arXiv:2602.04779v1 [math-ph] 4 Feb 2026

W算子的几何实现

Lu-Yao Wang[a, b 1]

[a]中国北京 *101408*，北京数学科学与应用研究院[b]中国北京 *100084*，清华大学丘成桐数学科学中心

摘要

随机矩阵理论、枚举几何和共形场论中出现的某些可积层级，由 Virasoro/W-代数约束及其 W-表示所支配。受高斯厄米 β-系综以及近期关于超可积配分函数层级的研究启发，我们搭建了一座明确的桥梁，将对称群类代数与玻色福克空间相连，并进一步联系到几何。

在代数方面，我们将换位类和分解为切割与连接通道，并在对称函数环上恢复经典的切割与连接算子。在几何方面，我们利用 Grojnowski-Nakajima 福克空间同一，将阶梯算子 $E_1 = [W_0, p_1]$ 实现为 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbb{C}^2)$上的 Hecke 对应，并将三次生成元 W_0 解释为正规序三重关联对应。随后，我们说明 β-变形的三次生成元 $W_0^{(\beta)}$ 如何通过背景荷参数化，由高斯 β-系综的 Ward 恒等式/Virasoro 约束导出，从而阐明其共形场论意义。最后，利用 Grojnowski-Nakajima 海森堡-福克同构 $\Phi_{\mathrm{Hilb}}\colon \Lambda \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\geq 0} H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$，我们将所得的交换子层级传递到希尔伯特概形上，其中 E_1 由 Hecke 对应（添加一个点）实现，而对角修正项则通过等变局部化，根据切丛 $T\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$的 T-权以及典范丛 ν计算得到。由此建立的几何实现框架统一了 β-变形的可积结构，并为研究箭图规范理论配分函数提供了新工具。

目录

1 引言 1 **2 对称群中心与特征映射 6** **3 梯式构造与 Jucys–Murphy 提升 8** 3.1 分层块代数与升算子.8 3.2 Jucys-Murphy 元与提升 .10 3.3 高斯 β-系综、Virasoro 与三次 $W_0^{(\beta)}$ .11 **4 几何希尔伯特概形上的度量实现 13** 4.1 Nakajima-Grojnowski 福克空间 .13 4.2 Hecke对应与算子 E_1 .15 4.3 $W_0^{(\beta)}$ 在希尔伯特概形 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 上的几何实现 .16 4.4 交换图与边钩 .21 4.5 由 $W_{[2]}$ 生成的几何层级算子. 22

1 引言

物理动机。

矩阵模型配分函数由 Ward 恒等式控制，这些恒等式组织成 Virasoro 约束，更一般地说，组织成 W-代数约束 [1, 2]。对于厄米高斯 β 系综，这些约束可写成作用于时间变量（或幂和）的微分算子

[1]wangluyao@bimsa.cn

作用于 $Z_G^{(\beta)}$ [3, 4]。等价地，许多此类配分函数都可表示为 W-表示，其形式为

$$Z(\mathbf{p}) = \exp\big(\mathcal{W}(\mathbf{p}, \partial_{\mathbf{p}})\big) \cdot 1,$$

其中， $\mathcal{W}$ 是海森堡模 [5, 6]的有限线性组合（通常为三次组合）。这一视角与 β变形层级结构 [7, 20]中的超可积性（具有因式分解平均值的舒尔/杰克展开）密切相关。

第二个物理输入是四维 $\mathcal{N} = 2$ 规范理论的 Ω-背景，其中变形参数 ε_1， ε_2 进入瞬子配分函数，且通常取$\beta = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ [8, 21]。在 AGT 型对应中，这类配分函数被认作二维共形场论 [9], 的共形块，而自由场实现会在改进应力张量中引入背景荷Q ，从而使中心荷 [4, 10]发生偏移。

从这一角度看，一个关键问题是：
能否以一种与Ω-背景参数及箭图规范理论相容的方式，对作为 β系综和规范理论配分函数基础的生成 W-算子（及其生成的可积层级结构）进行几何实现？

中岛箭图簇提供了一个自然的几何舞台候选：它们在几何上构造瞬子模空间，并携带海森堡/杨代数的典范作用[11–15]。

数学动机

经典切并算子提供了一种高效方法，用于编码对称群共轭类上换位的作用，并将赫尔维茨型计数问题转化为对称函数生成级数的微分方程 [16–19, 22]。特别是，著名的赫尔维茨算子是幂和变量上的三次微分算子，其特征基由舒尔函数构成，而其谱数据控制着黎曼球面上的简单分歧覆盖。从对称函数的角度来看，该算子作用于代数 Λ ，所依据的是幂和标准基以及 Macdonald 引入的经典内积 [7]。

Okounkov 的一项根本性洞见是，切并算子和 Hurwitz 理论背后的福克空间形式体系，自然延伸至几何曲线计数以及支撑枚举理论的可积结构。具体而言，随机分拆和赫尔维茨生成级数被实现为 τ-函数，而相关层级（KP/Toda 及其变体）则由玻色福克空间上的算子约束控制 [18, 22, 24]。这一视角搭建起一座概念桥梁，连接对称函数微分算子与几何表示论；在几何表示论中，这些算子通过对应以及典范类的（量子）乘法得以几何实现。

与此同时，平面上点的希尔伯特概形的等变（上）同调带有海森堡代数的自然作用，该作用由 Grojnowski 和 Nakajima[12, 13, 25] 构造。更准确地说，直和

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}} = \bigoplus_{n \geq 0} H_T^*\big(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)\big)$$

自然同构于由对称函数构成的玻色福克空间；在此同一化下，中岛创生与湮灭算子实现了通常的海森堡代数在 Λ 上的作用。

Okounkov 的工作将这一对应提升为“几何可积性”的典范： （i）关于 Hilb($\mathbb{C}^2$) 及相关模空间上的（量子）乘法与曲线计数的算子描述，可以直接在福克空间中表述，其谱/特征值数据可用分拆和方格内容 [23, 24] 表示； （ii）更一般地，对于 Nakajima 箭图簇，Maulik–Okounkov 的工作构造了稳定包络，并利用

它们生成 R-矩阵和量子群作用（杨ian/量子仿射/环面型），从而得到量子（差分/微分）方程，其解由相同的不动点组合 [14]编码。

这一福克空间表示在几何表示论中、Macdonald多项式的研究中，以及通过椭圆Hall代数及其洗牌模型实现（量子）环面代数的过程中，都发挥了核心作用 [15, 26]。

主要结果

本文旨在给出基本 W-生成元及其在希尔伯特概形上的层级结构的一种显式且可计算的实现。具体而言，我们在这两种观点之间建立了一个自包含且明确的桥梁。我们从群代数 $\mathbb{C}[S_n]$ 出发，将换位类和分解为切割与连接通道，并计算其在循环指标映射下到对称函数环 Λ 中的像，从而恢复经典的切割与连接算子及其对角修正项。随后，我们引入一个三次海森堡算子 W_0 和一种梯式构造，将对称群作用提升到希尔伯特概形的等变（上）同调上。经典情形 $\beta = 1$ 及其 β-变形（Jack 情形）均得到统一处理。

一个关键的技术要点是，经过对海森堡生成元进行适当归一化后，正规序只会产生依赖于 β的对角修正，而由此得到的 W算子层级的最高阶导数（主符号）部分与 β无关。这带来了与欧拉算子相容的清晰分级结构，并表明底层的切割与连接图（分裂与连接循环的主要组合结构）在这些变形中具有普适性，只有 β 会改变低阶项和对角权重。从更广泛的视角来看，我们的构造可视为对经典 Hurwitz 切割与连接形式体系的一种几何与表示论诠释 [16, 17, 22],，并有望应用于精细 Hurwitz 理论、曲线计数和可积层级。近期， β变形矩阵模型及其带有 W表示的配分函数层级已得到系统研究；参见 [27], 中的 WLZZ 模型，其中分析了超可积性以及 Schur/Jack 特征标展开在一大类（β变形）矩阵模型中的表现。

基于 上述分析，本文的主要结果可概括如下 .

(1) **从对换到切割/合并及三次海森堡算子。**

定理 1.1. （定理 *2.3*）在特征映射 Φ_n下， $\Lambda^{(n)}$ 上的 $K^{(n)}$ 切割 和$K^{(n)}$ 连接 作用由以下微分算子给出

$$\Phi_n \circ K^{(n)}_{\mathrm{cut}} \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b\geq 1} (a+b)\, p_a p_b\, \partial_{p_{a+b}}, \quad \Phi_n \circ K^{(n)}_{\mathrm{join}} \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b\geq 1} ab\, p_{a+b}\, \partial_{p_a} \partial_{p_b}.$$

(2) **梯式构造和 Jucys-Murphy 提升。** （引理3.1 和3.2）

我们引入一种分层块代数和一个升算子 E，其作用在循环指标映射下与微分算子 $E_1 = [W_0, p_1] = \sum_{m\geq 1} m\, p_{m+1} \partial_{p_m}$.交织。该构造可通过 Jucys-Murphy 元素获得群论解释，并为对称群侧与希尔伯特概形上的几何实现搭建了一座便捷的桥梁。

(3) **希尔伯特概形上的几何实现与 β-变形。**

定理1.2。 *(定理4.1)* 存在唯一的分次线性同构

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} : \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}, \quad \Phi_{\mathrm{Hilb}} = \bigoplus_{n\geq 0} \Phi_{\mathrm{Hilb},n}, \quad \Phi_{\mathrm{Hilb},n} : \Lambda^{(n)} \xrightarrow{\sim} H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(X)),$$

使得

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}(1) = |0\rangle \in H_T^*(\mathrm{Hilb}^0(X)) \quad \textit{and} \quad \Phi_{\mathrm{Hilb}}\big(p_k\, f\big) = \frac{1}{k}\,\alpha_{-k}\,\Phi_{\mathrm{Hilb}}(f) \quad (k \geq 1,\ f \in \Lambda).$$

等价地， Φ_{Hilb} 交织海森堡作用，其归一化为 (21):

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ (k\, p_k) = \alpha_{-k} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}, \qquad \Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ \partial_{p_k} = \alpha_k \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}} \qquad (k \geq 1).$$

定理 1.3. （定理 *4.5*）在 $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ 上定义三次算子为

$$W_0^{(\beta)} = \frac{\beta}{2} \sum_{i,j\geq 1} :a_{-i}a_{-j}a_{i+j}: + \frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1} :a_{-(i+j)}a_i a_j: + \frac{1}{2} \sum_{k\geq 1} \Big((1-\beta)(k-1) + 2\beta N\Big) a_{-k}a_k,$$

其中 $a_{\pm k}$ 是海森堡算子（等同于 (22)），且 $:\cdot:$ 表示关于福克分次的正规序。设 $W_0^{(\beta)}$ ，geo 为 $\mathcal{F}_{Hilb}$ 上由同一正规序表达式 (26) 定义的算子，但将其解释为 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 上的对应算子，该算子通过对中岛关联对应作卷积得到（对于对角项，则通过与产生正规序修正项的典范等变上同调类作杯积得到）。则

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W_0^{(\beta)} \;=\; W_{0,\mathrm{geo}}^{(\beta)} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}.$$

（4）**层级算子与几何解释**。

定理 1.4. （定理 *4.22*）对所有 $n \geq 2$ ，算子 $W^{(n)}$ Hilb 在定义*4.18* 中定义，并满足以下性质。

1. 与福克同构的相容性。 对于所有 $n \geq 1$，我们有交织关系 $\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W_{(n)} = W^{(n)}$ Hilb $\circ\, \Phi_{\mathrm{Hilb}}$.*2.* 首个非平凡层级 $n = 2$。 算子 $W^{(2)}$ Hilb 是次数为1的哈密顿量与赫克步骤的交换子:

$$W_{\mathrm{Hilb}}^{(2)} = [\, W_{\mathrm{Hilb}}^{(1)}, E_{1,\mathrm{Hilb}}\,].$$

