arXiv:2602.04790v1 [math.AP] 4 Feb 2026

带边界的黎曼曲面上具有非量子化奇异性的平均场方程的爆破解

Mohameden Ahmedou、ZhengniHu、MiaomiaoZhu

2026年2月5日

摘要

我们研究带边界的紧致黎曼曲面（Σ, g）上带奇异源的平均场方程，并施加齐次诺伊曼边界条件：

$$\begin{cases} -\Delta_g v = \rho\left(\dfrac{Ve^v}{\int_\Sigma Ve^v \,\mathrm{d}v_g} - \dfrac{1}{|\Sigma|_g}\right) - \displaystyle\sum_{\xi\in Q} \frac{\varrho(\xi)}{2}\,\gamma(\xi)\left(\boldsymbol{\delta}_\xi - \frac{1}{|\Sigma|_g}\right) & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} v = 0 & \text{on } \partial\Sigma. \end{cases}$$

这里， V是光滑正函数， ρ 是非负参数， $Q \subset \Sigma$ 是一组有限的指定奇点，且奇异权重满足 $\gamma(\xi) \in (-1, +\infty)\backslash(\mathbb{N}\cup\{0\})$。系数由 $\varrho(\xi) = 8\pi$ （对 $\xi \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ ）和 $\varrho(\xi) = 4\pi$ （对 $\xi \in \partial\Sigma$）给出。

我们在非量子化奇异情形下构造爆破解，包括纯奇异爆破情形以及奇异-正则混合爆破情形，其中参数趋于共振值。该构造是在适当的稳定性假设下，通过Lyapunov-Schmidt约化实现的。

2020年数学主题分类： 主要分类：35J25；次要分类：35B40, 35B44, 58J05

关键词： 奇异平均场方程、爆破现象、Lyapunov-Schmidt约化、带边界的黎曼曲面

1 引言

°设 (Σ, g) 是一个内部为 Σ 、边界为 $\partial\Sigma$ 的紧致黎曼曲面。为简便起见，我们假设 Σ 的面积为 1，即 $|\Sigma|_g = 1$。我们考虑以下带奇异源的平均场方程：

$$\begin{cases} -\Delta_g v = \rho\left(\dfrac{Ve^v}{\int_\Sigma Ve^v \,\mathrm{d}v_g} - 1\right) - \displaystyle\sum_{\xi\in Q} \frac{\varrho(\xi)}{2}\gamma(\xi)(\boldsymbol{\delta}_\xi - 1) & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} v = 0 & \text{on } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， Δ_g 为拉普拉斯-贝尔特拉米算子，$\mathrm{d}v_g$ 为（Σ, g）的面积元， ν_g 表示沿着 $\partial\Sigma$的外单位法向量， V 为光滑正函数， ρ 为非负参数， Q 为 Σ的给定有限子集， γ（ξ）$\in$（$0, +\infty$）$\setminus$（$\mathbb{N}\cup\{0\}$）对所有 $\xi \in Q$均成立，且 $\boldsymbol{\delta}_\xi$°为集中于 ξ的 Σ 上的狄拉克测度。如果 $\xi \in \Sigma$ ，系数 ϱ（ξ） $= 8\pi$ ；如果$\xi \in \partial\Sigma$.，则 4π

奇异平均场方程自然地出现在物理学和数学的多个领域中。它们作为二维湍流欧拉流的平均场极限出现 [19, 20, 23, 42]，也作为电弱理论和陈-西蒙斯规范理论中自对偶涡旋的基本模型出现 [4, 54, 56, 65]。在共形几何中，它们与在曲面上预设高斯曲率的问题密切相关，无论是存在锥形奇点的情形 [57] 还是正则情形[21,22,41]。大量文献研究了平均场方程（1.3），探讨其存在性、唯一性和爆破行为；例如参见 [5–11, 13, 14, 16, 24, 37, 61, 68]及其中的参考文献。

在正则情形 $Q = \emptyset$ 中，爆破解的渐近行为及其存在性已得到广泛研究；例如，参见 [3, 18, 25, 32, 35, 36, 45, 48, 51, 53]。对于奇异问题，爆破点 ξ 可分为三类：正则（即 $\xi \notin Q$）、非量子化（即 $\gamma(\xi) \notin \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$）和量子化（即 $\gamma(\xi) \in \mathbb{N}$）。在这种情形下，分析要细致得多。文献 [6,12,24,68], 研究了正则奇点和非量子化奇点附近的渐近行为，其中爆破解经过重标度后呈现单泡剖面。关于非量子化奇异情形下的存在性结果，Esposito [34] 为具有狄利克雷边界条件和正奇异权函数的 Liouville 型方程构造了爆破解。在量子化奇点处，球面哈纳克不等式可能失效，使问题更具挑战性；尽管如此，近年来仍取得了重大进展 [14, 31, 33, 43, 62–64]。

记

$$h_Q := \sum_{\xi\in Q} \frac{\varrho(\xi)}{2}\gamma(\xi)\, G^g(\cdot,\xi). \tag{1.2}$$

这里， $G^g(\cdot,\cdot)$表示与纽曼拉普拉斯算子相关的格林函数；详情参见第2节。由此可得 $-\Delta_g h_Q = \sum_{\xi\in Q} \varrho(\xi)\, \gamma(\xi)(\delta_\xi - 1)$。令 $u(x) = v(x) + h_Q(x)$且 $K(x) = V(x)\, e^{-h_Q(x)}$，我们得到 u 是方程(1.1)的解，其中 K 是一个非负光滑函数，其零点集恰为 Q。

平均 带奇异源项的场方程（1.1）可以改写如下 :

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \rho\Big(\dfrac{Ke^u}{\int_\Sigma Ke^u \,\mathrm{d}v_g} - 1\Big) & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} u = 0 & \text{on } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{1.3}$$

由于方程（1.3）的解空间在加上任意常数后保持不变，我们考虑子空间 $H^1(\Sigma)$ 中平均值为 0， $\mathrm{H}^1 := \{u \in H^1(\Sigma) : \int_\Sigma u \mathrm{d}v_g = 0\}$. 相应的 Euler-Lagrange 泛函为:

$$J_\rho(u) = \frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla u|_g^2 \,\mathrm{d}v_g - \rho \ln \int_\Sigma Ke^u \,\mathrm{d}v_g, \text{ for all } u \in \overline{\mathrm{H}}^1.$$

众所周知，只有当参数 ρ 属于所谓的共振值集合时，才会出现爆破现象。给定一个奇异集 $Q \subset \Sigma$ ，满足 $|Q| < \infty$，共振值集合定义为

$$\mathcal{G} := \Big\{ 4\pi(2p+q) + \sum_{\xi\in Q_1} (1+\gamma(\xi))\varrho(\xi) > 0 : Q_1 \subset Q,\ p,q \in \mathbb{N}\cup\{0\} \Big\}, \tag{1.4}$$

这一结论已通过爆破分析在平均场方程中得到确立（参见 [12] ，适用于闭曲面；对于带边界的黎曼曲面，经过细微修改后同样成立）。

自然要问，爆破现象是否对所有 $\rho_* \in \mathcal{G}$都会发生。本文建立了方程（1.3）在参数趋于 $\rho_* \in \mathcal{G}$时存在爆破解序列的充分条件。仅在正则点发生爆破的情形已在 [3] 中于 C^1-稳定性假设下对约化函数进行了研究；而我们通过Lyapunov-Schmidt约化，在非量子化情形（包括存在负奇异权重）下，于带边界的黎曼曲面上构造了纯奇异爆破解与正则-奇异混合爆破解。量子化奇点的情形可能涉及非简单爆破行为，留待今后研究。

尽管Lyapunov-Schmidt约化是构造爆破解的标准工具，但在存在奇异源时，边界爆破点与非量子化奇点会带来额外困难，因而需要引入适当的投影泡并建立精细估计。

当爆破仅发生在奇异点时，我们的第一个主要结果陈述如下。

定理 1.1. 设 $Q_1 \subset Q$ 为一个非空子集，并令 $N := |Q_1| > 0$。则存在一个爆破解族 v_ε 满足 (1.1) 且

$$\rho_\varepsilon \to \rho_* := \sum_{\xi \in Q_1} (1 + \gamma(\xi))\, \varrho(\xi) \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

使得 v_ε 恰好在 Q_1中的各点处爆破。

此外，取一个子列后，以下估计成立：当 $\varepsilon \to 0$

$$\rho_\varepsilon \frac{V e^{v_\varepsilon}}{\int_\Sigma V e^{v_\varepsilon}\, \mathrm{d}v_g}\, \mathrm{d}v_g \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{\xi \in Q_1} (1 + \gamma(\xi))\varrho(\xi)\boldsymbol{\delta}_\xi \qquad (weak\text{-}*\ convergence)$$

and

$$J_{\rho^\varepsilon}(u_\varepsilon) \to \rho_* - \rho_* \ln\left(\frac{\rho_*}{8}\right) + \sum_{\xi \in Q_1} 2(1 + \gamma(\xi))\varrho(\xi) \ln(1 + \gamma(\xi)),$$

其中 $u_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x) + h_Q(x)$ 且 $K(x) = V(x)e^{-h_Q(x)}$。

在陈述第二个主要结果之前，我们先引入相应的约化函数，并定义 C^1-“稳定”临界点的概念。

对于任意固定的 Q，我们将共振值集（1.4）改写如下：

$$\mathcal{G} := \{n_m : m \in \mathbb{N} \text{ with } n_m - n_{m'} > 0 \text{ for any } m > m'\}.$$

给定 $m \in \mathbb{N}$，我们设 $\rho_* := 4\pi n_m$, $\mathcal{P}(Q) := \{B :\ B \subset Q\}$ 是 Q, 的幂集，并且

$$\mathcal{I}_m := \left\{(p, q, Q_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathcal{P}(Q) : 4\pi n_m = 4\pi(2p + q) + \sum_{\xi \in Q_1} (1 + \gamma(\xi))\varrho(\xi)\right\}.$$

对任意具有 $N = |Q_1|$的 $\in \mathcal{I}_m$，记为 (p, q, Q_1),

$$\gamma_j := \begin{cases} 0 & \text{for } 1 \le j \le p + q, \\ \gamma(\xi_j^*) & \text{for } p + q < j \le p + q + N. \end{cases}$$

定义 1.1. 定义在流形 M 上的 C^1-函数 $F:\ M\to\mathbb{R}$ 的临界点 $x\in M$ 称为 C^1-稳定的，如果对于 M 中 x 的每个邻域 U，都存在 $\varepsilon>0$，使得下述命题成立：

若 $G:\ U\to\mathbb{R}$ 是一个 C^1-函数，且满足 $\|F-G\|_{C^1(U)}<\varepsilon$，则 G 在 U 中有一个临界点。

当爆破集同时包含奇异点和正则点时，正则爆破点的存在会在线性化算子中产生非平凡的核方向，使其不再具有自然的可逆性。为处理正则爆破点的影响，我们因此对第 2 节中引入的约化泛函施加稳定性条件。

以下结果给出了奇异平均场方程存在爆破解的一个充分条件。

定理 1.2. 给定 $m\in\mathbb{N}$，对于任意满足 $N=|Q_1|>0$ 的 $(p,q,Q_1)\ \in\mathcal{I}_m$，假设由 (2.6) 定义的约化函数 $\mathbf{F}_{p\,q}^{K\,Q_1}$,, 具有一个 C^1- 稳定临界点 $\xi^{0,\,*}:=(\xi_1^*,\dots,\xi_{p+q}^*)$ 并且

$$\gamma_*:=\max\{\gamma_i:i=1,\dots,p+q+N\}<1.$$

那么，存在一个爆破解序列 v_ε，其满足(1.1)，参数为 $\rho_\varepsilon\to\rho_*:=4\pi n_m$ 和 $\xi^{0,\,\varepsilon}:=(\xi_1^\varepsilon,\dots,\xi_{p+q}^\varepsilon)\to\xi^{0,\,*}$。当 $\varepsilon\to0$ 时，该序列恰好在满足 $Q_1=\{\xi_{p+q+1}^*,\dots,\xi_{p+q+N}^*\}$ 的 $\xi_1^*,\dots,\xi_{p+q+N}^*$ 处爆破。

此外，取一个子列后，以下估计成立：当 $\varepsilon\to0$

$$\rho_\varepsilon\frac{Ve^{v_\varepsilon}}{\int_\Sigma Ve^{v_\varepsilon}\,\mathrm{d}v_g}\,\mathrm{d}v_g\overset{*}{\rightharpoonup}\sum_{i=1}^{p+q+N}(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i^*)\boldsymbol{\delta}_{\xi_i^*};$$

and

$$J_{\rho^\varepsilon}(u_\varepsilon)\to\rho_*-\rho_*\ln\left(\frac{\rho_*}{8}\right)+\sum_{i=1}^{p+q+N}2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln(1+\gamma_i)-\frac{1}{2}\mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^{0,*}),$$

其中 $u_\varepsilon(x)=v_\varepsilon(x)+h_Q(x)$ 且 $K(x)=V(x)e^{-h_{Q(x)}}$。

注1.1。出于技术原因，我们将范围限制在 $\gamma_*<1$。当 $\gamma_*>1$ 时，*Lyapunov-Schmidt* 约化中产生的余项相对于小参数 $\varepsilon>0$ 衰减得过慢。因此，用于确定约化泛函临界点的微扰论证会失效。

