(\rho(x)^\top)^{-1}$。– 若存在元素 $g\in G$ 使得 $\rho_1=g\circ\rho_2\circ g^{-1}$，则称两个同态 $\rho_1,\rho_2\colon\Gamma\to G$ 共轭。– 设 Γ 是另一群 Γ 的子群，且元素 $\gamma\in\Gamma$ 规范化 Γ。对于任意 $\rho\colon\Gamma\to G$（其中 $r\in\mathbb{Z}_+$），我们令 $\rho^\gamma\colon\Gamma\to G$ 为如下定义的同态：对每个 $x\in\Gamma$，$\rho^\gamma(x)=\rho(\gamma x\gamma^{-1})$。

- 对于每个正整数 n，令 μ_n 为定义在谱 $\mathbb{Z}$ 上的群概形，它表示 n 次单位根群。

1.2. **致谢**。 我们感谢 Anne-Marie Aubert、Yifeng Liu、Zeyu Wang、Yichao Tian、Liang Xiao 和 Jialiang Zou 的宝贵讨论。

2. 预备知识

2.1. **正交Satake参数与正交 Hecke 代数**。 本小节将介绍二次空间、与之相关的特殊正交群以及正交 Hecke 代数。

定义 2.1.1. 设 R 是一个 $\mathcal{O}_F$-代数。定义在 R 上、维数为 N 的二次空间，是一个秩为 N 的射影 R-模 V，并附带一个对称完美配对

$$V \times V \to R$$

该配对在两个变量上都是 R-线性的。

对于任意定义在 R 上、维数为 N 的二次空间 V，记二次空间 $V \oplus Re$ 为 $V_\sharp$，其中 $\|e\| = 1$；它是一个定义在 R 上、维数为 $N+1$ 的二次空间。对于二次空间 R 上任意 R-线性等距 $f\colon V \to V'$，记其诱导的等距为 $f_\sharp\colon V_\sharp \to V'_\sharp$。

我们引入抽象正交Satake参数。

定义 2.1.2。 设 L 为一个环。对于任意多重集 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}\} \subset L$，记

$$P_{\boldsymbol{\alpha}}(T) = \prod_{i \in [2m]_+} (T - \alpha_i) \in L[T].$$

对于 F 中不属于 Σ^{bad}的每个有限处 v，我们定义 L 在 v 处的一个抽象正交*Satake*参数 为 $\boldsymbol{\alpha}$中的一个由 $2m$ 个元素组成的多重集，使得 L 满足 $P_{\boldsymbol{\alpha}}(T) = \chi_{\mathfrak{d}}(\phi_v) T^{2m} P_{\boldsymbol{\alpha}}(T^{-1})$。

对于 F中不属于 Σ^{bad}的每个有限处 v，令 $\Lambda^{m,\mathfrak{d}}_{,v}$为在$\mathcal{O}_v$上的秩为 N、当 N 为偶数（分别为奇数）时判别式为 $\mathfrak{d}$ （分别为判别式 1）的二次空间，其在同构意义下唯一；并令 $\mathrm{SO}_v^{m,\mathfrak{d}}$,为相应的$\mathcal{O}_v$上的特殊正交群，将其视为 $\mathrm{GL}(\Lambda^{m,\mathfrak{d}})$ 的子群。特别地，当 $\mathfrak{d} = 0$ 时（因而 N 为奇数），我们考虑奇特殊正交群；当 $\mathfrak{d} \neq 0$ 时（因而 N 为偶数），我们考虑偶特殊正交群。在适当的基下，$\Lambda^{m,\mathfrak{d}}_{,v}$的相应二次型由下列矩阵给出

$$\begin{cases} J_{2m+1} & \text{if } \mathfrak{d} = 0, \\ J_{2m} & \text{if } \mathfrak{d} \in F_v^2 \smallsetminus \{0\}, \\ \begin{bmatrix} & & & & J_{m-1} \\ & & 1 & 0 & \\ & & 0 & -\mathfrak{d} & \\ J_{m-1} & & & & \end{bmatrix} & \text{if } \mathfrak{d} \notin F_v^2. \end{cases}$$

考虑整局部球面Hecke代数

$$\mathbb{T}_v^{m,\mathfrak{d}} := \mathbb{Z}[\mathrm{SO}_v^{m,\mathfrak{d}}(\mathcal{O}_{F_v}) \backslash \mathrm{SO}_v^{m,\mathfrak{d}}(F_v) / \mathrm{SO}_v^{m,\mathfrak{d}}(\mathcal{O}_{F_v})]$$

其单位元为 $\mathbf{1}_{\mathrm{SO}^{m,\,v\,\mathfrak{d}}(\mathcal{O}^{F_v})}$。我们用 $A^{m,\,v\,\mathfrak{d}}$表示 $\mathrm{SO}_v^{m\,\mathfrak{d},}$ 的极大分裂对角环面，并用 $X_\bullet(A^{m,\,v\,\mathfrak{d}})$ 表示其余特征标群，则有 Satake 变换

$$\mathrm{CT}^{\mathrm{cl}} : \mathbb{Z}\left[\sqrt{\|v\|}\right] \otimes \mathbb{T}_v^{m,\mathfrak{d}} \to \mathbb{Z}\left[\sqrt{\|v\|}\right] [X_\bullet(A_v^{m,\mathfrak{d}})]. \tag{2.1}$$

它是一个环同态。

定义 2.1.3. 对于包含 Σ^{bad}的 F 的有限处有限集 Σ，我们定义远离 Σ的抽象正交 *Hecke* 代数 为受限张量积

$$\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma} := \bigotimes\nolimits'_{v \in \Sigma_F^{\mathrm{fin}} \smallsetminus \Sigma} \mathbb{T}_v^{m,\mathfrak{d}}$$

相对于单位元而言。它是一个环。

定义 2.1.4. 设 v 是 F 中不属于 Σ^{bad} 的一个有限处，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 L 在 v 处的一个抽象正交 Satake 参数。我们构造一个 $\mathbb{T}^{m\,\mathfrak{d}}_{,v}$ 的 Hecke 特征。分两种情况:

- 若 $\mathfrak{d}$ 是 F_v 中的一个平方，则 $X_\bullet(A^m_{,v}\ \mathfrak{d})$ 的一组代表元可取为

$$\{(t_1,\dots,t_N)|t_1,\dots,t_N\in\mathbb{Z}\text{ satisfying }t_i+t_{N+1-i}=0\text{ for all }i\in[N]_+\}.$$

由于 Π_v 具有平凡中心特征，我们可以选取 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个排序为$(\alpha_1,\dots,\alpha_{2m})$，使得对每个 $i\in[N]_+$都满足$\alpha_{N+1-i}=\alpha_i^{-1}$。于是我们得到唯一的环同态

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{\|v\|}\right][X_\bullet(A_v^{m,\mathfrak{d}})]\to\mathbb{C}$$

将 $(t_1,\dots,t_N)$ 映到 $\prod_{i\in[m]_+}\alpha_i^{t_i}$。与 Satake 变换（2.1）复合，我们得到一个环同态

$$\phi_{\Pi_v}:\mathbb{T}_v^{m,\mathfrak{d}}\to\mathbb{C}.$$

它与 $\boldsymbol{\alpha}$的排序无关。

- 如果 $\mathfrak{d}$ 不是一个 在 F_v中的平方，则 $N=2m$，并且 $X_\bullet(A^m_{,v}\ \mathfrak{d})$的一组代表元可以取为

$\{(t_1,\dots,t_{2m})|t_1,..,t_N\in\mathbb{Z}$ 满足 $t_i+t_{2m+1-i}=0$ 对所有 $i\in[2m]_+$ 并且 $t_m=t_{m+1}=0\}$。

由于 Π_v 具有中心特征$\chi_{\mathfrak{d},\ v}$，我们可以将 $\boldsymbol{\alpha}$ 排序为（α_1，……，α_{2m}），使得$\alpha_m=1$，$\alpha_{m+1}=-1$，并且对每个 $i\in[m-1]_+$有 $\alpha_{2m+1-i}=\alpha_i^{-1}$。于是我们有唯一的环同态

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{\|v\|}\right][X_\bullet(A_v^{m,\mathfrak{d}})]\to\mathbb{C}.$$

将（t_1，……，t_{2m}）映到$\prod_{i\in[m-1]_+}\alpha_i^{t_i}$。与 Satake 变换（2.1）复合后，我们得到一个环同态

$$\phi_{\Pi_v}:\mathbb{T}_v^{m,\mathfrak{d}}\to\mathbb{C}.$$

它与 $\boldsymbol{\alpha}$的排序无关。

2.2. **自守表示**。在本小节中，我们回顾关于自守表示的若干事实。

定义 2.2.1. 我们用 $\mathbb{Z}^{2m}_{\leq}$表示 $\mathbb{Z}^{2m}$ 中由非递减序列组成的子集。对于有限集 T以及元素 $\xi=(\xi_\tau)_{\tau\in T}\in(\mathbb{Z}^{2m}_{\leq})^T$，令

$$a_\xi:=\min_{\tau\in T}\{\xi_{\tau,1}\},\quad b_\xi:=\max_{\tau\in T}\{\xi_{\tau,2m}\}+N-2$$

定义 2.2.2。设 Π 是一般线性群 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbf{A}_F)$ 的一个自守表示。若 Π 是 $\mathfrak{d}$-*REASDC*（即正则本质代数自对偶尖点），则称其为 $\mathfrak{d}$-*REASDC*，条件如下：

(1) Π 是一个尖点自守表示；(2) $\Pi\cong\Pi^\vee$；(3) Π 的中心特征等于 $\chi_{\mathfrak{d}}$；以及 (4) 对于 F 的每个阿基米德处 τ，Π_τ 具有无穷小权 $\lambda_\tau=(\lambda_{\tau,\ 1},\ \dots\dots,\ \lambda_{\tau,\ 2m})\in\mathbb{Z}^{2m}+\left(\binom{N-1}{2}^{(2m)}\right)$，[1] 满足 $\lambda_{\tau,\ 1}<\lambda_{\tau,\ 2}<\dots<\lambda_{\tau,\ m}<0<\lambda_{\tau,\ m+1}<\lambda_{\tau,\ m+2}<\dots<\lambda_{\tau,\ 2m}$。

若 Π是 $\mathfrak{d}$-REASDC，则存在唯一的元素 $\xi_\Pi=(\xi_{\tau,\ 1},\ \dots\dots,\ \xi_{\tau,\ 2m})_\tau\in(\mathbb{Z}^{2m}_{\leq})^{\Sigma^\infty}$，我们称之为 Π的阿基米德权，满足 $\xi_{\tau,\ i}=-\xi_{\tau,\ 2m+1-i}$，对每个 τ 和 i，使得

$$\lambda_\tau=\xi_\tau+\left(1-\frac{N}{2},2-\frac{N}{2},\dots,-\delta_{\mathfrak{d},0}-1,-\delta_{\mathfrak{d},0},\delta_{\mathfrak{d},0},\delta_{\mathfrak{d},0}+1,\dots\frac{N}{2}-1\right).$$

设 v 是 F 的有限处。对于 $\mathrm{GL}_{2m}(F_v)$ 的每个不可约容许表示 Π、每个有理素数 ℓ 以及每个同构 $\iota_\ell:\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$，我们将通过局部朗兰兹对应与 $\iota_\ell\Pi$ 相关联的（Frobenius-半单）Weil–Deligne 表示记为 $\mathrm{rec}_{2m}(\iota_\ell\Pi)$；参见 [Hen00,HT01]。对于 Gal_{F_v} 的每个系数取自 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 的表示 ρ，当 $v\in\Sigma(\ell)$ 时该表示是连续的（相应地，当 $v\notin\Sigma(\ell)$ 时是德拉姆的），记相应的 W_{F_v} 的 Weil–Deligne 表示为 $\mathrm{WD}(\rho)$（例如参见 [TY07, §1]）。

[1]此记号表示一个 $2m$-元组，其所有项均为 $\binom{N-1}{2}$。

命题 2.2.3。 设 Π 是 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbf{A}_F)$ 的 $\mathfrak{d}$-*REASDC* 表示，阿基米德权为 ξ_Π。令 G 表示在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂光滑群概形：当 $\mathfrak{d}=0$ 时为 GSp_{2m} （当 $\mathfrak{d}\neq 0$ 时为 GO_{2m}）。我们将Std 记作 G 在 O 上的标准表示，其维数为 $2m$，并将 $\nu\colon G\to \mathrm{GL}_1$ 记作相似特征。*(1)* 对于 F 的每个有限处， Π_v 都是 *tempered* 的。

(2) 对任意有理素数 ℓ 以及任意同构 $\iota_\ell\colon \mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_\ell$，存在一不连续同态

$$\rho_{\Pi,\iota_\ell}:\mathrm{Gal}_F\to G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

在共轭意义下唯一，使得

$$\mathrm{WD}\left(\mathrm{Std}\circ\rho_{\Pi,\iota_\ell}|_{\mathrm{Gal}_{F_v}}\right)^{\mathrm{F\text{-}ss}}=\iota_\ell\,\mathrm{rec}_{2m}\left(\Pi_v\otimes|\det|^{\frac{2-N}{2}}\right)\tag{2.2}$$

对 F 的每个有限处 v 均成立。此外，我们有

$$\nu\circ\rho_{\Pi,\iota_\ell}=\varepsilon_\ell^{2-N},\quad \det(\mathrm{Std}\circ\rho_{\Pi,\iota_\ell})=\chi_{\mathfrak{d}}\cdot\varepsilon_\ell^{m(2-N)}.$$

(3) 对于 F 上方每个位于 ℓ 之上的有限处 v，标准表示$\circ\rho_{\Pi,\,\iota_\ell}|_{\mathrm{Gal}_{F_v}}$ 是德拉姆的（并且若 Π_v 非分歧，则还是晶体的），其正则霍奇–泰特权包含于范围 $[a_\xi,b_\xi]$ 内。

$^{2-N}$证明。 我们首先注意到 $\Pi\otimes|\det|^{\ 2}$ 是正则代数的。于是第 (1) 部分由 [Car12，定理 1 得出。2]。对于第 (2) 部分：令 $J_{\mathfrak{d}}\in\mathrm{Mat}_N$ 表示 N 乘以 N 矩阵

$$\begin{cases} J_{2m+1} & \text{if } \mathfrak{d}=0,\\ \begin{bmatrix} & & & J_{m-1}\\ & & 1 & 0\\ & & 0 & -\mathfrak{d}\\ J_{m-1} & & & \end{bmatrix} & \text{if } \mathfrak{d}\neq 0, \end{cases}$$

并令 $\mathrm{SO}_N^{\mathfrak{d}}$ 表示由下式定义在 F 上的拟分裂特殊正交群

$$\mathrm{SO}_N^{\mathfrak{d}}=\{g\in\mathrm{GL}_N: g^\top J_{\mathfrak{d}}g=J_{\mathfrak{d}}\}.$$

那么$\mathrm{SO}_N^{\mathfrak{d}}$ 在 F的每个位置都是准分裂的。由 Arthur 重数公式 [Art13] 可知，存在一个自守表示 π，它属于 $\mathrm{SO}_N^{\mathfrak{d}}(\mathbf{A}_F)$，其到 一般线性群$_{2m}(\mathbf{A}_F)$ 的函子性提升为 Π(参见定义 2.3.1)。根据 [Shi24，定理 1.2，2],存在一个连续同态

$$\rho_{\Pi,\iota_\ell}:\mathrm{Gal}_F\to G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

与 π 相关联，并且在 F 的每个位置都满足等式 (2.2)，其中 π 是非分歧的。由切博塔列夫密度定理可知，Std $\circ\rho_{\Pi,\iota_\ell}$ 恰好是按[BLGGT14，定理 2.1.1]中所述与 Π 相关联的伽罗瓦表示。因此，根据 [Car12，定理 1.1] 以及[Car14，定理 1.1]，等式 (2.2) 对 F的每个位置都成立。最后两个性质也可由 [Shi24] 和切博塔列夫密度定理推出。第 (3) 部分由 [CH13，定理 4.2]证明。□

人们预期，这些相关的伽罗瓦表示构成一个定义在某个数域上的相容系统（定义见 [BLGGT14，§5。1]）。更明确地说，我们定义强系数字段的概念：

定义 2.2.4. 对每个 v 不属于 F Σ^Π的有限处，令 $\boldsymbol{\alpha}(\Pi_v)$表示 Π_v的 Satake 参数，它是 $\mathbb{C}$中维数为 $2m$ 的抽象佐武参数（见定义 2.1.2），并令 $\mathbb{Q}(\Pi_v)$ 表示由下列多项式的系数生成的 $\mathbb{C}$子域

$$\prod_{\alpha\in\boldsymbol{\alpha}(\Pi_v)}\left(T-\alpha\sqrt{\|w\|}^N\right)\in\mathbb{C}[T].$$

我们将 Π 的系数域（也称为海克域）定义为所有有限处 w （对 F 而言且不属于 Σ^Π）对应的域 $\mathbb{Q}(\Pi_v)$ 的合成域，记作 $\mathbb{Q}(\Pi)$。

定义 2.2.5。 设 Π 是 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示 一般线性群$_{2m}(\mathbf{A}_F)$ （见定义 2.2.2），则称数域 $E\subset\mathbb{C}$ 是 Π 的强系数字段，如果它包含 $\mathbb{Q}(\Pi)$ （见定义 2.2.4），并且对于每个有限处 $\lambda\in\Sigma_E^{\mathrm{fin}}$，存在一个连续同态

$$\rho_{\Pi,\lambda}:\mathrm{Gal}_F\to\mathrm{GL}_{2m}(E_\lambda),$$

使得对于任意同构 $\iota_\ell\colon\ \mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_\ell$ 诱导位置一入，$\rho_{\Pi,\,\lambda}\otimes_{E_\lambda,\,\iota_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ 以及 标准表示$\circ\overline{\rho_{\Pi,\,\iota_\ell}}$ 是共轭的（见命题 2.2.3）。

注2.2.6。若 Π 是 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示一般线性群$_{2m}(\mathbf{A}_F)$，则根据 Π 中的论证，[CH13，命题 3.2，存在强系数字段。5]。

2.3. **函子提升**。我们参照 [CZ21], [Ish24]和 [Pen25a，§2]，回顾特殊正交群局部与整体函子提升的一些一般事实。对每个元素 $\alpha\in\mathbb{C}^\times$，记 $\alpha\colon\ K^\times\to\mathbb{C}^\times$ 为具有 Satake 参数 α的非分歧特征。

设 K 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张，并设 V是定义在 K上的二次空间。对于 π 的不可约容许表示SO(V)，我们回顾由内窥理论定义的 π 局部函子提升；这些提升在某些特殊情形下由 [Art13、CZ21、Ish24] 给出。

固定一个极小抛物子群 $P_{\min}\le\mathrm{SO}(V)$。根据朗兰兹分类，存在唯一的包含 $P_{\min}$ 的抛物子群 $P\le G$，其 Levi 商为 M；存在唯一的 $M(K)$ 的 tempered 不可约容许表示 τ，以及 $P(K)$ 的严格正非分歧特征 χ，使得 π 是归一化抛物诱导 $\mathrm{I}_P^G(\tau(\chi))$ 的唯一不可约商 $\mathrm{J}_P^G(\tau(\chi))$，称为*Langlands* 商。于是可写作

$$M=G_0\times\mathrm{GL}_{r_1}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{r_t},$$

其中 G_0 是特殊正交因子，在其作用下

$$\chi=\mathbf{1}\boxtimes(\underline{\alpha_1}\circ\det{}_{r_1})\boxtimes\cdots\boxtimes(\underline{\alpha_t}\circ\det{}_{r_t})$$

对于唯一的实数 $1<\alpha_1<\cdots<\alpha_t$，其中 $\det_{r_i}$表示 $\mathrm{GL}_{r_i}(K)$ 上的行列式映射。假设$\tau=\tau_0\boxtimes\tau_1\boxtimes\cdots\boxtimes\tau_t$ 在上述分解下成立，则 FL(π) 同构于归一化抛物诱导的唯一不可约商

$$\mathrm{I}_{P_{\mathrm{GL}}}^{\mathrm{GL}_{2m}}\left(\tau_{t^\vee}(\underline{\alpha_t^{-1}}\circ\det{}_{r_t})\boxtimes\cdots\boxtimes\tau_1^\vee(\underline{\alpha_1^{-1}}\circ\det{}_{r_1})\boxtimes\mathrm{FL}(\tau_0)\boxtimes\tau_1(\underline{\alpha_1}\circ\det{}_{r_1})\boxtimes\cdots\boxtimes\tau_t(\underline{\alpha_t}\circ\det{}_{r_t})\right),$$

其中 P_{GL}是 GL_{2m}的标准抛物子群，其 Levi 商为 $\mathrm{GL}_{r_t}\times\cdots\mathrm{GL}_{r_1}\times\mathrm{GL}_{2m_0}\times\mathrm{GL}_{r_1}\times\cdots\times\mathrm{GL}^{r_t}$。

现在考虑温和不可约容许表示 τ_0。存在唯一的抛物子群 P_0，它是 G_0 的子群且包含 $P_{\min}\cap G_0$，其 Levi 商群为 M_0；此外，还存在 $M_0(K)$ 的离散系列表示μ，使得 τ_0 是归一化抛物诱导 $\mathrm{I}_{P_0}^{G_0}(\mu)$ 的直和项。事实上，$\mathrm{I}_{P_0}^{G_0}(\mu)$ 是有限个温和表示的直和，且每个表示的重数均为一。类似前一种情形，记 $\mu=\mu_0\boxtimes\mu_1\boxtimes\cdots\boxtimes\mu_s$，其中 μ_0 是 P_0的 Levi 商中特殊正交因子的离散系列表示。沿用类似的记号，FL(τ_0) 同构于

$$\mathrm{I}^{\mathrm{GL}_{2m_0}}(\mu_t^\vee\boxtimes\cdots\boxtimes\mu_1^\vee\boxtimes\mathrm{FL}(\mu_0)\boxtimes\mu_1\boxtimes\cdots\boxtimes\mu_t),$$

它是 $\mathrm{GL}_{2m_0}(K)$ 的不可约容许表示。此后，若上下文清楚，我们将省略 GL_{2m_0} 的抛物子群 P_{GL}。

最后，我们回顾自守函子提升的概念。

定义 2.3.1. 设$\mathbf{V}$ 是 F 上维数为 N 的二次空间，且 π 是 SO$(\mathbf{V})(\mathbf{A}_F)$ 的离散自守表示。π 的自守函子提升 是 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbf{A}_F)$ 的一个自守表示 FL(π)，它是由较小一般线性群的离散自守表示组成的有限等压和，并且对除有限多个非分歧 $v\in\Sigma_F^{\mathrm{fin}}$ 以外的所有 $v\in\Sigma_F^{\mathrm{fin}}$，FL$(\pi)_v$ 都是 π_v 的函子性提升。

根据 [CZ24，定理 2.1]，[Ish24，定理 3.16]，以及 GL_N 的强重数一性质（见 [PS79]），FL(π) 唯一存在。此外，若 FL(π) 是由较小一般线性群的尖点自对偶表示组成的有限等压和，则根据一般 A-包的 Arthur 重数公式，对 F 的每个位置 v，FL$(\pi)_v$ 都是 π_v 的函子性提升；见 [CZ24，定理 2.6] 以及 [Ish24，定理 3.17]。

2.4. **几乎非分歧表示**。本小节研究非分裂的 p-进奇数特殊正交群的一类特殊表示。

设 r 为正整数。设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其整数环为 $\mathcal{O}_K$，剩余域为κ。设 V是定义在 K 上的 $2r+1$ 维二次空间，配备一个格 $\Lambda\subset V$，满足$\Lambda\subset\Lambda^\vee$ 和 $\Lambda^\vee/\Lambda\cong\kappa$。那么 SO$(V)$ 是 $\mathrm{SO}_{2r+1,\,K}$ 的非分裂纯内形式。设 K 是 SO'_{2r+1} 中Λ 的稳定子，它是 SO(V) 的特殊极大子群。

命题 2.4.1。 设 π 是 $\mathrm{SO}(V)(K)$ 的一个不可约容许表示，且具有非零的 $\mathcal{K}$-不变向量。那么存在一个元素 $(\alpha_2,\dots,\alpha_r)\in(\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ 满足 $1\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_r|$，且在置换意义下唯一，使得局部函子提升 $\mathrm{FL}(\pi)$ （见 §2.3）同构于归一化抛物诱导的唯一不可约商

$$\mathrm{I}_{P_{\mathrm{GL}}}^{\mathrm{GL}_{2r}}\left(\underline{\alpha_r^{-1}}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_2^{-1}}\boxtimes\mathrm{St}_2\boxtimes\underline{\alpha_2}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_r}\right).$$

这里 P_{GL} 是一般线性群$_{2r}$ 的一个标准抛物子群，其 *Levi* 商为一般线性群$_1^{r-1}$ ×一般线性群$_2$ ×一般线性群$_1^{r-1}$，而 St_2是一般线性群$_2(K)$的 *Steinberg* 表示。