从几何上看， $W^{(2)}$ Hilb 由以下两个复合对应之差表示

$$\mathbf{Hilb}_n \xrightarrow{E_{1,}\ \mathrm{Hilb}} \mathbf{Hilb}_{n+1} \xrightarrow{W^{(1)}\ \mathrm{Hilb}} \mathbf{Hilb}^{n+2}, \quad \mathbf{Hilb}_n \xrightarrow{W^{(1)}\ \mathrm{Hilb}} \mathbf{Hilb}_{n+1} \xrightarrow{E_{1,}\ \mathrm{Hilb}} \mathbf{Hilb}^{n+2}.$$

3. 高阶层级作为迭代交换子。 对于 $n \geq 2$ 我们有

$$W_{\mathrm{Hilb}}^{(n)} = \mathrm{ad}_{W_{\mathrm{Hilb}}^{(1)}}^{n-1}(E_{1,\mathrm{Hilb}}).$$

特别地， $W_{(n)\,\mathrm{Hilb}}$ 将 $H_T^*(\mathrm{Hilb}^N)$ 映射到 $H_T^*(\mathrm{Hilb}^{N+n})$，其表示为对所有将单个赫克对应 $E_{1,\mathrm{Hilb}}$ 与 $W_{[2],\mathrm{Hilb}}$ 的$(n-1)$ 个副本交错排列的方式取交错和（或者等价地，沿着总长度为 n 的嵌套理想旗 $I_N \supset I_{N+1} \supset \cdots \supset I_{N+n}$，将 $W^{(1)}$ Hilb的$(n-1)$ 个副本交错排列）。

总之，我们将讨论群代数 $\to$ 、对称函数 $\to$ 与希尔伯特概形之间的关系（这里以升算子 E_1 为例）：

$$\begin{array}{ccccc}
Z_n\ (\mathrm{block/JM}) & \xrightarrow{\Phi_n} & \Lambda^{(n)} & \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{Hilb}}^{(n)}} & H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \text{“add one point”}} & & \big\downarrow{\scriptstyle E_1 \text{ or } E_i} & & \big\downarrow{\scriptstyle C \text{ or } C_i} \\
Z_{n+1} & \xrightarrow[\Phi_{n+1}]{} & \Lambda^{(n+1)} & \xrightarrow[\Phi_{\mathrm{Hilb}}^{(n+1)}]{} & H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{C}^2))\ .
\end{array}$$

组织

在第 3 节，我们从对称群侧构造切割与连接算子，并将升算子 E_1 与 Jucys-Murphy 提升联系起来。在第 3.3 节，我们以高斯厄米 β系综为核心：推导 Virasoro 约束，并将其连同背景荷诠释一起纳入三次约束 $W_0^{(\beta)}$ 。随后，我们通过 Hecke 对应和关联对应，在几何上将这些算子实现于 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbb{C}^2)$ 上，并在第 4 节发展交换图演算。特别地，我们利用 Grojnowski-Nakajima 海森堡-福克同构 $\Phi_{\mathrm{Hilb}}\colon\ \Lambda \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\geq 0} H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ 将层级算子传递到希尔伯特概形上。最后，我们总结这项工作，并列出受物理启发的研究方向（超可积性、BPS/CFT 和变形可积层级）。

2 对称群中心与特征映射

对称群中心与特征映射

对于对称群 S_n，令 $K^{(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$ 表示群代数 $\mathbb{C}[S_n]$ 中所有对换之和。其中心为

$$Z_n := Z(\mathbb{C}[S_n]) = \{z \in \mathbb{C}[S_n] \mid zx = xz,\ \forall x \in \mathbb{C}[S_n]\}.$$

它有一个由分拆 $\lambda \vdash n$ 标记的标准基：类和

$$C_\lambda := \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\lambda} \sigma,$$

其中 $\mathcal{C}_\lambda \subset S_n$ 是循环类型为 λ 的共轭类。

令 $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ 为由幂和生成的对称函数代数，赋予分次结构 by

$$\deg(p_k) = k, \qquad \Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^{(n)}.$$

则 $\dim_{\mathbb{C}} Z_n = \#\{\lambda \vdash n\} = \dim_{\mathbb{C}} \Lambda^{(n)}$。

定义 2.1 (特征映射／循环指标映射 Φ_n)。 定义一个线性映射

$$\Phi_n : Z_n \longrightarrow \Lambda^{(n)}$$

将类和基映到幂和：

$$\Phi_n(C_\lambda) = p_\lambda := \prod_i p_{\lambda_i} \qquad (\lambda \vdash n). \tag{1}$$

引理 2.2 (同构)。 映射 $\Phi_n :\ Z_n \to \Lambda^{(n)}$ 定义于 (1) 是一个向量空间同构。

证明。 两边都有一个由分拆索引的基，$\lambda \vdash n$ 将一个基一一映到另一个基。

□

来自换位类和的切割/合并

K的作用 $^{(n)}$ 分解为切割项和合并项

$$K^{(n)} = K^{(n)}_{\text{cut}} + K^{(n)}_{\text{join}},$$

其中，$K^{(n)}$ 切割 收集将一个置换的循环切分为两个循环的所有对换，而$K^{(n)}$ 连接 收集将两个循环合并为一个循环的所有对换。下面的定理给出了作用于 Λ上的相应微分算子。

定理 2.3 （切割/合并算子）。 在特征映射 Φ_n 下，Λ 上的 $K^{(n)}$ 切割 和$K^{(n)}$ 连接 作用由以下微分算子给出

$$\Phi_n \circ K^{(n)}_{\text{cut}} \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b \geq 1} (a+b)\, p_a p_b\, \partial_{p_{a+b}}, \tag{2}$$

$$\Phi_n \circ K^{(n)}_{\text{join}} \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b \geq 1} ab\, p_{a+b}\, \partial_{p_a} \partial_{p_b}. \tag{3}$$

证明。 我们从组合角度根据置换的循环结构进行论证。

切分算子。考虑一个置换 $\sigma \in S_n$，其中包含一个长度为 $a+b$ 的循环，

$$(c_1\, c_2\, \ldots, c_{a+b}),$$

并假设 σ 的所有其他循环都保持不变。左乘一个对换 (ij)，可能会将这个 $(a+b)$ 循环切割成两个长度分别为 a 和 b 的循环。首先，对于一个固定的长度为 $a+b$ 的循环，我们计算有多少个对换会产生给定的有序循环长度对 $(a,\ b)$。

在给定的 $(a+b)$ 循环上选取一个切割点。在给定位置切割，会产生一对有序循环：一个长度为 a，另一个长度为 b。沿着该循环恰好有 $a+b$ 个不同的切割位置，因此有 $a+b$ 个对换可以实现这样的切割。

在对称函数代数中，因子 p_{a+b} 记录了一个长度为 $a+b$ 的循环的存在。作用于 p_λ 时，$\partial_{p_{a+b}}$ 会“提取”出这样一个循环，并使其重数减一。接着，因子 $p_a p_b$ 记录了两个长度分别为 a 和 b 的结果循环。因此，暂且忽略任何对称因子，“将一个长度为 $a+b$ 的循环切割成长度为 a 和 b 的循环”这一贡献由算子编码为

$$(a+b)\, p_a p_b\, \partial_{p_{a+b}}.$$

接下来，我们对所有无序对 (a,b) 求和 $\in \mathbb{Z}^2_{\geq 1}$。在求和式 $\sum_{a,b\geq 1}(\cdots)$ 中，无序对 (a,b) 和 (b,a) 描述的是同一种切割操作：它们都对应于将一个长度为 $a+b$ 的循环切割成两个长度为 $\{a,b\}$ 、不区分顺序的循环。因此，每个无序对 $\{a,b\}$ 都被计算了两次，我们必须除以 2 来纠正这种重复计数。由此得到

$$\Phi_n \circ K^{(n)}_{\mathrm{cut}} \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b\geq 1} (a+b)\, p_a p_b\, \partial_{p_{a+b}},$$

也就是 (2)。

合并算子。 现在我们考虑将两个循环连接成一个更长循环的对换。设 σ 包含两个不相交循环

$$(c_1\ \ldots, c_a), \qquad (d_1\ \ldots, d_b)$$

长度分别为 a 和 b。若对换 (ij) 中的 i 位于第一个循环上，而 j 位于第二个循环上，则这两个循环会连接成一个长度为 $a+b$ 的单一循环。

对于一对固定的、长度分别为 a 和 b 的循环，将它们连接起来的对换数量为 ab：我们可以从第一个循环中任选 a 个点之一，再从第二个循环中任选 b 个点之一，因此共有 $a\cdot b$ 种可能的对换。

在幂和语言中，长度为 a 的循环贡献因子 p_a，而长度为 b 的循环贡献 p_b。因此，$\partial_{p_a}\partial_{p_b}$ 移除长度为 a 和 b 的一对循环，而 p_{a+b} 插入长度为 $a+b$ 的连接后循环。再次忽略对称因子，将长度为 a 和 b 的两个循环连接起来的局部操作可表示为

$$ab\, p_{a+b}\, \partial_{p_a}\partial_{p_b}.$$

对所有正整数 $a,\ b$ 求和会将无序对 $\{a,b\}$ 计算两次（无序对 $(a,\ b)$ 和 $(b,\ a)$ 描述的是同一个连接操作），因此我们再次必须除以 2。因此

$$\Phi_n \circ K^{(n)}_{\mathrm{join}} \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b\geq 1} ab\, p_{a+b}\, \partial_{p_a}\partial_{p_b},$$

这正是（3）。证明完毕。 □

推论 2.4（切接算子）。归一化换位类和 $K^{(n)}[2]$ 对应经典切接算子

$$W_{[2]} = \Phi_n \circ \big(K^{(n)}_{[2]}\big) \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b\geq 1} \Big((a+b)\, p_a p_b\, \partial_{p_{a+b}} + ab\, p_{a+b}\, \partial_{p_a} \partial_{p_b} \Big). \tag{4}$$

那么，我们可以将这一过程绘制如下：

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathbb{C}[S_n]) & \xrightarrow{K^{(n)}_{[2]}} & Z(\mathbb{C}[S_n]) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_n} \\ \Lambda^{(n)} & \xrightarrow[W_{[2]}]{} & \Lambda^{(n)} \end{array} .$$

这个方块的交换性正是推论 1.2 的内容，它通过循环指标映射，将对换类和 $K^{(n)}_{[2]}$ 切接算子 $W_{[2]}$ 的作用对应起来。

为了便于随后引入背景荷，我们将切接算子改写为以下形式：

$$\begin{aligned} W_{[2]} &= \Phi_n \circ \big(K^{(n)}[2]\big) \circ \Phi_n^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{a,b\geq 1} (a+b)\, p_a p_b\, \partial_{p_{a+b}} - \sum_{k\geq 1} (k-1) k\, p_k\, \partial_{p_k} \Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\sum_{a,b\geq 1} ab\, p_{a+b}\, \partial_{p_a} \partial_{p_b} + \sum_{k\geq 1} (k-1) k\, p_k\, \partial_{p_k} \Big). \end{aligned} \tag{5}$$

注 2.5 (对角部分与稳定性)。 推论 *2.4* 中的算子应理解为这一族算子的稳定极限：$\{K^{(n)}_{\text{切割}}, K^{(n)}_{\text{连接}}\}_{n\geq 1}$。也就是说，对于固定的 a、b，相应的微分算子在所有充分大的 n 下都相同。特别地，切接算子 $W_{[2]}$ 不含对角部分：不存在与 $\sum_k k p_k \partial_{p_k}$ 成正比的项。当我们之后引入显式的对角算子 $D = \sum_k (k-1) k\, p_k \partial_{p_k}$ 并写成 $W_{[2]} = C + J + D$ 时，分裂

$$C \mapsto C - \tfrac{1}{2} D, \qquad J \mapsto J + \tfrac{1}{2} D$$

纯粹是代数性的，并且不对应于额外的组合切接规则；其主要目的是分离出对角部分，该部分将在 β–系综以及等变几何设定中被解释为背景荷。

设对 $k > 0$有 $\alpha_{-k} = p_k$、 $\alpha_k = k\, \partial_{p_k}$，从而$[\alpha_m, \alpha_n] = m\, \delta_{m+n,\, 0}$。于是我们可以引入切接算子的海森堡实现，即三次海森堡算子

$$W_{[2]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1} \big(: \alpha_{-i} \alpha_{-j} \alpha_{i+j} : + : \alpha_{-(i+j)} \alpha_i \alpha_j : \big). \tag{6}$$