我们可以将（1.1）中的齐次诺伊曼边界条件推广为非齐次条件，该条件与预设高斯曲率和边界测地

曲率问题有关。设 (Σ, g) 是一个带有光滑边界的紧致黎曼曲面，其中 g 是一个光滑的共形度量。定义 $g_0 := \rho_* \frac{e^{-h_Q} e^w}{\int_\Sigma 2\tilde{K} e^{-h_Q} e^w \, \mathrm{d}v_g} g$，其中 h_Q 由下式定义：~~(1.2)~~，$\rho_* > 0$，并且 K 是 Σ 上的一个给定的光滑正值函数。

~~设~~ g_0 是一个具有预设高斯曲率 K 且边界上的测地曲率为零的共形度量。利用高斯-博内公式（例如参见 [57,命题 1]），我们有 $\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma K_g \, \mathrm{d}v_g + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} k_g \, \mathrm{d}s_g = \chi(\Sigma)$，以及 $\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \tilde{K} \, \mathrm{d}v_{g_0} = \chi(\Sigma) - \sum_{\xi\in Q\cap\mathring{\Sigma}} \gamma(\xi) - \sum_{\xi\in Q\cap\partial\Sigma} \gamma(\xi)_2$，其中，$\chi(\Sigma)$ ~~是~~ Σ的欧拉示性数，K_g 是 (Σ, g) 的常数高斯曲率，k_g 是相对于 g 而言的 $\partial\Sigma$ 的测地曲率，而 $\mathrm{d}s_g$ 是由 g诱导的 $\partial\Sigma$的线元。由此可得 $\rho_* = 4\pi(\chi(\Sigma) - \sum_{\xi\in Q\cap\mathring{\Sigma}} \gamma(\xi) - \sum_{\xi\in Q\cap\partial\Sigma} \gamma(\xi)_2)$.按照 [11, 57], 中的论证，我们得到如下平均场型方程，

$$
\begin{cases} -\Delta_g w = \rho\Big(\dfrac{2\tilde{K} e^{-h_Q} e^w}{\int_\Sigma 2\tilde{K} e^{-h_Q} e^w \mathrm{d}v_g} - 1\Big) + 2\displaystyle\int_{\partial\Sigma} k_g \, \mathrm{d}s_g & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} w = -2k_g & \text{on } \partial\Sigma, \end{cases} \tag{1.5}
$$

其中参数 $\rho > 0$。

我们引入一个光滑的辅助函数 h，使其满足

$$
\begin{cases} -\Delta_g h = 2\displaystyle\int_\Sigma k_g \, \mathrm{d}s_g & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} h = -2k_g & \text{on } \partial\Sigma, \end{cases}
$$

并定义 $v := w - h$ 以及 $V := 2\tilde{K} e^{-h_Q + h}$。于是，方程（1.5）化为如下形式（1.1）的齐次诺伊曼边界条件平均场方程。

因此，根据定理 1.2，我们得到关于几何边界条件问题的以下推论：

推论 1.1。给定 $m \in \mathbb{N}$，对于任意的 $(p, q, Q_1) \in \mathcal{I}_m$，满足 $N = |Q_1| > 0$，令 $K = 2\tilde{K} e^{-h_Q + h}$。假设约化函数 $\mathbf{F}^{K, Q_1}_{p,q}$ 由 (2.6) 定义，且有一个 C^1-稳定临界点 $\xi^{0,*} := (\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{p+q})$ 并且

$$
\gamma_* := \max\{\gamma_i : i = 1, \ldots, p+q+N\} < 1.
$$

那么，存在一个爆破解序列 w_ε，其参数为 $\rho_\varepsilon \to \rho_* := 4\pi n_m$，且 $\xi^{0,\varepsilon} := (\xi^\varepsilon_1, \ldots, \xi^\varepsilon_{p+q}) \to \xi^{0,*}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时，该序列在 $\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{p+q+N}$ 处爆破，且有 $Q_1 = \{\xi^*_{p+q+1}, \ldots, \xi^*_{p+q+N}\}$。

此外，取一个子列后，以下估计成立：当 $\varepsilon \to 0$

$$
\rho_\varepsilon \frac{2\tilde{K} e^{-h_Q} e^{w_\varepsilon}}{\int_\Sigma 2\tilde{K} e^{-h_Q} e^{w_\varepsilon} \, \mathrm{d}v_g} \mathrm{d}v_g \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{i=1}^{p+q+N} (1 + \gamma_i) \varrho(\xi^*_i) \boldsymbol{\delta}_{\xi^*_i}.
$$

本文其余部分安排如下。

在第2节中，我们介绍必要的预备知识，包括等温坐标、格林函数、投影泡、Moser-Trudinger不等式，以及分析中所用的近似解。第3 节将利用这些近似解对问题进行有限维约化。我们首先分析线性化问题并证明其部分可逆性，随后利用不动点定理处理无限维问题。在第4节中，我们展开约化函数并分析其性质。第5 节运用变分方法证明主要结果。最后，附录A 和B 分别给出线性化问题以及投影泡渐近行为的技术细节。

致谢。M. Ahmedou 感谢德国研究联合会 AH 156/2-1 项目提供的资助。

2 预备知识

记号

本文中，“序列”和“子列”这两个术语可以互换使用，因为在本文的分析语境中，两者的区别并不重要。我们的论证中用 C 表示的常数，在不同方程中甚至同一方程的不同位置上可以取不同的值。

我们使用标准的渐近记号：当 $x \to a$ 时，$f(x) \asymp g(x)$ 意味着存在一个常数 $C > 0$，使得 $\frac{1}{C}|g(x)| \le |f(x)| \le C|g(x)|$；当 $x \to a$ 时，$f(x) = O(g(x))$ 意味着存在常数 $C > 0$，使得 $|f(x)| \le C|g(x)|$；当 $x \to a$ 时，$f(x) = o(g(x))$ 意味着 $\lim_{x\to a} |f(x)|/|g(x)| = 0$.

2.1 等温坐标与格林函数

每个黎曼曲面 (Σ, g) 在局部意义下都是共形平坦的，具有等温坐标（见 [28, 39, 46, 58]），其中 g 与欧几里得度量共形。本文使用来自 [35, 66], 的一族等温坐标，将 ξ 的一个开邻域映射到一个圆盘

或半圆盘中，如下所述：

对于任意 $\xi \in \Sigma$，都存在一个等温坐标系 $(U(\xi), y_\xi)$，使得 y_ξ 将 ξ 周围的一个开邻域 $U(\xi)$ 映射到一个半径为 $2r_\xi$ 的开圆盘 B^ξ 中，在该圆盘内，$g = e^{\hat{\varphi}_\xi}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ 满足 $y_\xi(\xi) = (0,0)$ 且 $U(\xi) \subset \Sigma$。

对于 $\xi \in \partial\Sigma$，存在一个 ξ 周围的等温坐标系 $(U(\xi), y_\xi)$，使得 y_ξ 的像是一个半径为 $2r_\xi$ 的半圆盘 $B^\xi := \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| < 2r_\xi, y_2 \geq 0\}$，且 $y_\xi(U(\xi) \cap \partial\Sigma) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| < 2r_\xi, y_2 = 0\}$，其中 $g = e^{\hat{\varphi}_\xi}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ 满足 $y_\xi(\xi) = (0,0)$。

此外，$\hat{\varphi}_\xi : B^\xi \to \mathbb{R}$ 与 Σ 的高斯曲率 K_g 满足以下方程：

$$-\Delta\hat{\varphi}_\xi(y) = 2K_g(y_\xi^{-1}(y))e^{\hat{\varphi}_\xi(y)} \quad \text{for all } \ y \in B^\xi.$$

此外，如果 $\xi \in \partial\Sigma$，那么

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\hat{\varphi}_\xi(y) = -2k_g(y)e^{\frac{\hat{\varphi}_\xi(y)}{2}} \quad \text{for all } \ y \in \partial B^\xi \cap \partial\mathbb{R}^2_+,$$

其中 k_g 是相对于度量 $\partial\Sigma$ 的边界 g 的测地曲率。假设 y_ξ 和 $\hat{\varphi}_\xi$ 均关于 ξ 光滑变化，如[35]所示。此外，$\hat{\varphi}_\xi$ 满足

$$\hat{\varphi}_\xi(0) = 0 \text{ and } \nabla\hat{\varphi}_\xi(0) = \begin{cases} 0 & \text{if } \xi \in \mathring{\Sigma}, \\ (0, -2k_g(\xi)) & \text{if } \xi \in \partial\Sigma. \end{cases} \tag{2.1}$$

令 $\varphi_\xi(x) = \hat{\varphi}_\xi(y_\xi(x))$，其中 $x \in U(\xi)$。在共形映射下，Δ_g 的变换律如下：对于 $\tilde{g} = e^\varphi g$，$\Delta_{\tilde{g}} = e^{-\varphi}\Delta_g$. 此外，等温坐标保持诺伊曼边界条件，即对于任意 $x \in U(\xi) \cap \partial\Sigma$，我们有

$$(y_\xi)_*(\nu_g(x)) = -e^{-\frac{\hat{\varphi}_\xi(y)}{2}}\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{y=y_\xi(x)}.$$

对于 $\xi \in \Sigma$ 和 $0 < r \leq 2r_\xi$，令 $B^\xi_r := B^\xi \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : \ |y| < r\}$，且 $U_r(\xi) := y_\xi^{-1}(B^\xi_r)$.

对于任意 $\xi \in \Sigma$，我们定义与纽曼拉普拉斯算子相关的格林函数 $G^g(\cdot,\xi) := G^g_\xi$ 满足以下方程的（1.3）：

$$\begin{cases} -\Delta_g G^g(x,\xi) = \boldsymbol{\delta}_\xi - 1, & x \in \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} G^g(x,\xi) = 0, & x \in \partial\Sigma, \\ \displaystyle\int_\Sigma G^g(x,\xi)\,\mathrm{d}v_g(x) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

设 χ 是 $C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ 中的径向截断函数，使得

$$\chi(s)=\begin{cases}1 & \text{if } |s|\le 1,\\ 0 & \text{if } |s|\ge 2.\end{cases} \tag{2.3}$$

设定 $\chi_\xi(x):=\chi(4|y_\xi(x)|/r_\xi)$。定义 $\Gamma^g(x,\xi)=\Gamma^g_\xi(x)=-\frac{4}{\varrho(\xi)}\chi_\xi(x)\ln|y_\xi(x)|$. 格林函数的正则部分定义为 $H^g(x,\xi)=H^g_\xi(x):=G^g(x,\xi)-\Gamma^g(x,\xi)$, 其满足以下方程：

$$\begin{cases} -\Delta_g H^g_\xi=-\frac{4}{\varrho(\xi)}(\Delta_g\chi_\xi)\ln|y_\xi|-\frac{8}{\varrho(\xi)}\langle\nabla\chi_\xi,\nabla\ln|y_\xi|\rangle_g-1 & \text{in } \Sigma,\\ \partial_{\nu_g}H^g_\xi=\frac{4}{\varrho(\xi)}(\partial_{\nu_g}\chi_\xi)\ln|y_\xi|+\frac{4}{\varrho(\xi)}\chi_\xi\partial_{\nu_g}\ln|y_\xi| & \text{on } \partial\Sigma,\\ \int_\Sigma H^g_\xi\,\mathrm{d}v_g=\frac{4}{\varrho(\xi)}\int_\Sigma\chi_\xi\ln|y_\xi|\,\mathrm{d}v_g. \end{cases} \tag{2.4}$$

根据椭圆方程的正则性（参见 [1,2,52,60], 例如），在 $C^{2,\alpha}(\Sigma)$ 中，对于任意 $\alpha\in(0,1)$，方程（2.4）存在唯一解 $H^g(x,\xi)$。$H^g(x,\xi)$ 是 $G^g(x,\xi)$ 的格林函数正则部分，并且 $R^g(\xi):=H^g(\xi,\xi)$ 是 Σ 上的罗宾函数。显然，$H^g(\xi,\xi)$ 不依赖于截断函数 χ 和局部坐标图。

对于 $p,q\in\mathbb{N}$，设 $\Delta_{p,q}(\Sigma):=\{\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q})\in\Sigma^p\times(\partial\Sigma)^q:\ \xi_i=\xi_j$ 对某个 $i\ne j\}$, $\Xi_{p,q}:=\Sigma^p\times(\partial\Sigma)^q\setminus\Delta_{p,q}(\Sigma)$, 以及 $\Xi'_{p,q}:=\{\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q}):\ \xi_i\notin Q$ 对所有 $i=1,\dots,p+q\}$. 记 $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$。给定 $m\in\mathbb{N}$ 和 $(p,q,Q_1)\in\mathcal{I}_m$，记 $Q_1=\{\xi^*_{p+q+1},\dots,\xi^*_{p+q+N}\}$。对于 $i=1,\dots,p+q+N$，存在一个光滑正函数 $K_i\in C^\infty(\Sigma,\mathbb{R}_+)$，使得在 ξ_i 的一个小邻域内：$=\xi^*_i$,

$$K(x)=K_i(x)|y_{\xi_i}(x)|^{2\gamma_i}. \tag{2.5}$$

特别地，对于 $i=1,\dots,p+q$，我们取 $K_i(x)=K(x)$。在构型集 $\Xi'_{p,q}$ 上定义如下约化函数：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{K,Q_1}_{p,q}(\xi^0)=&\sum_{i=1}^{p+q+N}2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln K_i(\xi_i)+\sum_{i=1}^{p+q+N}(1+\gamma_i)^2\varrho(\xi_i)^2R^g(\xi_i)\\ &+\sum_{\substack{i,j=1,\dots,p+q+N\\ i\ne j}}(1+\gamma_i)(1+\gamma_j)\varrho(\xi_i)\varrho(\xi_j)G^g(\xi_i,\xi_j),\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中，R^g 是第 2.1 节定义的罗宾函数，$\xi^0:=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q})\in\Xi'_{p,q}$, $N:=|Q_1|$, $Q_1:=\{\xi^*_{p+q+1},\dots,\xi^*_{p+q+N}\}$，以及 $\xi:=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q+N})=(\xi^0,Q_1)$。