证明。 我们固定一个分解

$$\Lambda=\mathcal{O}_Ke_{-r}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_Ke_{-2}\oplus\Lambda_3\otimes\mathcal{O}_Ke_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_Ke_r,$$

其中 $(e_i,\quad e_j)=\delta_{i+j,0}$ 对于 $2\le|i|,|j|\le r$，且每个 e_i 都与 Λ_3正交。对于每个 $1\le i\le r$，se t

$$V_{2i+1}:=Ke_{-i}\oplus\cdots\oplus Ke_{-2}\oplus\Lambda_3\otimes_{\mathcal{O}_K}K\otimes Ke_2\oplus\cdots\oplus Ke_i,$$

它是 V的一个二次子空间。令 $P_{\min}$ 为由全各向同性旗定义的 SO(V) 的极小抛物子群

$$Ke_{-r}\subset Ke_{-r}\oplus Ke_{-r+1}\subset\cdots\subset Ke_{-r}\oplus\cdots\oplus Ke_{-2},$$

其 Levi 商为

$$\mathrm{SO}(V_3)\times\mathrm{GL}(Ke_2)\times\cdots\times\mathrm{GL}(Ke_r).$$

现在我们将相对Weyl群 $W\cong\{\pm1\}^{r-1}\rtimes$Sym$_{r-1}$ 明确实现为 K 的一个子群:

- 我们将 Sym$_{r-1}$ 实现为元素 $1\in\{1,\dots,r\}$ 在 Sym$_r$中的稳定子;
- 对每个 $2\le i\le r$，我们令 $(i-1)$-th " -1" 在 W中对应于交换 e_i 与 e_{-i}并固定其他 e_j 的元素，其中 $j\ne i$; 并且
- 我们令每个 $\sigma\in$ Sym$_{r-1}$ 对应于对每个 $2\le i\le r$将 $e_{\pm i}$ 映射到 $e_{\pm\sigma(i)}$ 的元素，记为 w_σ。

对每个元素 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_2,\dots,\alpha_r)\in(\mathbb{C}^\times)^{r-1}$，令 $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$ 表示 $\mathrm{I}_{P_{\min}}^{\mathrm{SO}(\mathbf{V})}(\mathbf{1}_3\boxtimes\alpha_2\boxtimes\cdots\boxtimes\alpha_r)$ 中在 K 上取值为 1 的函数，其中 $\mathbf{1}_3$ 表示 SO(V_3)(K) 的平凡表示。

由于 π 在 K 下有非零不变向量，它是一个非分歧主系列的一个组成部分。换言之，存在元素 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_2,\dots,\alpha_r)\in(\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ 满足 $1\le|\alpha_2|\le\cdots\le|\alpha_r|$，且在置换意义下唯一，使得 π 是归一化抛物诱导的一个组成部分

$$\mathrm{I}_{P_{\min}}^{\mathrm{SO}(V)}(\mathbf{1}_3\boxtimes\underline{\alpha_2}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_r}).$$

注意，存在唯一的非负整数 r_0 和唯一的正整数序列 $r_1,\dots,r_t$满足 $r_0+\cdots+r_t=r$，使得对于 $2\le i\le r_0$，有 $|\alpha_i|=1$，并且

$$1<|\alpha_{r_0+1}|=\cdots=|\alpha_{r_0+r_1}|<|\alpha_{r_0+r_1+1}|=\cdots<\left|\alpha_{r_0+\cdots+r_{t-1}+1}\right|=\cdots=|\alpha_t|.$$

对于每个 $1\le i\le t$，令 τ_i 为 GL$_{r_i}(K)$ 的不可约温和非分歧表示，其 Satake 参数为

$$\left\{\frac{\alpha_{r_0+\cdots+r_{i-1}+1}}{|\alpha_{r_0+\cdots+r_i}|},\dots,\frac{\alpha_{r_0+\cdots+r_i}}{|\alpha_{r_0+\cdots+r_i}|}\right\}.$$

令 $P_{0,\ \min}:=$ SO(V_{2r_0+1}) $\cap P_{\min}$ 为 SO(V_{2r_0+1}) 的一个极小抛物子群。由于 $\mathbf{1}_3\boxtimes\alpha_2\boxtimes\cdots\boxtimes\alpha_{r_0}$ 是 $P_{0,\ \min}(K)$ 的一个离散系列表示，归一化抛物诱导

$$\mathrm{I}_{P_{0,\min}}^{\mathrm{SO}(V_{2r_0+1})}(\mathbf{1}_3\boxtimes\underline{\alpha_2}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_{r_0}})$$

是 SO(V_{2r_0+1})(K) 的不可约温和表示的有限直和。令 τ_0 为在 K ∩SO(V_{2r_0+1})(K) 下具有非零不变向量的唯一直和项。特别地，我们得到一个 Langlands 商

$$\mathrm{J}:=\mathrm{J}_P^{\mathrm{SO}(V)}\left(\tau_0\boxtimes\left(\boxtimes_{i=1}^t\tau_i\left(\underline{|\alpha_{r_0+\cdots+r_i}|}\circ\det_{r_i}\right)\right)\right),$$

其中， P是 SO(V) 的一个抛物子群，包含 P_0，其 Levi 商同构于 SO(V_{2r_0+1}) ×一般线性群$_{r_1}\times\cdots\times$一般线性群$_{r_t}$。

我们断言，J 在 K 下有非零不变向量。假设这一断言成立，则 FL(π) 同构于以下表示的唯一不可约商：

$$\mathrm{I}_{P_{\mathrm{GL}}}^{\mathrm{GL}_{2r}}\left(\left(\boxtimes_{i=1}^{t}\tau_i^{\vee}\left(\underline{|\alpha_{r_0+\cdots+r_i}^{-1}|}\circ\det_{r_i}\right)\right)\boxtimes\mathrm{FL}(\tau_0)\boxtimes\left(\boxtimes_{i=1}^{t}\tau_i\left(\underline{|\alpha_{r_0+\cdots+r_i}|}\circ\det_{r_i}\right)\right)\right).$$

然而，FL(τ_0)与规范化诱导同构

$$\mathrm{I}_{P_{\mathrm{GL}}\cap\mathrm{GL}_{2r_0}}^{\mathrm{GL}_{2r_0}}\left(\underline{\alpha_{r_0}^{-1}}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_2^{-1}}\boxtimes\mathrm{St}_2\boxtimes\underline{\alpha_2}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_{r_0}}\right),$$

后者是不可约的。因此，断言得证。

现在我们证明该断言。注意，存在一个 $G(K)$-表示的规范嵌入

$$\mathrm{I}_{P}^{\mathrm{SO}(V)}\left(\tau_0\boxtimes\left(\boxtimes_{i=1}^{t}\tau_i\left(\underline{|\alpha_{r_0+\cdots+r_i}|}\circ\det_{r_i}\right)\right)\right)\subset\mathrm{I}_{P_{\min}}^{\mathrm{SO}(\mathbf{V})}(\mathbf{1}_3\boxtimes\underline{\alpha_2}\boxtimes\cdots\boxtimes\underline{\alpha_r}),$$

在此嵌入下， $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$ 根据我们对 τ_0的选择，属于前一个空间。由 [Kon03，推论 3，2]，该断言等价于

$$T_w\phi_{\boldsymbol{\alpha}}\neq 0,$$

其中， $w\in W$ 是在 V_{2r_0} 上平凡作用并将$e_{-(r_0+\cdots+r_{i-1}+j)}$ 与$e_{r_0+\cdots+r_i+1-j}$ 互换的元素，对每个 $1\leq i\leq t$ 和每个 $1\leq j\leq r_i$均如此；而 T_w 是满足下式的交织算子：

$$T_w\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(g)=\int_{N(K)}\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(w^{-1}ng)\mathrm{d}n,\quad g\in\mathrm{SO}(V)(K).$$

这里， N 是 P 的幂零根基，并且根据 [Wal03，命题 IV.2，1]该积分绝对收敛。由 [Cas80，定理 3，1], 我们有 $T_w\phi_{\boldsymbol{\alpha}}=c(\boldsymbol{\alpha})\phi_{w\boldsymbol{\alpha}}$，其中 $c(\boldsymbol{\alpha})$ 是 Harish-Chandra c-函数。注意，通过交织算子的连续性， [Cas80，§3] 中的正则性条件可以去掉。在 Haar 测度适当规范化的情况下， $c(\boldsymbol{\alpha})$ 由 Gindikin–Karpelevich 公式给出：

$$c(\boldsymbol{\alpha})=\prod_{i=r_0+1}^{r}\left(\frac{\alpha_i-\#\kappa^{-1}}{\alpha_i-1}\prod_{\substack{1\leq j\leq i-1\\|\alpha_j|<|\alpha_i|}}\frac{\alpha_i-\#\kappa^{-1}\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\alpha_i\alpha_j-\#\kappa^{-1}}{\alpha_i\alpha_j-1}\right).$$

特别地， $c(\boldsymbol{\alpha})$ 非零，从而该断言成立。 □

推论 2.4.2. 设 π 是 $\mathrm{SO}(V)(K)$ 的一个温和不可约容许表示，且在 $G(K)$ 的某个特殊极大紧开子群下具有非零不变向量，则Weil–Deligne 表示(FL(π)) 的单值算子共轭于 $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\oplus\mathbf{1}_{2m-2}$。

证明. 由命题 2.4.1 可知， π 的尖点支撑具有如下形式 $((K^{\times})^{m-1}\times\mathrm{SO}(V_3)(K)\ \chi\boxtimes\mathbf{1})$，其中 V_3 是秩为 3 、定义在 K 上的各向异性二次空间，且 χ 是 $(K^{\times})^{m-1}$的非分歧特征。我们还知道 χ 是酉的，因为 π 是 tempered 的。特别地，$\mathrm{FL}(\pi)$ 是从 Levi 子群出发的（不可约）抛物诱导

$$\mathrm{GL}_1^{m-1}\times\mathrm{SO}(V_3)(K)\times\mathrm{GL}_1^{m-1}$$

其诱导数据为 $\chi\boxtimes\mathrm{St}_2\boxtimes\chi^{-1}$，其中 St_2 是一般线性群 $\mathrm{GL}_2(K)$ 的 Steinberg 表示。推论立即得出。□

3. Deformation

本节中，我们采用以下设置。

设置 3.0.1。

- 设 ℓ 为一个奇有理素数。
- 设 E 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的一个有限扩张子域。我们用 $\mathcal{O}$ 表示 E 的整数环，用 λ 表示极大理想，用 κ 表示剩余域。
- 记 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 为所有剩余域为 κ 的、定义在$\mathcal{O}$ 上的诺特完备局部环所构成的范畴，其态射为诱导 κ 上恒等映射的局部同态。记 $\mathscr{C}^f{}_{\mathcal{O}}$ 为 Artin局部环在$\mathcal{O}$ 上的满子范畴。
- 对于每个对象 $\mathrm{R}\in\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$，记 $\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$ 为 R 的极大理想。

• 设 G 为定义在 $\mathcal{O}$ 上的光滑群概形 GSp_{2m}（分别为 GO_{2m}），若 $\mathfrak{d}=0$（分别为 $\mathfrak{d}\neq 0$）。这里，GSp_{2m}由 $\mathcal{O}^{\oplus(2m)}$ 上的标准交错配对定义，该配对由矩阵 J_{2m}给出；GO_{2m} 则由矩阵 J_{2m}给出的标准对称配对定义。

• 我们用 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数，用 $G_\circ$ 表示 G 的单位连通分支，用 $G_{\prime}$ 表示 $G_\circ$ 的导出子群，用 $\mathfrak{g}_{\prime}$ 表示 $G_{\prime}$ 的李代数，用 Z_G 表示 G的中心。
• 我们用 Std 表示 G 在 $\mathcal{O}$ 上的维数为 $2m$ 的标准表示，并用 $\nu\colon G\to \mathrm{GL}_1$ 表示相似特征。

• 对于 $\mathcal{O}$ 上的任意光滑群概形 H，我们用 $H^\wedge$ 表示 H 沿单位截面的形式完备化。特别地，对于 $\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 中的每个对象 R，我们有 $H^\wedge(\mathrm{R})=\ker(H(\mathrm{R})\to H(\kappa))$。
• 设 Γ 是一个满足以下 ℓ-有限性性质的仿射有限群：对于任意开子群$\Gamma_0\leq\Gamma$，从 Γ_0 到 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 只有有限多个连续同态。（注意，这对局部域的绝对伽罗瓦群，以及数域在有限多个位置之外非分歧的最大扩张的伽罗瓦群均成立。）

3.1. **一些代数**。 在本小节中，我们进行一些将在变形理论中用到的代数计算。

引理 3.1.1。 设R 是 $\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 的一个对象，且 $\rho\colon\Gamma\to G(\mathrm{R})$ 是一个同态。假设 标准表示。ρ(模 $\mathfrak{m}_\mathrm{R}$)绝对不可约，则 ρ 在 $(G')^\wedge(\mathrm{R})$ 中的中心化子是平凡的。

证明。 该引理显然可归约到 R 为阿廷的情形。接着我们对 R 的长度使用归纳法。长度为一的情形显然成立。一般而言，我们可以选取 R 的一个理想 I，使得 I 的长度为一。根据归纳假设，ρ 在 $(G')^\wedge(\mathrm{R})$ 中的中心化子包含于 $G'(1+\mathrm{I})$ 中。

于是只需证明，对于任意包含 κ 的域 κ'，$\mathrm{H}^0(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\rho)\otimes_\mathrm{R}\kappa')=0$。但这可由舒尔引理以及 ℓ 为奇数推出。□

引理 *3.1.2*（*Carayol*）。设 $R'\subset R$ 为诺特完备局部环，其极大理想分别为 $\mathfrak{m}_{R'}$ 和 $\mathfrak{m}_\mathrm{R}$。假设 R' 和 R 具有相同的剩余域，且 $\mathfrak{m}_\mathrm{R}\cap R'=\mathfrak{m}_{R'}$。设 Γ 为一个仿射有限群，并设 $\rho:\Delta\to$一般线性群$_{2m}(R)$ 是一个连续同态，满足 $\rho(mod\ \mathfrak{m}_\mathrm{R})$ 绝对不可约，且 $tr(\rho)(\Gamma)\subset R'$。那么，存在一个一般线性群 $^\wedge_{2m}(R)$- 共轭 ρ'，使得 ρ 的值域包含于一般线性群 $_{2m}(R')$。

证明。 这是 [CHT08，引理 2.1。10]；参见 [Car94，定理 2]。 □

我们还需要 Carayol 引理的以下版本，用于取值于 G 的伽罗瓦表示 s.

引理 *3.1.3*。设 $R'\subset R$ 为诺特完备局部环，其极大理想分别为 $\mathfrak{m}_{R'}$ 和 $\mathfrak{m}_\mathrm{R}$。假设 R' 和 R 具有相同的剩余域 κ，其特征为 $\ell>2$，且 $\mathfrak{m}_\mathrm{R}\cap R'=\mathfrak{m}_{R'}$。设 Γ 为一个仿射有限群，并设 $\rho:\Gamma\to G(R)$ 是一个连续同态，满足 $Std\circ\rho(mod\ \mathfrak{m}_\mathrm{R})$ 绝对不可约，且 $tr(Std\circ\rho)(\Gamma)\subset R',\nu\circ\rho(\Gamma)\subset R'$。那么，$\rho$ 与一个同态$\rho':\Gamma\to G(R')$ 共轭（通过 $(G')^\wedge(R)$）。

证明。由引理 3.1.2 可知，Std $\circ\rho$ 与取值于 $\mathrm{GL}^\wedge_{2m}(\mathrm{R}')$ 的表示 ρ' 在 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathrm{R})$ 中共轭。由于 ρ'和 $\rho'^{,\top}\otimes(\nu\circ\rho)$ 都取值于 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathrm{R}')$，且它们在 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathrm{R})$ 中共轭，根据 [Car94, Théorème 1]，它们在 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathrm{R}')$ 中也共轭。设 B 是 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathrm{R}')$ 中的一个元素，使得$\rho'=B\rho'^{,\top}\otimes(\nu\circ\rho)B^{-1}$。那么由舒尔引理可知，当$N$ 为偶数时，B 是对称的；当 N 为奇数时，B 是斜对称的，而 B 定义了一个与 G 同构的一般正交群（分别为一般辛群）。因此我们看到，ρ 与取值于 $G(\mathrm{R}')$ 的表示在 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathrm{R})$ 中共轭。还容易验证，可以选取属于 $\mathrm{GL}^\wedge_{2m}(\mathrm{R})$ 的共轭矩阵。最后，由舒尔引理可知，该共轭矩阵也属于 $G(\mathrm{R})$。经过重新缩放后，我们可以选取属于 $(G')^\wedge(\mathrm{R})$ 的共轭矩阵。□

3.2. **变形问题**。 在本小节中，我们回顾变形问题的概念。我们将在以下设置下开展讨论。

设置 3.2.1。 假设 $(\Gamma,\ \rho,\ \overline{\chi})$ 是一个三元组，其中
- Γ 是我们固定的拓扑群，
- $\overline{\rho}\colon\Gamma\to G(\kappa)$ 是一个同态，并且
- $\chi\colon\Gamma\to\mathcal{O}^\times$ 是一个连续同态，其约化为 $\chi:\Gamma\to\kappa^\times$，

使得 $\nu\circ\rho=\overline{\chi}$. 令 $\mathrm{ad}(\rho)$（分别地，$\mathrm{ad}^0(\rho)$）表示 Γ 通过伴随表示在 $\mathfrak{g}_\kappa$（分别地，$\mathfrak{g}'_\kappa$）上的表示。

定义 3.2.2。设 $f:\mathrm{R}_1\to\mathrm{R}_0$ 是 $\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 中的一个态射，且 $\rho_0:\Gamma\to G(\mathrm{R}_0)$ 是一个连续同态。ρ_0 到 R_1 的一个提升（关于 χ）是一个连续同态 $\rho_1:\Gamma\to G(\mathrm{R}_1)$，满足 $f_*(\rho_1)=\rho_0$ 且 $\nu_{\mathrm{R}_1}\circ\rho_1=\chi$。令

$$\mathrm{D}^{\square}_{\overline{\rho},\mathcal{O}}:\mathscr{C}_\mathcal{O}\to\mathsf{Set}$$

为将每个对象 $\mathrm{R}\in\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 映射到 ρ 到 R 的提升集合的函子。

对于每个 $\mathrm{R}\in\mathscr{C}_\mathcal{O}$，$\rho$ 的两个提升 ρ，ρ' 若它们被 $(G')^\wedge(\mathrm{R})$ 中的某个元素共轭，则称为等价。ρ 到 R 的一个变形定义为 ρ 到 R 的变形的一个等价类。令

$$\mathrm{D}_{\overline{\rho},\mathcal{O}}:\mathscr{C}_\mathcal{O}\to\mathsf{Set}$$

为将每个对象 $\mathrm{R}\in\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 映射到 ρ 到 R 的变形集合的函子。

$\mathrm{D}^{\square}_{\overline{\rho},\mathcal{O}}$ 可由一个元素表示，称为 $\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}\in\mathscr{C}_\mathcal{O}$，即泛提升环；参见 [Bal12，定理 1.2。2]。

$\mathrm{D}_{\rho\text{的}\mathcal{O}}$ 切空间自然同构于 $\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\rho))$.

定义 3.2.3. ρ 的局部提升条件（相对于 χ）是形式谱 $\mathrm{R}^{\square}_{\rho}$ 的一个闭形式子概形 $\mathscr{D}^{\square}$，满足对于每个 $\mathrm{R}\in\mathscr{C}_\mathcal{O}$，$\mathscr{D}^{\square}(\mathrm{R})$ 在等价关系下封闭。

对于每个局部提升条件 $\mathscr{D}^{\square}$，我们用 $\mathscr{I}^{\square}\subset\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}$ 表示定义 $\mathscr{D}^{\square}$ 的闭理想。注意，$\mathscr{D}^{\square}$ 自然地诱导出一个局部变形问题，记为 $\mathscr{D}$，它是 $\mathscr{D}_{\rho\text{的}\mathcal{O}}$ 子函子。

定义 3.2.4. 对于 ρ（相对于 χ）的每个局部提升条件 $\mathscr{D}^{\square}$，以及与之关联的局部变形问题 $\mathscr{D}$，存在一个同构

$$\mathrm{Hom}_\kappa\big(\mathfrak{m}_{\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}}/(\mathfrak{m}^2_{\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}},\lambda),\kappa\big)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\mathcal{O}}(\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}},\kappa[\varepsilon]/(\varepsilon^2))\cong\mathrm{Z}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})),$$

其中，$\mathrm{Z}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\rho))$ 表示 Γ 取值于 Γ 在 $\mathfrak{g}'_\kappa$ 上的伴随表示 $\mathrm{ad}^0(\rho)$ 的 1-余循环群。

我们将 $\mathscr{D}$ 的切空间定义为子空间

$$\mathrm{L}^1(\mathscr{D}^{\square}):=\mathrm{Hom}_\kappa\big(\mathfrak{m}_{\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}}/(\mathfrak{m}^2_{\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}},\mathscr{I},\lambda),\kappa\big)\subset\mathrm{Z}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))$$

在自然映射 $\mathrm{Z}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\rho))\twoheadrightarrow\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\rho))$ 下的像。这里，$\mathscr{L}\subset\mathrm{R}^{\square}_{\rho}$ 是定义 $\mathscr{D}^{\square}$ 的闭理想。

由于 $\mathscr{I}$ 在 $(G')^\wedge(\mathrm{R})$ 的共轭作用下不变，我们看到 $\mathrm{L}^1(\mathscr{D}^{\square})$ 是 $\mathrm{L}(\mathscr{D})$ 在 $\mathrm{Z}^1(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\rho))$ 中的原像。特别地，

$$\dim_\kappa\mathrm{L}^1(\mathscr{D}^{\square})-\dim_\kappa\mathrm{L}(\mathscr{D})=\dim G'_\kappa-\dim_\kappa\mathrm{H}^0(\Gamma,\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})).\tag{3.1}$$

定义 3.2.5。设 $\Gamma=\mathrm{Gal}_F$。ρ（关于 χ）的全局变形问题是一个元组 $(\rho,\chi,\Sigma,\{\mathscr{D}^{\square}_v\}_{v\in\Sigma})$，其中

- Σ 是 F 的一个有限处有限集，其中包含 $\Sigma(\ell)$ 以及所有 ρ_v 分歧的有限处 v。

对于每个 $v\in\Sigma$，• $\mathscr{D}^{\square}_v$ 是相对于 $\overline{\chi}_v$ 的 ρ 的一个局部提升条件。

在本小节余下部分中，我们令 $\Gamma=\mathrm{Gal}_F$，并固定一个全局变形问题 $\mathscr{S}=(\rho,\chi,\Sigma,\{\mathscr{D}^{\square}_v\}_{v\in\Sigma})$。对于每个子集 $\Xi\subset\Sigma$，令

$$\mathrm{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}:=\widehat{\bigotimes}_{v\in\Xi}(\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}_v}/\mathscr{I}^{\square}_v),$$

其中张量积取自 $\mathcal{O}$。我们回顾 [CHT08，定义 2.2 中的1]带框架提升和带框架变形的概念。

定义 3.2.6. 对于每个子集 $\Xi\subset\Sigma$，Ξ-带框架提升 ρ 到对象 $\mathrm{R}\in\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 是一个元组 $(\rho;\{\beta_v\}_{v\in\Xi})$，其中 ρ 是相对于 χ 将 ρ 提升到 R 的提升（见定义 3.2.2），并且对于每个 $v\in\Xi$，$\beta_v\in(G')^\wedge(\mathrm{R})$。若一个 Ξ-带框架提升 $(\rho,\{\beta_v\}_{v\in\Xi})$ 满足：ρ 在 Σ 之外非分歧，且对于每个 $v\in\Sigma$，$\rho_v\in\mathscr{D}^{\square}_v(\mathrm{R})$，则称其类型为 $\mathscr{S}$。

如果存在 $g\in(G')^\wedge(\mathrm{R})$，使得 $\rho'=g\circ\rho\circ g^{-1}$ 并且对于每个 $v\in\Xi$ 都有 $\beta'_v=g\beta_v$，则称两个 Ξ-带框架提升 $(\rho;\{\beta_v\}_{v\in\Xi})$ 和 $(\rho';\{\beta'_v\}_{v\in\Xi})$ 等价。Ξ-带框架变形是 ρ 的 Ξ-带框架提升的一个等价类，其中 ρ。

如果一个 Ξ-带框架提升属于类型 $\mathscr{S}$，那么任何与其等价的 Ξ-带框架提升也属于该类型。我们称一个 Ξ-带框架变形属于类型 $\mathscr{S}$，如果其中某个（或等价地，每个）元素属于类型 $\mathscr{S}$。令

$$\mathrm{Def}_{\mathscr{S}}^{\square_\Xi} : \mathscr{C}_{\mathcal{O}} \to \mathsf{Set}$$