3 梯式构造与Jucys–Murphy提升

3.1 分层块代数与升算子

设 $Z_n := Z(\mathbb{C}[S_n])$为群代数的中心（等价地，即类代数）。记

$$\ell_n : \mathbb{C}[S_n] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_{n+1}]$$

将 $n+1$ 固定为一个 1-循环的标准嵌入。令

$$\pi_{n+1} : \mathbb{C}[S_{n+1}] \to Z_{n+1}, \qquad \pi_{n+1}(x) := \frac{1}{(n+1)!} \sum_{g \in S_{n+1}} g\, x\, g^{-1}$$

为中心投影。我们定义中心升算子

$$r_n := r_n^{\mathrm{cen}} := \pi_{n+1} \circ \ell_n \ : \ Z_n \to Z_{n+1}.$$

分层块代数。 考虑分层块代数

$$\mathcal{L}^{\mathrm{cen}} = \bigoplus_{n\geq 0} \Big(\mathrm{End}(Z_n)\, e_{n,n} \ \oplus \ \mathrm{Hom}(Z_n, Z_{n+1})\, e_{n+1,n} \Big),$$

其乘法与矩阵乘法类似，显而易见。

换位类和 w_0。 令

$$K_{[2]}^{(n)} := \sum_{1\leq i<j\leq n} (ij) \ \in Z_n$$

为所有对换之和（一个中心元）。设

$$w_0^{(n)} := \frac{1}{2} K_{[2]}^{(n)} \in Z_n, \qquad w_0 := \sum_{n\geq 0} L_{w_0^{(n)}}\, e_{n,n}, \qquad p := \sum_{n\geq 0} r_n\, e_{n+1,n},$$

其中 $L_{w_0^{(n)}}$ 表示在 Z_n上左乘 $w_0^{(n)}$ 。

定义（中心化）阶梯算子

$$E := [w_0, p] = \sum_{n\geq 0} \Big(L_{w_0^{(n+1)}} \circ r_n - r_n \circ L_{w_0^{(n)}} \Big)\, e_{n+1,n} \ \in \ \mathcal{L}^{\mathrm{cen}}. \tag{7}$$

特征映射。 设 $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ 为以幂和变量表示的对称函数代数， $\Lambda^{(n)}$ 为其次数为 n 的部分。对每个分拆 $\lambda \vdash n$，令

$$K_\lambda := \sum_{\sigma\in S_n :\, \mathrm{type}(\sigma)=\lambda} \sigma \ \in Z_n$$

为类和。定义特征映射（未归一化）

$$\Phi_n : Z_n \xrightarrow{\sim} \Lambda^{(n)}, \qquad \Phi_n(K_\lambda) := p_\lambda := \prod_i p_{\lambda_i}. \tag{8}$$

引理 3.1 （中心梯算子的交织）。 设

$$E_1 := [W_{[2]}, p_1] = \sum_{m\geq 1} m\, p_{m+1}\, \partial_{p_m}.$$

那么对所有 $z \in Z_n$，都有 $\Phi_{n+1}(Ez) = E_1\big(\Phi_n(z)\big)$. 等价地，作为映射有 $\Phi_{n+1} \circ E = E_1 \circ \Phi_n\, Z_n \to \Lambda^{(n+1)}$。

证明。 只需在类和基 $\{K_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ 上验证即可。

首先注意， $p_n(K_\lambda) = K_{\lambda\cup(1)}$，因为 ℓ_n 保持 $n+1$ 不变，而中心投影 π_{n+1}会将一个元素替换为其共轭类和。

接下来注意到，(7) 中的交换子完全抵消了 $\{1,\dots,n\}$内部的对换贡献，只留下涉及新字母 $n+1$ 的那些对换。具体而言，

$$K^{(n+1)} - \ell_n\big(K^{(n)}\big) = \sum_{i=1}^{n} (i, n+1) =: J_{n+1},$$

Jucys-Murphy 元。作用于循环类型为 λ 的置换时，每个对换 $(i, n+1)$ 都会将 $n+1$ 插入包含 i 的循环中。如果该循环的长度为 m，则恰好有 m 个可能的插入位置，因此得到因子 m。因此，我们得到显式的类和公式

$$E(K_\lambda) = \sum_{m \geq 1} m\, m_m(\lambda)\, K_{\lambda^{(m \to m+1)}},$$

其中， $m_m(\lambda)$是 λ中部件 m 的重数，而 $\lambda^{(m \to m+1)}$ 是将 λ 中的一个部件 m 替换为 $m+1$后得到的 $n+1$的分拆。

应用 Φ_{n+1} 可得

$$\Phi_{n+1}(EK_\lambda) = \sum_{m \geq 1} m\, m_m(\lambda)\, p_{\lambda^{(m \to m+1)}} = \sum_{m \geq 1} m\, p_{m+1}\, \partial_{p_m}(p_\lambda) = E_1(p_\lambda),$$

正如所要证明的。

于是，JM 提升的交换图可绘制如下。

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{E=[w_0,p]} & Z_{n+1} \\ {\scriptstyle \Phi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{n+1}} \\ \Lambda^{(n)} & \xrightarrow[E_1]{} & \Lambda^{(n+1)} \end{array} .$$

□

3.2 Jucys-Murphy 元与提升

回忆一下第（$n+1$）个 Jucys-Murphy 元

$$J_{n+1} := \sum_{i=1}^{n} (i, n+1) \in \mathbb{C}[S_{n+1}].$$

利用类代数（中心） $Z_n := Z(\mathbb{C}[S_n])$、标准嵌入 ℓ_n以及中心投影 π_{n+1}的定义，我们考虑如下构造。

中心化提升算子。 定义中心化 Jucys-Murphy 提升算子

$$T_n^{\mathrm{cen}} : Z_n \to Z_{n+1}, \qquad T_n^{\mathrm{cen}}(z) := \pi_{n+1}\big(J_{n+1}\, \ell_n(z)\big). \tag{9}$$

这一修正对于保持特征映射为同构至关重要 $Z_n \simeq \Lambda^{(n)}$。由于我们已知特征映射的定义来自（8），可以构造 Jucys-Murphy 提升算子。

引理 3.2 （Jucys-Murphy 提升与升算子）。 设

$$E_1 := \sum_{m \geq 1} m\, p_{m+1}\, \partial_{p_m} : \Lambda^{(n)} \to \Lambda^{(n+1)}.$$

则对所有 $z \in Z_n$， 我们有交织恒等式

$$\Phi_{n+1}\big(T_n^{\mathrm{cen}}(z)\big) \;=\; E_1\big(\Phi_n(z)\big). \tag{10}$$

等价地，交换图

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{T_n^{\mathrm{cen}}} & Z_{n+1} \\ {\scriptstyle \Phi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{n+1}} \\ \Lambda^{(n)} & \xrightarrow[E_1]{} & \Lambda^{(n+1)} \end{array}$$

可交换。

证明。只需在类和基上验证（10）$\{K_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$。

固定 $\lambda\vdash n$，并考虑一个循环类型为 λ的置换 σ。乘以一个对换（$i,n+1$）会将新字母 $n+1$ 插入 σ 中包含 i的那个循环。若该循环的长度为 m，则恰好有 m个插入位置（等价地，沿该循环有 m 种 i 的选择），由此得到的置换，其循环类型是将一个部分 m 替换为 $m+1$而得到的。对所有 $i=1,\dots,n$ 求和后再中心化，即得

$$T_n^{\mathrm{cen}}(K_\lambda)=\sum_{m\geq 1} m\, m_m(\lambda)\, K_{\lambda^{(m\to m+1)}},$$

其中 m_m(λ)是部分 m在 λ中的重数，而 $\lambda^{(m\to m+1)}$表示由 λ 将一个部分 m 替换为 $m+1$所得到的 $n+1$的分拆。应用 Φ_{n+1} 即得

$$\Phi_{n+1}\big(T_n^{\mathrm{cen}}(K_\lambda)\big)=\sum_{m\geq 1} m\, m_m(\lambda)\, p_{\lambda^{(m\to m+1)}}.$$

另一方面，

$$E_1(p_\lambda)=\sum_{m\geq 1} m\, p_{m+1}\,\partial_{p_m}(p_\lambda)=\sum_{m\geq 1} m\, m_m(\lambda)\, p_{\lambda^{(m\to m+1)}},$$

这与前一表达式相符，从而证明了（10）。 □

3.3 高斯 β系综、Virasoro 与三次 $W_0^{(\beta)}$

在本节中，我们考虑高斯厄米 β系综

$$Z_G^{(\beta)}(t)=\int_{\mathbb{R}^N}\prod_{i=1}^N dx_i\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N x_i^2+\sum_{k\geq 1} t_k\sum_{i=1}^N x_i^k\Big)\prod_{1\leq i<j\leq N}|x_i-x_j|^{2\beta},\tag{11}$$

其中 t_k 与幂和的关系为 $t_k=p_k/k$。这是标准的 Hermitian β-系综 [28,29]，其 Virasoro 约束在 $\beta=1$ 的情形下众所周知，并可推广到任意 $\beta>0$，例如参见 [30]。

引理 3.3 (高斯 β-系综的 Virasoro 约束 [30])。对于每个 $n\geq -1$，配分函数 (11) 满足 *Virasoro* 约束

$$L_n^{(\beta)}\,Z_G^{(\beta)}(t)=0,\qquad n\geq -1,\tag{12}$$

其中

$$L_n^{(\beta)}=\sum_{k\geq 1} k\,t_k\,\frac{\partial}{\partial t_{k+n}}+\beta\sum_{a+b=n}\frac{\partial^2}{\partial t_a\partial t_b}+\big(1-\beta\big)(n+1)\frac{\partial}{\partial t_n}+2\beta N\,\frac{\partial}{\partial t_n}\tag{13}$$

and $L_{-1}^{(\beta)}$ 由同一公式在对求和作显然限制后得到。

注意，配分函数 $Z_G^{(\beta)}(p)$ 应视为一种典型的 τ-函数类对象，其 Ward 恒等式编码了无穷多个约束。对于 $\beta=1$，这些约束生成标准的矩阵模型 Virasoro 代数；而对于一般的 β，它们会使 Heisenberg 背景荷发生变形，并自然地组织成一种 $W_{1+\infty}$ 型结构。

令幂和 $p_k=kt_k$，并将 Virasoro 生成元写成变量 p_k 的微分算子，可得：

引理 3.4 (三次 W-约束)。 定义三次算子

$$W_0^{(\beta)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} n\, p_n\, L_n^{(\beta)}, \tag{14}$$

其中 $L_n^{(\beta)}$由 (13) 用 p-变量表示。于是 $W_0^{(\beta)}$ 可显式写为

$$W_0^{(\beta)} = \frac{1}{2}\sum_{a,b\geq 1}\Big(\beta(a+b)\,p_a p_b\,\partial_{p_{a+b}} + ab\,p_{a+b}\,\partial_{p_a}\partial_{p_b}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\big((1-\beta)(k-1)+2\beta N\big)k\,p_k\partial_{p_k}. \tag{15}$$

此外,

$$W_0^{(\beta)}\, Z_G^{(\beta)}(p) = 0. \tag{16}$$

证明。 我们逐项展开 (14)。 $L_n^{(\beta)}$的二次部分给出关于 (a,b) 的求和，其系数为 $(a+b)$ 和 ab, 从而重构出切割/合并算子 C, J，其意义见 [31]。关于 ∂_{p_n} 的线性部分产生两个对角算子,

$$D := \sum_{k\geq 1}(k-1)k\,p_k\partial_{p_k}, \qquad E := \sum_{k\geq 1} k\,p_k\partial_{p_k},$$

其系数分别为 $(1-\beta)/2$ 和 βN。于是由 (5) 得

$$W_0^{(\beta)} = \beta(C - \tfrac{1}{2}D) + (J + \tfrac{1}{2}D) + \beta N\, E = \beta C + J + \frac{1-\beta}{2}\,D + \beta N\, E, \tag{17}$$