2.2 投影泡

°问题（1.1）具有如下局部极限轮廓：缩放中心为 ξ 位于 Σ

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\delta}_\lambda^\gamma = |y|^{2\gamma}e^{\tilde{\delta}_\lambda^\gamma} & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^2} |y|^{2\gamma}e^{\tilde{\delta}_\lambda^\gamma}\mathrm{d}y = 8\pi(1+\gamma), \end{cases}$$

缩放中心为 ξ $\partial\Sigma$ 上,

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\delta}_\lambda^\gamma = |y|^{2\gamma}e^{\tilde{\delta}_\lambda^\gamma} & \text{in } \mathbb{R}^2_+, \\ \partial_{y_2}\tilde{\delta}_\lambda^\gamma = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}^2_+, \\ \int_{\mathbb{R}^2_+} |y|^{2\gamma}e^{\tilde{\delta}_\lambda^\gamma}\mathrm{d}y = 4\pi(1+\gamma), \end{cases} \tag{2.7}$$

对于 $\gamma > -1$, 上述 Liouville 型方程的所有解已由 Chen和Li [27] 在情形 $\gamma = 0$ 下, 以及由 Prajapat和Tarantello [53] 在 $\gamma \neq 0$ 下完全分类。

˜对于 $\gamma \in (-1,\infty)\setminus\mathbb{N}$, 任意解$\delta_\lambda^\gamma$ （2.2）或（2.7）均可写成如下形式:

$$\tilde{\delta}_\lambda^\gamma(y) := \tilde{\delta}^\gamma(\lambda y) + \ln(\lambda^{2(1+\gamma)}) = \ln\frac{8(1+\gamma)^2\lambda^{2(1+\gamma)}}{(1+\lambda^{2(1+\gamma)}|y|^{2(1+\gamma)})^2} \quad \text{for } y \in \mathbb{R}_\xi,$$

其中 $\tilde{\delta}^\gamma(y) := \ln {}^{8}{}_{\overline{(1+\gamma)^2\ (1+|y|^{2(1+\gamma)})_2}}$, $\lambda > 0$, , 并且当 $\xi \in \mathring{\Sigma}$ 时 $\mathbb{R}_\xi = \mathbb{R}^2$; 当 $\xi \in \partial\Sigma$. 时 $\mathbb{R}_\xi = \mathbb{R}^2_+$ 。记

$$\delta_{\lambda,\xi}^\gamma(x) := \tilde{\delta}_\lambda^\gamma(y_\xi(x)) = \ln\frac{8(1+\gamma)^2\lambda^{2(1+\gamma)}}{(1+\lambda^{2(1+\gamma)}|y_\xi(x)|^{2(1+\gamma)})^2},$$

对所有 $x \in U(\xi)$ 以及 $\delta_{\lambda,\,\xi}^\gamma(x)$, 对所有 $x \in \Sigma\setminus U(\xi)$。接下来, 我们通过以下方程定义投影泡:

$$\begin{cases} -\Delta_g P\delta_{\lambda,\xi}^\gamma = \chi_\xi e^{-\varphi_\xi}|y_\xi|^{2\gamma}e^{\delta_{\lambda,\xi}^\gamma} - \overline{\chi_\xi e^{-\varphi_\xi}|y_\xi|^{2\gamma}e^{\delta_{\lambda,\xi}^\gamma}} & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} P\delta_{\lambda,\xi}^\gamma = 0 & \text{on } \partial\Sigma, \\ \int_\Sigma P\delta_{\lambda,\xi}^\gamma\,\mathrm{d}v_g = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $f := \int_\Sigma f\,\mathrm{d}v_g$ 对任意 $f \in L^1(\Sigma)$。利用 [1, 60] 中的正则性理论, $P\delta_{\lambda,\,\xi}^\gamma$ 定义良好且光滑。

2.3 Moser-Trudinger 不等式

Moser-Trudinger不等式是研究 Liouville 型方程的重要工具。

在正则情形下，经典的 Moser-Trudinger不等式成立；例如参见 [22,49, 50, 67]。我们在下面的引理中回顾这一结果。

引理 2.1. 对于闭紧黎曼曲面， Σ，存在正常数 C 使得

$$\ln \int_{\Sigma} K e^{u} \, \mathrm{d}v_g \leq \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}v_g + C,$$

对于所有 $u \in \mathrm{H}^1$；对于带边界的紧致黎曼曲面 Σ，存在正常数C 使得

$$\ln \int_{\Sigma} K e^{u} \, \mathrm{d}v_g \leq \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}v_g + C,$$

对于所有 $u \in \mathrm{H}^1$;

在含有负奇异源的奇异情形下，尖锐Moser-Trudinger常数尚未得到充分理解。不过，就本文而言，使用下述非最优版本的不等式已足够。

引理2.2. 存在正常数 $C, \tau^* > 0$ 使得

$$\ln \int_{\Sigma} K e^{u} \, \mathrm{d}v_g \leq \frac{1}{4\mathrm{b}} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}v_g + C,$$

对于所有 $u \in \mathrm{H}^1$ 且 $\mathrm{b} 2 \, (0, 2\pi\tau^*)$,

若 $\gamma(\xi) \geq 0$ 对所有 $\xi \in Q$，则引理 2.1 得自 [67]。在存在负锥形奇点时，该不等式可通过结合 [57] 的论证与倍增构造得到。我们略去细节。

2.4 近似解

假设 $\{u_n\}$ 是如下齐次诺伊曼边值问题的一个解序列:

$$\begin{cases} -\Delta_g u_n = \rho_n \Big(\dfrac{K^n e^{u_n}}{\int_{\Sigma} K^n e^{u_n} \, \mathrm{d}v_g} - 1 \Big) & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g} u_n = 0 & \text{on } \partial\Sigma, \end{cases}$$

其中 $K^n \to K$ 且 $\rho_n \to \rho.$ 。对奇异平均场方程，我们有如下浓缩紧性两分法。

引理 2.3. 以下情况之一成立:

a.（紧性） $\{u_n\}$ 在 $H^1(\Sigma)$中一致有界。

b.（浓缩）爆破点集 $\mathcal{S} := \{x \in \Sigma : \exists x_n \to x$满足 $u_n(x_n) \to +\infty\}$，是非空且有限的，并且 $u_n - \ln \int_\Sigma K^n e^{u_n} \mathrm{d}v_g \to -\infty$ 在 $\Sigma \setminus \mathcal{S}$上局部一致。此外，

$$\rho_n \frac{K^n e^{u_n}}{\int_\Sigma K^n e^{u_n} \mathrm{d}v_g} \mathrm{d}v_g \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{x \in \mathcal{S}} (1 + \gamma(x)) \boldsymbol{\delta}_x,$$

其中，$\boldsymbol{\delta}_x$ 是在点 x 处集中的狄拉克质量，而当 $\gamma(x) = \begin{cases} 0 & x \notin Q \\ \text{时，} \gamma\ x & x \in Q \end{cases}$.（） </style}时

Liouville 型方程的浓缩紧性两分法是一个经过深入研究的结果，最初由 Brezis 和 Merle 提出 [18]。后续发展将这一框架扩展到了各种情形。对于正则问题，无边界爆破的情形可参见 [47,55]，而涉及边界爆破的情形可参见 [17,44,59]。对于奇异问题，无边界爆破的情形已在 [12,13] 及其中的参考文献中得到处理。沿用 [44], 中的论证，并作适当修改以考虑奇异源，定理 2.3 可通过类似方法得到。

利用引理 2.3 以及引理 2.1中的 Moser-Trudinger不等式，我们得到

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \text{ if and only if } \int_\Sigma K^n e^{u_n} \mathrm{d}v_g \to +\infty.$$

为了构造参数 $\rho \to 4\pi n_m$趋于时方程 (1.3) 的一列爆破解，等价于寻找以下 Liouville 型方程的爆破解：

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \varepsilon^2 K e^u - \overline{\varepsilon^2 K e^u} & \text{in } \Sigma \\ \partial_{\nu_g} u = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}, \tag{2.9}$$

由引理 2.3 以及变量替换 $\varepsilon^2 = \frac{\rho}{\int_\Sigma K e^u \mathrm{d}v_g} \to 0.$ 与 (2.9) ~~相关的~~ Euler-Lagrange 泛函为

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Sigma |\nabla u|_g^2 \mathrm{d}v_g - \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^u \mathrm{d}v_g \qquad \text{for } u \in \overline{\mathrm{H}}^1.$$

接下来，对于任意固定的 $m \in \mathbb{N}$和$(p, q, Q_1) \in \mathcal{I}_m$，我们构造一个爆破解族$\{u_\varepsilon\}$，它是方程（2.9）的解，其中 $\varepsilon \to 0$。随后证明，当参数 $\{u_\varepsilon\}$ 趋于1.3时，同一族解也给出了平均场方程（ $\rho \to 4\pi n_m$）的一个爆破序列。

设 $\xi^{0,*}:=(\xi_1^*,\dots,\xi_{p+q}^*)$ 是 $\mathrm{F}_{p\,q}^{K\,Q_1}$, 的一个 C^1-稳定临界点。对于每个 ξ_i^*，令 $(y_{\xi_i^*},U(\xi_i^*))$ 为一个等温坐标卡，使得对所有充分小的 $\sigma>0$， $U_\sigma(\xi_i^*)\subset U_{r_{\xi_i^*}}(\xi_i^*)$。于是，对于任意 $\xi_i\in U_\sigma(\xi_i^*)$，存在一个如主张 3.1] 所述的等温坐标系 $(y_{\xi_i},U(\xi_i))$。特别地， y_{ξ_i} 和 $\hat{}\varphi_{\xi_i}$ 均关于 ξ_i 光滑依赖，其中 $\xi_i\in U_\sigma(\xi_i^*)$， $i=1,\dots,p+q+N$。

定义

$$M_{\sigma,\xi^*}:=\left\{\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q},Q_1)\in\Xi'_{p,q}:\xi_i\in U_\sigma(\xi_i^*)\text{ for }i=1,\dots,p+q\right\},\tag{2.10}$$

r $\sigma>0$，以及 $M^0_{\sigma,\ \xi^*}:=\left\{\xi^0\in\Xi'_{p,q}:(\xi^0,Q_1)\in M_{\sigma,\ \xi^*}\right\}$, 其中 $\xi^*=(\xi^{0,\ *},Q_1$ fo).

对于 $(p,q,Q_1)\in\mathcal{I}_m$， 设 $N:=|Q_1|>0$, $Q_1=\{\xi^*_{p+q+1},\dots,\xi^*_{p+q+N}\}$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q+N})$ $=(\xi^0,Q_1)$. 对于任意 $\xi\in M_{\sigma,\ \xi^*}$， 我们可以选取一个仅依赖于 σ 的一致常数 $r_0>0$， 使得 $r_{\xi_i}\geq 4r_0$ 对所有 $i=1,\dots,p+q+N$ 均成立。我们进一步假设

$$U_{4r_0}(\xi_i)\cap U_{4r_0}(\xi_j)=\emptyset\quad\text{for }i\neq j,\qquad U_{2r_0}(\xi_i)\cap\partial\Sigma=\emptyset\quad\text{for }i=1,\dots,p.$$

°我们还将 $\mathrm{i}(\xi)=2$, 记作 $\xi\in\Sigma$; 将 $\mathrm{i}(\xi)=1$, 记作 $\xi\in\partial\Sigma$.