为该函子 将每个对象 $R \in \mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 映射到 ρ 到 R 的 Ξ型带框架变形的集合。

回顾一下，$\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}$ 是 F/F 的最大非分歧子扩张的伽罗瓦群$\Sigma\cup\Sigma^\infty$。按照 [CHT08, 第 21], 页，对每个整数 $i \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathrm{H}^i_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho))$ 表示该复形的上同调

$$\mathrm{C}^i_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) := \mathrm{C}^i(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \oplus \bigoplus_{v\in\Sigma} \frac{\mathrm{C}^{i-1}(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))}{\mathrm{M}_v^{i-1}},$$

其中 $\mathrm{M}_v^{i-1} = 0$ 除非 $v \in \Sigma \smallsetminus \Xi$ 且 $i = 0$，此时

$$\mathrm{M}_v^i = \begin{cases} \mathrm{C}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) & \text{if } i = 0 \\ \mathrm{L}^1(\mathscr{D}_v^{\square}) & \text{if } i = 1 \end{cases}.$$

余边界映射为

$$\mathrm{C}^i_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \mathrm{C}^{i+1}_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) : (\phi, (\psi_v)_{v\in\Sigma}) \mapsto (\partial\phi, (\phi|_{F_v} - \partial\psi_v)_{v\in\Sigma}).$$

于是存在一个正合列

$$\begin{aligned}
&0 \to \mathrm{H}^0_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \bigoplus_{v\in\Xi} \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \\
&\to \mathrm{H}^1_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \left(\bigoplus_{v\in\Sigma\smallsetminus\Xi} \frac{\mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))}{\mathrm{L}(\mathscr{D}_v)}\right) \oplus \bigoplus_{v\in\Xi} \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \\
&\to \mathrm{H}^2_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \bigoplus_{v\in\Sigma} \mathrm{H}^2(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \\
&\to \mathrm{H}^3_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \mathrm{H}^3(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) \to \dots
\end{aligned}$$

令 $\mathrm{L}(\mathscr{D}_v)^\perp \subset \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1))$ 为在伽罗瓦不变完美配对所诱导的局部 Tate 对偶下 $\mathrm{L}(\mathscr{D}_v)$ 的湮灭子

$$\mathrm{ad}^0(\overline{\rho}) \times \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}) \to \kappa : (x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy).$$

我们定义

$$\mathrm{H}^1_{\mathscr{L}^\perp,\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1)) := \ker\left(\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1)) \to \prod_{v\in\Sigma\smallsetminus\Xi} \frac{\mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1))}{\mathrm{L}(\mathscr{D}_v)^\perp}\right). \tag{3.2}$$

引理 3.2.7。 以下陈述成立：

(1) 对于 $i > 3$，$\mathrm{H}^i_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho))$ 消失。(2) 若 $\Xi = \varnothing$，则 $\mathrm{H}^0_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho))$；若 $\Xi \neq \varnothing$，则其消失。(3) $\dim_\kappa \mathrm{H}^3_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho)) = \dim_\kappa \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho)(1))$。(4) $\dim_\kappa \mathrm{H}^2_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho)) = \dim_\kappa \mathrm{H}^1_{\mathscr{L}^\perp,\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho)(1))$。(5)（Wiles公式）

$$\begin{aligned}
\dim_\kappa \mathrm{H}^1_{\mathscr{S},\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) &= \delta_{\Xi,\varnothing} \cdot \dim_\kappa \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) + \dim_\kappa \mathrm{H}^1_{\mathscr{L}^\perp,\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1)) \\
&\quad - \dim_\kappa \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1)) - [F:\mathbb{Q}](\dim G_\kappa - \dim B_\kappa) \\
&\quad + \sum_{v\in\Sigma\smallsetminus\Xi} (\dim_\kappa \mathrm{L}(\mathscr{D}_v) - \dim_v \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))).
\end{aligned}$$

证明。 利用 ℓ-有限性性质，证明与 [CHT08 引理 2.3.4] 相同。这里我们使用了这一点：对于每个实位 $v$of F，$\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F_v}, \mathrm{ad}^0(\mathfrak{g})) = m(m + \delta_{\mathfrak{d},0} - 1) = (\dim G_\kappa - \dim B_\kappa)$。该公式是以下断言的推论：设 $\langle -, - \rangle$ 为非退化对称（分别为交替）配对

在 $\kappa^{\oplus 2m}$ 上由 J_{2m}（分别为 J'_{2m}）定义，其中 $N=2m$（分别为 $N=2m+1$）。（特别地，G_κ 是一般线性群$_{2m}$ 中将 $\langle -,-\rangle$ 保持到一个标量倍数的元素所成的子群。）那么 $\rho(\mathsf{c}_v)$ 与矩阵 $G(\kappa)$ 共轭

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & \\ & -\mathbf{1}_m \end{bmatrix} & \mathfrak{d}=0, \\ J_{2m} & \mathfrak{d}\neq 0, \end{cases}$$

对任意复共轭 c_v at v。

现在我们证明这一断言：记 $s=\rho_{\Pi,\iota_\ell}(\mathsf{c}_v)$。我们先处理 $N=2m+1$ 的情形。由命题 2.2.3(2) 可知 $\nu(s)=-1$。由于 $s^2=1$，s 的特征值为 ± 1。设 $V^{\pm}$ 是 ± 1对应于 s的特征子空间。则

$$\langle v,w\rangle=\langle sv,sw\rangle=-\langle v,w\rangle$$

当 $v,\ w\in V^+$ 时。因此 V^+ 是全各向同性的。同样的论证表明，V^- 是全各向同性的。因此，我们可以取 V^+ 的一组基 $\{x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m\}$ 以及 V^- 的一组基 $\{y_1,\ \ldots\ldots,\ y_m\}$，使得 $\langle x_i,\ y_i\rangle=\delta_{i,\ j}$。因此，在基 $\{x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_m\}$下，$s$ 由矩阵表示

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & \\ & -\mathbf{1}_m \end{bmatrix}.$$

该断言由此得出。

在 $N=2m$的情形下，我们有 $\nu(s)=1$。令 $V^{\pm}$ 为 ± 1 中 s的特征子空间。那么 V^+ 与 V^-正交。我们还知道，根据维数$V^+=$维数$V^-=m$，由 [CLH16，定理 1。1]即可容易地得到该断言。□

命题 3.2.8。假设标准表示 $\circ\rho$ 是绝对不可约的。那么对于每个子集 $\Xi\subset\Sigma$，函子$\mathrm{Def}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$由对象 $\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}\in\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 表示。令 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}:=\mathsf{R}^{\square_\varnothing}_{\mathscr{S}}$，称为全局变形环（相对于 $\mathscr{S}$）。注意，自然变换

$$\mathrm{Def}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}\to\prod_{v\in\Xi}\mathsf{D}^{\square}_{\overline{\rho}_v,\mathcal{O}}:(\rho,\{\beta_v\}_{v\in\Xi})\mapsto(\beta_v^{-1}\rho_v\beta_v)_{v\in\Xi}$$

诱导出一个典范态射 $\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\ \Xi}\to\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$，属于 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$。

（1）存在一个典范同构

$$\mathrm{Hom}_\kappa\big(\mathfrak{m}_{\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}}/\big(\mathfrak{m}^2_{\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}},\lambda,\mathfrak{m}_{\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}}\big),\kappa\big)\cong\mathrm{H}^1_{\mathscr{S},\Xi}(\Gamma_{F,\Sigma},\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})),$$

其中，我们将 $\mathfrak{m}_{\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\ \Xi}}$ 视为其在典范同态 $\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\ \Xi}\to\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$ 下的像。

(2) 若对每个 $v\in\Sigma\smallsetminus\Xi$，$\mathrm{H}^2_{\mathscr{S},\Xi}(\Gamma_{F,\Sigma},\mathrm{ad}^0(\rho))=0$和 $\mathscr{D}_v$在 $\mathcal{O}$ 上形式光滑，则$\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$是$\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$上的幂级数环，其变量数为$\dim_\kappa\mathrm{H}^1_{\mathscr{S},\Xi}(\Gamma_{F,\Sigma},\mathrm{ad}^0(\rho))$。

(3) 选择一个泛提升 $\rho_{\mathscr{S}}:\Gamma_F\to G(\mathsf{R}_{\mathscr{S}})$ 将 ρ 提升到$\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$，从而将典范同态$\mathsf{R}_{\mathscr{S}}\to\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$延拓为一个同构

$$\mathsf{R}_{\mathscr{S}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathscr{T}_\Xi\cong\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}},$$

其中 $\mathscr{T}_\Xi$ 是 $\mathcal{O}$ 上形式光滑群 $\prod_{v\in\Xi}(G')^\wedge$ 的坐标环。注意，$\mathscr{T}_\Xi$ 同构于 $\mathcal{O}$ 上一个变量数为$\#\Xi\cdot\dim G'_\kappa$ 的形式幂级数代数。

证明。注意 $\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_F,\mathrm{ad}^0(\rho))=0$，因为 标准表示 $\circ\rho$是绝对不可约的。因此，$\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$的可表性可用与 [Pat16、命题 9.2(2)] 的证明相同的方法证明。

对于第 (1) 部分，回忆一下

$$\mathrm{Hom}_\kappa\big(\mathfrak{m}_{\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}}/\big(\mathfrak{m}^2_{\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}},\lambda,\mathfrak{m}_{\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}}\big),\kappa\big)\cong\mathrm{Hom}(\mathsf{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}/(\mathfrak{m}_{\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}}),\kappa[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$$

同构于 $\mathrm{Def}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}$ 中由对 $v\in\Xi$ 的 ρ_v 给出平凡提升的元素所构成的子空间。任何 ρ 的 Ξ-框架提升都具有如下形式

$$((\mathbf{1}+\phi\varepsilon)\overline{\rho};\{\mathbf{1}+a_v\varepsilon\}_{v\in\Xi})$$

其中 $\phi \in Z^1(\mathrm{Gal}_F, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))$。当且仅当对每个 $v \in \Sigma$ 都有 $\phi|_{\mathrm{Gal}_{F_v}} \in L^1(\mathscr{D}_v^{\square})$ 时，它属于 $\mathscr{S}$ 型。当且仅当

$$(\mathbf{1} - a_v\varepsilon)(\mathbf{1} + \phi|_{\mathrm{Gal}_{F_v}}\varepsilon)\overline{\rho}(\mathbf{1} + a_v\varepsilon) = \overline{\rho}_v,$$

或者等价地，$\phi|_{\mathrm{Gal}_{F_v}} = (1 - \mathrm{ad}^0(\rho)|_{\mathrm{Gal}_{F_v}})a_v$。另一方面，两个元组 $(\phi; \{a_v\}_{v\in\Xi})$ 和 $(\phi'; \{a'_v\}_{v\in\Xi})$ 等价，当且仅当存在 $b \in \mathfrak{g}'_\kappa$ 使得

$$\phi' = \phi + (\mathbf{1} - \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))b$$

and

$$a'_v = a_v + b$$

对每个 $v \in \Xi$ 都成立。断言显然成立。

对于部分 (2)，[CHT08，推论 2.2。13] 中的证明仍然适用；参见 [Pat16，命题 9。2]。部分 (3) 由引理 3.1.1得出。 □

3.3. **Fontaine–Laffaille 变形。** 本小节中，我们回顾 [Boo19b]中定义的 Fontaine–Laffaille 提升条件的一些结果。参照 [BK90，CHT08], 我们采用 Fontaine–Laffaille 理论的协变版本 [FL82]。

假设 ℓ 在 F 中非分歧，并令 v 为 F 上方的一个有限处，位于 ℓ 之上。我们用 $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(F_v/\mathbb{Q}_\ell)$ 表示绝对 Frobenius 元，并令 $\Sigma_v := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{O}_v, \mathbb{Q}_\ell)$

假设 3.3.1。 域 E 包含 F_v 到 $\mathbb{Q}_\ell$ 的所有嵌入的像。

定义 3.3.2。 设假设 3.3.1 成立。我们将 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 记为由有限长度的 $\mathcal{O}_v \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{O}$-模 M 构成的范畴，这些模配备有

- 一个递减滤过 $\{\mathrm{Fil}^i M\}_{i\in\mathbb{Z}}$，由 $\mathcal{O}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$-子模构成，且为 $\mathcal{O}_v$-直和项，并满足 $\mathrm{Fil}^0 M = M$ 和 $\mathrm{Fil}^{\ell-1} M = 0$；以及
- 一个 Frobenius 结构，即对每个 $i \in \mathbb{Z}$，一个 $\mathrm{Fr} \otimes 1$-线性映射 $\Phi^i : \mathrm{Fil}^i M \to M$，满足关系 $\Phi^i|_{\mathrm{Fil}^{i+1} M} = \ell\Phi^{i+1}$ 和 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Phi^i \mathrm{Fil}^i M = M$。

定义 3.3.3。 假设 Assumption 3.3.1 成立。对于 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 的每个对象 M，分解

$$\mathcal{O}_v \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{O} = \bigoplus_{\tau\in\Sigma_v} \mathcal{O}$$

诱导出典范分解

$$M = \bigoplus_{\tau\in\Sigma_v} M_\tau, \quad M_\tau := M \otimes_{\mathcal{O}_v\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{O}, \tau\otimes\mathbf{1}} \mathcal{O}$$

and

$$\mathrm{Fil}^i M = \bigoplus_{\tau\in\Sigma_v} \mathrm{Fil}^i M_\tau, \quad \mathrm{Fil}^i M_\tau = M_\tau \cap \mathrm{Fil}^i M.$$

于是 Φ^i 诱导出$\mathcal{O}$-线性映射

$$\Phi^i_\tau : \mathrm{Fil}^i M_\tau \to M_{\tau\circ\mathrm{Fr}^{-1}}.$$

对于每个 $\tau \in \Sigma_v$ 和每个 $i \in \mathbb{Z}$。记

$$\mathrm{gr}^i M_\tau := \mathrm{Fil}^i M_\tau / \mathrm{Fil}^{i+1} M_\tau,$$

$$\mathrm{gr}^\bullet M_\tau := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i M_\tau,$$

$$\mathrm{gr}^\bullet M := \bigoplus_{\tau\in\Sigma_v} \mathrm{gr}^\bullet M_\tau,$$

并将 M 的 τ-Fontaine–Laffaille 权重集合定义为

$$\mathrm{HT}_\tau(M) := \{i \in \mathbb{Z} | \mathrm{gr}^i M_\tau \neq 0\}.$$

我们称 M 具有正则 Fontaine–Laffaille 权重，如果对于每个 $\tau \in \Sigma_v$ 和每个 $i \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{gr}^i M_\tau$ 作为 $\mathcal{O}$ 模至多由一个元素生成。

例 3.3.4. 假设 3.3.1 成立。 $\mathscr{C}^f_{\mathcal{O}}$ 中的每个对象 R 都可以视为 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 中的一个对象 $\mathrm{R}\{0\}$，满足

$$\mathrm{Fil}^i(\mathrm{R}\{0\}) = \begin{cases} \mathcal{O}_v \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{R} & i \le 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}.$$

我们回顾 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 中对象上的 Tate 扭转的概念。

定义 3.3.5。 假设假设 3.3.1 成立。对于 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 和 $s \in \mathbb{Z}$ 中的每个对象 M，我们将$M\{s\}$定义为 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 中满足 $\mathrm{Fil}^i M\{s\} = \mathrm{Fil}^{i+s} M$ 且满足 $\Phi^i_{M\{s\}} = \Phi^{i+s}_M$ 的对象。

对于满足 $0 \le b \le \ell - 2$ 的每个整数 b，我们令 $\mathscr{MF}^{[0,b]}_{\mathcal{O},v}$ 为 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$ 的全子范畴，其对象为满足 $\mathrm{Fil}^{b+1} M = 0$ 的对象。此外，对于 $\mathscr{C}^f_{\mathcal{O}}$ 中的每个对象 R，我们令 $\mathscr{MF}^{[0,b]}_{\mathcal{O},v}|_{\mathrm{R}}$ 为 $\mathscr{MF}^{[0,b]}_{\mathcal{O},v}$ 的全子范畴，其对象为满足以下条件的对象 M： M 是 $\mathcal{O}_v \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{R}$ 上的有限自由模，并且对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Fil}^i M$ 都是 M 的一个直和项，作为 $\mathcal{O}_v \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{R}$-子模。

命题 3.3.6. 假设 假定 3.3.1 成立。设 $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}_{F_v}]^{\mathrm{f.l.}}$ 为 $\mathcal{O}$-模（有限长度）并配备 Gal_{F_v} 之连续作用的范畴。存在一个正合的全忠实共变 $\mathcal{O}$-线性函子

$$\mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v : \mathscr{MF}_{\mathcal{O},v} \to \mathcal{O}[\mathrm{Gal}_{F_v}]^{\mathrm{f.l.}}$$

满足如下条件：

(1) $\mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v$的本质像在取子对象与商对象下封闭。*(2)* 对每个对象 M，其属于 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$，以及对每个 $s \in \mathbb{Z}$，$\mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v(M\{s\})$ 同构于 $\mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v(M)(-s)$。*(3)* 对每个对象 M，其属于 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}$，且（作为 $\mathcal{O}$-模）具有有限长度，我们有

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}} M = [F_v : \mathbb{Q}_\ell] \cdot \mathrm{length}_{\mathcal{O}} \mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v(M).$$

(4) 对每个对象 R，其属于 $\mathscr{C}^f_{\mathcal{O}}$，以及对每个对象 M，其属于 $\mathscr{MF}_{\mathcal{O},v}|_{\mathrm{R}}$，$\mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v(M)$ 在 R 上是有限自由的。

证明。 第 (1) 部分由 [Boo19b，事实 4.10]。第 (2) 部分由定义得到；参见 [Boo19b，定义 4.9]。第 (3) 部分由 [Boo19b，引理 4.14]。第 (4) 部分由 [Boo19b，引理 4.15]。 □

定义 3.3.7. 设 $a \le b$ 为整数，使得 $b - a \le \ell - 2$。对于 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 中的一个对象 R 以及一个连续表示 $\rho : \mathrm{Gal}_{F_v} \to G(\mathrm{R})$，若存在 E 的有限非分歧扩张 $E_\dagger$，使得该扩张分裂扩张 $F_v/\mathbb{Q}_\ell$，其整数环为$\mathcal{O}_\dagger$，并且对 R 在 $\mathscr{C}^f_{\mathcal{O}_\dagger}$中的每个商群 R′，都有 $((\text{标准表示} \circ \rho)(a) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_\dagger) \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{R}'$ 同构于某个对象 M'的 $\mathbf{T}^{\mathrm{cris}}_v(M')$，其中该对象属于 $\mathscr{MF}^{[0,b-a]}_{\mathcal{O}_\dagger,v}|_{\mathrm{R}'}$且具有正则 Fontaine–Laffaille 权重，则称 ρ 在 $[a,b]$中具有正则 Fontaine–Laffaille 权重的晶体性质。

定义 3.3.8. 设 (Γ, ρ, χ) 是设置 3.2.1 中的一个三元组，其中 $\Gamma = \mathrm{Gal}_{F_v}$且 $\chi = \varepsilon_\ell^{2-N}$，并且 Std $\circ \rho$在 $[a,b]$中具有正则 Fontaine–Laffaille 权重的晶体性质，且存在满足$b - a \le \frac{\ell-2}{2}$的某些整数 $a \le b$。我们定义 $\mathscr{D}^{\mathrm{FL},\square}$为关于配对 (ρ, χ) 的局部提升条件，它刻画 ρ 的正则 Fontaine–Laffaille 晶体提升（见定义 3.3.7）。根据 Boo19b，推论 5.6]，它是一个局部提升条件。

命题 3.3.9。 令$(\Gamma、\ \rho、\ \chi)$ 为定义 3.3.8中的一个三元组。若 B_κ 是 G_κ的博雷尔子群，则局部提升条件 $\mathscr{D}^{\mathrm{FL},\square}$ 在形式谱$\mathcal{O}$上形式光滑，纯相对维数为

$$\dim G'_\kappa + [F_v : \mathbb{Q}_\ell] \cdot (\dim G_\kappa - \dim B_\kappa).$$

特别地，由等式3.1 可知

$$\dim_\kappa \mathrm{L}(\mathscr{D}^{\mathrm{FL}}) = \dim_\kappa \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) + [F_v : \mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa - \dim B_\kappa).$$

证明。 根据形式光滑性的下降（参见 [Sta18，06CM]），我们可以假设假设3.3.1 成立。于是结论由 [Boo19b，定理 52]。 □

3.4. **温和表示。** 本小节中，我们回顾关于温和分歧的自对偶局部伽罗瓦表示的最小分歧变形的一些结果。

我们固定一个正整数 q，它与 ℓ互素，并注意到，本小节中的所有结果均可逐字适用于将 G 替换为由矩阵GO_{2m+1} 给出的标准对称配对所定义的光滑群概形 J_{2m+1}的情形，参见 [Boo19a，§5。2]。

定义 3.4.1。 q-温和群（记作 T_q）定义为满足 $\phi_q t \phi_q^{-1} = t^q$ 的半直积拓扑群 $t^{\mathbb{Z}_\ell} \rtimes \phi_q^{\mathbb{Z}}$。

我们回顾关于文献T_q 中 [LTX+24的温和群的泛变形的如下结果，命题 3。16]。

命题 3.4.2。 设$(\Gamma,\ \rho,\ \chi)$ 是如设置 3.2.1 中所述的三元组，其中 $\Gamma = \mathrm{T}_q$。则泛提升环$\mathsf{R}_\rho^{\square}$ （见定义3.2.2）是一个局部完全交、平坦且纯相对维数为$\dim G'_\kappa$ 的$\mathcal{O}$-代数。

在本小节余下部分中，我们假设 $\ell > 2m$。记 $\mathcal{N}_{2m}$ （分别记 $\mathcal{U}_{2m}$）为 Mat_{2m} （分别为 GL_{2m}）中由方程 $X^{2m} = 0$ （分别由 $(A-1)^{2m} = 0$）定义的闭子概形。对于 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 的每个对象 R，都有一个截断指数映射

$$\exp : \mathcal{N}_{2m}(\mathrm{R}) \to \mathcal{U}_{2m}(\mathrm{R}) : X \mapsto 1 + X + \ldots + \frac{X^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

这是一个双射。其逆映射由截断对数映射给出

$$\log : \mathcal{U}_{2m}(\mathrm{R}) \to \mathcal{N}_{2m}(\mathrm{R}) : A \mapsto -\sum_{i=1}^{2m-1} \frac{(1-A)^i}{i}.$$

此外，对于任意 $C \in \mathsf{GL}_{2m}(\mathsf{R})$ 及任意正整数 k，我们有

$$\exp(CAC^{-1}) = C\exp(A)C^{-1}, \quad \log(CAC^{-1}) = C\log(A)C^{-1}$$

and

$$\exp(kA) = \exp(A)^k, \quad \log(B^k) = k\log(B);$$

参见 [Tay08，引理 2。4]

在本小节余下部分中，我们假设 $(\Gamma,\ \rho,\ \chi)$ 是 Setup 3.2.1 中的一个三元组，其中 $\Gamma = \mathrm{T}_q$。那么 $A := \rho(t)$ 是幺幂的，因为由 ℓ的连续性，它在 ρ 的像中具有 ρ-幂挠。令$X := \log A \in \mathcal{N}_{2m}(\kappa)$。

定义 3.4.3. 设 $\sigma \vdash 2m$ 是 $2m$ 的一个分拆 $2m = m_1 + \ldots + m_r$。若满足 $m_i \equiv N$（模 2）的那些m_i 出现偶数次，则称其为可容许。令 $\mathfrak{P}_{2m}$ 表示 $2m$ 的可容许分拆的集合。

根据 G 的幂零轨道分类，对每个 $L \in \{\kappa, \mathbb{Q}_\ell\}$，存在典范满射映射$\pi : \mathcal{N}_{2m}(L) \to \mathfrak{P}_{2m}$，使得 π 的纤维恰好是 $\mathcal{N}_{2m}(L)$ 在 $G(L)$ 的共轭作用下的轨道；参见 [Jan04，定理 1.6]。相应的轨道是 $\mathfrak{g}_L \subset \mathfrak{gl}_{2m,L}$ 与对应于 $2m$的该分拆的一般线性群$_{2m,L}$-轨道的交。

我们引入如下方便的假设。

假设 3.4.4. κ 包含一个二次子域 $\kappa^\flat$，使得标准表示$\circ\rho$ 定义在 $\kappa^\flat$ 上。

根据 [Boo19a, §3.1], 当假设 3.4.4 成立时，我们得到一个元素 $X_0 \in \mathcal{N}_{2m}(\mathcal{O})$ 使得

- $\pi(X_0) = \pi(X)$，其中我们将 X_0 视为 $\mathcal{N}_{2m}(\mathbb{Q}_\ell)$ 中的一个元素；
- 中心化子 $Z_G(X_0) \subset G$ 在 $\mathcal{O}$ 上光滑；并且
- 存在一个元素 $\Phi \in G(\mathcal{O})$，使得 $\mathsf{Ad}_G(\Phi)X_0 = qX_0$。

按照 [Boo19a, §3.2],我们得到一个函子

$$\mathcal{N}\mathrm{il}_{\overline{X}} : \mathscr{C}_{\mathcal{O}} \to \mathsf{Set} : \mathrm{R} \mapsto \{X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{R}} : \mathrm{Ad}_G(g)(X_0) = X \text{ for some } g \in G^\wedge(\mathcal{O})\},$$

这是可表的。由 [Boo19a，推论 5.2] 可知，我们得到一个指数映射

$$\exp : \mathcal{N}\mathrm{il}_{\overline{X}} \to G$$

使得 fo　　对 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 的任意对象 R 以及 $g \in G\hat{}(\mathrm{R})$ $X \in \mathfrak{Nil}x(\mathrm{R})$，且对任意正整数 k，我们有　　e

$$\exp(kX) = \exp(X)^k, \quad \mathrm{Ad}(g)\exp(X) = \exp(\mathrm{Ad}_G(g)X).$$

定义 3.4.5。假设 3.4.4成立。我们称提升 ρ ρ 到对象 R $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 是最小分歧的，若存在元素 $X \in \mathfrak{Nil}x(\mathrm{R})$ 使得 $\rho(t) = \exp(X)$。

令 $\mathscr{D}^{\min,}$ □ 为 ρ 相对于 χ 的局部提升条件（见定义 3.2.3），该条件对 ρ的最小分歧提升进行分类。

我们回顾以下 Booher 的结果 [Boo19a]，该结果涉及最小分歧变形问题 .