这等价于 (15)。由于 $W_0^{(\beta)}$ 是 Virasoro 生成元的固定线性组合，且根据引理 3.3，每个 $L_n^{(\beta)}$ 都湮灭 $Z_G^{(\beta)}$，因此得到 $W_0^{(\beta)} Z_G^{(\beta)} = 0$。 □

引理 3.4 中的三次组合之所以被单独提出，是因为它恰好是 W-表示/超可积性中出现的生成算子，适用于 β-变形层级，而且正是我们能够显式实现其几何形式的算子。这里考虑的 $W_0^{(\beta)}$ 可直接由 Gaussian β-系综的 Ward 恒等式导出。相关的 β-变形W-表示和超可积配分函数层级已在 [27],中构造，其中 W-算子被用作生成算子，以构造大量 (β-变形) 矩阵模型。将对角部分改写为背景荷的形式会更方便。引入海森堡模

$$J_{-k} = p_k, \qquad J_k = \beta k\,\partial_{p_k}, \qquad J_0 = \beta N, \qquad [J_k, J_l] = \beta k\,\delta_{k+l,0},$$

并将 a_k 重新缩放为 $= J_k/\sqrt{\beta}$，使得 $[a_k, a_l] = k\delta_{k+l,\ 0}$。

命题 3.5 (背景荷参数化)。 设 $b = \sqrt{\beta}$ 并定义

$$Q_b := \frac{b - \frac{1}{b}}{2}. \tag{18}$$

那么， $W_0^{(\beta)}$ 的对角部分可以写为

$$\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\big((1-\beta)(k-1)+2\beta N\big)k\,p_k\partial_{p_k} = -\sqrt{\beta}\,Q_b\,D + \beta N\,E, \tag{19}$$

其中 D, E 如上所述。特别是,

$$\frac{1-\beta}{2} = -\sqrt{\beta}\,Q_b. \tag{20}$$

证明。 根据定义， $Q_b = (b - b^{-1})/2$，因此 $-\sqrt{\beta}Q_b = -bQ_b = (1-b^2)/2 = (1-\beta)/2$。将其代入 D 前面的系数中，得到（19）。 □

在二维共形场论的自由场实现中，改进应力张量

$$T(z) = \frac{1}{2} : (\partial\phi)^2 : (z) + Q_b\, \partial^2\phi(z)$$

的中心荷为 $c = 1 - 12Q_b^2$，例如参见 [4]。额外的 Q_b-项产生对角算子 D，它作用于 $W_{(\beta)0}$。因此，命题 3.5 将 $W_0^{(\beta)}$ 中的对角修正项与标准的背景荷改进联系起来。在 Ω-背景参数化 $\beta = \varepsilon_1/\varepsilon_2$下，自对偶点 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 对应于 $Q_b = 0$，从而恢复未变形的（自对偶）共形场论归一化。

在 Ω-背景参数化 $\beta = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ 下，我们有

$$Q_b = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}},$$

特别地，当且仅当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ （自对偶 Ω-背景）时，额外的对角项才消失。

4 Hilb方案上的几何实现

4.1 Nakajima-Grojnowski 福克空间

令 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 为平面上的 n 点希尔伯特概形，其中 $T = (\mathbb{C}^\times)^2$ 通过缩放 $\mathbb{C}^2$ 的坐标作用。遵循 Grojnowski 和 Nakajima [13, 25], ，我们考虑T等变上同调

$$\mathcal{F}_{Hilb} := \bigoplus_{n\geq 0} H_T^*\big(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)\big).$$

我们将 $\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}$ 视为分次空间，其分次由 n给出。

玻色福克空间与分次。 令 $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ 为幂和生成的对称函数环，按总次数分次

$$\Lambda = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^{(n)}, \qquad \deg(p_k) = k.$$

我们采用直和分次（以下陈述无需完备化）： 每个 $\Lambda^{(n)}$ 都是 $\mathbb{C}$上的有限维空间。

海森堡算子与归一化约定。 在几何方面，Grojnowski-Nakajima 构造了算子

$$\alpha_{-k} : \mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}} \to \mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}} \quad (k \geq 1), \qquad \alpha_k : \mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}} \to \mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}} \quad (k \geq 1),$$

（Nakajima 创造／湮灭算子），它们满足海森堡对易关系

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\, \delta_{m+n,0}\, \langle 1, 1\rangle_X, \qquad m, n \in \mathbb{Z},$$

wher其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$表示 $H_T^*(X)$ 上自然的 T-等变配对。对于 $X = \mathbb{C}^2$，我们有 e

$$\langle 1, 1\rangle_X = \int_X 1 = \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2},$$

因此 $[\alpha_m,\alpha_n]=m\,\delta_{m+n,0}/(\varepsilon_1\varepsilon_2)$。令 $|0\rangle\in H_T^*(\mathrm{Hilb}^0(X))\cong H_T^*(\mathrm{pt})$ 为真空向量，其特征由下式给出：

$$\alpha_k|0\rangle=0\qquad(k>0).$$

在 代数方面，我们按照惯例将 Λ 上的玻色海森堡算子 n

$$\alpha_{-k}\ \leftrightarrow\ k\,p_k,\qquad \alpha_k\ \leftrightarrow\ \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\partial}{\partial p_k}\qquad(k\geq 1).$$

E等价地，乘以 p_k 对应于福克空间识别下的 $\frac{1}{k}\alpha_{-k}$.

在代数方面，我们按照惯例将 Λ 上的玻色海森堡算子

$$\alpha_{-k}\ \leftrightarrow\ k\,p_k,\qquad \alpha_k\ \leftrightarrow\ \partial_{p_k}\qquad(k\geq 1).\tag{21}$$

等价地，乘以 p_k 对应于福克空间识别下的 $\frac{1}{k}\,\alpha_{-k}$。

定理 4.1（中岛–格罗伊诺夫斯基识别，分次形式）。存在唯一的分次线性同构

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}:\Lambda\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}},\qquad \Phi_{\mathrm{Hilb}}=\bigoplus_{n\geq 0}\Phi_{\mathrm{Hilb},n},\quad \Phi_{\mathrm{Hilb},n}:\Lambda^{(n)}\xrightarrow{\sim}H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(X)),$$

使得

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}(1)=|0\rangle\in H_T^*(\mathrm{Hilb}^0(X))\quad and\quad \Phi_{\mathrm{Hilb}}\big(p_k\,f\big)=\frac{1}{k}\,\alpha_{-k}\,\Phi_{\mathrm{Hilb}}(f)\qquad(k\geq 1,\ f\in\Lambda).$$

等价地，Φ_{Hilb} 在归一化 (21) 下交织海森堡作用 :

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}\circ(k\,p_k)=\alpha_{-k}\circ\Phi_{\mathrm{Hilb}},\qquad \Phi_{\mathrm{Hilb}}\circ\partial_{p_k}=\alpha_k\circ\Phi_{\mathrm{Hilb}}\qquad(k\geq 1).$$

注 4.2 (注意，Φ_{Hilb} 虽然两边都是无限维的，但它可逆。该映射是分次的：每个$\Phi_{\mathrm{Hilb},\ n}$ 都是有限维部分 $\Lambda^{(n)}$ 与 H_T^* ^{n} X $\Phi_{\mathrm{Hilb}}=(\mathrm{Hilb}())$ 之间 $\bigoplus_n\Phi_{\mathrm{Hilb}\,n}$ $\Phi^{-1}=\bigoplus_n\Phi^{-1}$ 的线性同构（如有需要，可对等变参数进行局部化）。因此，是分次直和的同构，其逆映射为$_n$Hilb Hilb。

中心特征映射与合并识别。

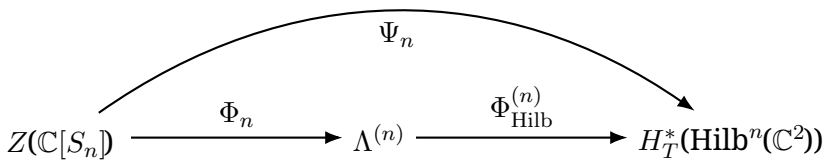
由于 Φ_{Hilb} 保持分次 $\deg(p_k)=k$，它限制为一个同构

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}^{(n)}:\Lambda^{(n)}\xrightarrow{\sim}H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)).$$

与 $\Phi_n:Z_n\to\Lambda^{(n)}$ 复合，得到一个规范分次识别

$$\Psi_n:=\Phi_{\mathrm{Hilb}}^{(n)}\circ\Phi_n:\ Z_n\ \xrightarrow{\sim}\ H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)).$$

换言之，对每个 n，下列交换图均可交换：



与升算符/产生算符的相容性。设 $E_1 = \sum_{m\ge 1} m\, p_{m+1}\partial_{p_m}$ 为第 Λ 节中所述的升算符3.2。在归一化（21）下，乘以 p_1 对应于 α_{-1}：

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ p_1 = \alpha_{-1} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}.$$

因此，每当中心化提升算子 $T_n^{\mathrm{cen}}\colon\ Z(\mathbb{C}[S_n]) \to Z(\mathbb{C}[S_{n+1}])$ 与 E_1通过 $\Phi_{n+1}\circ T_n^{\mathrm{cen}} = E_1 \circ \Phi_n$ (第3.2节）交织时，我们便得到合并后的交换图

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathbb{C}[S_n]) & \xrightarrow{\quad T_n^{\mathrm{cen}} \quad} & Z(\mathbb{C}[S_{n+1}]) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_{n+1}} \\ H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) & \xrightarrow[\text{(correspondence induced by } E_1)]{} & H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{C}^2)), \end{array}$$

其中，底部箭头是与 E_1 对应的几何算子，在 Φ_{Hilb} 下定义（并可用中岛对应/海森堡生成元来表示）。

4.2 Hecke对应与算子 E_1

现在我们讨论升算子的几何实现

$$E_1 = \sum_{m\ge 1} m\, p_{m+1}\, \frac{\partial}{\partial p_m}$$

a以及三次算子 W_0 在希尔伯特概形上的 Hecke 对应表示。

Hecke 对应 $Z_{n,n+1}$ 设 $X = \mathbb{C}^2$，并用 $\mathrm{Hilb}^n(X)$ 表示 X上 n 个点的希尔伯特概形。设

$$Z_{n,n+1} \subset \mathrm{Hilb}^n(X) \times \mathrm{Hilb}^{n+1}(X)$$

是对嵌套理想对 (I, J) 进行参数化的 ***Hecke*** 对应，使得

$$J \subset I \subset \mathbb{C}[x,y], \qquad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x,y]/J) = n+1, \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x,y]/I) = n.$$

等价地，存在一个正合列

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{C}_x \longrightarrow 0$$

对于某个 $x \in X$，而 $Z_{n,n+1}$ 保留嵌套对 (I, J) 的信息，但忘记 x。令

$$\pi_1, \pi_2 :\ Z_{n,n+1} \longrightarrow \mathrm{Hilb}^n(X),\ \mathrm{Hilb}^{n+1}(X)$$

表示两个投影。商 I/J 定义了 $Z_{n,n+1}$ 上的线丛 L，其纤维是一维向量空间 I/J。

定义 4.3 (几何 E_1)。定义几何算子

$$E_1^{\mathrm{geo}} :\ H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(X)) \longrightarrow H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n+1}(X)), \qquad E_1^{\mathrm{geo}}(\gamma) := (\pi_2)_*\big(\pi_1^*\gamma \ \cup\ c_1(\mathcal{L})\big),$$

其中 $T = (\mathbb{C}^\times)^2$ 通过缩放坐标作用于 $X = \mathbb{C}^2$。

我们考虑（等变）福克空间 $\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}$；在代数一侧，令 $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ 为由幂和生成的对称函数环，并用 $\Lambda^{(n)}$ 表示次数为 n 的部分。

上的海森堡归一化。我们在 Λ 上使用海森堡代数的标准玻色实现：对于 $k \ge 1$，定义

$$a_{-k} := p_k, \qquad a_k := k\, \frac{\partial}{\partial p_k}, \tag{22}$$

使得 $[a_m, a_{-n}] = m\,\delta_{m,\ n}$ 对于 $m,\ n \ge 1$。

中岛算子。 Grojnowski 和 Nakajima 构造了关联对应 $Z^{(k)} \subset \mathrm{Hilb}^n(X) \times \mathrm{Hilb}^{n+k}(X)$，其对 n 和 $k>0$具有函子性，从而产生产生/湮灭算子

$$q_{-k}(\gamma): H_T^*(\mathrm{Hilb}^n) \to H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n+k}), \qquad q_k(\gamma): H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n+k}) \to H_T^*(\mathrm{Hilb}^n),$$