我们将 $\Sigma\setminus\{\xi_j$ 中的缩放函数定义如下：对于 $i=1,\dots,p+q+N$， $j\neq i\}$ 定义为

$$d_i(x):=\frac{1}{8(1+\gamma_i)^2}e^{(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)H^g(x,\xi_i)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p+q+N}(1+\gamma_j)\varrho(\xi_j)G^g(x,\xi_j)+\ln K_i(x)},\tag{2.11}$$

其中 K_i 由式（2.5）给出。令

$$\lambda_i^{-2(1+\gamma_i)}=d_i\varepsilon^2,\tag{2.12}$$

其中 $d_i:=d_i(\xi_i)$. 。为简洁起见，对于 $i=1,\dots,p+q+N$，我们采用记号 $\chi_i:=\chi_{\xi_i}$、 $\varphi_{\xi_i}:=\varphi_i$、 $\hat{}\varphi_{\xi_i}:=\hat{}\varphi_i$、 $\delta_i=\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\ \xi_i}$以及 $P\delta_i=P\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\ \xi_i}$。

我们考虑以下近似流形：

$$\mathcal{M}^\varepsilon_{p,q,Q_1}=\left\{\sum_{i=1}^{p+q+N}P\delta_i:\xi^0\in M^0_{\sigma,\xi^*},\xi_{p+q+j}=\xi^*_{p+q+j}\text{ for }j=1,\dots,N;\lambda_i\text{ is given by (2.12)}\right\},$$

其中 $\varepsilon>0$ 是一个参数，且 $Q_1=\{\xi^*_{p+q+1},\dots,\xi^*_{p+q+N}\}\subset Q$. 显然， $\mathcal{M}^\varepsilon_{p,\ q,\ Q_1}$ 是一个（ $2p+q$）维流形。切空间由以下向量生成

$$\partial_{(\xi_i)_j}P\delta_i,\quad\forall i=1,\dots,p+q,j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i).$$

给定 $(p,q,Q_1)\in\mathcal{I}_m$ 及 $|Q_1|=N$， 设 $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q+N})=(\xi^0,Q_1)$。定义

$$W:=\sum_{i=1}^{p+q+N}P\delta_i,$$

它是关于变量 $\xi^0 \in \Xi'_{p,\ q}$的近似解。接下来，我们寻找形如 $u = W + \phi,$ 的解，其中 ϕ 是余项，并满足$\|\phi\| = (\int_\Sigma |\nabla\phi|_g^2 \,\mathrm{d}v_g)^{\frac{1}{2}} = o(1)$，当 $\varepsilon \to 0$时。

3 有限维约化

在本节中，我们采用试探函数 $W = \sum_{i=1}^{p+q+N} P\delta_i$ 作为问题（2.9）的近似解，以进行有限维约化。我们首先建立一个关于线性化算子部分可逆性的关键引理，并确定约化方案所需的一个适当的有限维子空间 H^1 。随后，我们估计相应的误差项，并应用不动点论证，将原问题约化为一个有限维问题。

3.1 线性化问题

利用紧致黎曼曲面上的引理 2.1 中的 Moser-Trudinger不等式，映射

$$\overline{\mathrm{H}}^1 \to L^s(\Sigma), \quad u \mapsto e^u$$

是连续的。对于任意 $s > 1$，令 $\tilde{i}_s^* : L^s(\Sigma) \to \mathrm{H}^1$ 为浸入 $i : \mathrm{H}^1 \to L^{\frac{s}{s-1}}(\Sigma)$ 和 $\tilde{i}^* : \cup_{s>1} L^s(\Sigma) \to \mathrm{H}^1$ 所对应的伴随算子。对于任意 $f \in L^s(\Sigma)$，我们定义$i^*(f) := \tilde{i}^*(f - \bar{f})$，即对于任意 $h \in \mathrm{H}^1$，

$$\langle i^*(f), h\rangle = \int_\Sigma K(f - \bar{f})h \,\mathrm{d}v_g.$$

将 $W + \phi$ 代入（2.9），得到

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\phi) = S(\phi) + N(\phi) + \mathcal{R}, & \text{in } \Sigma, \\ \partial_{\nu_g}\phi = 0, & \text{on } \partial\Sigma, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$\mathcal{L}(\phi) := -\Delta_g\phi - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\phi + \overline{\sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\phi}$$

是首个线性项，

$$S(\phi) := \varepsilon^2 K e^W \phi - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\phi + \overline{\varepsilon^2 K e^W \phi - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\phi} \tag{3.2}$$

是高阶线性项,

$$N(\phi) := \varepsilon^2 e^W (e^\phi - \phi - 1) - \overline{\varepsilon^2 e^W (e^\phi - \phi - 1)} \tag{3.3}$$

and

$$\mathcal{R} := \Delta_g W + \varepsilon^2 K e^W - \overline{\varepsilon^2 K e^W} \tag{3.4}$$

是余项。为了找到爆破解序列，其满足（2.9），形式为 $W + \phi$，只需找到适当的 $\xi \in \Xi'_{p,q} \times Q_1^N$和 ϕ，以求解非线性问题（3.1），当 $\varepsilon > 0$ 充分小时。

由构造可知

$$\int_\Sigma \mathcal{L}(\phi)\,\mathrm{d}v_g = \int_\Sigma S(\phi)\,\mathrm{d}v_g = \int_\Sigma N(\phi)\,\mathrm{d}v_g = \int_\Sigma \mathcal{R}\,\mathrm{d}v_g.$$

接下来，我们证明线性化算子在 H^1 的一个有限余维子空间上的部分可逆性，这是 Lyapunov-Schmidt 约化过程的关键引理。

Let

$$z_0^0(y) = 2\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} \quad \text{and} \quad z_j^0(y) = \frac{4y_j}{1+|y|^2} \text{ for } j = 1, \dots, \mathrm{i}(\xi),$$

它们生成如下线性问题的核（见 [25, 36]）：

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \dfrac{8}{(1+|y|^2)^2}\phi & \text{in } \mathbb{R}_\xi \\ \partial_{y_2}\phi = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}_\xi \end{cases},$$

其中 $\mathbb{R}_\xi = \mathbb{R}^2$ 对应于 $\xi \in \mathring{\Sigma}$， $\mathbb{R}^2_+$ 对应于 $\xi \in \partial\Sigma$。此外，对于 $\gamma \in (-1, +\infty) \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$, 我们令

$$z_0^\gamma = 2(1+\gamma)\frac{1-|y|^{2(1+\gamma)}}{1+|y|^{2(1+\gamma)}},$$

w它生成下列线性问题的核（见引理 A.1 ）:

$$\begin{cases} -\Delta\phi = |y|^{2(1+\gamma)}\dfrac{8}{(1+|y|^{2(1+\gamma)})^2}\phi & \text{in } \mathbb{R}_\xi \\ \partial_{y_2}\phi = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}_\xi \end{cases}.$$

然后，我们通过等温坐标将函数 $z_j^{\gamma_i}$ 拉回到黎曼曲面上，

$$Z_i^j(x) = \begin{cases} z_j^{\gamma_i}(\lambda_i |y_{\xi_i}|) & x \in U(\xi_i) \\ 0 & x \in \Sigma \setminus U(\xi_i) \end{cases},$$

对于 $i=1,\dots,p+q+N$ 和 $j=0,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$，对于 $i=1,\dots,p+q$ 和 $j=0$，对于 $i=p+q+1,\dots,p+q+N$。然后，我们通过以下方程将函数 Z_i^j 投影到空间 H^1 中

$$\begin{cases} -\Delta_g P Z_i^j = \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} Z_i^j - \overline{\chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} Z_i^j} & \text{in } \Sigma \\ \partial_{\nu_g} P Z_i^j = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}. \tag{3.5}$$

接下来，我们将在以下正交空间上考虑线性化问题

$$K_\xi := \langle P Z_i^j : i=1,\dots,p+q, j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)\rangle,$$

及其正交空间

$$K_\xi^\perp := \left\{ \phi \in \overline{\mathrm{H}}^1 : \langle \phi, h\rangle = 0, \forall h \in K_\xi \right\}.$$

对于任意 $s>1$，给定 $h \in L^s(\Sigma) := \{h : \|h\|_s := (\int_\Sigma |h|^s \mathrm{d}v_g)^{\frac{1}{s}} < +\infty\}$，求 $\phi \in K_\xi^\perp \cap W^{2,s}(\Sigma)$ 使得

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\phi) = h & \text{in } \Sigma \\ \partial_{\nu_g}\phi = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}. \tag{3.6}$$

我们首先给出 Lyapunov-Schmidt约化过程中的关键引理。按照 [32,35] 中的论证，可以相当标准地推出该引理。为简洁起见，我们简要概述证明过程。

引理 3.1。设 $\mathscr{D}$ 是 M_σ 的紧子集，ξ^*。对于任意 $s>1$，存在 $\varepsilon_0>0$ 和$C>0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$，$\xi \in \mathscr{D}$，$h \in L^s(\Sigma)$ 以及 $\phi \in \mathrm{H}^1 \cap K_\xi^\perp$是 (3.6) 的唯一解时，以下估计成立：

$$\|\phi\| \le C |\ln \varepsilon| \, \|h\|_s,$$

其中 $\|h\|_s := \|h\|_{L^s(\Sigma)}$。

证明。我们将通过反证法证明这一点。假设引理 3.1 不成立，即存在 $s>1$、一个由 $\varepsilon_n \to 0, \xi^n \to \xi^*$组成的序列，$h_n \in L^s(\Sigma)$ 以及 $\overline{\phi_n} \in \mathrm{H}^1 \cap K_\xi^\perp$满足（3.6）的 h_n，使得当 $n \to +\infty$,

$$\|\phi_n\| = 1 \text{ and } |\ln \varepsilon_n| \|h_n\|_s \to 0. \tag{3.7}$$

为简化记号，我们仍用记号 $\phi, h, \xi, \varepsilon$ 代替 $\phi_n, h_n, \xi^n, \varepsilon_n$。

定义，对于 $i=1,\dots,p+q+N$，

$$\tilde{\phi}_i(y)=\begin{cases}\chi\left(\frac{|y|}{\lambda_i r_0}\right)\phi\circ y_{\xi_i}^{-1}(\lambda_i y), & y\in\Omega_i:=\lambda_i B_{2r_0}^{\xi_i}\\ 0 & y\in\mathbb{R}_{\xi_i}\setminus\Omega_i\end{cases}.$$

接下来，我们考虑以下关于 $i=1,\dots,p+q+N$ 的加权空间

$$\mathrm{L}_i:=\left\{u:\left\|\frac{2\sqrt{2}(1+\gamma_i)|\cdot|^{\gamma_i}}{1+|\cdot|^{2(1+\gamma_i)}}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}_{\xi_i})}<+\infty\right\}$$

and

$$\mathrm{H}_i:=\left\{u:\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}_{\xi_i})}+\left\|\frac{2\sqrt{2}(1+\gamma_i)|\cdot|^{\gamma_i}}{1+|\cdot|^{2(1+\gamma_i)}}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}_{\xi_i})}<+\infty\right\}.$$

步骤 1. 对于任意 $i=1,\dots,p+q+N$, $\tilde{\phi}_i\rightharpoonup a_i\frac{1-|y|^{2(1+\gamma_i)}}{1+|y|^{2(1+\gamma_i)}}$，存在某个 $a_i\in\mathbb{R}$，使其在 H_i 中弱收敛，并在 L_i 中强收敛。

将 ϕ 用作 $\mathcal{L}(\phi)=h$ 的测试函数，根据 $\int_\Sigma\phi\mathrm{d}v_g=0,$，我们推得

$$\int_\Sigma h\phi\,\mathrm{d}v_g=\langle\phi,\phi\rangle-\sum_{i=1}^{p+q+N}\int_\Sigma\chi_i e^{-\varphi_i}|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{\delta_i}\phi^2\,\mathrm{d}v_g. \tag{3.8}$$

考虑到 $|\int_\Sigma h\phi\,\mathrm{d}v_g|\le\|h\|_s\|\phi\|=o(|\ln\varepsilon|^{-1})$ 且 $\|\phi\|=1,$，我们有 $\sum_{i=1}^{p+q+N}\|\tilde{\phi}_i\|_{\mathrm{L}_i}^2=\mathcal{O}(1)$。当 $\varepsilon\to0.$ 时，再次利用假设 $\|\phi\|=1$，可得 $\|\tilde{\phi}_i\|_{\mathrm{H}_i}^2\le\|\phi\|^2\le1$。因此，经过取子列，可知 $\tilde{\phi}_i\rightharpoonup\phi_i^0$ 在 H_i 中收敛于某个 $\phi_i^0\in\mathrm{H}_i$。随后，[38, 命题 6.1] 给出的紧嵌入 $\mathrm{H}_i\hookrightarrow\mathrm{L}_i$ 表明，$\tilde{\phi}_i\to\tilde{\phi}_i^0$ 在 $\mathrm{L}_i.$ 中强收敛。

对于任意的 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}_{\xi_i})$，假设 $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{B}_{R_0}.$。若 $\frac{1}{\lambda_i}<\frac{r_0}{R_0}$，则 $\operatorname{supp}\nabla\chi(\frac{|y|}{r_0})\cap\operatorname{supp}\varphi(\lambda_i y)=\emptyset.$。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_{\xi_i}}\nabla\tilde{\phi}_i\nabla\varphi\,\mathrm{d}y&=\int_{B_{2r_0}^{\xi_i}}\nabla(\chi(|y|/r_0)\phi\circ y_{\xi_i}^{-1}(y))\cdot\nabla\varphi\left(\lambda_i y\right)\,\mathrm{d}y=\int_\Sigma\langle\nabla\phi,\nabla(\chi_i\varphi(\lambda_i y_{\xi_i}))\rangle_g\,\mathrm{d}v_g\\&=\int_\Sigma\chi_i e^{-\varphi_i}|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{\delta_i}\phi\varphi\left(\lambda_i y_{\xi_i}\right)\,\mathrm{d}v_g+\int_\Sigma\chi_i h\varphi\left(\lambda_i y_{\xi_i}\right)\,\mathrm{d}v_g+o(1)\\&=\int_{\mathbb{R}_{\xi_i}}\frac{8(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^2}\tilde{\phi}_i(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y+o(1).\end{aligned}$$

于是，我们推得 $\tilde{\phi}_i$ 收敛到 ϕ_i^0，后者是以下线性问题的一个解：

$$\begin{cases}-\Delta\phi=\dfrac{8(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{\left(1+|y|^{2(1+\gamma_i)}\right)^2}\phi & \text{in }\mathbb{R}_{\xi_i},\\ \partial_{y_2}\phi=0 & \text{on }\partial\mathbb{R}_{\xi_i},\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\xi_i}}|\nabla\phi(y)|^2dy<+\infty,\end{cases} \tag{3.9}$$

在分布意义下。利用正则性理论， $\tilde{\phi}_i^0$ 是一个 C^2-光滑解，满足（3.9）。由引理 A.1 和 [36, 引理 D.1], 可得

$$\tilde{\phi}_i^0(y)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{\mathrm{i}(\xi_i)} b_{ij}\frac{4y_j}{1+|y|^2}+a_i\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} & \text{for } i=1,\dots,p+q,\\ a_i\frac{1-|y|^{2(1+\gamma_i)}}{1+|y|^{2(1+\gamma_i)}} & \text{for } i=p+q+1,\dots,p+q+N,\end{cases}$$