命题 3.4.6。假设 $\ell > 2m$ 且 假设3.4.4 成立。那么局部提升条件$\mathscr{D}^{\min,}$ □ 在 形式谱 $\mathcal{O}$ 上形式光滑，纯相对维数为 $\dim G'_{\kappa}$。特别地，由方程 (3.1) 可得

$$\dim_{\kappa} \mathrm{L}(\mathscr{D}^{\min}) = \dim_{\kappa} \mathrm{H}^0(\mathrm{T}_q, \mathrm{ad}^0(\bar{\rho})).$$

证明。这由以下结果的证明可得： [Boo19a，命题 5.6，推论 5。8]。 □

我们回顾下面关于温和群表示的提升之分解的引理，稍后将会用到。

引理 3.4.7。设 (r,M) 是温和群 T_q 上的一个非分歧表示，其中系数取自 κ。假设M具有一个分解

$$\overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{M}}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{\mathrm{M}}_s \tag{3.3}$$

在 $r(\phi_q)$ 的作用下稳定，并且 $r(\phi_q)$ 在M_i 上的特征多项式对于 $1 \le i \le s$ 两两互素。设(r,M) 是(r, M) 到 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 的一个对象 R 的提升。

(1) 存在唯一的分解

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_s$$

由自由 R-模构成的提升 (3.3)，使得每个 M_i 都在 $r(\phi_q)$的作用下稳定 .

(2) 假设对于所有 $i \neq j$， q 都不是 ϕ_q 在 $\mathrm{Hom}_{\kappa}(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_j)$ 上的典范作用的特征值，那么 *(1)* 中的分解在整个群 T_q 的作用下保持稳定。

证明。对于 (1)：令 $f(T)$ 为 $\rho(\phi_q)$ 在 M 上的特征多项式。其约化分解为$f(T) = \prod_{i=1}^{r} g_i(T)$，其中 $g_i(T)$ 对每个 $1 \le i \le r$ 都是 $\rho(\phi_q)$ 在 M_i 上的特征多项式。根据假设，这些特征多项式 $g_i(T)$ 两两互素。因此，由亨泽尔引理可知，存在分解 $f(T) = \prod_{i=1}^{r} \tilde{g}_i(T)$，其中 $\tilde{g}_i(T) \in \mathrm{R}[T]$ 是提升 $g_i(T)$ 的多项式，对每个 $1 \le i \le r$ 都成立。对于每个 $1 \le i \le r$，我们定义 $Q_i = \prod_{i \neq j} P_i$，并选取 $A_i, B_i \in \mathrm{R}[T]$ 使得 $A_i P_i + B_i Q_i = 1$。于是， $e_i := B(\rho(\phi_q))Q_i(\rho(\phi_q))$ 是 M 上满足 $\sum_i e_i = 1$ 的投影算子。最后令 $\mathrm{M}_i := e_i\mathrm{M}$ 即可。第 (2) 部分的证明见 [LTX+24，引理 3.21]。 □

3.5. **最小分歧表示**。在本小节中，我们回顾最小分歧变形的概念。

设 v 是 F 的一个不属于 $\Sigma(\ell)$ 的有限处。设 P_v 为 I_{F_v} 中 pro-order 与 ℓ 互素的极大子群，并令 $\mathrm{T}_v := \mathrm{Gal}_{F_v}/P_v$，它同构于 $\|v\|$-温和群 $\mathrm{T}_{\|v\|}$ （见定义 3.4.1）。假设 (Γ, ρ, χ) 是设置 3.2.1 中的一个三元组，其中 $\Gamma = \mathrm{Gal}_{F_v}$。

对于任意系数取自 κ 的 P_v 的不可约表示 τ，我们定义

$$\Gamma_\tau := \{\sigma \in \mathrm{Gal}_{F_v} \mid \tau^\sigma \cong \tau\},$$

它是 Gal_{F_v} 的一个包含 P_v 的子群。令 T_τ 为 Γ_τ 在 T_v 中的像。

引理 3.5.1。假设 τ 是一个系数取自 κ 的 P_v 的不可约表示。

(1) τ 的维数与 ℓ互素；且 τ 有唯一的变形，成为一个在 $\mathcal{O}$ 上的 P_v的表示 $\tilde{\tau}$；*(2) (1)* 中的变形 $\tilde{\tau}$ 可唯一扩张为在 $\mathcal{O}$ 上具有温和行列式的 $\Gamma_\tau \cap I_{F_v}$ （也就是说，行列式映射将温和生成元映射到一个阶有限且与 ℓ互素的单位根）；*(3)* 存在将 *(2)* 中的变形 $\tilde{\tau}$ 扩张为在 $\mathcal{O}$ 上的 Γ_τ 的表示的方式。

证明。 这是 [CHT08，引理 2.4。11]。 □

对于每个系数取自 κ的 P_v 的不可约表示 τ，以及每个将 ρ 提升为$\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$的对象 R 的提升 ρ，我们定义

$$\mathrm{W}_\tau(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}[P_v]}(\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{R}, \mathrm{Std} \circ \rho),$$

其中 $\widetilde{\tau}$是一个表示，取值于 Γ_τ，其系数属于 $\mathcal{O}$，由引理 3.5.1(3) 得到（稍后我们将在命题 3.5.4 中固定此类选择）。注意，$\mathrm{W}_\tau(\rho)$ 是一个有限自由 R-模，带有 T_τ 的诱导连续作用，并且 $\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_\tau(\rho)$ 带有 Γ_τ 的自然作用。

假设 3.5.2。 κ 含有一个二次子域 $\kappa^\flat$，使得 $(\mathrm{Std} \circ \rho)|_{P_v} \otimes_\kappa \kappa$ 的每个不可约直和项都定义在 $\kappa^\flat$上。

定义 3.5.3。 假设假设 3.5.2 成立。我们将 $\mathfrak{T}$ 记为 τ 的不可约表示 P_v 满足 $W_\tau(\rho) \neq 0$ 的同构类集合。于是 Gal_{F_v} 通过共轭作用于 $\mathfrak{T}$，其轨道记为 $\mathfrak{T}/\mathrm{Gal}_{F_v}$。对每个 $\tau \in \mathfrak{T}$，我们将 $[\tau]$ 在 $\mathfrak{T}/\mathrm{Gal}_{F_v}$中的轨道记为。

我们将标准表示 $\circ\rho$的底层空间记为 V，并定义 $V^* := V^\vee \otimes \chi$。于是，$\rho$定义了一个 $\kappa[\mathrm{Gal}_{F_v}]$-模的同构 $\psi\colon V \cong V^*$。通过比较 P_v-等型分量，我们得到一个 $\kappa[\mathrm{Gal}_{F_v}]$-模的自然同构

$$\psi_\tau : \mathrm{W}_\tau(\overline{\rho})^* \cong W_{\tau^\star}(\overline{\rho})$$

其中 $\tau^\star \in \mathfrak{T}$。

接下来，我们构造如下的 Gal_{F_v}-稳定划分 $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \coprod \mathfrak{T}_2 \coprod \mathfrak{T}_3$。

(1) 我们将 $\mathfrak{T}_1$ 定义为 $\mathfrak{T}$ 的子集，它由满足 $[\tau] \neq [\tau^\star]$ 的那些 τ 组成。我们还固定一个子集$\mathfrak{T}_1^\heartsuit \subset \mathfrak{T}_1$，使得 $\{\tau, \tau^\star | \tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit\}$ 是 Gal_{F_v} 在 $\mathfrak{T}_1$ 上作用的代表元集合。(2) 我们将 $\mathfrak{T}_2$ 定义为 $\mathfrak{T}$ 的子集，它由满足 $\tau \cong \tau^\star$（作为 P_v-表示）的那些 τ 组成。我们还固定一个子集 $\mathfrak{T}_2^\heartsuit \subset \mathfrak{T}_2$，作为 Gal_{F_v} 在 $\mathfrak{T}_2$ 上作用的代表元集合。(3) 我们将 $\mathfrak{T}_3$ 定义为 $\mathfrak{T}$ 的子集，它由满足 $[\tau] = [\tau^\star]$ 但不满足 $\tau \ncong \tau^\star$（作为 P_v-表示）的那些 τ 组成。我们还固定一个子集 $\mathfrak{T}_3^\heartsuit \subset \mathfrak{T}_3$，作为 Gal_{F_v} 在 $\mathfrak{T}_3$ 上作用的代表元集合。

命题 3.5.4. 假设 假设3.5.2 成立。

(1) 对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit$，我们固定一个表示 $\widetilde{\tau}$，它是 Γ_τ 的一个以 $\mathcal{O}$ 为系数的表示，见引理 3.5.1(3)。令

$$\overline{G}_\tau := \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{W}_\tau(\overline{\rho})).$$

(2) 对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_2^\heartsuit$，任意同构 $\iota_\tau\colon \tau \xrightarrow{\sim} \tau^\star$ 都会在 τ上诱导出一个符号对称配对（对于某个固定的符号ϵ_τ），参见 [Boo19a，引理 6.5]。此外，存在 $\langle -, - \rangle^{\mathrm{W}(\rho)}$，它是 $\mathrm{W}(\rho)$上的符号对称完美配对，并令

$$\overline{G}_\tau := \underline{\mathrm{GAut}}(\mathrm{W}_\tau(\overline{\rho}), \langle -, - \rangle_{\mathrm{W}_\tau(\overline{\rho})}),$$

它是 κ上的分裂一般辛群或分裂一般正交群。由[Boo19a，引理 6.10、引理 6.11] 可知，我们可以固定一个 $\widetilde{\tau}$ 的提升 τ，如引理3.5.1(3) 所述，并取一个同构 $\widetilde{\tau} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\tau}^* r$，使其提升 ι_τ上的同构。

(3) 对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_3^\heartsuit$，我们定义

$$\Gamma_{\tau \oplus \tau^\star} := \{g \in \mathrm{Gal}_{F_v} : (\tau \oplus \tau^\star)^g \cong \tau \oplus \tau^\star\},$$

其包含 Γ_τ 作为指数为 *2* 的子群，因为共轭要么保持 τ 和 τ^* 不变，要么交换它们。任意 $\iota_\tau\colon (\tau \oplus \tau^\star) \xrightarrow{\sim} (\tau \oplus \tau^\star)^*$ 的 $\kappa[\Gamma_{\tau \oplus \tau^\star}]$-模同构都会在 $\mathrm{W}_\tau(\rho)$ 上诱导出一个符号对称配对，并令

$$\overline{G}_\tau := \underline{\mathrm{GAut}}(\mathrm{W}_\tau(\overline{\rho}), \langle -, - \rangle_{\mathrm{W}_\tau(\overline{\rho})}),$$

它是定义在 κ上的分裂一般辛群或分裂一般正交群。于是我们在 $\tau \oplus \tau^\star$上得到一个完美配对，参见 [Boo19a，第 30]页。由 [Boo19a，引理 612] 可知，我们可以固定
一个将 $\tau \oplus \tau^\star$ 提升为 $\widetilde{\tau \oplus \tau^\star}$ 的提升，并附有一个同构 $\widetilde{\tau \oplus \tau^\star} \xrightarrow{\sim} \left(\widetilde{\tau \oplus \tau^\star}\right)^*$，其将 ι_τ 上的同构提升。

在每种情 因此，我们可以通过提升线性代数数据，将 G_τ 提升为 O 上的分裂约化群 G_τ .

证明。 这些结论由 [Boo19a，§6。3]。 □

命题 3.5.5。 假设 假设3.5.2 成立。设 R 是 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 的一个对象，且 ρ 是 ρ到 R的一个提升。

(1) 回顾一下，我们已经定义了

$$\mathrm{W}_{\tau}(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}[P_v]}(\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{R}, \mathrm{Std} \circ \rho)$$

对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}$，它都是一个秩为 $m_{\tau} \geq 1$ 的有限自由R-模，带有由T_{τ} 诱导的连续作用。

(2) 回顾一下，我们已经定义了

$$\mathrm{W}_{\tau}(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}[P_v]}(\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{R}, \mathrm{Std} \circ \rho)$$

对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}$，它都是一个秩为 $m_{\tau} \geq 1$ 的有限自由R-模，带有由T_{τ} 诱导的连续作用。

(3) 我们定义

$$\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}}(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}[P_v]}(\widetilde{\tau \oplus \tau^{\star}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{R}, \mathrm{Std} \circ \rho),$$

它是一个秩为 $m_{\tau} \geq 1$ 的有限自由R-模，带有由$\mathrm{T}_{\tau\oplus\tau^{\star}}$ 诱导的连续作用。

那么我们有一个$\mathrm{R}[\mathrm{Gal}_{F_v}]$-模的分解

$$\begin{aligned}\mathrm{Std} \circ \rho = &\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}} \left(\mathrm{Ind}_{\Gamma_{\tau}}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_{\tau}(\rho)) \oplus \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\tau^{\star}}}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau}^{*} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_{\tau^{\star}}(\rho)) \right) \\ &\oplus \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\tau}}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_{\tau}(\rho)) \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\tau\oplus\tau^{*}}}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau \oplus \tau^{*}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{*}}(\rho)).\end{aligned}$$

此外，对于 $\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}$ （分别地，$\mathfrak{T}_3^{\heartsuit}$），我们在$\mathrm{W}_{\tau}(\rho)$ （分别地，$\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}}(\rho)$）上有自然的符号对称配对。

证明。 这些结论由 [Boo19a，§6。3]。 □

命题 3.5.6。 假设 假设3.5.2 成立。我们还保留定义 *3.5.3* 中的选择以及 ι_{τ}： $\tau \xrightarrow{\sim} \tau^{\star}$ 中的同构，与命题 3.5.4(2)中相同。则对于R 中的每个 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$对象，映射

$$\rho \mapsto \left((\mathrm{W}_{\tau}(\rho))_{\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}}, (\mathrm{W}_{\tau}(\rho))_{\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}}, (\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}}(\rho))_{\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}} \right)$$

诱导出 ρ 到R 的变形（相对于 χ）与元组$\left((\mathrm{W}_{\tau})^{\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}}、(\mathrm{W}_{\tau})^{\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}}、(\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}})_{\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}} \right)$的等价类之间的双射，其中

(1) 对于 $\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}$，$\mathrm{W}_{\tau} \colon \mathrm{T}_{\tau} \to$一般线性群$_{m_{\tau}}(\mathrm{R})$ 是一个连续同态，其约化为 $\mathrm{W}_{\tau}(\rho)$；*(2)* 对于 $\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}$，$\mathrm{W}_{\tau} \colon \mathrm{T}_{\tau} \to G_{\tau}(\mathrm{R})$ 是一个连续同态，其约化为 $\mathrm{W}_{\tau}(\rho)$，且具有平凡相似特征；*(3)* 对于 $\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}$，$\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}} : \mathrm{T}_{\tau\oplus\tau^{\star}} \to G_{\tau}(\mathrm{R})$ 是一个连续同态，其约化为 $\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}}(\rho)$，且具有平凡相似特征。

两个元组

$$\left((\mathrm{W}_{\tau})_{\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}}, (\mathrm{W}_{\tau})_{\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}}, (\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}})_{\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}} \right), \left((\mathrm{W}'_{\tau})_{\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}}, (\mathrm{W}'_{\tau})_{\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}}, (\mathrm{W}'_{\tau\oplus\tau^{\star}})_{\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}} \right)$$

称为等价，当且仅当

(1) 对于 $\tau \in \mathfrak{T}_1^{\heartsuit}$，$\mathrm{W}_{\tau}$ 与 W'_{τ} 在 一般线性群$^{\wedge}_{m_{\tau}}(\mathrm{R})$ 中共轭；*(2)* 对于 $\tau \in \mathfrak{T}_2^{\heartsuit}$，$\mathrm{W}_{\tau}$ 与 W'_{τ} 在 $(G'_{\tau})^{\wedge}(\mathrm{R})$ 中共轭，其中 G'_{τ} 是 G_{τ} 的导出子群；*(3)* 对于 $\tau \in \mathfrak{T}_3^{\heartsuit}$，$\mathrm{W}_{\tau\oplus\tau^{\star}}$ 与 $\mathrm{W}'_{\tau\oplus\tau^{\star}}$ 在 $(G'_{\tau})^{\wedge}(\mathrm{R})$ 中共轭，其中 G'_{τ} 是 G_{τ} 的导出子群。

证明。Boo19a [Boo19a，命题 6。15] 可直接沿用，参见 [LTX+24，命题 3。28] . □

我们记录下面这个之后会用到的推论。

推论 3.5.7. 假设 $\ell \nmid \prod_{i=1}^{2m}(\|v\|^i - 1)$。设 $\iota_\ell : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是一个同构，且 R 是包含于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$中的一个 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 对象。设 ρ_1, ρ_2 是 ρ 到 R的两个提升，并设 Π_1, Π_2 是 $\mathrm{GL}_{2m}(F_v)$ 的两个不可约容许表示，使得对每个 $i \in \{1, 2\}$，都有 $\mathrm{WD}(\mathrm{Std} \circ \rho_i \otimes_{\mathrm{R}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{F\text{-ss}} = \mathrm{rec}_{2m}(\iota_\ell \Pi_i)$。那么 Π_1和 Π_2 属于同一个伯恩斯坦分支。

证明。 根据命题 3.5.5， [LTX+24，推论 3 的证明31] 同样成立。 □

现在我们可以去掉假设 3.5.2 ，并为一般的系数域 ρ 定义 E的最小分歧提升。

定义 3.5.8。 设 $\ell > 2m$。选取一个有限非分歧扩张 $E_\dagger$ ，它是 E 的子域，且包含于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 之中，并且 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 满足假设 3.4.4 ，其整数环为 $\mathcal{O}_\dagger$ ，剩余域为 $\kappa_\dagger$。我们还沿用定义 3.5.3 中的选择以及同构 $\iota_\tau : \tau \xrightarrow{\sim} \tau^\star$ ，如命题 3.5.4(2) 所述。设 ρ 是 ρ 到 R 中的一个提升，其中 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$是一个对象，则我们得到 $\mathrm{R}[\mathrm{Gal}_F]$-模的分解

$$\begin{aligned}\mathrm{Std} \circ \rho = &\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit} \left(\mathrm{Ind}_{\Gamma_\tau}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_\tau(\rho)) \oplus \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\tau^\star}}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_{\tau^\star}(\rho)) \right) \\ &\oplus \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_2^\heartsuit} \mathrm{Ind}_{\Gamma_\tau}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_\tau(\rho)) \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_3^\heartsuit} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\tau \oplus \tau^*}}^{\mathrm{Gal}_{F_v}} (\widetilde{\tau \oplus \tau^*} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{W}_{\tau \oplus \tau^*}(\rho)).\end{aligned}$$

我们称 ρ 具有相似因子 χ的最小分歧，如果满足以下条件：

(1) 对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit$， $\mathrm{W}_\tau(\rho)$ 都是 $\mathrm{W}_\tau(\rho)$ 的一个最小分歧扩张，意义同 [CHT08，定义 2.4。14]。(2) 对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_2^\heartsuit$ （分别对于 $\tau \in \mathfrak{T}_3^\heartsuit$ ），W_τ （分别为 $\mathrm{W}_{\tau \oplus \tau^*}$）作为取值于群 3.4.5 的表示，是最小分歧的，意义同定义 T_τ （分别为 $\mathrm{T}_{\tau \oplus \tau^*}$），且具有 G_τ 平凡相似特征。

注 3.5.9。 容易验证，定义3.5.8 不依赖于 $E_\dagger$ 的选择以及定义 3.5.3 和命题 3.5.4.

定义 3.5.10。 当 $\ell > 2m$时，令 $\mathscr{D}^{\min, \square}$ 表示 ρ （相对于 χ）的局部提升条件，该条件刻画 ρ 的最小分歧提升（见定义 3.5.8）。

命题 3.5.11. 以下陈述成立：

(1) 泛提升环 $\mathrm{R}_\rho^\square \in \mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 是一个既约局部完全交，平坦，且纯相对维数为 $\dim G'_\kappa$ 的$\mathcal{O}$-代数。*(2)* $\mathrm{Spf}\mathrm{R}_\rho^\square$的每个不可约分支都是一个局部提升条件（见 定义 3.2.2）。*(3)* 当 $\ell > 2m$时，局部提升条件 $\mathscr{D}^{\min, \square}$ 是 $\mathrm{R}_\rho^\square$的一个不可约分支，它在 形式谱 $\mathcal{O}$ 上形式光滑，纯相对维数为 $\dim G'_\kappa$。特别地，由等式 (3.1)可得

$$\dim_\kappa \mathrm{L}(\mathscr{D}^{\min}) = \dim_\kappa \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F_v}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})).$$

证明。对于此命题，我们可以假设 E 满足假设 3.5.2。

对于 (1)，我们对每个 $\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit \coprod \mathfrak{T}_2^\heartsuit \coprod \mathfrak{T}_3^\heartsuit$ 定义泛提升环 $\mathrm{R}_\tau^\square$，它表示 $\mathrm{W}_\tau(\rho)$ 或 $\mathrm{W}_{\tau \oplus \tau^\star}(\rho)$ 取值于 G_τ 的提升条件（当 $\tau \in \mathfrak{T}_2^\heartsuit \coprod \mathfrak{T}_3^\heartsuit$时，相似特征平凡），见定义3.2.2。由命题3.5.6 可知$\mathrm{R}_\rho^\square$是一个上的幂级数环

$$\widehat{\bigotimes}_{\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit \coprod \mathfrak{T}_2 \coprod \mathfrak{T}_3^\heartsuit} \mathrm{R}_\tau^\square.$$

对于每个 $\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit \coprod \mathfrak{T}_2 \coprod \mathfrak{T}_3^\heartsuit$，由 [Sho18, Theorem 2.5] 可知，当 $\tau \in \mathfrak{T}_1^\heartsuit$ 时，$\mathrm{R}_\tau^\square$ 是局部完全交、平坦的，且其相对于 Spf O 的纯相对维数为 dim G'_κ；对于 $\tau \in \mathfrak{T}_2^\heartsuit \coprod \mathfrak{T}_3^\heartsuit$，则由命题 3.4.2 得出这一结论。另一方面，由 [BG19, Theorem 3.3.2] 或 [BP19, Theorem 1] 可知，$\mathrm{R}_\rho^\square[\frac{1}{\ell}]$ 是局部完全交、一般正则的，且维数为 dim G'_κ。因此，$\mathrm{R}_\rho^\square$ 也是局部完全交、平坦且等维的，其相对于 O 的维数为 dimG'_κ 。由于 $\mathrm{R}_\rho^\square$ 一般既约且为 Cohen–Macaulay 环，因此它是既约的。(1) 得证。

对于 (2)：取 $\mathrm{Spf}\,\mathrm{R}^{\square}_{\rho}$ 的一个不可约分支 $\mathscr{D}^{\square}$，则共轭作用诱导出同态 $f:(G')^{\wedge}\times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}}\mathscr{D}^{\square}\to\mathrm{Spf}\,\mathrm{R}^{\square}_{\rho}$，其像包含 $\mathscr{D}^{\square}$。由于 f 的源是不可约的，且 $\mathrm{Spf}\,\mathrm{R}^{\square}_{\rho}$ 是既约的，因此 f 的像必为 $\mathscr{D}^{\square}$。换言之，$\mathscr{D}^{\square}$ 是一个局部提升条件。