满足海森堡对易关系。对于 $X=\mathbb{C}^2$ 和 $\gamma=[\mathbb{C}^2]$，我们将所得的海森堡生成元记为 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$，并固定与（22）的识别。为方便起见，令 $\mathrm{Hilb}^n := \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 表示 n 点的希尔伯特概形 $\mathbb{C}^2$。

定理4.4（E_1的几何实现）。 在福克空间识别 Φ_{Hilb}下，定义*4.3* 中的几何算子 E_1^{geo} 对应于 Λ上的标准阶梯算子：

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}^{-1} \circ E_1^{\mathrm{geo}} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}} = \sum_{m\geq 1} m\, p_{m+1} \frac{\partial}{\partial p_m}.$$

等价地，E_1^{geo} 在 $\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}$ 上由二次海森堡表达式表示

$$E_1^{\mathrm{geo}} = \sum_{m\geq 1} a_{-(m+1)}\, a_m. \tag{23}$$

证明。 我们回顾两个标准要素。
（i）中岛算子与海森堡作用。 关联对应 $Z^{(k)}$ 产生满足海森堡关系的产生/湮灭算子。在 Φ_{Hilb} 下，我们将这些算子识别为玻色生成元（22）。

（ii）*Hecke* 对应作为二次海森堡算子。 对应 $Z_{n,\ n+1}$ 是 Nakajima 关联对应的特例。上同调插入 $c_1(L)$ 给出一个总次数为 $+1$的正规序二次算子，即（23）。（按照（22）的约定，若在 $a_{-(m+1)}a_m$ 前额外插入因子 m，则会得到 $m^2 p_{m+1}\partial_{p_m}$，从而与所需的阶梯算子不相容。）

将（23）传递至 Λ，经由（22）：

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}^{-1} \circ E_1^{\mathrm{geo}} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}} = \sum_{m\geq 1} a_{-(m+1)}a_m = \sum_{m\geq 1} p_{m+1}\cdot\Big(m\frac{\partial}{\partial p_m}\Big) = \sum_{m\geq 1} m\, p_{m+1}\frac{\partial}{\partial p_m}.$$

□

4.3 $W_0^{(\beta)}$ 在希尔伯特概形$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$上的几何实现

核的卷积[12–14, 32] 设 $A\subset X\times Y$与 $B\subset Y\times Z$ 为对应。记 $[A]\in H_T^*(X\times Y)$与 $[B]\in H_T^*(Y\times Z)$为其等变上同调类。定义卷积核

$$[B]\star[A] := (\pi_{13})_*\big(\pi_{12}^*[A]\cup\pi_{23}^*[B]\big)\in H_T^*(X\times Z), \tag{24}$$

其中 π_{ab} 是从 $X\times Y\times Z$ 到 $X_a\times X_b$的投影。对于三个对应 $A\subset X_1\times X_2$、$B\subset X_2\times X_3$、$C\subset X_3\times X_4$，定义

$$[C]\star[B]\star[A] := (\pi_{14})_*\big(\pi_{12}^*[A]\cup\pi_{23}^*[B]\cup\pi_{34}^*[C]\big)\in H_T^*(X_1\times X_4), \tag{25}$$

其中 π_{ab} 是从 $X_1\times X_2\times X_3\times X_4$到 $X_a\times X_b$的投影。根据对应复合的定义，由核（24）（相应地（25））诱导的算子，是由 A、B（相应地 A、B、C）诱导的算子的复合。

如我们在第 $W_0^{(\beta)}$ 节3.3中已知其定义，现在我们基于上述设定考虑它的几何实现。

定理 4.5 （ $W_0^{(\beta)}$ 在 Hilb$^n(\mathbb{C}^2)$上的几何实现）。 定义作用于$\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$上的三次算子为

$$W_0^{(\beta)} = \frac{\beta}{2} \sum_{i,j\geq 1} :a_{-i}a_{-j}a_{i+j}: + \frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1} :a_{-(i+j)}a_i a_j: + \frac{1}{2} \sum_{k\geq 1} \Big((1-\beta)(k-1) + 2\beta N\Big) a_{-k}a_k, \quad (26)$$

其中 $a_{\pm k}$是海森堡算子（由 (22)识别），而 $:\cdot:$表示相对于福克分次的正规序。令 $W_0^{(\beta)}$,geo 为定义在 $\mathcal{F}_{Hilb}$ 上的算子，它由相同的正规排序表达式 (26)定义，但将其解释为作用在 Hilb$^n(\mathbb{C}^2)$上的对应算子；该算子通过卷积 *Nakajima* 关联对应得到（对于对角项，则通过与产生正规序修正项的典范等变上同调类作杯积得到）。于是

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W_0^{(\beta)} \;=\; W_{0,\mathrm{geo}}^{(\beta)} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}. \quad (27)$$

特别地， $W_0^{(\beta)}$ 可在 Hilb$^n(\mathbb{C}^2)$ 上实现为几何推拉算子，该算子与三重关联对应相关联，并包含负责对角线／背景荷贡献的典范等变上同调类。

在证明之前，我们先说明海森堡表达式（26）如何对应于 Maulik 和 Okounkov 的著作中的公式 [14]。在他们的框架中，量子乘法算子分解为三次部分和二次部分。二次贡献涉及一个形如 $-\Big(a_i + \frac{1-n}{2}(t_1+t_2)\Big)$ 的系数，它乘以 $\alpha_{-n}^{(i)}(1)\alpha_n^{(i)}$(pt)。取秩一情形并使用参数对应关系

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = -\beta, \qquad a_i \;\leftrightarrow\; -\beta N,$$

结合中岛算子与福克空间 $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$上的海森堡模$a_{\pm k}$之间的标准对应关系，我们得到 $k = n > 0$的系数

$$-\Big(-\beta N + \frac{1-k}{2}(1-\beta)\Big) = \beta N + \frac{k-1}{2}(1-\beta) = \frac{1}{2}\Big((1-\beta)(k-1) + 2\beta N\Big).$$

这恰好与（26）中第三个（二次）项的系数相同。因此， （ $W_0^{(\beta)}$ 26）中的算子正是 Maulik–Okounkov 算子，即在上述特化下三次项与二次项之和。特别地，这表明 $W_0^{(\beta)}$ 是希尔伯特概形上的几何对应算子，由沿对角线 $\Delta \subset \mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^n$ 的推拉定义，并插入类 $c_1(V_{\mathrm{taut}}^*)$，从而给出了所声称的几何实现。

证明分为两步：(i) 海森堡生成元的任意正规序多项式，都可以通过关联对应的卷积得到几何实现；(ii) 特定的三次组合（26）通过（ $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ 22）与算子对应，而对角项则与典范等变上同调类相符（即命题 3.5中分析的同一项）。

(i)：通常序海森堡单项式的对应实现 s

引理 4.6 (中岛关联对应实现海森堡代数)。 存在对应 $Z^{(k)} \subset \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \times \mathrm{Hilb}^{n+k}(\mathbb{C}^2)$，它们关于 n 和 $k > 0$具有函子性，且诱导的算子在 $\mathcal{F}_{Hilb}$ 上满足海森堡关系。在 Φ_{Hilb} 下，对应算子与显式生成元 (22)一致。

证明。 这是 Nakajima 的基础构造 [12], 针对 $S = \mathbb{C}^2$作出的等变精化。与幂和的对应 p_k 和 $k\,\partial_{p_k}$ 是标准的福克空间归一化，并作为我们的约定（22）。

□

引理 4.7（卷积实现正规序单项式）。 对于任意正规序单项式： $a_{k_1}\cdots a_{k_r}$ ：（其中所有产生算符 a_{-m} 均置于所有湮灭算符 a_m 的左侧）， $\mathcal{F}_{Hilb}$ 上的算子等于通过按自然顺序卷积相应的 *Nakajima* 关联对应 $Z^{(|k_\ell|)}$ 得到的推拉算子。特别地，每个三次项： $a_{-i}a_{-j}a_{i+j}$ ：和： $a_{-(i+j)}a_ia_j$ ：均由三重关联对应实现。

证明。 每个 $a_{\pm k}$ 都由沿 $Z^{(k)}$ 的推拉算子定义；两个算子的乘积对应于对应的卷积，而正规序确保中间的 Hilbert 概形次数在福克直和中定义良好。反复应用即可得到任意正规序单项式的结论；三次情形就是特例 $r=3$。 □

(ii)：在 Φ_{Hilb} 下的识别与对角项

引理 4.8（三次切割/合并部分的交织）。 设

$$W^{(\beta)}_{\mathrm{cubic}} := \frac{\beta}{2}\sum_{i,j\geq 1} :a_{-i}a_{-j}a_{i+j}: + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1} :a_{-(i+j)}a_ia_j: .$$

则 $\Phi_{\mathrm{Hilb}}\circ W^{(\beta)\,\text{三次}} = W^{(\beta)\,\text{三次，几何}}\circ\Phi_{\mathrm{Hilb}}$，其中 $W^{(\beta)\,\text{三次，几何}}$ 是按引理 4.7 中相同的几何方式解释的表达式。

证明。 由引理 4.7，几何算子 $W^{(\beta)\ \text{三次，几何}}$ 按定义是几何海森堡生成元 a_k 中的正规序表达式。在 Φ_{Hilb} 下，这些生成元与（22）相对应，因此同一正规序表达式定义了作用在 $\Lambda=\mathbb{C}[p_1,p_2,\dots]$ 上的算子。因此，这两个作用相同，并由 Φ_{Hilb} 交织。 □

引理 4.9 (对角/背景荷项)。 固定参数 β、 $N\in\mathbb{C}$ ， 并在 Λ 上定义二次算子

$$W^{(\beta)}_{\mathrm{diag}} := \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\Big((1-\beta)(k-1)+2\beta N\Big)\,a_{-k}a_k, \tag{28}$$

其中 $a_{\pm k}$ 按 (22)作用。定义 $W^{(\beta)}$ 对角,几何 在 $\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}$ 上，采用 相同的 公式 (28)，但将 $a_{\pm k}$ 理解为几何中岛算子。于是

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}}\circ W^{(\beta)}_{\mathrm{diag}} \;=\; W^{(\beta)}_{\mathrm{diag,geo}}\circ\Phi_{\mathrm{Hilb}}. \tag{29}$$

此外，在中岛/海森堡单项式基上

$$p_\lambda := \prod_i p_{\lambda_i}\in\Lambda^{(|\lambda|)} \qquad\Longleftrightarrow\qquad a_{-\lambda}|0\rangle := \prod_i a_{-\lambda_i}|0\rangle \in H^*_T(\mathrm{Hilb}^{|\lambda|}),$$

算子 $W^{(\beta)}$ 对角 （因此 $W^{(\beta)}$ 对角,几何）按对角线作用，其特征值为

$$W^{(\beta)}_{\mathrm{diag}}(p_\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\Big((1-\beta)(k-1)+2\beta N\Big)\,k\,m_k(\lambda)\,p_\lambda, \tag{30}$$

其中 $m_k(\lambda)$ 是 λ 中部件 k 的重数。

证明。步骤 *1*：代数良定义性与对角作用。 根据 (22)，有

$$a_{-k}a_k = p_k\cdot k\partial_{p_k},$$

因此， $W^{(\beta)}$ diag 是定义在 Λ上的良定义微分算子。对于单项式 $p_\lambda=\prod_i p_{\lambda_i}$，我们计算

$$k\partial_{p_k}(p_\lambda) = k\,m_k(\lambda)\,p_\lambda/p_k, \qquad\Rightarrow\qquad a_{-k}a_k(p_\lambda) = p_k\cdot k\,m_k(\lambda)\,p_\lambda/p_k = k\,m_k(\lambda)\,p_\lambda.$$