其中， a_i 和 $b_{ij}\in\mathbb{R}$ 是系数。然后，利用备注B.1 以及假设 $\langle\phi, PZ_i^j\rangle=0$，我们可以推出 $b_{ij}=0$ 对于 $i=1,\dots,p+q$, 和 $j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$。

步骤 2. 对于 $i=1,\dots,p+q+N$，有如下估计成立：当 $\varepsilon\to 0$

$$\int_{\Omega_i}\frac{8(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^2}\tilde{\phi}_i(y)\,\mathrm{d}y=o(|\ln\varepsilon|^{-1}). \tag{3.10}$$

将 PZ_i^0 作为（3.6）的测试函数，得到

$$\int_\Sigma \chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}Z_i^0\phi\,\mathrm{d}v_g=\langle\phi,PZ_i^0\rangle=\sum_j\int_\Sigma\chi_j e^{-\varphi_i}|y_{\xi_i}|^{2\gamma_j}e^{\delta_j}\phi PZ_i^0\,\mathrm{d}v_g+\int_\Sigma hPZ_j^0\,\mathrm{d}v_g.$$

备注B.1 给出

$$\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi\left(PZ_i^0-Z_i^0\right)\,\mathrm{d}v_g=-\int_\Sigma hPZ_i^0\,\mathrm{d}v_g+\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2}{1+\max\{0,\gamma_*\}}}|\ln\varepsilon|)=o(|\ln\varepsilon|^{-1}).$$

应用备注B.1 可得

$$\begin{aligned}&(\ln\varepsilon)\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi(PZ_i^0-Z_i^0)\,\mathrm{d}v_g\\ =&(\ln\varepsilon)\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi(1+\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2}{1+\max\{0,\gamma_*\}}}|\ln\varepsilon|))\,\mathrm{d}v_g\\ =&(\ln\varepsilon)\int_{\Omega_i}\frac{16(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{\left(1+|y|^{2(1+\gamma_i)}\right)^2}\tilde{\phi}_i(y)\,\mathrm{d}y+o(1),\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$. 因此， （3.10）得证。

步骤 3。构造反证法。

利用 $P\delta_i$ 作为测试函数用于（3.6），我们得到

$$\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi\,\mathrm{d}v_g=\sum_j\int_\Sigma\chi_j|y_{\xi_j}|^{2\gamma_j}e^{-\varphi_i}e^{\delta_j}\phi P\delta_i\,\mathrm{d}v_g+\int_\Sigma hP\delta_i\,\mathrm{d}v_g. \tag{3.11}$$

（3.11）的左端等于$\int\Omega_i$ $^{8}(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})_2\tilde{\phi}_i(y)\,\mathrm{d}y = o(|\ln\ \varepsilon|^{-1})$，根据步骤 2。引理 B.3 得出 $\|P\delta_i\| = \mathcal{O}(|\ln\ \varepsilon|^{\frac{1}{2}})$与$\overline{\left|\int_\Sigma hP\delta_i \mathrm{d}v_g\right|} = o(1)$. 利用引理 B.1 和步骤 2，我们有

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,p+q+N\\ j\neq i}}\int_\Sigma \chi_j|y_{\xi_j}|^{2\gamma_j}e^{-\varphi_j}e^{\delta_j}\phi P\delta_i\,\mathrm{d}v_g = o(1).$$

应用引理 B.1、步骤 1 和步骤 2，我们推得当 $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi P\delta_i\,\mathrm{d}v_g\\
=&\int_\Sigma \chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi\Big(\chi_i\cdot(\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}-\ln(8(1+\gamma_i)^2\lambda_i^{-2(1+\gamma_i)}))+(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)H^g(\cdot,\xi_i)\\
&+\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2}{1+\max\{0,\gamma_*\}}}|\ln\varepsilon|)\Big)\,\mathrm{d}v_g\\
=&\int_{\Omega_i}\frac{8(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^2}\tilde{\phi}_i(y)\left(4(1+\gamma_i)\ln\lambda_i-2\ln(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})+(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)R^g(\xi_i)\right)dy\\
&+o(1)\\
\to&-2a_i\int_{\mathbb{R}_{\xi_i}}\frac{8(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^2}\frac{1-|y|^{2(1+\gamma_i)}}{1+|y|^{2(1+\gamma_i)}}\ln(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})\,\mathrm{d}y=\varrho(\xi_i)a_i,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了以下事实：

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{8(1+\gamma_i)^2|y|^{2\gamma_i}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^2}\frac{1-|y|^{2(1+\gamma_i)}}{1+|y|^{2(1+\gamma_i)}}\ln(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})\,\mathrm{d}y=-4\pi.$$

因此，$a_i = 0$对所有 $i = 1,\dots,p+q+N$均成立。

将 ϕ 作为（3.6）的测试函数，我们有

$$1=\sum_{i=1}^{p+q+N}\int_\Sigma \chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\phi^2\,\mathrm{d}v_g+\int_\Sigma h\phi\,\mathrm{d}v_g=\sum_{i=1}^{p+q+N}\|\tilde{\phi}_i\|^2_{\mathrm{L}_i}+o(1)\to 0,$$

˜其中我们应用了 $\phi_i\to 0$ 在 L_{ξ_i} 中强收敛这一事实。这导致矛盾。 □

3.2 非线性问题

在本部分，对于固定的 $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_{p+q+N})$ 和 $\varepsilon > 0$，我们将通过不动点定理找到一个解 $\phi_{\xi,\,\varepsilon}$ 并将（3.1）问题归约为一个有限维问题。

当 $\varepsilon\to 0$时，式（ $\mathcal{R}$ （3.4）中定义的余项在 L^s-空间中，当 $s > 1$充分接近 1时很小。

引理 3.2。 对于任意 $\iota \in (0,1)$，存在 $s_0 > 1$，使得对于任意 $s \in (1, s_0)$，当$\varepsilon \to 0$, $\|\mathcal{R}\|_s = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1+\frac{\iota}{\text{最大值}\{0,\gamma_*\}}}\right)$，，其中 $\gamma_* = \text{最大值}_{i=1,\dots,p+q+N}\,\gamma_i$。

证明。 由引理 B.5 和霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\|_s &= \Big\| \sum_{i=1}^{p+q+N} \Delta_g P\delta_i + \varepsilon^2 K e^W - \overline{\varepsilon^2 K e^W} \Big\|_s \\
&= \Big\| \varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} - \overline{\Big(\varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \Big)} \Big\|_s \\
&\le C \Big\| \varepsilon^2 K e^{\sum_{i=1}^{p+q+N} P\delta_i} - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \Big\|_s \le C(\varepsilon^{\frac{\iota}{1+\max\{0,\gamma_*\}}}),
\end{aligned}$$

其中某个常数为 $C > 0$. □

接下来，我们将证明由 ($S(\phi)$ 定义的高阶线性算子 3.2) 在 H^1 上有界，且其算子范数在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零。

引理 3.3。 对于任意 $\iota \in (0,1)$，存在 $s_0 > 1$ 充分接近 1，使得对于任意$s, r \in (1,2)$ 满足 $sr \in (1, s_0)$，当 $\varepsilon \to 0$

$$\|S(\phi)\|_s = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{\iota}{1+\max\{0,\gamma_*\}}} \|\phi\|), \quad \forall \phi \in \overline{\mathrm{H}}^1.$$

证明。 由引理 B.5、霍尔德不等式和Moser-Trudinger不等式可推出，当 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}
\|S(\phi)\|_s &= \mathcal{O}\Big(\Big\| \Big(\varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \Big) \phi \Big\|_s \Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\Big\| \Big(\varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \Big) \phi \Big\|_s \Big) \\
&= O\Big(\Big\| \varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \Big\|_{sr} \|\phi\|_{\frac{sr}{r-1}} \Big) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{\iota}{1+\max\{0,\gamma_*\}}} \|\phi\|),
\end{aligned}$$

对于任意 $s, r \in (1,2)$ 满足 $sr < s_0$，其中 $s_0 > 1$ 来自引理B.5。 □

Let

$$F : \overline{\mathrm{H}}^1 \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \varepsilon^2 K e^u \tag{3.12}$$

下面的引理说明了由（3.3）定义的非线性项 $N(\phi)$ 的渐近行为。

引理 3.4. 存在 $c, \varepsilon_0 > 0$ 和 $s_0 > 1$，使得对于任意 $s > 1$, $r > 1$，满足 $sr \in (1, s_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\|N(\phi)\|_s = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}} e^{c\|\phi\|^2} \|\phi\|^2\right), \tag{3.13}$$

and

$$\|N(\phi^1) - N(\phi^0)\|_s = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}} e^{c(\|\phi^0\|^2+\|\phi^1\|^2)} \|\phi^1 - \phi^0\|(\|\phi^1\| + \|\phi^0\|)\right), \tag{3.14}$$

对于任意 $\phi, \phi^1, \phi^0 \in \{\phi \in \mathrm{H}^1 : \|\phi\| \le 1\}$，其中 $\gamma_- = \text{最小值}\{0, \text{最小值}_{i=1,\dots,p+q+N}\, \gamma_i\}$.

证明. 首先，我们证明估计式（3.14）。取 $\phi^0 = 0$和 $\phi^1 = \phi$，即可得到估计式（3.13）。注意到

$$F(W+\phi^1) - F(W+\phi^0) - F'(W)(\phi^1 - \phi^0) = \varepsilon^2 K e^{W+\phi^1} - \varepsilon^2 K e^{W+\phi^0} - \varepsilon^2 K e^W (\phi^1 - \phi^0).$$

应用中值定理，对于任意 $s > 1$，有

$$\begin{aligned}
&\|F(W+\phi^1) - F(W+\phi^0) - F'(W)(\phi^1 - \phi^0)\|_s \\
&= \|(F'(W + \theta\phi^1 + (1-\theta)\phi^0) - F'(W))(\phi^1 - \phi^0)\|_s \\
&= \|F''(W + \theta'\theta\phi^1 + \theta'(1-\theta)\phi^0)(\theta\phi^1 + (1-\theta)\phi^0)(\phi^1 - \phi^0)\|_s,
\end{aligned}$$

对于某个 $\theta, \theta' \in (0, 1)$.，由霍尔德不等式、索博列夫不等式和 Moser-Trudinger 不等式，我们推得

$$\begin{aligned}
&\|F''(W + \theta'\theta\phi^1 + \theta'(1-\theta)\phi^0)(\theta\phi^1 + (1-\theta)\phi^0)(\phi^1 - \phi^0)\|_s \\
&\le C \sum_{i=0}^{1} \left(\int_\Sigma \varepsilon^{2s} K^s e^{sW} (e^{|\phi^0|+|\phi^1|} |\phi^1 - \phi^0||\phi^i|)^s \, \mathrm{d}v_g \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\le C \sum_{i=0}^{1} \left(\int_\Sigma \varepsilon^{2sr} K^{sr} e^{srW} \, \mathrm{d}v_g \right)^{\frac{1}{sr}} \left(\int_\Sigma e^{st'(|\phi^0|+|\phi^1|)} \, \mathrm{d}v_g \right)^{\frac{1}{st'}} \left(\int_\Sigma |\phi^1 - \phi^0|^{st} |\phi^i|^{st} \, \mathrm{d}v_g \right)^{\frac{1}{st}} \\
&\le C \sum_{i=0}^{1} \|\varepsilon^2 K e^W\|_{sr} e^{\frac{st'}{8\pi}(\|\phi_1^1\|^2 + \|\phi_1^0\|^2)} \|\phi^1 - \phi^0\| \|\phi^i\|,
\end{aligned}$$

其中 $r, t', t \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{t} = 1$。应用引理 B.5，我们推得

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^2 K e^W\|_{sr} &\le \left\| \varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \right\|_{sr} + \sum_{i=1}^{p+q+N} \left\| \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \right\|_{sr} \\
&\le \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2-sr}{(1+\gamma_*)sr}} + \varepsilon^{\frac{2+2sr\gamma_-}{(1+\gamma_*)sr}} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}}).
\end{aligned}$$

通过取 $c = \frac{st'}{8\pi}$，估计（3.14）得证。 □

对于固定的 $\xi \in M_{\sigma,\ \xi^*}$，我们将找到 $\phi_{\xi,\ \varepsilon}$ 以求解问题（3.1）于 $K_\xi^\perp$，即.

$$\phi = \Pi_\xi^\perp \circ \mathcal{L}^{-1}(S(\phi) + N(\phi) + \mathcal{R}) \tag{3.15}$$

对于 $\phi \in K_\xi^\perp$，其中 $\Pi_\xi^\perp$: $\mathbf{H}^1 \to K_\xi^\perp$ 是从 $\mathbf{H}^1$ 到 $K_\xi^\perp$ 的正交投影 —

定理 3.1. 设 $\mathscr{D}$ 是 M_{σ,ξ^*} 的紧子集，且 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{p+q+N}) = (\xi^0, Q_1) \in \mathscr{D}$。假设以下条件之一成立:

$$(i)\ p+q=0; \quad or \quad (ii)\ p+q \neq 0, \gamma_* < 1. \tag{3.16}$$

存在 $s_0 > 1, \varepsilon_0 > 0$ 和 $R > 0$ (关于 ξ 一致地 $s \in (1, s_0)$ 以及任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，使得存在唯一的 $\phi_{\xi,\ \varepsilon} \in K_\xi^\perp$ 满足 (3.15) 且满足

$$\|\phi_{\xi,\varepsilon}\| \leq R\varepsilon^{\iota_0} |\ln \varepsilon|,$$

当 $p+q=0$ 时，其中 $\iota_0 = \frac{3}{4}$; $\iota_0 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\text{最大值}\{0,\gamma_*\}})$ 当 $p+q \neq 0$。