（3）：由于 $\mathscr{D}^{\min,\square}$ 在形式谱$\mathsf{R}^{\square}_{\rho}$中是扎里斯基闭的，因此只需证明 $\mathscr{D}^{\min,\square}$ 在形式谱 $\mathcal{O}$ 上是纯相对维数为 $\dim G'_{\kappa}$的形式光滑。该断言由 [Boo19a，推论 616]得出。□

3.6. **升层变形**。在本小节中，我们研究升层变形。假设$N=2m+1$ 是奇的，并且 $\ell>2m$。我们在以下设定下工作。

设定 3.6.1。

- 令 v 为 F的一个有限处，使得 $\ell\nmid(\|v\|^2-1)\|v\|$。
- 令 P_v 为 I_{F_v} 中质数与 ℓ互素的极大子群，并令 $\mathrm{T}_v:=$ 伽罗瓦群$_{F_v}/P_v$，其同构于 $\|v\|$-温和群$\mathrm{T}_{\|v\|}$（见定义 3.4.1）。
- 设 $(\Gamma,\ \rho,\ \chi)$ 是 Setup 3.2.1 中的一个三元组，且满足 $\Gamma=\mathrm{Gal}_{F_v}$，$\chi=\varepsilon_{\ell}^{1-2m}$，$\rho$是非分歧的，并且

$$\dim_{\kappa}\ker\left(\mathrm{Std}\circ\overline{\rho}_v(\phi_v)-\|v\|^{-m}\right)^{2m}=1.$$

由引理3.5.1(1)，每个 ρ 从 ρ 到对象 R 的 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ (相对于 χ)的提升都经由 $\mathrm{T}_{\|v\|}$分解。此外，由引理 3.4.7 可知，对于这样的提升 ρ，若固定 标准表示$\circ\rho$ 的底层空间与 R^{2m}之间的一个同构，则可得到一个典范分解

$$\mathrm{R}^{\oplus(2m)}=\mathrm{M}_0\oplus\mathrm{M}_1 \tag{3.4}$$

在 $\rho(\phi_v)$的作用下稳定的自由 R-模的

$$\det(T-\mathrm{Std}\circ\rho(\phi_v)|\mathrm{M}_0\otimes_{\mathrm{R}}\kappa)=(T-\|v\|^{1-m})(T-\|v\|^{-m})$$

在 $\kappa[T]$ 中成立。

定义 3.6.2. 我们定义 $\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}$ 为 ρ (见定义 3.2.3)的局部提升条件，用以刻画从 ρ 到 R 中对象 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 的提升，且在分解 (3.4) 中，$\rho(I_{F_v})$ 保持 M_0，并在 M_1上作用平凡。我们定义

(1) $\mathscr{D}^{\mathrm{unr},\square}$ 为包含在 $\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}$ 中的局部提升条件，使得 $\rho(I_{F_v})$ 在 M_0 上的作用也是平凡的。(2) $\mathscr{D}^{\mathrm{ram},\square}$ 为包含在 $\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}$ 中的局部提升条件，使得

$$\det(T-\mathrm{Std}\circ\rho(\phi_v)|\mathrm{M}_0)=(T-\|v\|^{1-m})(T-\|v\|^{-m})$$

在 $\mathrm{R}[T]$ 中。

命题 3.6.3. 形式概形 $\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}$ 在 形式谱 $\mathcal{O}[[x_0,x_1]]/(x_0x_1)$ 上形式光滑，纯相对维数为 $2m^2+m-1$，由 $x_0=0$ 和 $x_1=0$ 定义的不可约分支分别为 $\mathscr{D}^{\mathrm{unr},\square}$和 $\mathscr{D}^{\mathrm{ram},\square}$。特别地，$\mathscr{D}^{\mathrm{ram},\square}$ 在 形式谱$\mathcal{O}$ 上形式光滑，纯相对维数为$2m^2+m$，由 方程 3.1 可得

$$\dim_{\kappa}\mathrm{L}(\mathscr{D}^{\mathrm{ram}}_{\overline{\rho}})=\dim_{\kappa}\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F_v},\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})).$$

证明。 我们修改 [LTX+24命题 3.35]的证明。将 标准表示$\circ\rho$ 的底层空间$\kappa^{\oplus(2m)}$识别为 $\kappa^{\oplus(2m)}$，存在一个分解

$$\kappa^{\oplus(2m)}=\overline{\mathrm{M}}_0\oplus\overline{\mathrm{M}}_1$$

使得

$$\det(T-\mathrm{Std}\circ\overline{\rho}(\phi_v)|\overline{\mathrm{M}}_0)=(T-\|v\|^{1-m})(T-\|v\|^{-m})$$

在 $\kappa[T]$ 中。经过基变换后，我们可以假设 M_0 由前两个因子张成，而 M_1 由最后 $2m-2$ 个因子张成。于是得到两个非分歧表示 $\rho_0:\mathrm{T}_{\|v\|}\to$ 辛相似群$_2(\kappa)$ 和$\rho_1:\mathrm{T}_{\|v\|}\to$ 辛相似群$_{2m-2}(\kappa)$。令 $\mathscr{D}_0^{\square}$为相对于 $\chi=\varepsilon_{\ell}^{1-2m}$ 的 ρ_0 的无约束提升条件，并令 $\mathscr{D}_1^{\square}$为相对于 $\chi=\varepsilon_{\ell}^{1-2m}$ 的 ρ_1 的局部提升条件，用以分类非分歧提升。

如果将 ρ 提升到 $\mathscr{C}_{\mathcal{O}}$ 的一个对象 R 上的提升 ρ 满足以下条件，则称其为标准

$$\rho(t)=\begin{bmatrix}A_0 & 0\\ 0 & I_{2m-2}\end{bmatrix},\quad \rho(\phi_v)=\begin{bmatrix}B_0 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix},$$

其中 A_0, $B_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathrm{R})$ 和 $B_1 \in \mathrm{GSp}_{2m-2}(\mathrm{R})$。令 $\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}_{0,1} \subset \mathscr{D}^{\mathrm{mix}}$, $\square$ 为用于分类标准提升的子函子。于是存在一个自然同构

$$\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}_{0,1} \cong \mathscr{D}^{\square}_0 \times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}} \mathscr{D}^{\square}_1.$$

此外，存在一个同构

$$\mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}_{0,1} \times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}} \left(\mathrm{Sp}^{\wedge}_2 \times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}} \mathrm{Sp}^{\wedge}_{2m-2} \setminus \mathrm{Sp}^{\wedge}_{2m} \right) \cong \mathscr{D}^{\mathrm{mix},\square}.$$

根据命题 3.4.6（这里我们使用 $\ell > 2m$），$\mathscr{D}^{\square}_1$在 Spf O 上是相对维数为 $(2m-1)(m-1)$ 的形式光滑空间。由 [Sho16, Proposition 5.5](2) 可知，$\mathscr{D}^{\square}_0$同构于 $\mathrm{Spf}\,\mathrm{O}[[x_0,\dots,x_3]]/(x_0x_1)$，其中由 $x_0 = 0$ 定义的不可约分支分类非分歧提升，而由 $x_1 = 0$ 定义的不可约分支分类满足 $\|v\|^{-m}$ 是 Std $\circ\, \rho(\phi_v)$ 的特征值的提升 ρ。断言得证。□

4. An almost minimal R=T theorem

本节证明一个针对系数取自有限域且满足一种称为刚性性质的自对偶伽罗瓦表示的几乎最小 $\mathrm{R} = \mathbb{T}$ 定理。

4.1. **刚性伽罗瓦表示。** 取一个有限集 $\Sigma^{\min}$，由 F 的有限处组成，且包含 Σ^{bad}。取一个大于 ℓ 的奇有理素数 $2(b_\xi - a_\xi) + 2$，它在 F中非分歧，并且 $\Sigma^{\min}$ 不包含任何ℓ-进位置。然后我们在设置3.0.1中进行讨论。

我们固定一个同构 $\iota_\ell : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$，并假设具有最高权 ξ 的 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}$一般线性群$_{2m}$ 的复代数表示可在 $\iota_\ell^{-1}E$ 上定义。

我们取 F 的一个有限集 Σ^{lr}，其中元素为有限处，并满足

- $\Sigma_{\mathrm{lr}} = \varnothing$ 当 N 为偶数时；
- Σ_{lr} 与 $\Sigma_{\text{最小}} \cup \Sigma(\ell)$ 不相交；并且
- $\|v\|^2 - 1$ 可被 ℓ 每个位置 $v \in \Sigma_{\mathrm{lr}}$ 整除

我们固定一个元素 $\xi = (\xi_\tau)_\tau \in (\mathbb{Z}^{2m}_{\leq})^{\Sigma^\infty}$，使其满足 $\xi_{\tau,\,i} = -\xi_{\tau,\,2m+1-i}$ 对每个 $\tau \in \Sigma^\infty$ 以及 $1 \le i \le 2m$。我们考虑来自设置 $(\Gamma,\ \rho,\ \chi)$ 3.2.1 中的一个三元组，其中 $\Gamma =$ 伽罗瓦群$_F$ 且 $\chi = \varepsilon_\ell^{2-N}$。

定义 4.1.1. 我们称 ρ 相对于 $(\Sigma^{\min}, \Sigma^{\mathrm{lr}})$ 是刚性的，如果满足以下条件：

(1) 对于 $v \in \Sigma^{\min}$，ρ_v 的每个提升都是最小分歧的（见定义 3.5.8）。(2) 对于 $v \in \Sigma^{\mathrm{lr}}$，$\dim_\kappa \ker \left(\rho_v(\phi_v) - \|v\|^{-m}\right)^{2m} = 1$。(3) 对于 $v \in \Sigma(\ell)$，ρ_v 是 Fontaine–Laffaille 晶体，在 $[a_\xi, b_\xi]$ 中具有正则权（见定义 3.3.7），且满足 $\ell > 2(b_\xi - a_\xi) + 2$。(4) 对于 F 中不属于 $\Sigma^{\min} \cup \Sigma^{\mathrm{lr}} \cup \Sigma(\ell)$的每个有限处 v，同态 ρ_v 是非分歧的。

现在假设 $\mathrm{t}\ \overline{\rho}$ 相对于 $(\Sigma^{\min}, \Sigma^{\mathrm{lr}})$是刚性的。考虑一个全局变形问题（见定义 3.2.5）

$$\mathscr{S} := \left(\overline{\rho}, \varepsilon_\ell^{2-N}, \Sigma^{\min} \cup \Sigma^{\mathrm{lr}} \cup \Sigma(\ell), \{\mathscr{D}^{\square}_v\}_{v \in \Sigma^{\min} \cup \Sigma^{\mathrm{lr}}, \Sigma(\ell)}\right)$$

其中

- 对于 $v \in \Sigma_{\min}$，$\mathscr{D}^{\square}_v$是 ρ_v 的无限制局部提升条件；
- 对于 $v \in \Sigma_{\mathrm{lr}}$，$\mathscr{D}^{\square}_v$是局部提升条件 $\mathscr{D}_{\mathrm{ram}v}$，其来自定义 3.6.2；并且
- 对于 $v \in \Sigma(\ell)$，$\mathscr{D}^{\square}_v$是局部提升条件 $\mathscr{D}_{\mathrm{FL}\,\square}$，其来自 $\overline{\rho_v}$ 定义 3.3.8。

那么我们得到命题 $\mathrm{R}_{\mathscr{S}}$ 中的全局变形环3.2.8。

4.2. **充分子群。** 本小节中，我们回顾 G°-充分子群[Whi23]所采用的概念。我们考虑来自设置 3.2.1 的三元组 $(\Gamma,\ \rho,\ \chi)$，其中 $\Gamma = \mathrm{Gal}_F$ 且 $\overline{\chi} = \varepsilon_\ell^{2-N}$。

定义4.2.1. 我们称子群 $H \le G^\circ(\kappa)$ 是 G°-充分的，若

(1) 上同调群

$$\mathrm{H}^0(H, (\mathfrak{g}'_\kappa)^\vee), \quad \mathrm{H}^1(H, \kappa), \quad \mathrm{H}^1(H, (\mathfrak{g}'_\kappa)^\vee)$$

消失；并且

(2) 对于每个不可约的 $\kappa[H]$-子模 W of $(\mathfrak{g}'_\kappa)^\vee$，都存在一个元素 $h \in H$，使得 $w(z) \neq 0$，其中某个 $w \in W$ 和某个 $z \in \mathrm{Lie}\, Z(Z_{G^\circ}(h)) \cap \mathfrak{g}'_\kappa$。

这里，$Z_{G^\circ}(h)$ 表示 G°中 h 的中心化子子群。

命题 4.2.2。若 $\ell > 2m+4$ 和 $|\ell - 4m| \neq 1$，且 Γ' 是 Γ 的一个子群，满足 $\rho(\Gamma') \subset G^\circ(\kappa)^-$，并且$\rho|_{\Gamma'}$ 绝对不可约，则 $\rho(\Gamma')$ 是 $G^\circ(\kappa)$的一个 G°-充分子群。

证明。这由 [Whi23，定理 2.3 得出。4]。 □

4.3. 变形环的有限性。本小节中，我们证明一个自对偶伽罗瓦表示的变形环的有限性定理，该定理将在 §5.2 中使用。设 Π 是 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_F)$ 的一个 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示（见定义 2.2.2）。设 $\Sigma^{\min}$ 是 F 的一个有限处有限集，包含 Σ^{bad}，使得对于 F 中不属于 $\Sigma^{\min}$的每个有限处 v，Π_v 均非分歧。设 $E \subset \mathbb{C}$ 是 Π 的一个强系数字段（见定义 2.2.5）。设 λ 是 E 的一个有限处，其底层有理素数 ℓ满足

$$\Sigma(\ell) \cap \Sigma^{\min} = \varnothing, \quad \ell > 2(2m+1), \quad \ell > 2(b_\xi - a_\xi) + 2,$$

并且对于 $\Sigma^{\min}$ 中的每个 v，$\ell > \|v\|^{2m}$。我们设 $\Sigma := \Sigma^{\min} \cup \Sigma(\ell)$。

随后，我们采用设置 3.0.1 的记号以及设置 3.2.1 的记号，其中有 $E = E_\lambda$，并且采用 $(\Gamma, \rho, \chi) = (\mathrm{Gal}_F, \rho_{\Pi,\lambda}, \varepsilon_\ell^{\Gamma - 2m})$，并固定一个同构 $\iota_\ell \colon \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell$。令

$$\mathscr{S} := \left(\overline{\rho}_{\Pi,\lambda}, \varepsilon_\ell^{2-N}, \Sigma^0, \{\mathscr{D}_v^\square\}_{v \in \Sigma}\right)$$

为一个全局变形问题（见定义 3.2.5），其中对于每个 $v \in \Sigma^{\min}$，$\mathscr{D}_v^\square$是一个不可约分支（根据命题 3.5.11(2)，它是一个局部变形问题）；并且对于每个 $v \in \Sigma(\ell)$，$\mathscr{D}_v^\square$是局部变形 $\mathscr{D}^{\mathrm{FL},\square}$，其$\rho_{\Pi,\lambda}$ 见定义3.3.8。

定义 4.3.1。令 $\mathscr{G}_{2m}$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的群概形，它是群 $\mathrm{GL}_{2m} \times \mathrm{GL}_1$ 与群 $\{1, \jmath\}$ 的半直积；后者在 $\mathrm{GL}_{2m} \times \mathrm{GL}_1$ 上的作用为

$$\jmath(g, \mu)\jmath^{-1} = (\mu g^{-\top}, \mu).$$

存在一个同态 $\nu_{\mathscr{G}} \colon \mathscr{G}_{2m} \to \mathrm{GL}_1$，将 (g, μ) 映至 μ，并将 $\jmath$ 映至 -1。

设 $\widetilde{F}$ 是 F 的一个全虚二次扩张，且与 $(F)^{\ker \rho}(\mu_\ell)$ 线性不相交。我们固定 F 的一个实位，它诱导出 Gal_F 的复共轭 $\mathsf{c} \in$。我们还选择一个代数特征

$$\psi : \mathrm{Gal}(\overline{F}/\widetilde{F}) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$$

在 F 上方的位置处为晶体的 ℓ，满足 $\psi\psi^{\mathsf{c}} = \varepsilon_\ell$ (分别地，ψ 为平凡特征)，当 N 为偶数时（分别地，N 为奇数时）。根据 [CHT08，引理 4.1，这总是可行的。5]。为了证明变形环 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$的有限性，我们可以扩张 L，使得 ψ取值于 $\mathcal{O}_L^\times$。

回忆一下，对于 $\mathscr{C}$ 的任意对象 R，以及任意连续同态 $\rho' : \mathrm{Gal}_F \to G(\mathsf{R})$，若 $\nu \circ \rho' = \varepsilon_\ell^{2-N}$，则存在一个连续同态 $r' : \mathrm{Gal}_F \to \mathscr{G}_{2m}(\mathsf{R})$，其由下式确定：

$$r'(g) = \begin{cases} (\psi^{-1}(g)\rho'(g), \varepsilon_\ell^{1-2m}(g)) & g \in \mathrm{Gal}_{\widetilde{F}} \\ (\psi^{-1}(gc_v)\rho'(g)(J'_{2m})^{-1}, -\varepsilon_\ell^{1-2m}(g))\,\jmath & g \notin \mathrm{Gal}_{\widetilde{F}} \end{cases},$$

参见 [CHT08，引理 2.1。2]。此外，

$$\nu_{\mathscr{G}} \circ r' = \varepsilon_\ell^{1-2m}.$$

该构造与等价相容，具体而言，若将 $B \in (G')\hat{}(\mathsf{R})$ 和 ρ' 替换为$\rho'_B := B\rho' B^{-1}$，则将 r'替换为 $r'_B :=$ (a 标准表示(B)，$1)r'(a$ 标准表示(B)，$1)^{-1}$，其中 $a \in \mathsf{R}$ 满足 $a^2 = \nu(B)^{-1}$。

定理 4.3.2。S 假设 标准表示 $\circ \rho_{\Pi,\ \lambda}|_{\mathrm{Gal}_{F(\mu_\ell)}}$ 是绝对不可约的。那么 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$ 是一个有限 O-模。

证明。固定一个将 ρ 提升到 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$ 的提升 $\rho_{\mathscr{S}}$，使其表示泛变形。由上述构造，我们得到一个同态

$$r_{\mathscr{S}} : \mathrm{Gal}_F \to \mathscr{G}_{2m}(\mathsf{R}_{\mathscr{S}}).$$

我们可以考虑相应的剩余表示

$$\overline{r}_{\mathscr{S}} : \mathrm{Gal}_F \to \mathscr{G}_{2m}(\kappa)$$

并对每个 $v \in \Sigma^{\min}$ 局部变形问题 $\widetilde{\mathscr{D}}_v^{\square}$，其对应于 $r_{\mathscr{S}}$ 无约束变形问题的一个不可约分支（参见 [LTX+24，命题 3。33]），使得 $r_{\mathscr{S}}|_{\mathrm{Gal}_{F_v}}$ 是$\widetilde{\mathscr{D}}_v^{\square}(\mathsf{R}_{\mathscr{S}})$中的一个对象。我们考虑（采用 [LTX+24，定义 3。6]中的记号）变形问题

$$\widetilde{\mathscr{S}} := (\overline{r}_{\mathscr{S}}, \varepsilon_\ell^{1-2m}, \Sigma, \{\widetilde{\mathscr{D}}_v^{\square}\}_{v\in\Sigma}),$$

$\widetilde{\mathscr{D}}_v^{\square}$是 [LTX+24定义 3 中所定义的 Fontaine–Laffaille变形问题。12] 对每个 $v \in \Sigma(\ell)$。固定一个泛提升

$$r_{\widetilde{\mathscr{S}}} : \mathrm{Gal}_F \to \mathscr{G}_{2m}(\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}}}).$$

于是存在一个同态 $\theta : \mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}}} \to \mathsf{R}_{\mathscr{S}}$，使得 $\theta \circ r_{\widetilde{\mathscr{S}}}$等价于 $r_{\mathscr{S}}$。

我们断言，θ使 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$成为 $\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}}}$上的有限模。为证明这一点，记 $\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}} := \mathsf{R}_{\mathscr{S}}/\theta(\mathfrak{m}_{\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}}}})$，并令 $\rho_{\widetilde{F},F}$表示由 $\theta_{\mathscr{S}}$得到的取值于 $G(\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}})$ 的表示，并令

$$r_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}} : \mathrm{Gal}_F \to \mathscr{G}_{2m}(\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}})$$

表示相应的同态。于是 $r_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}$等价于 $r_{\mathscr{S}}$。特别地，$r_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}$具有有限像。由引理 3.1.3 可知，$\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$由 $\mathrm{Std}\circ\rho_{\mathscr{S}}$像的迹和相似变换生成。任取 $\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}$的一个素理想 $\mathfrak{p}$。由于 $r_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}$的像有限，我们看到这些迹在 $\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}/\mathfrak{p}$ 中的像是有界次数的单位根之和（相差一个 $\mathcal{O}^\times$ 中的标量）。特别地，$\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}/\mathfrak{p}$是有限的。因此 $\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}},\mathscr{S}}$是阿廷的。由于其剩余域有限，它本身也是有限的。断言由此根据中山引理得证。

注意这里我们关于的假设(F标准表示在[LTX+12定义2的意义下是充分的。3] 根据 [Tho12定理 A。9]根据 [Gee11定理5.1（利用Thorne的充分性条件加以强化 [Tho12]），同样的证明表明，$\mathsf{R}_{\widetilde{\mathscr{S}}}$是一个有限$\mathcal{O}$-模。

该定理得证。 □

4.4. **一个 几乎极小的 R=T 定理**。 在本小节中，我们在以下设定下工作 g:

设定4.4.1。

- 设$\mathbf{V}$为 F 上秩为 N 、判别式为 $\mathfrak{d}$的二次空间，使得$\mathbf{V}_v$ 在$v \in \Sigma_{\mathrm{lr}}$处不分裂。设$(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Sigma^\infty}$为$\mathbf{V}$的符号。假设对每个 $\tau \in \Sigma^\infty$， $q_\tau \in \{0, 2\}$，并令$d(\mathbf{V}) := \left(\sum_{\tau\in\Sigma^\infty} p_\tau q_\tau\right)/2$。
- 设 Λ 为$\mathbf{V}\otimes_F \mathbf{A}^{\Sigma^\infty\cup\Sigma_{\min}\cup\Sigma_{\mathrm{lr}}}F$ 中的自对偶$\prod_{v\in\Sigma^\infty\cup\Sigma^{\min}}\mathcal{O}_v$-格，以及一个无挠紧开子群，其形式中$\mathbf{K}_v$ 对 $v \in \Sigma_{\mathrm{lr}}$为特殊极大。

$$\mathcal{K} = \prod_{v\in\Sigma^{\min}\cup\Sigma^{\mathrm{lr}}} \mathcal{K}_v \times \prod_{v\notin\Sigma^\infty\cup\Sigma^{\min}\cup\Sigma^{\mathrm{lr}}} \mathrm{SO}(\Lambda)(\mathcal{O}_v)$$

- 设 Σ 为 F的一个包含 $\Sigma_{\min}\cup\Sigma_{\mathrm{lr}}\cup\Sigma(\ell)$的有限处的有限集。

我们得到一族附属于$\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{SO}(\mathbf{V})$、由$\mathbf{K}$的紧开子群$\mathbf{K}'$ 标号的（复）志村簇$\{\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathbf{K}')\}_{\mathcal{K}'}$，它们是维数为 $d(\mathbf{V})$的准射影光滑复概形。元素 ξ 给出一个连续同态

$$\prod_{v\in\Sigma(\ell)} \mathrm{SO}(\Lambda)(\mathcal{O}_v) \to \mathrm{GL}(L_\xi),$$

其中 L_ξ 是一个有限自由 $\mathcal{O}$-模，因此诱导出一个 $\mathcal{O}$-线性 étale 局部系统 $\mathscr{L}_\xi$ 于 $\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}')$，对每个紧开子群 $\mathcal{K}'$ 属于 $\mathcal{K}$，且在拉回映射下相容；参见 [KSZ21, 1.5。8]。

回顾定义 2.1.3 中定义的抽象正交 Hecke 代数 $\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma}$。令 $\phi : \mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma} \to \kappa$为满足以下条件的同态：对每个不属于 Σ 的有限处 v （位于 F），我们有 $\phi|_{\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d}}_v} = \phi_{\boldsymbol{\alpha}_v}$ （见定义 2.1.4），其中 $\boldsymbol{\alpha}_v = (\alpha_{v,1}^{\pm1}, \ldots, \alpha_{v,m}^{\pm1})$ 是 v 处的正交抽象 Satake 参数（见定义 2.1.2），满足

$$\left\{\alpha_{v,1}^{\pm1}\iota_\ell\left(\sqrt{\|v\|}\right)^{2-N}, \ldots, \alpha_{v,m}^{\pm1}\iota_\ell\left(\sqrt{\|v\|}\right)^{2-N}\right\}$$

is $\mathrm{t}\rho_v(\phi_v)$ 在 $\mathbb{F}_\ell$ 中的广义特征值多重集。我们用 $\mathfrak{m}$ 表示 ϕ 的核 .