代入（28）即可得到所声称的特征值公式（30）。

步骤 *2*：的几何意义 $a_{-k}a_k$。从几何上看， a_{-k} 是由关联对应 $Z^{(k)} \subset \mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^{n+k}$定义的推拉算子，而 a_k 由转置对应定义。因此， $a_{-k}a_k$ 是作用于 $\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}$ 上的保次数对应算子，它由 $Z^{(k)}$ 与$(Z^{(k)})^t$ 复合而得（等价地说，是核的卷积）。

步骤 *3*：交织。根据构造， Φ_{Hilb} 是海森堡模的一个同构，也就是说，它交织每个生成元 $a_{\pm k}$（对 $k \geq 1$）：

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ a_{\pm k} = a_{\pm k} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}.$$

因此， Φ_{Hilb} 也交织这些生成元的任意多项式。特别地，它交织二次组合(28)，这恰好就是(29)。最后，由于在此归一化下 $\Phi_{\mathrm{Hilb}}(p_\lambda) = a_{-\lambda}|0\rangle$ ，对角作用(30)原样传递到 $\mathcal{F}_{\mathrm{Hilb}}$。 □

定理*4.5*的证明。按照引理 $W_{(\beta}$ $_{0}$ $= W^{(\beta)}$)中的写法，将三次 $+ W_{(\beta)}$对角写成引理4.8和4.9中的形式。每一部分都由 Φ_{Hilb}与其几何实现交织；因此它们的和也交织，从而得到(27)。关于“沿三重关联对应进行推拉”的描述来自引理4.7。 □

注记4.10 (关于局部化的作用)。 通过计算 T-不动点基 $\{|\lambda\rangle\}$ (由分拆 λ索引)上的矩阵元，可以给出完整证明。我们计算三重关联对应和典范等变上同调类的贡献，并验证所得矩阵元与用海森堡模表示的正规序算子 (26) 的矩阵元一致。这类不动点计算使用 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 上切空间和典范权的显式公式，是 *[12]*相关文献中的标准做法。箭图簇中的类似结果及杨*ian*作用，例如见 *[33]*。

定理 4.11 ($W_{[2]}$的几何实现)。 令

$$W_{[2]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} \left(a_{-i}a_{-j}a_{i+j} + a_{-(i+j)}a_i a_j \right)$$

为作用在 Λ 上（等价地，作用在 $\mathcal{F}$ 上）的（正规序）三次切割-连接算子。则 $W_{[2]}$ 通过一个对应核在 $\mathcal{F}_{Hilb}$ 上实现，

$$\mathcal{W}_{[2]} \subset \bigsqcup_{n \geq 0} \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \times \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2),$$

该对应核定义为两个几何分支（切割/合并）的不交并，它们来自基本 *Hecke* 对应 $Z^{(k)}$ 及其转置的三重卷积。在 Φ_{Hilb} 下，这一几何作用与对称函数上的切割与连接作用一致。

证明。 固定 $n \geq 0$ 和 $i,\ j \geq 1$ 满足 $n \geq i + j$。考虑保持 n 的两条长度为 3 的对应链：

(i) 切割部分（对应于$a_{-i}a_{-j}a_{i+j}$**）**。设

$$X_1 = \mathrm{Hilb}^n, \quad X_2 = \mathrm{Hilb}^{n-(i+j)}, \quad X_3 = \mathrm{Hilb}^{n-i}, \quad X_4 = \mathrm{Hilb}^n.$$

Let

$$A := Z^{(-(i+j))} \subset X_1 \times X_2, \qquad B := Z^{(j)} \subset X_2 \times X_3, \qquad C := Z^{(i)} \subset X_3 \times X_4,$$

其中 $Z^{(-(i+j))}$ 是 $Z^{(i+j)} \subset \mathrm{Hilb}^{n-(i+j)} \times \mathrm{Hilb}^n$的转置。将切割对应空间定义为纤维积轨迹

$$\mathcal{W}^{\mathrm{cut}}_{i,j}(n) := \pi_{12}^{-1}(A) \cap \pi_{23}^{-1}(B) \cap \pi_{34}^{-1}(C) \subset X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4, \tag{31}$$

其在 $\mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^n$ 上的诱导核为

$$K_{i,j}^{\mathrm{cut}}(n) \;:=\; (\pi_{14})_*\big[\mathcal{W}_{i,j}^{\mathrm{cut}}(n)\big] \;\in\; H_T^*(\mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^n). \tag{32}$$

根据卷积定义（25），由$K_{i,\,j}^{\mathrm{cut}}(n)$诱导的对应算子正是复合算子

$$H_T^*(\mathrm{Hilb}^n) \xrightarrow{a_{i+j}} H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n-(i+j)}) \xrightarrow{a_{-j}} H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n-i}) \xrightarrow{a_{-i}} H_T^*(\mathrm{Hilb}^n),$$

即它等于$a_{-i}a_{-j}a_{i+j}$ 在$H_T^*(\mathrm{Hilb}^n)$上。

(ii) 连接部分（对应于$a_{-(i+j)}a_ia_j$）。设

$$Y_1 = \mathrm{Hilb}^n, \quad Y_2 = \mathrm{Hilb}^{n-j}, \quad Y_3 = \mathrm{Hilb}^{n-(i+j)}, \quad Y_4 = \mathrm{Hilb}^n.$$

Let

$$A' := Z^{(-j)} \subset Y_1 \times Y_2, \qquad B' := Z^{(-i)} \subset Y_2 \times Y_3, \qquad C' := Z^{(i+j)} \subset Y_3 \times Y_4.$$

定义连接对应空间

$$\mathcal{W}_{i,j}^{\mathrm{join}}(n) \;:=\; \pi_{12}^{-1}(A') \,\cap\, \pi_{23}^{-1}(B') \,\cap\, \pi_{34}^{-1}(C') \;\subset\; Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times Y_4, \tag{33}$$

以及诱导核

$$K_{i,j}^{\mathrm{join}}(n) \;:=\; (\pi_{14})_*\big[\mathcal{W}_{i,j}^{\mathrm{join}}(n)\big] \;\in\; H_T^*(\mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^n). \tag{34}$$

同样根据（25），由$K_{i\quad,\,j}^{\mathrm{join}}(n)$诱导的算子等于该复合

$$H_T^*(\mathrm{Hilb}^n) \xrightarrow{a_j} H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n-j}) \xrightarrow{a_i} H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n-(i+j)}) \xrightarrow{a_{-(i+j)}} H_T^*(\mathrm{Hilb}^n),$$

即它等于$a_{-(i+j)}a_ia_j$ 在 $H_T^*(\mathrm{Hilb}^n)$上。

正规序与两个分支。这两个核（32）与（34）正是正规序三次贡献：它们是保次数三重卷积，其中净次数先下降（通过一次湮灭），随后被恢复（通过产生），或反之，对应于单项式$a_{-i}a_{-j}a_{i+j}$ 与$a_{-(i+j)}a_ia_j$。其他排序会产生非正规序贡献；舍弃它们正是正规序的效果。

因此，对每个 n，我们定义几何核

$$K_{[2]}(n) \;:=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1}\Big(K_{i,j}^{\mathrm{cut}}(n) + K_{i,j}^{\mathrm{join}}(n)\Big) \;\in\; H_T^*(\mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^n), \tag{35}$$

并令 $\mathcal{W}_{[2]}：=\bigsqcup_{n\geq 0}\mathrm{supp}(K_{[2]}(n)) \subset \bigsqcup_n \mathrm{Hilb}^n \times \mathrm{Hilb}^n$。

与切割与连接算子在 Λ上的识别。在福克空间识别Φ_{Hilb} 与归一化 $a_{-k} = p_k$下，$a_k = k\partial_{p_k}$，由（35）在 Λ 上的作用为

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1}\Big((i+j)\,p_ip_j\,\frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + \;ij\,p_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i\,\partial p_j}\Big),$$

这是标准的切割与连接算子。因此，$\mathcal{W}_{[2]}$ 在 $\mathcal{F}_{Hilb}$上实现了 $W_{[2]}$，且这一作用通过 Φ_{Hilb}与对称函数作用相互交织。

切割与连接算子的几何意义。局部化到由分拆 λ 标记的 T 不动点后，基本对应 $Z^{(\pm k)}$ 增添/移除长度为 k 的边钩；因此，切分分支 $\mathcal{W}_{i\quad,j}^{\mathrm{cut}}(n)$ 实现了将长度为 $i+j$ 的边钩拆分为长度分别为 i 和 j 的两个边钩，而拼接分支 $\mathcal{W}_{i\quad,j}^{\mathrm{join}}(n)$ 则实现了将长度分别为 i 和 j 的两个边钩拼接成一个长度为 $i+j$ 的边钩。这与 $W_{[2]}$ 中的两个加项相吻合。

□

4.4 交换图与边钩

定理 4.11 可视为群侧图景的一种精确几何提升。换位类和 $K_{[2]}^{(n)} \in \mathbb{C}[S_n]$ 在循环指标映射与福克空间识别下，对应于作用在对称函数上的三次算子 W_0。因此，循环的切割与连接在希尔伯特概形一侧转化为杨图中边钩上的显式操作；这些杨图标记T-不动点，从而为置换组合学与 Nakajima 簇的几何之间架起了一座具体的桥梁。

例 4.12 （情形 $n = 4$）。对于 $n = 4$，$\mathrm{Hilb}^4(\mathbb{C}^2)$ 上的 T-不动点由五个分拆标记

$$(4),\ (3,1),\ (2,2),\ (2,1,1),\ (1,1,1,1).$$

将几何算子 $W_{[2]}$ （定理 *4.11*）局部化到这些不动点，我们得到一个 5×5矩阵，其非对角元与相应杨图之间的边钩切割与连接操作一一对应。项 $\langle \mu | W_{[2]} | \lambda \rangle$ 非零，当且仅当 μ由 λ 经切割或连接一条边钩得到，且该矩阵元由组合权重 $(a+b)$ 在切割情形给出，而 ab 在连接情形给出，其中 a 与 b 表示这两段的长度；参见下图。

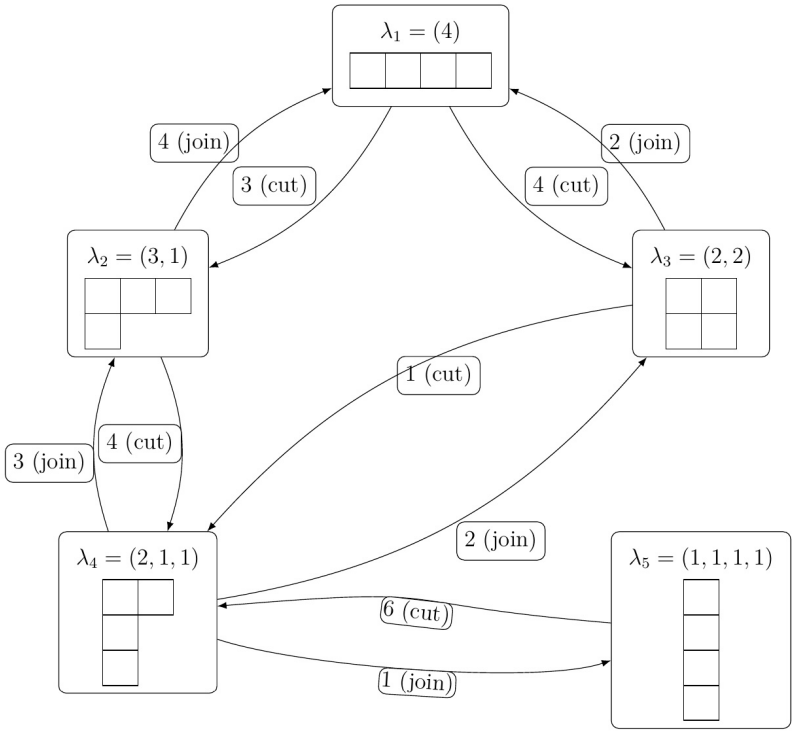


图1： $W_{[2]}$ 在 $n = 4$ 情形下作用于杨图基。

这里我们应当注意：

1. 每个顶点是一个分拆 λ及其杨图；

2. 每条有向边表示不动点基中的一个非对角线矩阵元 $M_{ij}^{(4)}$ $W_{[2]}$ 的（由于 $W_{[2]}$ 保持次数 n，因此在集合 $\{v_\lambda :\ \lambda \vdash n\}$上，它定义了一个矩阵$M = (M_{\mu,\ \lambda})$，使得 $W_{[2]}(v_\lambda) = \sum_{\mu \vdash n} M_{\mu,\ \lambda}\, v_\mu$，其中 $v_\lambda = \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$和 $z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$）；