此外，映射 $\xi^0 \mapsto \phi_{\xi,\varepsilon}$ 关于 $\xi^0 \in M^0_{\sigma,\xi^*}$ 是 C^1-映射。

证明。给定 $\xi \in \mathscr{D}$，我们定义线性算子

$$\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\phi) := \Pi_\xi^\perp \circ \mathcal{L}^{-1}(S(\phi) + N(\phi) + \mathcal{R}) \quad \text{in } K_\xi^\perp.$$

对任意 $\phi \in K_\xi^\perp$，引理 3.1-3.4 表明对某些常数 $s_0 > 1, C_0, C, c > 0$ 成立 s

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\phi)\| &\leq C|\ln\varepsilon| \|S(\phi) + N(\phi) + \mathcal{R}\|_s \\ &\leq C_0 |\ln\varepsilon| (\varepsilon^{\iota/(1+\max\{0,\gamma_*\})} \|\phi\| + \varepsilon^{\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'}} e^{c\|\phi\|^2} \|\phi\|^2 + \varepsilon^{\iota/(1+\max\{0,\gamma_*\})}), \end{aligned}$$

对任意充分接近 1. 的 $s, r' \in (1,2)$。在情形 (i) 中我们取 $\iota = \frac{3}{4}$，而在情形 (ii) 中 $\iota = \frac{3+\max\{0,\gamma_*\}}{4} \in (0,1)$。

我们固定 $R = 3C_0$ 并假设 $sr' \in (1, \min\{s_0, \frac{2}{1-\gamma_-}, \frac{3}{2}\})$。由此可得 at

$$\|\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\phi)\| \leq C_0 |\ln\varepsilon| (\varepsilon^{\iota_0} \|\phi\| + \varepsilon^{\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'}} e^{c\|\phi\|^2} \|\phi\|^2 + \varepsilon^{\iota_0}).$$

然后，我们固定一个 $s, r' > 1$ 充分接近 1，使得

$$\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'} + \iota_0 > 0.$$

存在充分小的 $\varepsilon_1 > 0$，使得对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$，我们有

$$\max\left\{3C_0\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|, (3C_0)^2 e^c \varepsilon^{\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'}+\iota_0} |\ln\varepsilon|^2, 3C_0\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|\right\} \leq 1.$$

因此，对任意 $\phi \in \{\phi \in K_\xi^\perp\colon\ \|\phi\| \le R\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|\}$，由此可得

$$\|\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\phi)\| \le R\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|.$$

此外，对于任意 $\phi^0,\phi^1 \in \{\phi \in K_\xi^\perp\colon\ \|\phi\| \le R\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|\}$，由引理 3.3 和 3.4，可得：

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\phi^1)-\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}(\phi^0)\| &\le C|\ln\varepsilon|\cdot\|S(\phi^1-\phi^0)+N(\phi^1)-N(\phi^0)\|_s\\ &\le C_1|\ln\varepsilon|\left(\varepsilon^{\iota_0}\|\phi^1-\phi^0\|+R\varepsilon^{\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'}+\iota_0}|\ln\varepsilon|\|\phi^1-\phi^0\|\right).\end{aligned}$$

由于 $\frac{1-sr'}{sr'}+\iota_0>0$，存在 $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$，使得对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$，

$$\max\left\{C_1\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|, C_1R\varepsilon^{\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'}+\iota_0}|\ln\varepsilon|^2\right\}\le\frac{1}{4}.$$

令 $\varepsilon_0:=\varepsilon_2$，我们得出，对于任意 $\mathcal{T}_{\xi,\varepsilon}$ 是 $\{\phi\in K_\xi^\perp\colon\ \|\phi\|\le R\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|\}$上的压缩映射。由巴拿赫不动点定理可知，存在唯一解$\phi_{\xi,\varepsilon}$属于 $\{\phi\in K_\xi^\perp\colon\|\phi\|\le R\varepsilon^{\iota_0}|\ln\varepsilon|\}$，使得 $\phi_{\xi,\varepsilon}$满足问题（3.15）。

记 $\mathscr{D}^0:=\{\xi^0\in M^0_{\sigma,\xi^*}\colon(\xi^0,Q_1)\in\mathscr{D}\}$。令 $F(u)$ 由 (3.12) 定义。我们定义一个函数 $\Phi\colon\mathscr{D}^0\times K_\xi^\perp\to K_\xi^\perp,(\xi^0,\phi)\mapsto\phi+\Pi_\xi^\perp(W-i^*\circ F(W+\Pi_\xi^\perp(\phi)))$. 显然，$\Phi(\xi^0,\phi_{\xi,\varepsilon})=0$。对于任意 $\psi\in K_\xi^\perp$，有 $\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\xi^0,\phi_{\xi,\varepsilon})(\psi)=\psi-\Pi_\xi^\perp\circ i^*(F'(W+\phi_{\xi,\varepsilon})(\Pi_\xi^\perp\psi))$.

接下来，我们将证明 $\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\xi^0,\phi_{\xi,\varepsilon})$ 是非退化的。对于$\psi\in\mathbf{H}^1,$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\xi^0,\phi_{\xi,\varepsilon})(\psi)&=\Pi_\xi^\perp\Big(\psi-i^*\Big(\sum_{i=1}^{p+q+N}\chi_ie^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\psi\Big)\Big)-\Pi_\xi^\perp\circ i^*\circ S(\Pi_\xi^\perp\psi)\\&\quad-\Pi_\xi^\perp\circ i^*\circ(F'(W+\phi_{\xi,\varepsilon})-F'(W))(\Pi_\xi^\perp\psi)\\&=\Pi_\xi^\perp\circ i^*\circ\mathcal{L}(\Pi_\xi^\perp\psi)-\Pi_\xi^\perp\circ i^*\circ S(\Pi_\xi^\perp\psi)\\&\quad-\Pi_\xi^\perp\circ i^*\circ(F'(W+\phi_{\xi,\varepsilon})-F'(W))(\Pi_\xi^\perp\psi).\end{aligned}$$

根据中值定理，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\|(F'(W+\phi_{\xi,\varepsilon})-F'(W))\Pi_\xi^\perp\psi\|_s=\|F''(W+\theta\phi_{\xi,\varepsilon})(\phi_{\xi,\varepsilon})(\Pi_\xi^\perp\psi)\|_s\le C\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}}\|\phi_{\xi,\varepsilon}\|\|\Pi_\xi^\perp\psi\|.$$

根据引理3.1 和引理3.3，存在某个常数 $c>0$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\xi^0,\phi_{\xi,\varepsilon})(\psi)\right\|&\ge c\|\mathcal{L}(\Pi_\xi^\perp\psi)\|-\|S\|\|\Pi_\xi^\perp\psi\|-\|(F'(W+\phi_{\xi,\varepsilon})-F'(W))\Pi_\xi^\perp\psi\|_s\\&\ge\frac{c}{|\ln\varepsilon|}\|\Pi_\xi^\perp\psi\|-\mathcal{O}(\varepsilon^{\iota_0}\|\Pi_\xi^\perp\psi\|)+\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}}\|\phi_{\xi,\varepsilon}\|\|\Pi_\xi^\perp\psi\|)\end{aligned}$$

$$\geq \frac{c}{2|\ln\varepsilon|}\|\psi\|,$$

当 $s, r > 1$ 充分接近 1 时。因此，我们得到 $\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\xi^0, \phi_{\xi,\varepsilon})$ 在 $K_\xi^\perp$ 中可逆，且

$$\left\|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\xi, \phi_{\xi,\varepsilon})\right)^{-1}\right\| \leq \frac{2}{c}|\ln\varepsilon|.$$

根据隐函数定理，我们有 $\xi^0 \mapsto \phi_{\xi,\varepsilon}$ 是 C^1-可微的。 □

4 约化泛函及其展开

根据定理 3.1，问题（3.1）可约化为一个有限维问题，其中 $\xi := (\xi^0, Q_1) \in \Xi'_{p,q} \times \{\xi^*_{p+q+1}\} \times \ldots \times \{\xi^*_{p+q+N}\}$。将 $W + \phi_{\xi,\varepsilon}$ 代入能量泛函 E_ε，可得约化泛函

$$\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0) = E_\varepsilon(W + \phi_{\xi,\varepsilon}) = \frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla(W + \phi_{\xi,\varepsilon})|_g^2 \,\mathrm{d}v_g + \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^{W+\phi_{\xi,\varepsilon}}\, dv_g,$$

其定义在 $\Xi'_{p,q}$. 在研究 E_ε 的渐近行为之前，我们先将 $E_\varepsilon(W)$ 展开如下：

引理 4.1。 给定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $(p, q, Q_1) \in \mathcal{I}_m$，我们假设 （2.11）-（2.12）成立。令 $\rho_* := 4\pi n_m$。则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得，对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，以下展开成立：

$$E_\varepsilon(W) = (3\ln 2)\rho_* - 2\rho_* \ln\varepsilon + \sum_{i=1}^{p+q+N} 2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln(1+\gamma_i) - \frac{1}{2}\mathbf{F}^{K,Q_1}_{p,q}(\xi^0) + o(1).$$

以及对 $i = 1, \ldots, p+q$, 和 $j = 1, \ldots, \mathrm{i}(\xi_i)$

$$\partial_{(\xi_i)_j} E_\varepsilon(W) = -\frac{1}{2}\partial_{(\xi_i)_j}\mathbf{F}^{K,Q_1}_{p,q}(\xi^0) + o(1),$$

它们在 $C(M^0_{\sigma,\xi^*})$ 中对 M^0_{σ,ξ^*} 的任意紧子集内的任意 ξ 一致收敛。

证明。 设 $\mathscr{D}$ 是 M_σ 的 ξ^* 紧子集，且 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{p+q+N}) = (\xi^0, Q_1) \in \mathscr{D}$。狄利克雷积分具有如下渐近估计：

$$\begin{aligned}(4.1)\qquad &\frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla W|_g^2 \,\mathrm{d}v_g \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p+q+N}\langle P\delta_i, P\delta_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1,\ldots,p+q+N \\ i\neq j}}\langle P\delta_i, P\delta_j\rangle\end{aligned}$$

$$= (-1+3\ln 2)\rho_* - 2\rho_*\ln\varepsilon + \sum_{i=1}^{p+q+N} 2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln(1+\gamma_i) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0) + o(1),$$

根据引理 B.3。接下来计算非线性项。利用引理 B.1 和引理 B.5，可推出对于 $s \in (1, s_0)$

$$\begin{aligned}
(4.2)\qquad & \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \,\mathrm{d}v_g \\
&= \mathcal{O}\Big(\Big| \int_\Sigma \varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \,\mathrm{d}v_g \Big| \Big) + \sum_{i=1}^{p+q+N} \int_\Sigma \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \,\mathrm{d}v_g \\
&= \mathcal{O}\Big(\Big\| \varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i} \Big\|_s \Big) + \sum_{i=1}^{p+q+N} (1+\gamma_i)\varrho(\xi_i) + o(1) \\
&= \sum_{i=1}^{p+q+N} (1+\gamma(\xi_i))\varrho(\xi_i) + o(1)
\end{aligned}$$

其中我们应用了 $\int_{\mathbb{R}^2} {}^{8}\,{}^{(1+\gamma)}\,{}^{2}|y|^{2\gamma}\,{}^{(1+|y|^{2(1+\gamma)})}\,{}^{2}\,\mathrm{d}y = (1+\gamma)\,8\pi$ 对所有 $\gamma > -1$ 以及 $|\Sigma|_g = 1$。结合（4.1）和（4.2），我们得到当 $\varepsilon \to 0$

$$E_\varepsilon(W) = (3\ln 2)\rho_* - 2\rho_*\ln\varepsilon + \sum_{i=1}^{p+q+N} 2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln(1+\gamma_i) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0) + o(1).$$

对于 $i = 1, \dots, p+q$ 和 $j = 1, \dots, \mathrm{i}(\xi_i)$，我们有

$$\begin{aligned}
\partial_{(\xi_i)_j} E_\varepsilon(W) &= \int_\Sigma (-\Delta_g W - \varepsilon^2 K e^W) \partial_{(\xi_i)_j} W \,\mathrm{d}v_g \\
&= \int_\Sigma \Big(\sum_{l=1}^{p+q+N} \chi_l |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{-\varphi_l} e^{\delta_l} - \varepsilon^2 K e^W \Big) \partial_{(\xi_i)_j} W \,\mathrm{d}v_g,
\end{aligned}$$

鉴于 $\int_\Sigma \partial_{(\xi_i)\ j} W \,\mathrm{d}v_g = 0$. 注意到

$$(4.3)\qquad \partial_{(\xi_i)_j} P\delta_l = \begin{cases} \boldsymbol{\delta}_{il}\partial_{x_j} P\delta_{\lambda_i,x}^{\gamma_i}\big|_{x=\xi_i} - \frac{1}{2}(\lambda_l \partial_{\lambda_l} P\delta_{\lambda_l,\xi_l}^{\gamma_l})\partial_{(\xi_i)_j} \ln d_l(\xi_l) & \text{for } l = 1, \dots, p+q, \\ -\frac{1}{2(1+\gamma_l)}(\lambda_l \partial_{\lambda_l} P\delta_{\lambda_l,\xi_l}^{\gamma_l})\partial_{(\xi_i)_j} \ln d_l(\xi_l) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 B.2 和备注 B.1 可得，对于 $\forall i = 1, \dots, p+q, j = 1, \dots, \mathrm{i}(\xi_i)$ ，

$$(4.4)\qquad \lambda_i^{-1}\partial_{x_j} P\delta_{\lambda_i,x}^{\gamma_i}|_{x=\xi_i} = PZ_i^j + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|) = \chi_i Z_i^j + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|);$$