定理 4.4.2. 在上述设定下，我们假设

(D0)（已假设） $\ell > 2(b_\xi - a_\xi) + 2$，且 ℓ 在 F 中非分歧；*(D1)* $\ell > 2(2m+1)$；*(D2)* 标准表示 $\rho|_{\mathrm{Gal}(F/F(\sqrt{\mathfrak{d}})(\mu_\ell))}$ 绝对不可约；*(D3)* ρ 对 $(\Sigma^{\min}, \Sigma^{\mathrm{lr}})$ 是刚性的；*(D4)* 对于每个包含 Σ 的 F 的有限处有限集 Σ'，以及每个形如 $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_{\Sigma'} \times \mathcal{K}^{\Sigma'}$ 的 $\mathcal{K}'$ 的紧开群 $\mathcal{K}$，我们有

$$\mathrm{H}^d_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathbf{V}, \mathcal{K}'), \mathscr{L}_\xi \otimes_{\mathcal{O}} \kappa)_{\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma'} \cap \mathfrak{m}} = 0$$

除非 $d = d(\mathbf{V})$。

令 $\mathbb{T}$ 为 $\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma}$ 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}), \mathscr{L}_\xi)\right)$ 中的像。若 $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}} \neq 0$，则

(1) $\mathbb{T}$ 这里有一个局部完全交环的典范同构 $R_{\mathscr{S}} \cong \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ $\mathcal{O}$.

(2) The $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$-module $\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathbf{V}, \mathcal{K}), \mathscr{L}_\xi)_{\mathfrak{m}}$ is finite and free.

注记 4.4.3. 假设条件 (D4) 成立，是因为我们需要使用系数取自局部系统 $\mathscr{L}_\xi$ 的上同调的无挠性。当 $\mathscr{L}_{\xi,\lambda}$ 是常值局部系统时，根据作者的结果 [Pen25a]，若 $\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K})$ 是 proper 的，则可去掉此条件；一般情形下则由 Yang–Zhu [YZ25] 的结果可知。

本节余下部分将证明该定理。我们修改 [LTX+24，定理 3。38] 的证明。根据定义，我们有如下同一：

$$\mathscr{H}_{\mathcal{K}_0(\varnothing),\mathfrak{m}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathbf{V}, \mathcal{K}_0(\varnothing)), \mathscr{L}_\xi)_{\mathfrak{m}}, \mathcal{O}\right),$$

在此对应下，$\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ 与 $\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma}$ 在 $\mathrm{End}(\mathscr{H}_{\mathcal{K}_0(\varnothing)\mathfrak{m}})$ 中的像相对应，因为 $\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}\ \mathscr{L}_\xi)_{\mathfrak{m}})$ 是 $\mathcal{O}$-无挠的。

我们首先构造一个典范同态 $R_{\mathscr{S}} \to \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$。由 Hecke 算子的半单性可知，$\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]$ 是一个有限扩张 E 的既约环。由于 $\mathscr{H}_{\mathcal{K}_0(\varnothing)\mathfrak{m}}$ 是有限自由 $\mathcal{O}$-模，$\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ 也是有限自由 $\mathcal{O}$-模。通过 ι_ℓ^{-1}，每个极大理想 x 在 $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]$ 中都对应一个 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示 Π_x，其定义在一般线性群 $(\mathbf{A}_F)$ (参见定义 2.2.2)，且满足：

(a) 命题 2.2.3 中与之相关的伽罗瓦表示 ρ_{Π_x,ι_ℓ} 与 $\rho \otimes_\kappa \mathbb{F}_\ell$ 剩余同构；(b) Π_x 是尖点自守表示 π 的函子性提升（见定义 2.3.1），其中 π 是 SO(V)$(\mathbf{A}_F)$ 上的尖点自守表示，并满足 $(\pi^\infty)^{\mathcal{K}}$ 非平凡地出现在 $\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh(V, K)}\mathscr{L}_\xi \otimes_{\mathcal{O},\iota_\ell^{-1}} \mathbb{C}\right)$ 中。特别地，Π 的阿基米德权等于 ξ（见定义 2.2.2）。注意，Π_x 是尖点的，因为它与一个不可约伽罗瓦表示相关联。

记 $\mathbb{T}_x$ 为 $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]$ 在 x 处的局部化。利用贝尔纲定理，并参照 [CHT08 引理 2.1.5], 中的论证，我们可以假设伽罗瓦表示 ρ_{Π_x,ι_ℓ} 的取值实际上在 $G(\mathcal{O}_x)$ 中，其中 $\mathcal{O}_x$ 是某个 $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]/x$ 的有限扩张的整数环。我们还可以假设，ρ_x 模 $\mathcal{O}_x$ 的极大理想的约化等于 ρ。（不只是与 ρ 共轭。）令 A 表示 $\kappa \oplus \bigoplus_{x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]} \mathcal{O}_x$ 的子环，由满足以下条件的元素 $(a_{\mathfrak{m}}, a_x)$ 构成：对所有 $x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]$，$a_x$ 模 $\mathcal{O}_x$ 的极大理想的约化都是 $a_{\mathfrak{m}}$。于是我们有一个连续同态

$$\overline{\rho} \oplus \bigoplus_{x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]} \rho_x : \mathrm{Gal}_F \to G(\mathrm{A}).$$

由引理 3.1.3 可知，$\rho \oplus \bigoplus_{x \in \text{谱}\ \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}[\frac{1}{\ell}]} \rho_x$ 共轭于一个连续同态

$$\rho_{\mathfrak{m}} : \mathrm{Gal}_F \to G(\mathbb{T}_{\mathfrak{m}})$$

它提升了 $\overline{\rho}$。

我们断言 $\rho_{\mathfrak{m}}$ 满足全局变形问题 $\mathscr{S}$。根据性质 (b) 和 Arthur 重数公式，$\Pi_{x,v}$ 在 F 的每个不属于 $\Sigma^{\min} \cup \Sigma^{\mathrm{lr}}$ 的有限处 v 都是非分歧的。因此，由性质 (b) 和命题 2.2.3(2) 可知，$\rho_{\mathfrak{m},v}$ 在每个不属于 Σ 的 v 处都是非分歧的。由性质 (b)、假设 (D0) 和命题 2.2.3(3) 可知，对于每个 $v \in \Sigma(\ell)$，$\rho_{\mathfrak{m},v}$ 都属于 $\mathscr{D}^{\mathrm{FL}}_{,v}\ \square$。由性质 (a)–(b)、命题 2.2.3(2)、推论 2.4.2 和 Arthur 重数公式可知，对于每个 $v \in \Sigma^{\mathrm{lr}}$，$\rho_{\mathfrak{m},v}$ 都属于 $\mathscr{D}^{\mathrm{ram}}_{,v}\ \square$。

因此，由 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$ 的泛性质，我们得到一个典范同态

$$\varphi : \mathsf{R}_{\mathscr{S}} \to \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$$

在$\mathcal{O}$上的环。

现在证明 φ 是满射。为此，我们可以假设 E 包含 $\mathbb{Q}_{\ell^2}$，并且 G 的每个代数表示都定义在 E上，因此对于 F 中不属于 Σ的每个有限处， $\|v\|$ 都是 $E^\times$ 中的平方。固定 ρ到 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$的一个提升 $\rho_{\mathscr{S}}$。对于 F中不属于 Σ的每个有限处 v，以及 G 的每个代数$\mathcal{O}$-表示（r_V, V），定义

$$t^{\mathsf{R}}_{v,V} := \mathrm{tr}(r_V(\rho_{\mathscr{S}}(\phi_v))) \in \mathsf{R}_{\mathscr{S}}$$

and

$$t^{\mathbb{T}}_{v,V} := \mathrm{tr}(r_V(\rho_{\mathfrak{m}}(\phi_v))) \in \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}.$$

根据 ϕ的构造，我们有

$$\varphi(t^{\mathsf{R}}_{v,V}) = t^{\mathbb{T}}_{v,V}.$$

因此，由整 Satake 同构（参见 [Zhu24]）可知，由元素$t^{\mathbb{T}}_{v,V}$生成。特别地， φ 是满射。

在接下来的两个小节中，我们将使用 Taylor–Wiles 粘合论证来证明 φ 是单射。

4.5. **局部计算**。本小节中，我们研究分裂的 p-进奇特殊正交群的主系列表示的局部朗兰兹对应。我们在以下设定下进行

设定 4.5.1.

- 设 v 为 F 的一个有限处。
- 设 SO_N 为 $\mathcal{O}_v$ 上秩为 m 的分裂正交群。
- 设 $T\mathrm{SO}$ 为 SO_N 的一个分裂极大环面。设 $B\mathrm{SO}$ 为包含 $T\mathrm{SO}$ 的一个博雷尔子群，其幺幂根为 $U\mathrm{SO}_0$。设 W为 SO_N 的 Weyl 群。
- 设 ℓ 为一个不整除 W 的阶的奇有理素数，并假设 $\|v\| \equiv 1$（模 ℓ）。
- 设 T_κ 为包含于博雷尔子群 B_κ 中的 $G_\circ\kappa$的一个分裂极大环面。假设所诱导的钉扎根数据对偶于SO_N的钉扎根数据，并令 ι表示所诱导的同构 $X_*(T\mathrm{SO}) \xrightarrow{\sim} X^*(T_\kappa)$与 $X^*(T\mathrm{SO}) \xrightarrow{\sim} X_*(T_\kappa)$，参见 [Whi23，§2.2。3]。

- 设 g是 $T_\kappa(\kappa)$的一个元素。于是我们可以定义以下对象：– 设 $M_g := Z_G \circ_\kappa (g)$为 $G \circ_\kappa$中 g 的中心化子。– 设 S^-_κ 为M_g的中心的单位连通分支，它是 T_κ的一个子环面。– 设 $L_\kappa := Z_G \circ_\kappa (S_\kappa)$为 $G \circ_\kappa$中 S_κ 的中心化子，它是一个包含 M_g的莱维子群。– 以 P_κ 表示 $G \circ_\kappa$ 的标准抛物子群，该子群以 L_κ 为莱维因子。– 设 $P\mathrm{SO}$为$\mathrm{SO}_N \otimes_{\kappa_v}$的一个标准抛物子群，其幺幂根为 $U\mathrm{SO}$，标准莱维子群为 $L\mathrm{SO}$，使得 $P\mathrm{SO}$（分别为 $L\mathrm{SO}$）经由 ι对应于 $P_\kappa \cap G'_\kappa$（分别对应于 $L_\kappa \cap G'_\kappa$）；参见 [Whi23，第2.2节3]。设 $W_L\mathrm{SO}$为 $L\mathrm{SO}$的 Weyl 群。– 设 K0 为 $\mathrm{SO}_N(\mathrm{O}_v)$的抛物型子群，由约化后属于$P\mathrm{SO}(\kappa_v)$的元素组成。– 设 Δ 为 $(L\mathrm{SO}/[L\mathrm{SO}L\mathrm{SO}])(\kappa_v)$ 的 ℓ 次幂阶极大商群。– 设 K1 为复合映射的核

$$\mathcal{K}_0 \to P^{\mathrm{SO}}(\kappa) \to L^{\mathrm{SO}}(\kappa) \to \Delta,$$

这是 K_0 的正规子群。– 令 χ： $X_*(T^{\mathrm{SO}}) \to \kappa^\times$ 为通过 ι 与 g 对应的特征。– 令 $\mathfrak{n}_1$（分别为 $\mathfrak{n}_0$）表示与 χ 对应的 $\mathcal{O}[T\mathrm{SO}(F_v)/(T^{\mathrm{SO}}(\mathcal{O}_v) \cap \mathrm{K}_1)]^{W_L\mathrm{SO}}$（分别为 $\mathcal{O}[T^{\mathrm{SO}}(F_v)/T\mathrm{SO}(\mathcal{O}_v)]^{W_L\mathrm{SO}}$）的极大理想。

假设 $(U_0^{\mathrm{SO}}, \psi)$ 是一个惠特克数据，也就是说， ψ是 $U\mathrm{SO}0$ 的一个非退化特征。令 $\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}_N, T\mathrm{SO})$ 表示 $\mathrm{SO}_N(F_v)$ 中属于主系列的不可约光滑表示集合。令$\Phi_e(\mathrm{SO}_N, T\mathrm{SO})$ 表示与 SO_N 相关的增强 L-参数的集合，这些参数属于主系列；也就是说，其尖点支撑是 T^{SO} 的一个增强 L-参数；参见 [Sol25，第 271] 页。

在 [Sol25], Solleveld 使用惠特克数据 $(U_0^{\mathrm{SO}},\ \psi)$ 构造一个规范的（双射）局部朗兰兹对应

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}_N, T^{\mathrm{SO}}) \leftrightarrow \Phi_e(\mathrm{SO}_N, T^{\mathrm{SO}}): \quad \pi \mapsto (\phi_\pi, \rho_\pi), \quad \pi(\phi,\rho) \leftarrow\!\shortmid (\phi,\rho).$$

在相差 G'-共轭的意义下良定义。

命题 4.5.2. *Solleveld* 在 [Sol25] 中定义的局部朗兰兹对应与 *Arthur* 关于 $\mathrm{SO}_N(F_v)$ 的主系列表示的对应相容。

证明。我们使用 [Sol25，引理 7。13]。特别地，已知局部朗兰兹对应

$$\pi \mapsto \phi_\pi$$

Solleveld 的对应由以下性质唯一确定：

(1) 此双射与 $\mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(G'))$ 的典范作用等变。(2) 此双射与两边的尖点支撑映射相容，具体见 [Sol25，引理 7。6](3) 在此双射下，$\pi(\phi,\rho)$ 是温和表示，当且仅当 ϕ 有界。(4) 此双射与朗兹分类相容，并且（对于温和表示）与抛物诱导相容，具体见 [Sol25，引理 7。11]。

因此，只需证明 Arthur 在 [Art13] 中定义的局部朗兹对应（当 [Pen25a] 中的 N 为偶数时对其作了精化）满足这些性质。

性质 (1) 成立，因为 Arthur 参数包由端оскоп特征标恒等式刻画，而 $\mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(G'))$ 的作用保持这些恒等式。

性质 (2–4) 可由 [Pen25a，定理 7.11]（适用于 N 为偶数的情形）以及 [AG17，定理 32]（适用于 N 为奇数的情形）推出。 □

命题 4.5.3。 设 π 是 $\mathrm{SO}_N(F_v)$的光滑不可约表示。假设 $(\pi^{\mathfrak{p}_1})_{\mathfrak{n}_1} \neq 0$。令 (r, N) 为在 *Solleveld* π 的局部朗兹对应 [Sol25]下与之对应的 *Weil–Deligne* 表示。那么 $N = 0$。

证明。 论证类似于 [Whi23，定理 2.4。26], 其中，在 [Sol25] 的局部朗兹对应中建立了类似结果，而 [ABPS17]的对应取代了前者。

为证明这一断言，回顾一下， [Sol25] 中的局部朗兹对应是在每个主系列伯恩斯坦分支上 $\mathfrak{s} = [T^{\mathrm{SO}}, \chi_0]_{\mathrm{SO}_N}$通过一系列典范双射得到的

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}_N, T^{\mathrm{SO}})^{\mathfrak{s}} \leftrightarrow \mathrm{Irr}(\mathrm{End}_{\mathrm{SO}_N}(\Pi_{\mathfrak{s}})^{\mathrm{op}}) \leftrightarrow \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(\mathfrak{s})^{\mathrm{op}}) \leftrightarrow \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(\mathfrak{s}^\vee, \|v\|^{1/2})) \leftrightarrow \Phi_e(\mathrm{SO}_N)^{\mathfrak{s}^\vee};$$

参见 [Sol25，§7]。这里

- $\mathfrak{s}^\vee$ 是 $\Phi_e(T^{\mathrm{SO}})$ 中与 $\mathfrak{s}$ 相关联的对偶伯恩斯坦分支，这是通过环面的局部朗兹对应得到的；参见 [Sol25，§5];
- $\Pi_{\mathfrak{s}}$是主系列中 Bernstein 块 $\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}_N, T^{\mathrm{SO}})^{\mathfrak{s}}$的投射生成元，由下式给出

  $$\Pi_{\mathfrak{s}} := \mathrm{I}_{B^{\mathrm{SO}}}^{\mathrm{SO}_N}(\mathrm{ind}_{T^{\mathrm{SO}}_{\mathrm{cpct}}}^{T^{\mathrm{SO}}(F_v)}(\chi_c)),$$

  其中 $T^{\mathrm{SO}}{}_{\mathrm{cpct}}$是 $T^{\mathrm{SO}}(F_v)$ 的唯一极大紧子群，而 $\chi_c := \chi_0|_{T^{\mathrm{SO}}_{\mathrm{cpct}}}$;
- $\mathcal{H}(\mathfrak{s}) = \mathcal{H}(\mathfrak{s}) \rtimes \Gamma_{\mathfrak{s}}$ 是某个（扩张的）仿射赫克代数；给定惠特克数据时，它与 $\mathrm{End}_{\mathrm{SO}_N}(\Pi_{\mathfrak{s}})$同构（典范地），参见 Sol25，定理 2。7]；并且
- $(\mathcal{H}(\mathfrak{s}^\vee, \|v\|^{1/2})$ 是来自 [AMS24] 的某个（扩张的）仿射赫克代数，关联于 Bernstein 分支 $\Phi_e(\mathrm{SO}_N)^{\mathfrak{s}^\vee}$。

仿射赫克代数 $\mathcal{H}(\mathfrak{s})$ 包含一个有限维伊瓦萨瓦–赫克子代数

$$\mathcal{H}(W(R_{\mathfrak{s}}^\vee), \|v\|^\lambda),$$

其中 $R_{\mathfrak{s}}^\vee$是关联于 Bernstein 分支 $\mathfrak{s}$ 的根数据，而 $\lambda: \ R_{\mathfrak{s}}^\vee/W_{\mathfrak{s}} \to \mathbb{N}$ 是标记函数；参见[Sol25，第 272] 页。

根据 [Whi23，命题 2.4。22]， π 属于主系列伯恩斯坦分支 $\mathfrak{s}$。根据 [Whi23，引理 2.4。25], 相应的 $\mathcal{H}(W(R_{\mathfrak{s}}^\vee)\ \|v\|^\lambda)$-模$\mathcal{M}_\pi$ 包含一维特征 π，其中每个简单生成元 T_{s_α} 的作用为 $\|v\|$ (即 $\|v\|$-平凡特征）。

因此，由 [ABPS17，命题 10。1] 可知，附属于$(\sigma,\ x,\ \rho^\circ)$ 的 Kazhdan–Lusztig 三元组$\mathcal{M}_\pi$ 满足 $x=1$。

取 $u\in T_{\mathfrak{s}^\vee}$ 的极大紧实实子环面。利用分次 Hecke 代数，Solleveld 将三元组 (σ,y,ρ°) 与 $\mathcal{M}_\pi$ 相关联，其中

(1) $\sigma\in\mathrm{Lie}(G'_u)$ 是半单的，(
2) $y\in\mathrm{Lie}(G'_u)$ 是幺幂的，(3)
$[\sigma,y]=-\log(\|v\|)y$，并且
(4) ρ° 是 $\pi_0(Z_{G'_u}/Z(G'_u))$ 在某些 Springer 型同调中出现的不可约表示；参见[Sol25，第310]页。由 [Sol25，命题 6.5] 的证明可知，$(\exp(\sigma),\exp(y)\ \rho^\circ)$ 是与 $\mathcal{M}_\pi$相关联的 Kazhdan–Lusztig 三元组。特别地，$y=0$。

另一方面，由 [Sol25，引理 6.10] 第 316 页上的证明可知

$$y=\log\phi_\pi(1,\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}).$$

因此，ϕ_π 在 SL_2因子上是平凡的，断言得证。 □

结合命题4.5.3 和命题 4.5.2，我们得到如下推论。

推论 4.5.4。设 π 是 $\mathrm{SO}_N(F_v)$ 的光滑不可约表示。假设 $(\pi^{\mathfrak{p}_1})_{\mathfrak{n}_1}\neq 0$。设$(r,N)$ 是与 π对应的 *Weil–Deligne* 表示，该对应由 *Solleveld* 的局部朗兰兹对应 [Sol25]给出。那么 $N=0$。

4.6. **Taylor–Wiles 粘合论证**。我们将采用如下的 Taylor–Wiles 粘合论证，该论证沿用[CHT08], [Tho12], 和 [Whi23]。置 $\Sigma^0:=\Sigma^{\min}\cup\Sigma^{\mathrm{lr}}\cup\Sigma(\ell)$。为了继续证明定理 4.4.2，我们可以将 E 替换为 $\mathbb{Q}_\ell$中的有限非分歧扩张。因此，不妨假设 κ 包含 ρ中矩阵的所有特征值，其中 $_F$（Gal）。对于每个紧开子集 Kof $\mathcal{K}$，我们置

$$\mathscr{H}_{\mathcal{K}'}:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}'),\mathscr{L}_\xi\right),\mathcal{O}\right).$$

我们回顾 Taylor–Wiles 素位与 Taylor–Wiles 数据的定义，参见 [Whi23，定义 2.2.8–2.2。9]。

定义 4.6.1. 全局变形问题 $\mathscr{S}$ 的*Taylor–Wiles* 素位是 F 的一个不在 Σ 中的有限处 v，它在 $F(\sqrt{\mathfrak{d}})$中分裂，使得 $\|v\|\equiv 1(\mathrm{mod}\ \ell)$，并且 $\overline{g_v}:=\rho(\phi_v)\in G^\circ(\kappa)$是半单的。若 $\|v\|\equiv 1(\mathrm{mod}\ \ell^n)$，则称这样的位置为 $n\geq 1$ 级。

若 v 是 $\mathscr{S}$的 Taylor–Wiles 素位，我们令 $M_{\overline{g}_v}:=Z_{G^\circ_\kappa}(\overline{g}_v)$表示 g_v 在 G°_κ中的中心化子。
一个*Taylor–Wiles* 数据是一对

$$\left(\Sigma^{\mathrm{TW}},\{(T_v,B_v)\}_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}}\right)$$

其中
(1) Σ^{TW} 是 F的 Taylor–Wiles 素位的一个有限集；并且
(2) 对于每个 $v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}$, $T_v\leq G^\circ_\kappa$ 都是一个包含 $Z(M_{\overline{g}_v})^\circ$ 的分裂极大环面，并且 B_v 是一个包含 T_v的 G°_κ 的博雷尔子群。

命题 *4.6.2.* 对于每个 *Taylor–Wiles* 素位 $v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}$，存在一个关于 ρ_v（相对于 $\chi=\varepsilon_\ell^{2-N}$）的局部变形条件 $\mathscr{D}_v^\square$，它表示将 ρ_v 提升到 $\mathscr{C}_\mathcal{O}$ 的对象 A 中、满足 $\rho_v(I_v)\subset Z(M_{\overline{g}_v})^\circ(A)$ 的提升 ρ_v。这里，$\overline{g}_v=\rho_v(\phi_v)$，而 $M_{\overline{g}_v}$ 是 *Whi23,* 定理 *2.1.*14], 中构造的子群，它是 $M_{\overline{g}_v}$的一个提升。

此外，我们有

$$\dim_\kappa \mathrm{L}(\mathscr{D}_v^\square)=\dim_\kappa \mathrm{H}^0(F_v,\mathrm{ad}^0(\overline{\rho}))+\dim_\kappa Z(M_{\overline{\rho}(\phi_v)})-1.$$

证明。这由 [Whi23，定义 2.2.10 和推论 2.2 得出。13]应用于 G°。最后一个等式由 [Whi23，推论 2.2 后的计算得出。13]。 □

定义 4.6.3. 对于每个 Taylor–Wiles 数据 $\left(\Sigma^{\mathrm{TW}},\ \{(T_v,\ B_v)\}_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}}\right)$，我们得到另一个全局变形问题

$$\mathscr{S}(\Sigma^{\mathrm{TW}}):=\left(\overline{\rho},\varepsilon_\ell^{2-N},\Sigma^0\cup\Sigma^{\mathrm{TW}},\{\mathscr{D}_v^\square\}_{v\in\Sigma\cup\Sigma^{\mathrm{TW}}}\right)$$

其中 $\mathscr{D}_v^\square$与 $\mathscr{S}$中相同，适用于 $v\in\Sigma^0$，而对于 $v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}$，$\mathscr{D}_v^\square$是 ρ_v 在命题 4.6.2中定义的局部提升条件。此外，对于每个位置 $v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}$，我们采用设定 4.5.1 中的记号，并加上下标

添加“v”以指示位置 v，并且 $(T_\kappa,\ B_\kappa) = (T_v,\ B_v)$ 和 $g = g_v$。特别地，我们有紧子群

$$\mathcal{K}_{v,1} \leq \mathcal{K}_{v,0} \leq \mathcal{K}_v = \mathrm{SO}_N(\mathcal{O}_v),$$