3. 边上的数字是该矩阵元的值，括号中的标签（切割）/（连接）表示它来自项 $(a+b)$ $p_a p_b \partial_{p_{a+b}}$ 还是 $ab\, p_{a+b} \partial_{p_a} \partial_{p_b}$，

也就是说，它对应的是“将一个循环切割成两个”（切割），还是“将两个循环连接成一个”（连接）。

具体而言，在有序基 $|(4)\rangle, |(3,1)\rangle, \ldots$ 下，$W_{[2]}$ 的矩阵为

$$M^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中，每个非对角线元素都标注了边钩移动所对应的 $(a+b)$ 或 ab。这与推论2.4 在次数4时特化得到的对称函数公式一致。

4.5 由 $W_{[2]}$ 生成的几何层级算子

我们将玻色福克空间上的三次切割与连接算子 $W^{(0)} := W_{[2]}$ 所生成的层级算子改写为。利用显式公式

$$E_1 = [W_{[2]}, p_1] = \sum_{n\geq 1} n\, p_{n+1} \frac{\partial}{\partial p_n},$$

$$W^{(1)} := [W_{[2]}, E_1] = \sum_{k,l\geq 1} (k+l-1) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l-1}} + \sum_{k,l\geq 1} (kl) p_{k+l+1} \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial_{p_l}},$$

我们分析福克／希尔伯特侧交换子塔 $W^{(n)} := \mathrm{ad}_{W_1}^{n-1}(E_1)$ $(n \geq 2)$ 的前两层。一个关键点是，纠正一个常见的错误说法：W_1 的次数为 $+1$（它使粒子数增加一），因此 $W^{(n)}$ 使点数增加 n。从几何角度看，$W^{(n)}$ 应被视为对应的线性组合，这些对应是由一个赫克步骤和 n 次三次关联对应作用构造而成的 $\mathrm{Hilb}^N \to \mathrm{Hilb}^{N+n}$。

由 $\deg(p_k) = k, \deg\left(\frac{\partial}{\partial p_k}\right) = -k$, 可知, 算子 D 的次数 为 r，即它将荷为 n 的齐次分量映射到荷为 $n+r$ 的分量。我们假设切割与连接算子 $W^{(0)}$ 的次数为 0（标准的 $W_{[2]}$ 算子即如此），因此它不会改变点的总数。

层级算子 $W^{(n)}$

现在我们引入由 W_1 和 E_1 生成的交换子层级。

定义 4.13. 定义算子 $W^{(n)}$，其中 $n \geq 2$，如下：

$$W^{(n)} := \mathrm{ad}_{W^{(1)}}^{n-1}(E_1) = \underbrace{[W^{(1)}, [W^{(1)}, \ldots, [W^{(1)}}_{n-1}, E_1] \ldots]]. \tag{36}$$

引理 4.14. 对于所有 $n \geq 1$，有

$$\deg(W^{(n)}) = n. \tag{37}$$

等价地，$W^{(n)}$ 将 Λ 的荷-N 子空间映射到荷为 $N+n$ 的子空间。

证明。根据次数的定义，我们知道，如果 $\deg(A) = r$，$\deg(B) = s$，那么 $\deg([A,B]) = \deg(AB - BA) = r + s$. 显然，(36) 可表示为 $W_{(n)} = [W_{(n-1)} W^{(1)}], n \geq 3$。因此

$$\deg(W^{(n)}) = \deg(W^{(1)}) + \deg(W^{(n-1)}) = 1 + \deg(W^{(n-1)}), \tag{38}$$

并由归纳法得 $\deg(W^{(n)}) = n$. □

注4.15 （其中 $W^{(n)}$编码的内容）。 恒等式 $\mathrm{ad}_A(B) = AB - BA$意味着，$\mathrm{ad}_A^m(B)$是由 A和 B构成的长度为 $(m+1)$ 词的交错和。因此， $W^{(n)}$ （除去阶乘归一化因子）是由 E_1 和 $W^{(1)}$ 复合而成、总长度为 n的复合的交错和；这正是希尔伯特概形上对应的交错复合在代数上的投影。

希尔伯特概形： E_1 与 $W^{(n)}$的几何意义

定义 4.16 (E_1 是 Hecke（嵌套希尔伯特）对应。 设$\mathrm{Hilb}^{n,n+1}(\mathbb{C}^2) \subset \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \times \mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{C}^2)$ 为参数化理想 $I \subset I'$ 的包含关系的嵌套希尔伯特概形，其中 长度$(I'/I) = 1$。设 π_1, π_2 为两个投影。定义几何升算子

$$E_{1,\mathrm{Hilb}} := (\pi_2)_* \circ \pi_1^* : \ H_T^*(\mathrm{Hilb}^n) \longrightarrow H_T^*(\mathrm{Hilb}^{n+1}). \tag{39}$$

注4.17 (交织陈述)。 在归一化 (22)下，我们有

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ E_1 = E_{1,\mathrm{Hilb}} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}},$$

也就是说，代数算子 E_1 与几何赫克步骤 (39)相对应。这就是“E_1 是 *Hecke* 对应”的确切含义。

那么，在几何一侧我们有

- 赫克对应 $E_{1,\ \mathrm{Hilb}}$: $H_T^*(\mathbf{Hilb}^n) \ \to \ H_T^*(\mathbf{Hilb}^{n+1})$ 对应于添加一个点;

- 一个保次数对应$W[2]_{\mathrm{Hilb}}$: $H_T^*(\mathbf{Hilb}^n) \ \to \ H_T^*(\mathbf{Hilb}^n)$，编码长度为二的子概形的相交关系（切割与连接算子的几何对应物）。

定义4.18 ($W^{(1)}$与 $W_{(n)}$的几何意义)。 通过共轭定义几何算子:

$$W_{\mathrm{Hilb}}^{(n)} := \Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W^{(n)} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}^{-1} : H_T^*(\mathrm{Hilb}^N) \longrightarrow H_T^*(\mathrm{Hilb}^{N+n}). \tag{40}$$

这个定义使“交织”自动成立。非平凡的内容在于将 $W^{(n)}{}_{\ \mathrm{Hilb}}$ 几何实现为对应的显式组合。

引理4.19 (对应算子的交换子)。 设 $A \subset X \times Y$、 $B \subset X \times Y$是对应，它们给出算子 A_*、B_*: $H_T^*(X) \ \to H_T^*(Y)$。那么交换子

$$[A_*, B_*] = A_* \circ B_* - B_* \circ A_* : H_T^*(X) \to H_T^*(Y)$$

可由两个复合对应 $A \circ B$ 与 $B \circ A$之差表示。更确切地说，

$$[A_*, B_*] = (A \circ B)_* - (B \circ A)_*.$$

证明。 根据上述讨论， $A_* \circ B_* = (A \circ B)_*$ 以及 $B_* \circ A_* = (B \circ A)_*$。该结论由对应形式体系的线性性得出。 □

我们将此应用于希尔伯特概形乘积上的关联对应。为排版方便，我们也用$E_{1,\ \mathrm{Hilb}}$ 和$W_{[2],\ \mathrm{Hilb}}$ 表示它们底层的循环。

定义 4.20 (次数为 1 的几何哈密顿量)。 我们定义次数为1 的几何算子

$$W_{\mathrm{Hilb}}^{(1)} := [\, W_{[2],\mathrm{Hilb}}, E_{1,\mathrm{Hilb}} \,] = W_{[2],\mathrm{Hilb}} \circ E_{1,\mathrm{Hilb}} - E_{1,\mathrm{Hilb}} \circ W_{[2],\mathrm{Hilb}}. \tag{41}$$

根据引理 4.19， $W^{(1)}{}_{\ \mathrm{Hilb}}$ 由两个纤维积对应之差表示，它们分别编码 $W_{[2],\ \mathrm{Hilb}} \circ E_{1,\ \mathrm{Hilb}}$ 和 $E_{1,\ \mathrm{Hilb}} \circ W_{[2],\ \mathrm{Hilb}}$。

命题 4.21 （ $W_{(1)}$及更高阶 $W^{(n)}$的解释）。 对于所有 $n \geq 2$，我们有

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W^{(n)} = \mathbf{W}^{(n)} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}, \tag{42}$$

且$\mathbf{W}^{(n)}$ 有如下解释:

1. $\mathbf{W}^{(2)} = [\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{E}_1]$ 是两个复合对应之差

$$\mathrm{Hilb}^n \xrightarrow{\mathbf{E}_1} \mathrm{Hilb}^{n+1} \xrightarrow{\mathbf{W}^{(2)}} \mathrm{Hilb}^{n+2}, \qquad \mathrm{Hilb}^n \xrightarrow{\mathbf{W}^{(2)},} \mathrm{Hilb}^{n+1} \xrightarrow{\mathbf{E}_1} \mathrm{Hilb}^{n+2}.$$

设 A 是一个对应算子$\mathrm{Hilb}^m \to \mathrm{Hilb}^{m+r}$， B 是一个对应算子$\mathrm{Hilb}^m \to \mathrm{Hilb}^{m+s}$。那么，$[A, B]$ 由两个纤维积对应之差表示，它们分别编码 $A \circ B$和 $B \circ A$。特别地， $W_{(1)\,\mathrm{Hilb}}$ $= [W[2]_{\mathrm{Hilb}}, E_{1,\mathrm{Hilb}}]$ 度量了保次数切割与连接对应 $W[2]_{\mathrm{Hilb}}$与赫克步骤$E_{1,\mathrm{Hilb}}$之间的非交换性。

2. 根据引理*4.14*， $W^{(n)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 将Hilb^N 映射到Hilb^{N+n}，因此，高阶交换子$\mathbf{W}^{(n)} = \mathrm{ad}^{n-1}\,\mathbf{w}_1$ $(\mathbf{E}_1)$ 自然由总长度为 n的嵌套理想旗上的对应构成。迭代对易子的结构意味着，对所有交错 $E_{1,\mathrm{Hilb}}$ 的方式求和，并带有 $n-1$ 次Hilb 的作用（或等价地，与次数为 *1* 的算子 $W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}$的 $n-1$ 个交换子）。

将层级算子理解为赫克步骤与三次相交对应的交替复合，揭示了 β-变形层级中高阶哈密顿量的直接几何起源。这对应于在 W-代数中通过迭代交换子构造可积哈密顿量的几何图景；这一机制预计也会在与箭图规范理论相关的箭图簇上以带色形式延续。

定理 4.22 ($W^{(n)}{}_{\mathrm{Hilb}}$的几何解释。 对于所有 $n \geq 2$，算子 $W_{(n)\,\mathrm{Hilb}}$按定义 *4.18*给出，且满足以下性质。

1. 相容于福克同构。 对于所有 $n \geq 1$， 我们都有交织关系 n

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W^{(n)} = W^{(n)}_{\mathrm{Hilb}} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}. \tag{43}$$

2. 第一个非平凡层级 $n = 2$。 算子 $W^{(2)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 是次数为1的哈密顿量与赫克步骤的交换子:

$$W^{(2)}_{\mathrm{Hilb}} = [\,W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}}, E_{1,\mathrm{Hilb}}\,].$$

*Geo*从几何上看， $W^{(2)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 由两个复合对应之差表示 *es*

$$\mathrm{Hilb}_n \xrightarrow{E_{1,}{}_{\mathrm{Hilb}}} \mathrm{Hilb}_{n+1} \xrightarrow{W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}} \mathrm{Hilb}^{n+2}, \quad \mathrm{Hilb}_n \xrightarrow{W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}} \mathrm{Hilb}_{n+1} \xrightarrow{E_{1,}{}_{\mathrm{Hilb}}} \mathrm{Hilb}^{n+2}.$$