以及对 $\forall i = 1, \dots, p+q+N,$

$$(4.5)\qquad \lambda_i \partial_{\lambda_i} P\delta_i = PZ_j^0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \varepsilon^{\frac{2}{1+\max\{0,\gamma_i\}}}|\ln\varepsilon|) = \chi_i(2+Z_i^0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \varepsilon^{\frac{2}{1+\max\{0,\gamma_i\}}}|\ln\varepsilon|).$$

Using 估计（4.4），（4.5）以及引理 B.5，我们得到，对任意 $s \in (1, s_0)$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \Big(\sum_{l=1}^{p+q+N} \chi_l |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{-\varphi_l} e^{\delta_l} - \varepsilon^2 K e^W \Big) \partial_{(\xi_i)_j} W \, \mathrm{d}v_g \\
&= \sum_{l=1}^{p+q} \int_\Sigma \chi_l |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{-\varphi_l} e^{\delta_l} \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g - \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \chi_i \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g + \mathcal{O}\Big(\Big\| \sum_{l=1}^{p+q} \chi_l e^{-\varphi_l} e^{\delta_l} - \varepsilon^2 K e^W \Big\|_s \Big) \\
&= \sum_{l=1}^{p+q+N} \int_\Sigma \chi_l |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{-\varphi_l} e^{\delta_l} \chi_i \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g - \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \chi_i \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g + o(1),
\end{aligned}
$$

如 $\varepsilon \to 0$。对于 $j = 1, \dots,$ i(ξ_i)，我们有

$$
\int_\Sigma \chi_l |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{-\varphi_l} e^{\delta_l} \chi_i \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g = \boldsymbol{\delta}_{il} \lambda_i^2 \int_{B_{2r_0}^{\xi_i}} \chi^2 \Big(\frac{|y|}{r_0} \Big) \frac{32 \lambda_i^2 y_j}{(1 + \lambda_i^2 |y|^2)^3} \, \mathrm{d}y = 0,
$$

其中最后一个等式应用了 $B_{2r_0}^{\xi_i}$ 的对称性。接下来估计积分 $\varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \chi_i \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g$. 回顾（2.11）可得

$$
d_i(x) = \frac{1}{8(1+\gamma_i)^2} e^{(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i) H^g(x,\xi_i) + \sum_{j=1,\dots,p+q+N, \, j \neq i} (1+\gamma_j) \varrho(\xi_j) G^g(x,\xi_j) + \ln K_i(x)}.
$$

由引理 B.1，可知当 $\varepsilon \to 0$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \chi_i \lambda_i Z_i^j \, \mathrm{d}v_g &= \varepsilon^2 \int_\Sigma \chi_i e^{\sum_{l=1}^{p+q+N} P \delta_l + \ln K_i} \frac{4 \lambda_i^2 (y_{\xi_i})_j}{1 + \lambda_i^2 |y_{\xi_i}|^2} \, \mathrm{d}v_g \\
&= \int_{\lambda_i B_{r_0}^{\xi_i}} e^{\hat{\varphi}_i(y/\lambda_i)} \frac{8 d_i \circ y_{\xi_i}^{-1}(y/\lambda_i)}{d_i} \frac{4 \lambda_i y_j}{(1+|y|^2)^3} \, \mathrm{d}y + \mathcal{O}(\lambda_i^{-1}) \\
&= \frac{1}{2} \partial_{(\xi_i)_j} \mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0) + \mathcal{O}(\lambda_i^{-1}),
\end{aligned}
$$

其中我们应用了 $\lambda_i B_{r_0}^{\xi_i}$ 的对称性、（2.1）以及 $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{4y_j^2}{(1+|y|^2)^3} \mathrm{d}y = \pi$.

Consequently, we prove that as $\varepsilon \to 0$, $\partial_{(\xi_i)_j} E_\varepsilon(W) = -\frac{1}{2} \partial_{(\xi_i)_j} \mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0) + o(1)$. □

随后，我们展开约化泛函 $\tilde{E}_\varepsilon : M_{\sigma,\, \xi^*}^0 \to \mathbb{R}, \xi \mapsto E_\varepsilon (W + \phi)$，其中$M_{\sigma,\, \xi^*}^0 := \{\xi^0 : (\xi^0, Q_1) \in M_{\sigma,\, \xi^*}\}$以及 $\phi := \phi_{\xi,\, \varepsilon}$由定理 3.1 给出。

定理 4.1。给定 $m \in \mathbb{N}$和 $(p, q, Q_1) \in \mathcal{I}_m$，我们假设 (2.11)-(2.12) 以及 (3.16)成立。记 $\rho_* = 4\pi n_m$. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对于任意$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，该展开成立

$$
\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0) = (3 \ln 2) \rho_* - 2\rho_* \ln \varepsilon + \sum_{i=1}^{p+q+N} 2(1+\gamma_i) \varrho(\xi_i) \ln(1+\gamma_i) - \frac{1}{2} \mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0) + o(1), \tag{4.6}
$$

以及对于任意 $i=1,\dots,p+q$ 和 $j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$

$$\partial_{(\xi_i)_j}\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0)=-\frac{1}{2}\partial_{(\xi_i)_j}\mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0)+o(1), \tag{4.7}$$

它们在 $C(M^0_{\sigma,\xi^*})$ 中收敛；对于 ξ^0 属于 M^0_{σ,ξ^*} 的任意紧子集的情形，该收敛是一致的。

证明。 由定理 3.1，误差项 $\phi\in K_\xi^\perp$ 满足：当 s 充分接近于 1时， $\|\phi\|\le R\,\varepsilon^{\iota_0}\,|\ln\varepsilon|$. 因此，由引理 B.3，可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0)&=E_\varepsilon(W)+\frac{1}{2}\langle\phi,\phi\rangle+\sum_{i=1}^{p+q+N}\langle P\delta_i,\phi\rangle-\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W(e^\phi-1-\phi)\,\mathrm{d}v_g-\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W\phi\,\mathrm{d}v_g\\&=E_\varepsilon(W)-\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W(e^\phi-1-\phi)\,\mathrm{d}v_g-\int_\Sigma\Big(\varepsilon^2Ke^W-\sum_{i=1}^{p+q+N}\chi_ie^{-\varphi_i}|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{\delta_i}\Big)\phi\,\mathrm{d}v_g+o(1).\end{aligned}$$

当 $s,r,r'>1$ 充分接近于 1时，引理 B.5 和引理 3.4 结合霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Sigma\Big(\sum_{i=1}^{p+q+N}\chi_ie^{-\varphi_i}|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{\delta_i}-\varepsilon^2Ke^W\Big)\phi\,\mathrm{d}v_g\Big|&\le\Big\|\sum_{i=1}^{p+q+N}\chi_ie^{-\varphi_i}|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{\delta_i}-\varepsilon^2Ke^W\Big\|_s\|\phi\|_{\frac{s}{s-1}}\\&\le\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\iota_0}\|\phi\|\right)=o(1),\\\Big|\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W(e^\phi-1-\phi)\,\mathrm{d}v_g\Big|&\le\mathcal{O}\Big(\varepsilon^{\frac{1-sr'}{(1+\gamma_-)sr'}}e^{c\|\phi\|^2}\|\phi\|^2\Big)=o(1).\end{aligned}$$

因此，我们推得 $\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0)=E_\varepsilon(W)+o(1)$. 由此，引理 4.1 立即推出 (4.6)，该式在 $C(M^0_{\sigma,\xi^*})$ 中成立，并且对于 ξ^0 属于 M^0_{σ,ξ^*} 的任意紧子集的情形是一致的。

根据定理3.1中的结果，存在 $\{c^\varepsilon_{i,j}\in\mathbb{R}:\ i=1,\dots,p+q,j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)\}$使得

$$W+\phi-i^*(F(W+\phi))=\sum_{\substack{i=1,\dots,p+q\\j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)}}c^\varepsilon_{i,j}PZ_i^j, \tag{4.8}$$

其中 $F(h):=\varepsilon^2Ke^h$ 对所有 $h\in\mathrm{H}^1$ 均成立

断言4.1。对于这些系数，有 $\sum_{i=1,\dots,j=1\dots\,{}^{p+q}_{\xi_i}\,,,\mathrm{i}()}|c^\varepsilon_{i,j}|=\mathcal{O}(\varepsilon)$，因为 $\varepsilon\to0$.

应用（4.8），可得对于 $i=1,\dots,p+q,j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$

$$\sum_{\substack{i'=1,\dots,p+q\\j'=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_{i'})}}c^\varepsilon_{i',j'}\langle PZ_{i'}^{j'},PZ_i^j\rangle=\langle W+\phi-i^*(F(W+\phi)),PZ_i^j\rangle$$

$$= \langle W - i^*(F(W)), PZ_i^j\rangle + \mathcal{O}(|\langle \phi, PZ_i^j\rangle|) - \int_\Sigma (F(W+\phi) - F(W)) PZ_i^j \,\mathrm{d}v_g.$$

由引理 4.1的证明可知，对于 $i = 1, \dots, p+q$ 有

$$\langle W - i^*(F(W)), PZ_i^j\rangle = \int_\Sigma \Big(\sum_{l=1}^{p+q+N} \chi_l e^{-\varphi_l} |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{\delta_l} - \varepsilon^2 K e^W \Big) PZ_i^j \,\mathrm{d}v_g$$
$$= -\frac{1}{2\lambda_i} \partial_{(\xi_i)_j} \mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^0) + o(\lambda_i^{-1}).$$

结合引理 3.4 与 B.5 以及备注 B.1 和 (4.2)，我们推得

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma (F(W+\phi) - F(W)) PZ_i^j \,\mathrm{d}v_g \\
&= \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \phi (\chi_i Z_i^j + \mathcal{O}(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)) \,\mathrm{d}v_g + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}} \|\phi\|^2 \|PZ_i^j\|_{\frac{s}{s-1}} \right) \\
&= \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \phi \chi_i Z_i^j \,\mathrm{d}v_g + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}} \|\phi\|^2) \\
&= \int_\Sigma \Big| \varepsilon^2 K e^W - \sum_{l=1}^{p+q+N} \chi_l e^{-\varphi_l} |y_{\xi_l}|^{2\gamma_l} e^{\delta_l} \Big| |\phi| |PZ_j^i| \,\mathrm{d}v_g + \langle PZ_j^i, \phi\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}} \|\phi\|^2) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{\iota_0} \|\phi\| + \varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}} \|\phi\|^2) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\iota_0 + \frac{1}{2}}),
\end{aligned}$$

当 $s, r > 1$ 充分接近 1时，鉴于 $\iota_0 > \frac{1}{2}$， $\langle PZ_i^j, \phi\rangle_- = 0$ 以及 $PZ_i^j = \mathcal{O}(1)$ 对于 $i = 1, \dots, p+q, j = 1, \dots, \mathrm{i}(\xi_i)$。利用引理 B.4，我们得到

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,p+q \\ j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)}} \frac{4\varrho(\xi_i)}{3} |c_{i,j}^\varepsilon| = \mathcal{O}\Big(\sum_{\substack{i=1,\dots,p+q \\ j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)}} \frac{4\varrho(\xi_i)}{3} |c_{i,j}^\varepsilon| (\varepsilon^2 + \varepsilon^{\frac{2}{1+\max\{0,\gamma_*\}}} |\ln \varepsilon|) + \varepsilon^{\iota_0 + \frac{1}{2}} + \varepsilon \Big). \tag{4.9}$$

由于 $\iota_0 > \frac{1}{2}$，我们证明了断言 4.1。

当 $s', s > 1$ 充分接近 1 时，对于 $i' = 1, \dots, p+q, j' = 1, \dots, \mathrm{i}(\xi_{i'})$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle PZ_{i'}^{j'}, \partial_{(\xi_i)_j} \phi\rangle &= \partial_{(\xi_i)_j} \langle PZ_{i'}^{j'}, \phi\rangle - \langle \partial_{(\xi_i)_j} PZ_{i'}^{j'}, \phi\rangle \\
&= \int_\Sigma \partial_{(\xi_i)_j} (-\chi_{i'} e^{-\varphi_{i'}} e^{\delta_{i'}} Z_{i'}^{j'}) \phi \,\mathrm{d}v_g = \mathcal{O}\left(\|\partial_{(\xi_i)_j} (-\chi_{i'} e^{-\varphi_{i'}} e^{\delta_{i'}} Z_{i'}^{j'})\|_{s'} \|\phi\| \right) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2-3s'}{s'} + \iota_0} |\ln \varepsilon|) = o(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中我们应用了假设 $\langle PZ_{i'}^{j'}, \phi\rangle = 0$. 由（4.8）及断言 4.1，可得

$$\partial_{(\xi_i)_j} \tilde{E}_\varepsilon(\xi^0) = \partial_{(\xi_i)_j} E_\varepsilon(W) + \int_\Sigma (-\Delta_g \phi - \varepsilon^2 K (e^{W+\phi} - e^W)) \partial_{(\xi_i)_j} W \,\mathrm{d}v_g$$

$$+\sum_{\substack{i'=1,\dots,p+q\\ j'=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)}} c^{\varepsilon}_{i',j'}\langle PZ^{j'}_{i'},\partial_{(\xi_i)_j}\phi\rangle$$
$$=\partial_{(\xi_i)_j}E_\varepsilon(W)+\int_\Sigma(-\Delta_g\phi-\varepsilon^2K(e^{W+\phi}-e^W))\partial_{(\xi_i)_j}W\,\mathrm{d}v_g+o(1),$$