使得 $\mathrm{K}_{v,1}$ 是 $\mathrm{K}_{v,0}$ 的正规子群，其商群为 Δ_v。

然后我们令 $\Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}} = \prod_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}} \Delta_v$；

- $\mathfrak{a}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}$ 为 $\mathcal{O}[\Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}]$ 在 $\mathcal{O}$ 上由 $\delta - 1$ 对所有 $\delta \in \Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}$生成的增广理想；
- $\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}} := \mathfrak{m} \cap \mathbb{T}^{m,\ \mathfrak{d},\ \Sigma\cup\Sigma_{\mathrm{TW}}}$；
- $\mathfrak{n}_i = \prod_{v\in\Sigma}\mathrm{TW}_n \quad \mathfrak{n}_{v,i}$ 为 $\prod_{v\in\Sigma}\mathrm{TW}_n\,\mathrm{O}[T\mathrm{SO}(F_v)/(T\mathrm{SO}(\mathrm{O}_v) \cap \mathrm{K1})]^{W_L}\mathrm{SO}$（相应地，$\prod_{v\in\Sigma}\mathrm{TW}_n\,\mathrm{O}[T\mathrm{SO}(F_v)/T\mathrm{SO}(\mathrm{O}_v)]^{W_L}\mathrm{SO}$）中对应于 $(g_v)_{v\in\Sigma\mathrm{TW}_n}$ 的极大理想，对每个 $i\in\{0,1\}$；以及
- $$\mathcal{K}_i(\Sigma^{\mathrm{TW}}) := \prod_{v\notin\Sigma^{\mathrm{TW}}} \mathcal{K}_v \times \prod_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}} \mathcal{K}_{v,i}$$

对于每个 $i\in\{0,1\}$，它们都是 K 的紧开子群。

特别地，$\mathrm{K}_1(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 是 $\mathrm{K}_0(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 的正规子群，并且我们有一个典范同构

$$\mathcal{K}_0(\Sigma^{\mathrm{TW}})/\mathcal{K}_1(\Sigma^{\mathrm{TW}}) \cong \Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}. \tag{4.1}$$

由（4.1），$\mathscr{H}_{\mathcal{K}_1(\Sigma^{\mathrm{TW}})}$ 典范地是一个 $\mathrm{O}\mathcal{O}[\Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}]$-模。

引理 4.6.4。设情形如定理4.4.2所述。若 $\left(\Sigma^{\mathrm{TW}},\ \{(T_v, B_v)\}_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}}\right)$ 是一个 *Taylor–Wiles* 数据，则 $\mathrm{O}[\Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}]$-模 $\mathscr{H}_{\mathcal{K}_1(\Sigma^{\mathrm{TW}})^{\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}}}$ 是有限自由的。此外，典范映射

$$\mathscr{H}_{\mathcal{K}_1(\Sigma^{\mathrm{TW}}),\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}}/\mathfrak{a}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}} \to \mathscr{H}_{\mathcal{K}_0(\Sigma^{\mathrm{TW}}),\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}}$$

是一个同构。

证明。我们修改了 [LTX+24 引理 3.6 的证明。5]对于每个 X 上的光滑概形 $\mathbb{C}$ 以及每个阿贝尔群 A，我们将 X^{an} 的解析化记为 X，并将 $\mathrm{C}_\bullet(X^{\mathrm{an}}, A)$ 记为带有系数 X^{an} 的奇异链复形 A。

对于每个 $i\in\{0,1\}$ 以及每个正整数 m，令 $\mathrm{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 为复合映射的核

$$\mathcal{K}_i(\Sigma^{\mathrm{TW}}) \to \mathcal{K} \to \mathrm{SO}(\Lambda)(\mathcal{O}_F/\ell^m).$$

于是 $\mathrm{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 在 L_ξ/ℓ^m 上平凡作用。因此，$\mathscr{L}_\xi \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\ell^m$ 在 $\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathrm{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))$ 上为常值。由 (D4) 可知存在一个典范同构

$$\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_i(\Sigma^{\mathrm{TW}})),\mathscr{L}_\xi\right)_{\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}} \cong \mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})), L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m\right)^{\mathrm{SO}(\Lambda)(\mathcal{O}_F/\ell^m)}_{\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}}$$

对每个 $i\in\{0,1\}$，这是 $\mathcal{O}$-挠无关模之间的同构。根据奇异上同调与 étale 上同调之间的 Artin 比较定理，对偶复形

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))^{\mathrm{an}}, L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m), \mathcal{O}/\ell^m\right)$$

计算 $\mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathrm{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))\ L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m\right)$。再次由 (D4) 可得

$$\mathrm{H}_d\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))^{\mathrm{an}}, L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m\right) = 0$$

除非 $d = d(\mathbf{V})$。

另一方面，对每一个 $i\in\{0,1\}$，$\mathrm{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 都是整洁的，这意味着对每一个 $t\in\mathrm{SO}(\mathrm{V})(\mathrm{A}_F^\infty)$，$t^{-1}\mathrm{SO}(\mathrm{V})(F)t\cap\mathrm{K}_i^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 都不含挠元。利用志村簇的三角化，如同 [KT17 引理 6.9], 的证明中那样，我们看到 $\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{Sh}(\mathrm{V},\mathrm{K}_1^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))^{\mathrm{an}}, L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{O}/\ell^m)$ 拟同构于自由 $(\mathrm{O}/\ell^m)[\Delta_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}]$-模的完美复形；并且存在一个典范同构

$$\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_1^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))^{\mathrm{an}}, L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m)/\mathfrak{a}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}} \cong \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_0^m(\Sigma^{\mathrm{TW}}))^{\mathrm{an}}, L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m)$$

$(\mathcal{O}/\ell^m)\ [\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma\cup\Sigma^{\mathrm{TW}}}$-模的复形的。

在 $\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}}$ 处局部化并取 $\mathrm{SO}(\Lambda)(\mathcal{O}_F/\ell^m)$-不变向量之后，由此可知典范映射

$$\mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_0^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})), L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m\right)/\mathfrak{a}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}} \to \mathrm{H}^{d(\mathbf{V})}_{\text{ét}}\left(\mathrm{Sh}(\mathbf{V},\mathcal{K}_1^m(\Sigma^{\mathrm{TW}})), L_\xi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\ell^m\right)$$

是一个同构 对每个正整数 m 的同态。然后，通过取极限即可得到该引理。 r m. □

现在我们利用 G°-充分子群的概念，讨论 Taylor–Wiles 数据的存在性（见定义4.2.1）。

引理 4.6.5。设情形如定理 4.4.2 所述。设 Ξ 为 Σ^0 的一个子集。对每个整数$b \geq \dim_\kappa H^1_{\mathscr{L}^\perp,\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\rho)(1))$（见方程 (3.2)）以及每个正整数 n，存在一个 Taylor–Wiles 数据 $\left(\Sigma_n^{\mathrm{TW}}, \{(T_v, B_v)\}_{v\in\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}\right)$ 满足

(1) $\#\Sigma_n^{\mathrm{TW}} = b$；(2) 每个 $v \in \Sigma_n^{\mathrm{TW}}$是水平为 n 的 Taylor–Wiles 素位；且 (3) $R^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})$ 可在 $R^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$ 上由

$$\sum_{v\in\Sigma_n^{\mathrm{TW}}} (\dim_\kappa Z(M_{\overline{\rho}(\phi_v)}) - 1) - \sum_{v\in\Xi\cap\Sigma(\ell)} [F_v : \mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa - \dim B_\kappa)$$

元素。

证明。 我们修改 [Tho12 定理 4.4] 的证明。由命题 3.3.9、命题 3.5.11 与命题 3.6.3，对每个位置 $v \in \Sigma$,

$$\dim_\kappa \mathrm{L}(\mathscr{D}_v) - \dim_\kappa \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}) = \begin{cases} [F_v : \mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa - \dim B_\kappa) & \text{if } v \in \Sigma(\ell) \\ 0 & \text{if } v \notin \Sigma(\ell) \end{cases}.$$

对于任意 Taylor–Wiles 数据 $\left(\Sigma^{\mathrm{TW}}, \{(T_v, B_v)\}_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}}\right)$，由 Wiles公式（见引理 3.2.7（5））、4.6.2以及 [CHT08 推论 2.2.12] 的证明可知，$R^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}(\Sigma^{\mathrm{TW}})$ 可以在 $R^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$ 上由以下元素生成

(4.2)
$$\dim_\kappa \mathrm{H}^1_{\mathscr{L}(\Sigma^{\mathrm{TW}}),\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})) = \dim_\kappa \mathrm{H}^1_{\mathscr{L}(\Sigma^{\mathrm{TW}})^\perp,\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1)) + \sum_{v\in\Sigma^{\mathrm{TW}}} (\dim_\kappa Z(M_{\overline{\rho}(\phi_v)}) - 1)$$

(4.3)
$$- \sum_{v\in\Xi\cap\Sigma(\ell)} [F_v : \mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa - \dim B_\kappa) - \dim_\kappa \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1))$$

元素。由 [Whi23，命题 2.2.18 和引理 2.2.20] 可知，存在一个 Σ_n^{TW}满足条件（1）–（2）的 Taylor–Wiles 素位集合,

$$\dim_\kappa \mathrm{H}^1_{\mathscr{L}(\Sigma^{\mathrm{TW}})^\perp,\Xi}(\mathrm{Gal}_{F,\Sigma}, \mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1)) = 0.$$

因此引理得证。 □

推论 4.6.6。 设情形如定理4.4.2所述。设 Ξ 是 Σ^0的子集。则存在正整数 t， $b \in \mathbb{Z}_+$，使得对于每个正整数 n，都存在一个 Taylor–Wiles 数据$\left(\Sigma_n^{\mathrm{TW}}, \{(T_v, B_v)\}_{v\in\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}\right)$ 满足

(1) $\#\Sigma_n^{\mathrm{TW}} = b$; (2) $\|v\| \equiv 1$(模 ℓ^n) 对每个 $v \in \Sigma_n^{\mathrm{TW}}$。
(3) $R^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})$ 可由$R^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$ 在拓扑意义下由以下元素生成：

$$g_{t,\Xi} := t - \sum_{v\in\Xi\cap\Sigma(\ell)} [F_v : \mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa - \dim B_\kappa)$$

元素。
$\Delta_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}$ 是一个含有 t 个循环因子的阿贝尔 ℓ-群。

证明。 这由引理 4.6.5 和鸽巢原理得出。 □

现在我们证明主要结果。

定理4.4.2的证明。我们固定一个泛提升

$$\rho_{\mathscr{S}} : \mathrm{Gal}_F \to G(R_{\mathscr{S}}).$$

令 Ξ 为 Σ^0的一个固定子集。我们固定正整数 b，$t \in \mathbb{Z}_+$ 并固定一个 Taylor–Wiles 数据$(\Sigma_n^{\mathrm{TW}}, \{(T_v, B_v)\}^{v\in\Sigma_n^{\mathrm{TW}}})$，其大小为 b ，对于引理4.6.6中的每个正整数 n 。对于每个 $v \in \Sigma_n^{\mathrm{TW}}$，我们

- 令 $\mathrm{Art}_v : F_v^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}_{F_v}$ 为局部 Artin 映射；并且
- 令 $\varpi_v \in F_v$ 为一个一致化元，使得 $\mathrm{Art}_v(\varpi_v)$ 与 ϕ_v^{-1}在 $\mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}_{F_v}$中的像重合。我们采用定义 4.6.3中的记号，并且
- 设 $\mathscr{H}^? := \mathscr{H}^{\mathcal{K}_0(\varnothing)}_{\mathfrak{m}}$;
- 令 $\mathscr{H}_{i,n}$ 为局部化的模 $\left(\mathscr{H}^{\mathcal{K}_i(\Sigma^{\mathrm{TW}}n)}_{\mathfrak{m}_{\Sigma^{\mathrm{TW}}_n}}\right)_{\mathfrak{n}_i}$，对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 以及 $i \in \{0,1\}$；并且
- 令 $\mathbb{T}_{i,n}$ 为 $\mathbb{T}^{m,\mathfrak{d},\Sigma^{\mathrm{TW}}n}$ 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathscr{H}_{i,n})$ 中的像，对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 以及 $i \in \{0,1\}$。

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，由于规范映射 $\mathscr{H}^? \to \mathscr{H}^{?,\mathfrak{m}_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}}_{\mathcal{K}}$是一个同构，我们得到规范满射

$$\mathbb{T}_{1,n} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{0,n} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\mathfrak{m}} \tag{4.4}$$

关于环的$\mathcal{O}$。与 $\rho_{\mathfrak{m}}$ 的构造类似，我们得到提升 $\rho_{i,n}$ ，将 ρ 提升到 $\mathbb{T}_{i,n}$ 且与(4.4) 中的映射相容。

类似于 [Tho12，命题 5.9、5.12]，，我们断言

(1) $\rho_{1,n}$ 满足全局变形问题 $\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})$（见定义 4.6.3）。此外，对于每个$v \in \Sigma_n^{\mathrm{TW}}$，诱导映射 $\Delta_v \to \mathbb{T}_{1,n}$ （定义见 [Whi23，第 59–60] 页）与 Δ_v 在 $\mathscr{H}_{1,n}$ 上的标量作用一致；该作用源于将 $\Delta_v = T^{\mathrm{SO}}(\mathcal{O}_v)/(T_{\mathrm{SO}}(\mathcal{O}_v) \cap \mathrm{K}_{v,1})$ 视为海克算子。

(2) 自然映射

$$\mathscr{H}_{0,n} \to \mathscr{H}$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都是同构。特别地，典范同态 $\mathbb{T}_{0,n} \to \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ 是同构，并且 $\rho_{0,n}$ 作为 ρ 的提升与 $\rho_{\mathfrak{m}}$ 等价。

第一个断言可由将 [Whi23 命题 2.5.3] 应用于与 $\mathbb{T}_{1,n}[1/\ell]$ 的极大理想相关联的伽罗瓦表示而得出，这由 $\rho_{1,n}$ 的构造可知。这里注意，(2.2) 和推论 4.5.4 共同保证了 [Whi23 命题 2.5.3] 的假设成立，但局部伽罗瓦表示的取值仅在 G° 而非 G' 中这一点除外，不过这并不影响证明。第二个断言可由将 [Whi23 推论 2.4.14]应用于模$\mathscr{H}^{\mathcal{K}_{\mathrm{Iw}}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})}_{\mathfrak{m}_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}}$而得出，其中 $\mathrm{K}_{\mathrm{Iw}}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})$ 的定义满足：对于 $v \in \Sigma_n^{\mathrm{TW}}$，$\mathrm{K}_{\mathrm{Iw}}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})_v = \mathrm{Iw}_v$ ；对于 $v \notin \Sigma_n^{\mathrm{TW}}$，$\mathrm{K}_{\mathrm{Iw}}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})_v = \mathrm{K}_v$ 。这里 $\mathrm{Iw}_v \subset \mathrm{SO}(\mathcal{O}_v)$ 是与 B^{SO} 对应的标准 Iwahori 子群。

由上文 (1) 可知，$\rho_{1,n}$ 满足全局变形问题 $\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})$，从而诱导出一个典范满同态

$$\varphi_n : \mathrm{R}_{\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})} \to \mathbb{T}_{1,n}.$$

作为$\mathcal{O}[\Delta_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}]$-模。

由 (2) 和引理4.6.4，我们得到一个典范交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}_{\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})}/\mathfrak{a}_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}_{\mathscr{S}} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n/\mathfrak{a}_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbb{T}_{1,n}/\mathfrak{a}_{\Sigma_n^{\mathrm{TW}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{T}_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

环到$\mathcal{O}$上的映射，其中水平映射均为同构。

对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们选取一个泛提升

$$\rho_{\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})} : \mathrm{Gal}_F \to G(\mathrm{R}_{\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})})$$

从 $\rho_{\mathscr{S}}$ 到 $\mathrm{R}_{\mathscr{S}(\Sigma_n^{\mathrm{TW}})}$。由命题 3.2.8(3)，我们得到同构

$$\mathrm{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}} \cong \mathrm{R}_{\mathscr{S}} \widehat{\otimes} \mathscr{T}_\Xi, \quad \mathrm{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}(\Sigma^{\mathrm{TW}})} \cong \mathrm{R}_{\mathscr{S}(\Sigma^{\mathrm{TW}})} \widehat{\otimes} \mathscr{T}_\Xi$$

作为$\mathcal{O}$上的环。特别地，我们可以选取一个满局部同态 $\mathrm{R}^{\square_\Xi}_{\mathscr{S}} \to \mathrm{R}_{\mathscr{S}}$，使 $\mathrm{R}_{\mathscr{S}}$ 成为 $\mathrm{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$ 上的代数。

我们设

$$\mathsf{S}_\infty := \mathscr{T}_\Xi[[Y_1,\dots,Y_t]],$$

其中 $\mathscr{T}_\Xi$ 是形式光滑群 $\prod_{v\in\Xi}(G')^\wedge$ 在$\mathcal{O}$上的坐标环。令 $\mathfrak{a}_\infty \subset \mathsf{S}_\infty$ 为$\mathcal{O}$上的增广理想。设

$$\mathsf{R}_\infty := \mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}[[Z_1,\dots,Z_{g_{t,\Xi}}]],$$

其中 $g_{t,\Xi}$ 是引理 4.6.6中出现的整数。应用通常的粘合引理（参见[BLGG11，定理 3.6.1]或 [Tho12，引理 6.10]的证明），可得

- 存在一个在$\mathcal{O}$ 上的局部同态 $\mathsf{S}_\infty \to \mathsf{R}_\infty$，使得存在一个环上的满同态 $\mathsf{R}_\infty/\mathfrak{a}_\infty\mathsf{R}_\infty \to \mathsf{R}_{\mathscr{S}}$，其定义在 $\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$ 上。
- 存在一个 R_∞-模 $\mathscr{H}_\infty$，使得– $\mathscr{H}_\infty$ 是 S_∞ 上的有限自由模，

并且– $\mathscr{H}_\infty/\mathfrak{a}_\infty\mathscr{H}_\infty$ 与 $\mathscr{H}$ 同构，作为 $\mathsf{R}_\infty/\mathfrak{a}_\infty\mathsf{R}_\infty$-模。

特别地，我们有

$$\operatorname{depth}_{\mathsf{R}_\infty}\mathscr{H}_\infty \geq \operatorname{depth}(\mathsf{S}_\infty) = 1+\dim G'_\kappa\cdot\#\Xi+t.$$

另一方面，由命题 3.3.9、命题 3.5.11 和命题 3.6.3 可知，$\mathsf{R}^{\square}_{\mathscr{S},\Xi}$ 是$\mathcal{O}$ 上的形式幂级数环，其中

$$\dim G'_\kappa\cdot\#\Xi+\sum_{v\in\Xi\cap\Sigma(\ell)}[F_v:\mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa-\dim B_\kappa)$$

变量。因此，R_∞ 是一个维数为

$$1+\dim G'_\kappa\cdot\#\Xi+\sum_{v\in\Xi\cap\Sigma(\ell)}[F_v:\mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa-\dim B_\kappa)+g_{t,\Xi}=1+\dim G'_\kappa\cdot\#\Xi+t.$$

于是i 由 Auslander–Buchsbaum 定理可知，$\mathscr{H}_\infty$ 是一个有限自由的 R_∞-模 e.

于是，R_∞-模 $\mathscr{H}=\mathscr{H}_\infty/\mathfrak{a}_\infty\mathscr{H}_\infty$ 在 $\mathsf{R}_\infty/\mathfrak{a}_\infty\mathsf{R}_\infty$上是有限自由的。但 $\mathsf{R}_\infty/\mathfrak{a}_\infty\mathsf{R}_\infty$ 在$\mathscr{H}$上的作用经过满同态 $\mathsf{R}_\infty/\mathfrak{a}_\infty$ $\mathsf{R}_\infty\to\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$，这意味着该满同态必为同构。因此，$\mathscr{H}$是一个有限自由的 $\mathsf{R}_{\mathscr{S}}$-模。由此，映射 $\varphi:\mathsf{R}_{\mathscr{S}}\to\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ 是一个同构。□

5. 刚性

5.1. 椭圆曲线的奇数对称幂的刚性。在本小节中，我们研究附着于椭圆曲线的伽罗瓦表示的奇数对称幂的约化的刚性。

设 A 是定义在 F 上的椭圆曲线。对于每个有理素数 ℓ，我们固定一个同构 $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\overline{F}},\mathbb{Z}_\ell)\cong\mathbb{Z}_\ell^{\oplus 2}$，并令

$$\rho_{A,\ell}:\Gamma_F\to\mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\overline{F}},\mathbb{Z}_\ell))\cong\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

成为 co 同态。于是我们得到一个连续同态

$$\rho_{A,m,\ell}:=\mathrm{Sym}^{2m-1}(\rho_{A,\ell}):\mathrm{Gal}_F\to\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{Z}_\ell).$$

回顾一下，辛相似群$_{2m}$ 由 $\mathbb{Z}_\ell^{\oplus(2m)}$ 上的标准交错配对定义，该配对由矩阵 J'_{2m}给出；见设定 3.0.1。

当 v 是 F 的有限处，且 ℓ 是有理素数时，令 G 为辛相似群$_{2m}$ 上的光滑群概形$\mathbb{Z}_\ell$，并在设定 3.2.1 中使用 $\Gamma=\mathrm{Gal}_{F_v}$ 和 $\chi=\varepsilon_\ell^{1-2m}$。

命题 5.1.1。设 v 是 F的有限处。对于除有限多个有理素数 $\ell>2m$之外的所有 $\rho_{A,\,m,\,\ell}|_{\mathrm{Gal}_{F_v}}$ 到 R 的对象 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}_\ell}$（相对于 $\chi=\varepsilon_\ell^{1-2m}$）的每个提升，都是按定义3.5.8的意义最小分歧的。

证明。选取 F_v 的一个有限全分歧扩张 $F'v$，使得 $A':=A\otimes_F F'_v$具有良约化或乘法约化。我们采用 §3.5 中的记号，并令 T'_v 为子群 $\mathrm{Gal}(F_v/F'_v)$ 在 $\mathrm{T}_v:=\mathrm{Gal}_{F_v}/P_v$ 中的像。固定 T_v 与 $\|v\|$-温和群 $\mathrm{T}^{\|v\|}$ 之间的一个同构。假设 $\ell\nmid[F'_v:F_v]$，于是 $\mathrm{T}'_v=\mathrm{T}_v$。选取 $\mathbb{Q}_\ell$ 的一个包含于 $\mathbb{Q}_\ell$ 中的有限非分歧扩张 E，其整数环为 O，剩余域为 κ，且满足关于 ρ 的假设 3.5.2。令 $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}(\rho_{A,m,\ell,v}\otimes\kappa)$ 为 P_v 的绝对不可约表示的同构类集合，这些表示出现在 Std $\circ\,\rho_{A,m,\ell,v}\otimes\kappa$ 中。 –

我们先考虑 A' 具有良约化的情形。令 $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}_\ell$ 为 $\rho_{A',\ell}(\phi_q)$ 的两个特征值。于是 α 和 β 是 $\mathbb{Q}$ 中的 Weil $\|v\|^{-1/2}$-数，它们只依赖于 A'，而不依赖于 ℓ。我们进一步假设ℓ 满足 $\alpha,\beta\in(\mathbb{Z}_{(\ell)})^\times$，并且集合的像

$$\{(\alpha/\beta)^{2m},(\alpha/\beta)^{2m-1},\dots,(\alpha/\beta)^{-2m}\}$$

在 $\overline{\mathbb{F}}_\ell^{\times}$ 中不包含 $\|v\|$。因此，对于任意 $\tau\in\mathfrak{T}$，由引理 $\mathrm{W}_\tau(\rho_{A,m,\ell,v}\otimes\kappa)$ 可知，3.4.7(2)，如果我们假设 $\ell\nmid\prod_{i=1}^{2m+1}(\|v\|^i-1)$，则 的每个提升实际上都是非分歧的。

接下来考虑 A' 具有乘法约化的情形。令 $u=\mathrm{ord}_v(j(A))<0$ 为 A的 j-不变量的赋值。进一步假设 ℓ 与 u互素。那么，$\rho_{A,\ell}(t)$ 在辛相似群$_2(\mathbb{Z}_\ell)$中与 $\pm(1+N_2)$ 共轭，这意味着 $\mathrm{Sym}^{2m-1}\rho_{A,\ell}(t)$ 在辛相似群$_{2m}(\mathbb{Z}_\ell)$中与 $\pm\exp(N_{2m})$ 共轭。因此， $\mathfrak{T}$ 是单元素集。令 τ为 $\mathfrak{T}$中唯一的元素，那么 $\mathrm{W}_\tau(\rho_{A,m,\ell,v}\otimes\kappa)$ 的每个提升都是极小非分歧的，因为 N_{2m} 具有最大秩。□

将此命题与命题 2.2.3结合，可立即得到以下推论。

推论 5.1.2。 设 Σ 是 F 的一个有限处有限集，包含 Σ^{bad}，使得 A在 Σ之外具有良约化。那么除了有限多个有理素数 ℓ、 $\rho_{A、m、\ell}$ 之外，ℓ 在 $(\Sigma,\varnothing)$ 的意义下（见定义 4.1.1，其中 $\mathcal{O}=\mathbb{Z}_\ell$），均为刚性的。

5.2. **自守伽罗瓦表示的刚性**。 在本小节中，我们研究自守伽罗瓦表示的约化的刚性。我们在以下设定下进行讨论。

设定 5.2.1。

- 设 Π 是 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示，表示 一般线性群$_{2m}(\mathbf{A}_F)$ （见定义 2.2.2）。
- 设 Σ^Π 为 F 的包含 $\Sigma_{\text{坏}}$的最小有限处有限集，使得 Π_v 在 F 中不属于 Σ^Π的每个有限处 v 处均非分歧。
- 设 $E\subset\mathbb{C}$ 是 Π 的强系数字段（见定义 2.2.5）。

对每个 E的有限处 λ，我们得到一个连续同态$\rho_{\Pi,\lambda}$： $\mathrm{Gal}_F\to$一般线性群$_{2m}(E_\lambda)$.