3. 高阶作为迭代交换子。设 $\mathrm{ad}_A(B) = [A, B]$ 且 $\mathrm{ad}_A^k(B) = \mathrm{ad}_A(\mathrm{ad}_A^{k-1}(B))$.
对于 $n \geq 2$， 我们有

$$W^{(n)}_{\mathrm{Hilb}} = \mathrm{ad}^{n-1}_{W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}}}(E_{1,\mathrm{Hilb}}). \tag{44}$$

特别地， $W_{(n)\,\mathrm{Hilb}}$ 将 $H_T^*(\mathrm{Hilb}^N)$ 映到 $H_T^*(\mathrm{Hilb}^{N+n})$，并且它由沿嵌套理想旗将单个 *Hecke* 对应$E_{1,\mathrm{Hilb}}$与$(n-1)$个 $W[2]_{\mathrm{Hilb}}$ （或等价地，$(n-1)$ 个 $W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}$） 交错的所有方式的交错和表示。

$$I_N \supset I_{N+1} \supset \cdots \supset I_{N+n}$$

总长度为 n。

证明。 **(i)** 根据定义，我们令 $W^{(n)}{}_{\mathrm{Hilb}} = \Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W_{(n)} \circ \Phi^{-1}{}_{\mathrm{Hilb}}$。右乘 Φ_{Hilb}立即得到(43)：

$$\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W^{(n)} = (\Phi_{\mathrm{Hilb}} \circ W^{(n)} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}^{-1}) \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}} = W^{(n)}_{\mathrm{Hilb}} \circ \Phi_{\mathrm{Hilb}}.$$

(ii)在对称函数一侧，我们将 1 次哈密顿量定义为

$$W^{(1)} := [\, W_{[2]}, E_1 \,],$$

并且我们令 $W_{(2)} = [W_{(1)}\, E_1]$ 如通常的 W-代数层级中那样。根据定义 4.18，

$$W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}} = \Phi_{\mathrm{Hilb}} W^{(1)} \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}}, \qquad W^{(2)}_{\mathrm{Hilb}} = \Phi_{\mathrm{Hilb}} W^{(2)} \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}}.$$

利用共轭的函子性和恒等式 $\Phi_{\mathrm{Hilb}} E_1 \Phi^{-1}{}_{\mathrm{Hilb}} = E_{1,\ \mathrm{Hilb}}$ 我们得到

$$\begin{aligned} W^{(2)}_{\mathrm{Hilb}} &= \Phi_{\mathrm{Hilb}} [\, W^{(1)}, E_1 \,] \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}} = [\, \Phi_{\mathrm{Hilb}} W^{(1)} \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}}, \Phi_{\mathrm{Hilb}} E_1 \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}} \,] \\ &= [\, W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}}, E_{1,\mathrm{Hilb}} \,]. \end{aligned}$$

这证明了算子恒等式。由引理 4.19， $W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 由复合对应 $W[2]_{\mathrm{Hilb}} \circ E_{1,\ \mathrm{Hilb}}$ 与 $E_{1,\ \mathrm{Hilb}} \circ W[2]_{\mathrm{Hilb}}$之差表示；类似地，交换子$[W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}\, E_{1,\ \mathrm{Hilb}}]$ 由以下两个复合之差表示

$$E_{1,\mathrm{Hilb}} \circ W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}}, \qquad W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}} \circ E_{1,\mathrm{Hilb}},$$

它们恰好对应于陈述中第 (2) 点的两幅图表。这就给出了所需的几何描述。

(iii)在对称函数一侧，高阶算子定义为

$$W^{(n)} = \mathrm{ad}^{n-1}_{W^{(1)}}(E_1), \qquad n \geq 2.$$

利用共轭与迭代交换子的相容性，我们得到

$$\begin{aligned} W^{(n)}_{\mathrm{Hilb}} &= \Phi_{\mathrm{Hilb}} W^{(n)} \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}} = \Phi_{\mathrm{Hilb}} \big(\mathrm{ad}^{n-1}_{W^{(1)}}(E_1) \big) \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}} \\ &= \mathrm{ad}^{n-1}_{\Phi_{\mathrm{Hilb}} W^{(1)} \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}}} (\Phi_{\mathrm{Hilb}} E_1 \Phi^{-1}_{\mathrm{Hilb}}) = \mathrm{ad}^{n-1}_{W^{(1)}_{\mathrm{Hilb}}} (E_{1,\mathrm{Hilb}}), \end{aligned}$$

这就证明了（44）。

由原文中的引理3.14（它说明 $W^{(n)}$ 会使福克空间上的分次移动 $+n$ ）以及交织关系（43）可知， $W_{(n)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 将 $H^*_T(\mathrm{Hilb}^N)$ 映射到 $H^*_T(\mathrm{Hilb}^{N+n})$，如所述。

最后，将迭代对易子 $\mathrm{ad}^{\,n-1}_{W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}}(E_{1,\mathrm{Hilb}})$ 展开，可得由算子 $W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 和 $E_{1,\mathrm{Hilb}}$ 构成的词的交错和，其中恰好含有一个 $E_{1,\mathrm{Hilb}}$ 以及 $(n-1)$ 个 $W^{(1)}{}_{\mathrm{Hilb}}$。每个这样的词都是对应的复合，因此由一个参数化子概形链（理想旗）的迭代纤维积表示

$$I_N \supset I_{N+1} \supset \cdots \supset I_{N+n}$$

总长度为 n。给定词所附的符号由其在交换子展开中的位置决定。这便得到了所述的 $W^{(n)}{}_{\mathrm{Hilb}}$ 描述：它是嵌套理想旗上对应的交错和，从而完成证明。

□

结论

本工作明确建立了一套对应关系，将对称群中心元映射为作用于对称函数的 W-算子，并进一步映射为希尔伯特概形上的几何对应。在代数方面，对换类和给出 Hurwitz 切割与连接算子 $W[2]$，以及一个内在的对角项；而阶梯／Jucys-Murphy 提升则将基本升算子 E_1 及其交换子塔组织成一个结构化的层级。在几何方面，Grojnowski-Nakajima 同一将这些算子传递到 $\bigoplus_{n\geq 0} H_T^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$，其中 E_1 成为 Hecke 对应，而对角线／背景荷修正项则可用关于典范丛和切丛 T-权的精确不动点局部化公式表示。 β-变形可自然地用海森堡代数中的正规序来解释：对角线修正项随 β变化，而首项符号（因而一阶切割／连接组合）则保持普适。

由此得到的“算子对应”视角启发了若干研究方向。首先，我们可以在 Nakajima 箭图簇上系统地发展带色／仿射 ADE 推广，其中无限维数向量会作出贡献，所得直和具有真正的 Fock 表示；我们预计，层级机制仍会成立（伴随逐顶点的赫克步骤），并产生与箭图规范理论相关的对易哈密顿量族。其次，通过局部化获得的显式对角修正，非常适合用于与 Ω-背景配分函数、AGT/W-代数约束以及超可积 β-系综层级进行比较。第三，回溯至 Hurwitz 理论的桥梁启发了切割与连接方程的精细化及带色变体，也揭示了其与可积层级以及作用于上同调和 K-理论中的量子（仿射／环面型）代数作用之间的联系。

致谢

作者谨此感谢 Anatoli Kirillov、Xinxing Tang、Yehao Zhou 和 Wei-Zhong Zhao 的宝贵交流与讨论。本研究得到中国博士后科学基金（2025M783074）资助。

参考文献

[1] P. Di Francesco、P. Ginsparg 与 J. Zinn-Justin，二维引力与随机矩阵，物理报告**254**（1995），1-133。[2] P. Bouwknegt 与 K. Schoutens，共形场论中的 W-对称性，物理报告 **223**（1993），183-276。[3] B. Eynard，曲面计数：CRM Aisenstadt 发丛讲座，数学物理进展 **70**，Birkh¨auser，2016。[4] P. Di Francesco、P. Mathieu 与 D. S´en´echal，共形场论，当代物理研究生教材，施普林格出版社，纽约，1997。[5] A. Alexandrov，广义 Kontsevich 模型的切割-连接描述，理论与数学物理进展 **18** （2014），1333-1392, [arXiv:0906.3305]。[6] A. Mironov、Sh. Shakirov，由 W-算子生成矩阵模型，高能物理杂志 **04** （2009）， 064, [arXiv:0902.2627]。[7] I. G. Macdonald，《对称函数与 Hall 多项式》，第2版，牛津大学出版社，1995。

[8] Nekrasov、Nikita、Okounkov 与 Andrei，Seiberg-Witten理论与随机分拆，[arXiv:hep-th/0306238]。[9] L. F. Alday、D. Gaiotto 与 Y. Tachikawa，四维规范理论中的Liouville关联函数，数学物理快报 91（2010），167-197, [arXiv:0906.3219]。[10] B. L. Feigin、D. B. Fuchs，Virasoro代数上的Verma模，拓扑学（列宁格勒，1982），数学讲义1060，施普林格，1984，230-245。[11] H. Nakajima，ALE空间上的瞬子、箭图簇与Kac-Moody代数，杜克数学杂志 76（1994），365-416。[12] H. Nakajima，海森堡代数与射影曲面上点的希尔伯特概形，数学年刊 145（1997），379-388。[13] H. Nakajima，曲面上点的希尔伯特概形讲义，大学讲义丛书18，美国数学会，1999。[14] D. Maulik、A. Okounkov，量子群与量子上同调，Ast´erisque 408（2019），[arXiv:1211.1287]。[15] O. Schiffmann、E. Vasserot，椭圆Hall代数与 $\mathbb{A}^2$的希尔伯特概形的 K-理论，杜克数学杂志 162 （ 2013 ），279-366, [arXiv:0905.0316]。[16] I. P. Goulden 、 D. M. Jackson，分解为对换的传递分解与球面上的全纯映射，美国数学会会刊 125（1997），51-60。[17] I. P. Goulden、D. M. Jackson，KP层次、分歧覆盖与三角剖分，数学进展 219（2008），932-951。[18] A. Okounkov，随机矩阵与随机排列，国际数学研究通讯 2000，1043-1095。[19] H. Sun，关于W算子的一个公式及其在Hurwitz数中的应用，离散数学 342（2019），715-722。[20] R. P. Stanley，Jack对称函数的若干组合性质，数学进展 77（1989），76-115。[21] N. Nekrasov，由瞬子计数得到的Seiberg-Witten前势，理论与数学物理进展 7（2004），831-864, [arXiv:hep-th/0206161]。[22] A. Okounkov，Hurwitz数的Toda方程，数学研究快报 7（2000），447-453。[23] A. Okounkov 与 R. Pandharipande，平面中点希尔伯特概形的量子上同调，数学发明 179（2010），523-557。[24] A. Okounkov 与 R. Pandharipande，Gromov-Witten理论、Hurwitz 理论与完备循环，数学年刊（2）163（2006），517-560。[25] I. Grojnowski，瞬子与仿射代数I：希尔伯特概形与顶点算子，数学研究快报 3（1996），275-291。[26] O. Schiffmann 与 E. Vasserot，椭圆Hall代数、Cherednik-Hecke代数与Macdonald多项式，数学汇编 147（2011），188-234。[27]R. Wang、F. Liu、C.-H. Zhang 与 W.-Z. Zhao，具有 W-表示的（β-形变）配分函数层级的超可积性，欧洲物理杂志C 82（2022），902，[arXiv:2206.13038 hep-th]。

[28] 弗里曼·戴森，复杂系统能级的统计理论 I，《数学物理学杂志》**3**（1962），140-156。[29] M. L. Mehta，《随机矩阵》，第3版，纯粹与应用数学，**142**，学术出版社，阿姆斯特丹，2004。[30] L. O. Chekhov、B. Eynard 和 O. Marchal，β-系综模型的拓扑展开及分扇区方法中的量子代数几何，《理论与数学物理》**166**（2011），141-185, [arXiv:1009.6007 math-ph]。[31] A. D. Mironov、A. Yu. Morozov 和 S. M. Natanzon，Hurwitz-Kontsevich理论中的完备切并算子集，《理论与数学物理》**166**（2011），1-22, [arXiv:0904.4227 hep- th]。[32] M. Brion，等变上同调与等变相交理论，《表示理论与代数几何》，**514**（1998），1-37。[33] M. Varagnolo，箭图簇与杨代数，《数学物理快报》**53**（2000），273-283。