猜想 5.2.2. 固定 F 的、包含 Σ^Π的有限处所成的有限集 Σ。假设Π 到 $F(\sqrt{\mathfrak{d}})$的基变换也是尖点的。则对于 E 的、除有限多个以外的所有素数 λ，其对应的有理素数为 ℓ，

（1）$\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/F(\mu_{\ell^\infty})(\sqrt{\mathfrak{d}}))}$ 是绝对不可约的；且（2）

$\rho_{\Pi,\lambda}$ 对于（$\Sigma,\varnothing$）在定义4.1.1的意义下是刚性的。

关于猜想 5.2.2，我们有如下定理。

定理 5.2.3. 假设存在一个有限处 v_0，它属于 F 并在 $F(\sqrt{\mathfrak{d}})$ 中分裂，使得 Π_{v_0} 是超尖点的，则 猜想5.2.2 成立。

证明。对于第 (1) 部分：我们将 $F(\sqrt{\mathfrak{d}})$记为 $\dot{F}$，并选取 $\dot{F}$ 在 v_0 之上的一个位置 w_0。特别地，我们有一个自然同构 $F_{v_0}\cong F_{w_0}$。 由于 Π_{v_0} 是超尖点的，经由局部朗兰兹对应与 Π_{v_0} 相关联的连续表示 $\rho_{\Pi_{v_0}}$：$W_{F_{v_0}}\to$一般线性群$_{2m}(\mathbb{C})$ 是不可约的。根据克利福德定理，存在 $I_{F_{v_0}}$ 的一个不可约表示 τ （具有复系数）以及 $I_{F_{v_0}}\rtimes\langle\varphi^b\rangle$ 的一个特征 χ，使得 $\rho_{\Pi_{v_0}}$ 同构于诱导表示$\mathrm{Ind}_{I_{F_{v_0}}\rtimes\langle\varphi_{v_0}^b\rangle}^{W_{F_{v_0}}}(\tau\otimes\chi)$，其中 b 是满足 $\tau^{\phi_{v_0}^b}\cong\tau$ 的最小正整数。我们可以在 $\mathbb{C}$内选取 E 的一个有限扩张 E'，以及E'的有限处的一个有限集 Λ'，使得 τ 与 χ 都定义在 $\mathrm{O}_{E',(\Lambda')}$ 上。特别地，我们可以假定 $\rho_{\Pi_{v_0}}$的像包含在一般线性群$_{2m}(\mathrm{O}_{E',(\Lambda')})$ 中。

令 Λ_1' 为 E' 的有限处中包含 Λ' 的最小集合，使得 E' 的每个不属于Λ' 的有限处 λ' 都满足

- $\overline{\tau}_{\lambda'}:=\tau\otimes_{\mathcal{O}_{E',(\Lambda')}}\overline{\kappa_{\lambda'}}$是不可约的；并且
- b 是满足 $\tau_\lambda^{\phi_{w_0}^k}\cong\tau_{\lambda'}$与$\tau_{\lambda'}$共轭的最小正整数 k。

令 Λ_1 为 E 中位于 Λ_1'之上的有限处的有限集，并令 Λ_2 为 Λ_1 与 E 中满足其下方的有理素数 ℓ 满足 $\ell\le 2m(b_\xi-a_\xi)+1$ 或 $\Sigma(\ell)\cap\Sigma^\Pi\neq\varnothing$ 的有限处集合的并。取一个不属于 Λ_2、其下方有理素数为 ℓ的有限处 λ。那么 $\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F})}$ 是绝对不可约的

根据命题 2.2.3(2)。为简便起见，我们将 $\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F})}$ 视为一个取值于 $\mathcal{K}_\lambda$ 的表示。由于 $[F(\mu_\ell):F]$ 与 ℓ 互素，表示 $\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F}(\mu_\ell))}$ 是半单的。我们断言，$\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F})}$ 是 $\mathrm{Gal}(F/F')$ 的一个不可约表示 ρ' 的诱导表示，其中 $F\subset F'\subset F(\mu_\ell)$ 是某个域扩张，且 $[F':F]$ 等于 $\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F}(\mu_\ell))}$ 的不可约直和项的个数。根据[CG13，引理 4.3]，只需证明 $\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F}(\mu_\ell))}$ 的不可约直和项两两不同构。由于 v 在 $F(\mu_\ell)$ 中非分歧，只需验证 $\rho_{\Pi,\lambda}|_{I_{F_v}}$ 的不可约直和项两两不同构。但这由 Λ_1' 的定义可得。

根据我们的定义 Λ_2 以及命题2.2.3(3)，$\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/\dot{F})}$ 在 $[a_\xi,b_\xi]$和 $\ell>2m(b_\xi-a_\xi)+1\geq(b_\xi-a_\xi)+2$ 是具有正则 Fontaine–Laffaille 权的晶体。因此，根据 $F'=F$由[LTX+24引理 4，必有7]，于是 (1) 得证。

对于 (2)：设 ξ 为 Π 的阿基米德权（见定义2.2.2）。设 Λ_2 为 E 在 (1) 中给出的有限处构成的有限集。我们证明，定义4.1.1中的四个条件各自只排除有限多个 λ 的有限处。E条件 (2) 为空。根据命题2.2.3(3)，若 ℓ的底层有理素数 λ满足 $\ell\geq 2(b_\xi-a_\xi)+2$且 $\Sigma(\ell)\cap\Sigma=\varnothing$，则条件 (3) 成立。根据命题2.2.3(2)，条件 (4) 自动成立。剩下只需考虑条件 (1)。

设 λ 是 E 的一个有限处，其底层有理素数 ℓ 满足

$$\Sigma(\ell)\cap\Sigma=\varnothing,\quad \ell>2(2m+1),\quad \ell>2(b_\xi-a_\xi)+2,$$

且对 Σ中的每个位置 v，都有 $\ell>\|v\|^{2m}$。于是

(a) ℓ 在 F中非分歧；(b) 对每个 $v\in\Sigma(\ell)$，Π_v 均非分歧；(c) Std $\circ\rho_{\Pi,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(F/F(\mu_\ell))}(\sqrt{\mathfrak{d}})$是绝对不可约的；由命题 4.2.2 可知，$\lambda(\mathrm{Gal}(F/F(\mu_\ell)))$是 G°充分的；(d) 对每个 $v\in\Sigma(\ell)$，命题 3.3.9 对局部变形问题 $\mathscr{D}^{\mathrm{FL}}$ 成立，该问题对应于$\rho_{\Pi,\lambda,v}$（见定义 3.3.8）；(e) 对每个 $v\in\Sigma$，命题 3.5.11 对局部变形问题 $\mathscr{D}^{\min}$ 成立，该问题对应于$\rho_{\Pi,\lambda,v}$（见定义 3.5.10）。

我们在设置 3.0.1 的框架下工作，并加上 $E=E_\lambda$ 以及设置 3.2.1 中 $(\Gamma,\rho,\chi)=(\mathrm{Gal}_F,\rho,\varepsilon_\ell^{2-N})$的设定，并固定一个同构 $\iota_\ell:\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。对于任意集合 $\mathscr{D}_\Sigma^\square:=\{\mathscr{D}_v^\square|v\in\Sigma\}$，其中$\mathscr{D}_v^\square$对每个 $v\in\Sigma$ 都是形式谱$R^\square_{\rho_{\Pi,\lambda,v}}$ 的一个不可约分支，我们定义一个全局变形问题（见定义 3.2.5）

$$\mathscr{S}(\mathscr{D}_\Sigma^\square):=\left(\overline{\rho}_{\Pi,\lambda},\varepsilon_\ell^{2-N},\Sigma\cup\Sigma(\ell),\{\mathscr{D}_v^\square\}_{v\in\Sigma\cup\Sigma(\ell)}\right),$$

where for $v\in\Sigma$, $\mathscr{D}_v^\square$ is the specified irreducible component (which is a local deformation problem by 命题 3.5.11（2））；并且对每个 $v\in\Sigma(\ell)$，$\mathscr{D}_v^\square$是局部变形 $\mathscr{D}^{\mathrm{FL}}$，$\square$ 关于$\rho_{\Pi,\lambda}$来自定义 3.3.8。由定理 4.3.2 可知 $R_{\mathscr{S}(\mathscr{D}_\Sigma^\square)}$ 是有限 $\mathcal{O}$-模。另一方面，由命题 3.2.8 以及 [CHT08推论 2.3 的证明5] 可知

$$\begin{aligned}\dim R_{\mathscr{S}(\mathscr{D}_\Sigma^\square)}\geq&1+\sum_{v\in\Sigma\cup\Sigma(\ell)}(\dim_\kappa L(\mathscr{D}_v)-\dim_\kappa H^0(\mathrm{Gal}_{F_v},\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})))-\dim_\kappa H^0(G_{F,\Sigma\cup\Sigma(\ell)},\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1))\\&-[F:\mathbb{Q}](\dim G_\kappa-\dim B_\kappa).\end{aligned}$$

由 (d)–(e) 可知，对每个位置 $v\in\Sigma$,

$$\dim_\kappa L(\mathscr{D}_v)-\dim_\kappa H^0(\mathrm{Gal}_{F_v},\mathrm{ad}^0(\overline{\rho})(1))=\begin{cases}[F_v:\mathbb{Q}_\ell](\dim G_\kappa-\dim B_\kappa) & \text{if } v|\ell\\ 0 & \text{if } v\nmid\ell\end{cases}.$$

假设 $\rho_{\Pi,\lambda}(\mathrm{Gal}(F/F(\mu_\ell)))$ 是充分的，则由定义 4.2.1 可知 $H^0(G_{F,\Sigma\cup\Sigma(\ell)},\mathrm{ad}^0(\rho)(1))=0$。因此我们有 $\dim R_{\mathscr{S}(\mathscr{D}_\Sigma^\square)}\geq 1$。特别地，谱 $R_{\mathscr{S}(\mathscr{D}_\Sigma^\square)}[\frac{1}{\ell}]$非零。

任取一个 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-点，其属于谱 $R_{\mathscr{S}(\mathscr{D}_\Sigma^\square)}[\frac{1}{\ell}]$。通过 ι_ℓ^{-1}和经典模性定理（例如，参见 [Gue11，定理 42]，并利用 Thorne的充分性条件加以强化 [Tho12]），我们得到一个 $\mathfrak{d}$- REASDC 表示 $\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)$，满足

- $\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)$ 在 $\Sigma \cup \Sigma^\infty$ 之外非分歧；
- 对于 Σ中的每个位置 v，存在 F 的一个开紧子群 $U_v \subset \mathrm{GL}_{2m}(F_v)$，它仅取决于$\Pi_v$，使得 $\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)_v$ 有被 U_v固定的非零向量；
- $\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)$的阿基米德权等于 ξ；
- $\rho_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}$ 与$\rho_{\Pi,\lambda} \otimes_{E_\lambda} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 剩余同构。

注意，第二个性质是命题 2.2.3(2)、推论 3.5.7 (此处适用，因为 $\ell > \|v\|^{2m}$)，以及同一伯恩斯坦分支中的不可约容许表示具有共同层级这一事实的推论。注意，满足前三个性质的 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示只有有限多个同构类。由$\mathrm{GL}_{2m}(\mathbf{A}_F)$ 的强重数一性质，当 GL_{2m}[PS79], 足够大时，ℓ，Π 是满足全部四个性质的唯一 $\mathfrak{d}$-REASDC 表示（相差一个同构）。$\mathrm{GL}_{2m}(\mathbf{A}_F)$。

根据命题 3.5.11，若能证明对于任意两个不同的集合 $\mathscr{D}_\Sigma^\square$和 $\mathscr{D}^\square_{\cdot,\Sigma'}$，$\mathfrak{d}$-REASDC 表示 $\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)$ 与 $\Pi(\mathscr{D}^\square_{\cdot,\Sigma'})$ 不同构，则定理即得。为此，取 Σ中的一个位置 v，并令 x 为 $\mathrm{Spec}\, R^\square_{\rho_{\Pi,\lambda,v}}\left[\frac{1}{\ell}\right]$ 上对应于 $\rho_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}$ 的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-点。$\mathrm{Spec}\, R^\square_{\rho_{\Pi,\lambda,v}}\left[\frac{1}{\ell}\right]$ 在 x 处的切空间维数等于

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^1(F_v, \mathrm{ad}^0(\rho)_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}) &= \dim G'_\kappa + \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{ad}^0(\rho)_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}) - \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\rho)_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}) \\
&= \dim G'_\kappa + \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{H}^2(F_v, \mathrm{ad}^0(\rho)_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}) \\
&= \dim G'_\kappa + \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\rho)_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}(1)).
\end{aligned}$$

由于根据命题 2.2.3(1)，$\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)_v$ 是 tempered，因此由 [BLGGT14 的证明及引理 1.3.2(1)], 有 $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{ad}^0(\rho)_{\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square),\iota_\ell}|_{F_v}(1)) = 0$。由命题 3.5.11(1) 可知，$\mathrm{Spec}\, R^\square_{\rho_{\Pi,\lambda,v}}\left[\frac{1}{\ell}\right]$ 在 x 处光滑。因此 x 不可能位于两个不可约分支上。逐一考虑 Σ中的每个位置 v，我们得出 $\Pi(\mathscr{D}_\Sigma^\square)$ 与 $\Pi(\mathscr{D}^\square_{\cdot,\Sigma'})$ 不同构。

该定理得证。 □

参考文献

[ABPS17] A.-M. Aubert、P. Baum、R. Plymen 和 M. Solleveld，《具有非连通中心的 p-进群的主系列》，Proc. Lond. Math. Soc. (3) **114** (2017), no. 5, 798–854, MR3653247。[Art13] J. Arthur，《表示的端oscopic 分类》，美国数学会学术出版物丛书，第 61 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2013。正交群与辛群。MR3135650[Bal12] S. Balaji，《G-值潜在半稳定变形环》，ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2012。博士论文——芝加哥大学。MR3152943[BG19] R. Bellovin 和 T. Gee，《G-值局部变形环与全局提升》，《Algebra Number Theory》13 (2019)，第 2 期，333–378。MR3927049[BK90] S. Bloch 和 K. Kato，《L-函数与动机的 Tamagawa 数》，《格罗滕迪克 Festschrift》，第 I 卷，1990，第 333–400 页。MR1086888[BLGG11] T. Barnet-Lamb、T. Gee 和 D. Geraghty，《Hilbert 模形式的 Sato-Tate 猜想》，《美国数学会杂志》**24** (2011), no. 2, 411–469, MR2748398。[BLGGT14] T. Barnet-Lamb、T. Gee、D. Geraghty 和 R. Taylor，《潜在自守性与权重改变》，《Ann. of Math.》(2) **179** (2014), no. 2, 501–609, MR3152941。[Boo19] a J. Booher，《当 $\ell \neq p$ 时 G 的 ℓ-值伽罗瓦表示的几何变形的构造》，《J. Number Theory》**155** (2019), 1–37, MR3875451。[Boo19] b，《正交与辛伽罗瓦表示的几何变形的构造》，《J. Number Theory》**195** (2019), 115–158, MR3867437。[BP19] J. Booher 和 S. Patrikis，《当 $\ell \neq p$ 时的 G-值伽罗瓦变形环》，《Math. Res. Lett.》**26** (2019), no. 4, 973–990, MR4028108。[Car12] A. Caraiani，《局部-全局相容性与单值化在邻近循环上的作用》，《Duke Math. J.》161 (2012)，第 12 期，2311–2413。MR2972460[Car14]，《$l = p$的单值化与局部-全局相容性》，《Algebra Number Theory》8 (2014)，第 7 期，1597–1646。MR3272276

[Car94] H. Carayol, 《取值于完备局部环的模形式与伽罗瓦表示》, 《 p-进单值化与 Birch–Swinnerton-Dyer猜想》（马萨诸塞州波士顿, 1991 1994, 213 237 1279611 ）, 第 – 页。[80] MR Cas W. Casselman, 《-进群的非分歧主系列 I：球函数》, 《Compositio Math.》(1980 3, 387 406 571057), 第 – 期。[13] MR CG F. Calegari 和 T. Gee, 《 $GL(n)$ 上自守伽罗瓦表示的不可约性， n 至多为 5》, 《Ann. Inst. Fourier》（格勒诺布尔） **63** 2013 5, 1881 1912 3186511 ( ), 第 – 期。MR CH G. Chenevier 和 M. Harris, 《自守伽罗瓦表示的构造，II》, 《Camb. J. Math.》1 (2013), 第 1, 53 73 3272052 – 期。MR CHT L. Clozel、M. Harris 和 R. Taylor, 《某些自守模 l 伽罗瓦表示的 l-进提升的自守性》, 《Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.》108 (2008), 1–181。附录 A 概述 Russ Mann 未发表的工作, 附录 B 由 Marie-France Vignéras 撰写。MR[08] 2418685 [16] CLH A. Caraiani 和 B. V. Le Hung, 《某些伽罗瓦表示中复共轭的像》, 《Compos. Math.》 **152** 2016 7, 1476 1488 3530448 ( ), 第 – 期。MR CZ R. Chen 和 J. Zou, 《通过 θ 提升建立偶正交群的局部朗兰兹对应》, 《Selecta Math.》(N.S.) 27 (2021), 第 5 期, 论文编号 88, 共 71 页。MR4308934[CZ24] , 《偶正交群与酉群的 Arthur 重数公式》, 预印本（2024）, 参见 arXiv:2103.07956。[FL82] J.-M. Fontaine 和 G. Laffaille, 《 p-进表示的构造》, 《Ann. Sci. École Norm. Sup.》(4) 15 (1982 4, 547 608 707328), 第 – 期。MR Gee T. Gee, 《指定类型的自守提升》, 《Math. Ann.》 [11] **350** 2011 1, 107 144 2785764 ( ), 第 – 期。MR Gue L. Guerberoff, 《酉型伽罗瓦表示的模性提升定理》, 《Compos. Math.》147 (2011), 第 4 期, 1022–1058。MR2822860[Hen00] G. Henniart, 《在 p-进域上证明 GL(n) 的朗兰兹猜想的一个简单证明》, 《Invent. Math.》 **139** 2000 2, 439 455 1738446 ( ), 第 – 期。[10] MR HSBT M. Harris、N. Shepherd-Barron 和 R. Taylor, 《Calabi–Yau 簇族与潜在自守性》, 《Ann. of Math.》(2 **171** 2010 2, 779 813 2630056) ( ), 第 – 期。MR HT M. Harris 和 R. Taylor, 《某些简单志村簇的几何与上同调》, 《数学年刊研究》第 151 卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 2001。附录由 Vladimir G. Berkovich 撰写。MR1876802[Ish24] H. Ishimoto, 《非准分裂奇特殊正交群表示的端oscopic 分类》, 《Int. Math. Res. Not. IMRN》 **2024** 2024 14, 10939 11012 4776199 ( ), 第 – 期。MR Jan J. C. Jantzen, 《表示论中的幂零轨道》, 《李理论》, 2004, 1 211 2042689 第 – 页。MR Kon T. Konno, 《关于朗兰兹分类以及 p-进群诱导表示不可约性的一则注记》, 《Kyushu J. Math.》 **57** 2003 2, 383 409 2050093 ( ), 第 – 期。MR KSZ M. Kisin、S. W. Shin 和 Y. Zhu, 《阿贝尔型志村簇的稳定迹公式》, 预印本（2021）, 参见 arXiv:2110.05381。[KT17] C. B. Khare 和 J. A. Thorne, 《潜在自守性与 Leopoldt猜想》, 《Amer. J. Math.》139 (2017), 第 5, 1205 1273 3702498 – 期。MR LTX Y. F. Liu、Y. C. Tian、L. Xiao、W. Zhang 和 X. W. Zhu, 《刚性共轭自对偶伽罗瓦表示的变形》, 《Acta Math. Sin.》(Engl. Ser.) **40** 2024 7, 1599 1644 4777059 ( ), 第 – 期。MR Pat S. Patrikis, 《伽罗瓦表示的变形与例外单值化》, 《Invent. Math.》205 2, 269 2016 336 3529115 ( ), 第 – 期。MR[Pen25a] H. Peng, 《特殊正交群与酉群的 Fargues–Scholze参数及挠消失》, 预印本（2025）, 参见 arXiv:2503.04623。[Pen25b] , 《极化动机的 Beilinson–Bloch–Kato 猜想》（2025）, 参见 arXiv:2509.18615。[Pen26] , 《算术 Gross–Prasad 框架中的高阶 Kolyvagin定理》, 博士论文, 即将出版（2026）。[PS79] I. I. Piatetski-Shapiro, 《重数一定理》, 《自守形式、表示与 L-函数》（纯数学专题研讨会论文集, 俄勒冈州立大学, 俄勒冈州科瓦利斯, 1977 1, 1979, 209 212 546599 ）, 第 部分, 第 – 页。[24] MR Shi S. W. Shin, 《从经典群到一般线性群的弱转移》, 《Essent. Number Theory》（2024 1, 19 62 4752712）, 第 – 期。MR[Sho16] J. Shotton, 《 $\overline{\mathrm{GL}_2}$ 的局部变形环与当 $\ell \neq p$ 时的 Breuil–Mézard猜想》, 《Algebra Number Theory》 **10** 2016 7, 1437 1475 3554238 ( ), 第 – 期。MR Sho《当 $l \neq p$ 时的 Breuil–Mézard猜想》, 《Duke Math. J.》( ), 第 – 期。MR Sol M. Solleveld, 《关于准分裂约化-进群的主系列表示》, 《Pacific J. Math.》(2025), 第 2 期, 269–327。MR4862261[Sta18] T. Stacks Project作者, 《Stacks Project》（2018）。[Tay08] R. Taylor, 《某些自守模 l 伽罗瓦表示的 l-进提升的自守性。II》, 《Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.》 **108** 2008 183 239 2470688 ( ), –。MR Tho J. Thorne, 《剩余像较小的-进伽罗瓦表示的自守性》, 《J. Inst. Math. Jussieu》11 (2012), 第 4 期, 855–920。附录由 Robert Guralnick、Florian Herzig、Richard Taylor 和 Thorne 撰写。MR2979825[TW95] R. Taylor 和 A. Wiles, 《某些 Hecke 代数的环论性质》, 《Ann. of Math.》(2 3, 553 141 1995 572 1333036) ( ), 第 – 期。MR

[TY07] *R. Taylor* 与 *T. Yoshida*，局部与整体朗兰兹对应的相容性，《美国数学会杂志》*20*（2007），2，467–493，2276777），第 – 期。*MR Wal J.-L. Waldspurger*，p-进群的 *Plancherel* 公式（据 [03] *Harish-Chandra*），《*J. Inst. Math. Jussieu*》**2** 2003，2，235–333，1989693 *( )*，第 – 期。*MR Whi D. Whitmore*，约化群的 *Taylor–Wiles* 方法，博士论文，*2023*。[Wil95] *A. Wiles*，模椭圆曲线与费马大定理，《*Ann. of Math.*》*(2) 141 (1995)*，第 *3* 期，*443–551*。*MR1333035*[YZ25] *X. Yang* 与 *X. Zhu*，阿贝尔型志村簇上同调的一般部分（*2025*），可于 *arXiv:2505.04329* 获取。[Zha25] *X. Zhang*，正交群与辛群的 *Taylor–Wiles* 方法的自守侧（*2025*），可于 *arXiv:2411.04897* 获取。[Zhu24] *X. Zhu*，关于整 *Satake* 同构的一个注记，算术几何，*2024*，第 *469–489* 页。*MR4812712* [23]

Hao Peng
麻省理工学院数学系，剑桥，马萨诸塞州 02139，美国
电子邮件：hao_peng@mit.edu

Dmitri Whitmore DPMMS，威尔伯福斯路，剑桥
CB3 0WA，英国电子邮件：dw517@cam.ac.uk