其中我们应用了 $\phi\in K^{\perp}_{\xi}$. 估计式（4.3）–（4.5）表明 $\partial_{(\xi_i)_j}W=\lambda_iPZ^j_i+\mathcal{O}(1)$.若 $\langle\phi,PZ^j_i\rangle=0$, 成立，则有

$$\int_\Sigma(-\Delta_g\phi)\partial_{(\xi_i)_j}W\,\mathrm{d}v_g=\int_\Sigma\langle\nabla\phi,(\lambda_i\nabla PZ^j_i+\mathcal{O}(1))\rangle_g\,\mathrm{d}v_g=\lambda_i\langle\phi,PZ^j_i\rangle+\mathcal{O}\left(\|\phi\|\right)=o(1).$$

此外，引理 3.4 结合备注 B.1 可得，当 $s,r>1$ 充分接近于 1

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma(F(W+\phi)-F(W))\partial_{(\xi_i)_j}W\,\mathrm{d}v_g\\&=\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W\phi\partial_{(\xi_i)_j}W\,\mathrm{d}v_g+\mathcal{O}\left(\int_\Sigma|(F(W+\phi)-F(W)-F'(W)\phi)\partial_{(\xi_i)_j}W|\,\mathrm{d}v_g\right)\\&=\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W\phi(\chi_i\lambda_iPZ^j_i+\mathcal{O}(1))\,\mathrm{d}v_g+\mathcal{O}\left(\lambda_i\varepsilon^{\frac{1-sr}{(1+\gamma_-)sr}}\|\phi\|^2\|PZ^j_i\|_{\frac{s}{s-1}}\right)\\&=\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W\phi\chi_i\lambda_iZ^j_i\,\mathrm{d}v_g+o(1),\end{aligned}$$

其中 $F(h)=\varepsilon^2Ke^h$ 对于任意 $h\overline{\in}\mathrm{H}^1$. 由引理 B.5 和（2.12），对于任意 $s,r\in(1,2)$ 充分接近于 1

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\int_\Sigma Ke^W\phi\chi_i\lambda_iZ^j_i\,\mathrm{d}v_g\\&=\int_\Sigma\chi_ie^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\lambda_iZ^j_i\phi\,\mathrm{d}v_g+\mathcal{O}\Big(\lambda_i\Big\|\varepsilon^2Ke^W-\sum_{l=1}^{p+q+N}\chi_le^{-\varphi_l}|y_{\xi_l}|^{2\gamma_l}e^{\delta_l}\Big\|_{sr}\|\chi_iZ^j_i\|_{\frac{s}{s-1}}\|\phi\|\Big)\\&=\lambda_i\langle PZ^j_i,\phi\rangle+\mathcal{O}(\varepsilon^{2\iota_0-1}|\ln\varepsilon|)=o(1),\end{aligned}$$

鉴于 $\iota_0>\frac{1}{2}$. C - 将上述所有估计与引理 4.1结合，我们证明当 $\varepsilon\to$ 0

$$\partial_{(\xi_i)_j}\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0)=\partial_{(\xi_i)_j}E_\varepsilon(W)+o(1)=-\frac{1}{2}\partial_{(\xi_i)_j}\mathbf{F}^{K,Q_1}_{p,q}(\xi^0)+o(1).$$

□

5 主要结果的证明

现在，我们准备证明主要结果。

定理的证明 1.1。 根据定理3.1，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小，使得对任意$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$和 $\xi = (\xi_1^*, \dots, \xi_N^*) \subset Q^N$，存在 $\phi_{\xi,\,\varepsilon}$ 使得

$$\phi_{\xi,\varepsilon} = \Pi_\xi^\perp(\mathcal{L}^{-1}(S(\phi_{\xi,\varepsilon}) + N(\phi_{\xi,\varepsilon}) + \mathcal{R}))$$

其中 $\|\phi\| \leq R\varepsilon^{\iota_0}|\ln \varepsilon|$，其中 $R > 0$ 是一个较大的常数。由于 $p + q = 0$ 在这种情况下，空间 K_ξ 是平凡的，因此 $\Pi_\xi^\perp = \mathrm{Id}$。解 $u_\varepsilon := \sum_{i=1}^N P\delta_i + \phi_{\xi,\,\varepsilon}$ 我们构造的解是关于参数2.9的方程 (ε。 记 $\rho^\varepsilon := \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^{u_\varepsilon}\, \mathrm{d}v_g$. 利用不等式 $|e^s - 1| \leqslant e^{|s|}|s|$ 对任意 $s \in \mathbb{R}$，当 $q > 1$ 充分接近 1时，有

$$\begin{aligned}\rho^\varepsilon &= \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W \,\mathrm{d}v_g + \mathcal{O}\Big(\varepsilon^2 \int_\Sigma K e^W |\phi_{\xi,\varepsilon}|\,\mathrm{d}v_g\Big) \overset{(4.2)}{=} \sum_{i=1}^{p+q+N} (1+\gamma_i)\varrho(\xi_i) + \mathcal{O}(\|\varepsilon^2 K e^W\|_q \|\phi_{\xi,\varepsilon}\|) \\ &= \sum_{i=1}^N (1 + \gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*) + o(1).\end{aligned}$$

对任意 $\Psi \in C(\Sigma)$, 由引理 B.5，可推得

$$\begin{aligned}\rho^\varepsilon \int_\Sigma \frac{K\mathrm{e}^{u_\varepsilon}}{\int_\Sigma K\mathrm{e}^{u_\varepsilon}\,\mathrm{d}v_g}\Psi\,\mathrm{d}v_g &= \varepsilon^2 \int_\Sigma K\mathrm{e}^{u_\varepsilon}\Psi\,\mathrm{d}v_g = \sum_{i=1}^N \int_\Sigma \chi_{\xi_i^*} e^{-\varphi_{\xi_i^*}} |y_{\xi_i^*}|^{2\gamma_i} e^{\delta_{\lambda_i,\xi_i^*}^{\gamma_i}} \Psi\,\mathrm{d}v_g + o(1) \\ &= \sum_{i=1}^N (1 + \gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*)\Psi(\xi_i^*) + o(1),\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon \to 0$。因此， u_ε 是方程 (1.3在参数 $\rho^\varepsilon \to \sum_{i=1}^N (1+\gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*) = \rho_*$的解序列，该解序列在 $\xi_1^*, \dots, \xi_{p+q+N}^*$处爆破，并满足

$$\rho^\varepsilon \frac{Ve^{v_\varepsilon}}{\int_\Sigma Ve^{v_\varepsilon}\,\mathrm{d}v_g}\,\mathrm{d}v_g \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{i=1}^N (1+\gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*)\boldsymbol{\delta}_{\xi_i^*},$$

其中， $\boldsymbol{\delta}_x$ 是集中于 $x \in \Sigma$ 的 Σ 上的狄拉克质量，且 $v_\varepsilon = u_\varepsilon - h_Q(x)$. 因此，证明结束。

由引理 4.1 与定理 4.1 的证明，我们得到爆破解 u_ε 的能量水平的如下估计，当 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}J_{\rho^\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla u_\varepsilon|_g^2\,\mathrm{d}v_g - \rho_\varepsilon \ln \int_\Sigma K e^{u_\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla u_\varepsilon|_g^2\,\mathrm{d}v_g - \Big(\varepsilon^2\int_\Sigma K e^{u_\varepsilon}\,\mathrm{d}v_g\Big)\ln\Big(\varepsilon^2\int_\Sigma K e^{u_\varepsilon}\,\mathrm{d}v_g\Big) + 2\Big(\varepsilon^2\int_\Sigma K e^{u_\varepsilon}\,\mathrm{d}v_g\Big)\ln\varepsilon \\ &= (1 + 3\ln 2)\rho_* + \sum_{i=1}^N 2(1+\gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*)\ln(1+\gamma(\xi_i^*)) - \rho_*\ln\rho_* + o(1)\end{aligned}$$

$$\to \rho_* - \rho_* \ln\left(\frac{\rho_*}{8}\right) + \sum_{i=1}^{N} 2(1+\gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*)\ln(1+\gamma(\xi_i^*)).$$

□

接下来，我们将证明，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时， ξ^0 是 $\tilde{E}_\varepsilon$ 的临界点，等价于 $W + \phi_{\xi,\,\varepsilon}$ 求解（3.1），其中变量为 $\xi = (\xi^0, Q_1)$ 。

引理 *5.1.* 给定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $(p, q, Q_1) \in \mathcal{I}_m$，存在充分小的 $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，若 $\xi := (\xi^0, Q_1) \in M_\sigma$，则 ξ^* 和 ξ^0 是 $\xi^0 \mapsto \tilde{E}_\varepsilon(\xi^0)$ 的临界点，当且仅当由定理 *3.1* 构造的 $u := W + \phi_{\xi,\varepsilon}$ 是 *(3.1)* 的解。

证明。 假设 $\xi^0 := (\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ 是 $\tilde{E}_\varepsilon$的临界点。那么，对于 $i = 1, \ldots, p+q, j = 1, \ldots, \mathrm{i}(\xi_i)$，定理 3.1 和引理 B.4 结合（4.3）-（4.5）、（4.8）以及（4.10）可得

$$0 = \partial_{(\xi_i)_j}\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0) = \langle u - i^*(F(u)), \partial_{(\xi_i)_j}(W + \phi_{\xi,\varepsilon})\rangle = \sum_{\substack{i'=1,\ldots,p+q \\ j'=1,\ldots,\mathrm{i}(\xi_{i'})}} c^\varepsilon_{i',j'}\langle PZ^{j'}_{i'}, \partial_{(\xi_i)_j}(W + \phi_{\xi,\varepsilon})\rangle$$

$$= c^\varepsilon_{i,j}\lambda_i\langle PZ^j_i, PZ^j_i\rangle + o\Big(\lambda_i \sum_{\substack{i'=1,\ldots,p+q \\ j'=1,\ldots,\mathrm{i}(\xi_{i'})}} |c^\varepsilon_{i',j'}|\Big) = \frac{4\varrho(\xi_i)\lambda_i}{3}c^\varepsilon_{i,j} + o\Big(\lambda_i \sum_{\substack{i'=1,\ldots,p+q \\ j'=1,\ldots,\mathrm{i}(\xi_{i'})}} |c^\varepsilon_{i',j'}|\Big),$$

其中 $F(u)$ 由（3.12）定义。综上，对 $i = 1, \ldots, p+q$ 和 $j = 1, \ldots, \mathrm{i}(\xi_i)$ 的上述估计，可得 $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,p+q \\ j=1,\ldots,\mathrm{i}(\xi_i)}} \frac{4\varrho(\xi_i)\lambda_i}{3}|c^\varepsilon_{i,j}|\,(1 + o(1)) = 0.$$

于是，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小，使得对于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，有 $c^\varepsilon_{i,\ j} = 0$ 对所有 $i = 1, \ldots, p+q, j = 1, \ldots, \mathrm{i}(\xi_i)$. 由（4.8），$u$ 满足（3.1）。

反过来，假设在定理 3.1 中构造的 $u := W + \phi_{\xi,\varepsilon}$ 实际上是方程 (3.1) 的一个解。那么，根据定义， $\nabla E_\varepsilon(u) = 0$。以 $\partial_{(\xi_i)_j}(W + \phi_{\xi,\varepsilon})$ 作为测试函数，我们可推出

$$0 = \langle \nabla E_\varepsilon(u), \partial_{(\xi_i)_j}(W + \phi_{\xi,\varepsilon})\rangle = \int_\Sigma \Big(-\Delta_g u - F(u) + \overline{F(u)}\Big)\partial_{(\xi_i)_j}(W + \phi_{\xi,\varepsilon})\,\mathrm{d}v_g$$
$$= \langle u - i^*(F(u)), \partial_{(\xi_i)_j}(W + \phi_{\xi,\varepsilon})\rangle = \partial_{(\xi_i)_j}\tilde{E}_\varepsilon(\xi^0).$$

□

定理1.2的证明。设 $\xi^{0,*}$ 是 $\mathbf{F}_{p\,q}^{K\,Q_1,}$ 的一个 C^1-稳定临界点。记 $\xi^* = (\xi^{0,*}, Q_1) = (\xi_1^*, \ldots, \xi_{p+q+N}^*)$。那么，存在一个 $\xi^\varepsilon = (\xi_1^\varepsilon, \ldots, \xi_{p+q}^\varepsilon, Q_1) \in \widetilde{M}_{\sigma,\xi^*}$ 的序列，使得对 $i = 1, \ldots, p+q$， $d_g(\xi_i, \xi_i^*) < \varepsilon$，且 $(\xi_1^\varepsilon, \ldots, \xi_{p+q}^\varepsilon)$ 是 E_ε 的临界点。

利用定理 3.1，可得 $u_\varepsilon := \sum_{i=1}^{p+q+N} P\delta_{\lambda_i,\ \xi_i^\varepsilon} + \phi_{\xi^\varepsilon,\ \varepsilon}$，其中 λ_i 由式（2.12）给出，且 $\|\phi_{\xi^\varepsilon,\ \varepsilon}\| \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时成立。于是，引理 5.1 推出 u_ε 是式（3.1）的一个解，其参数为 $\varepsilon \to 0$。记 $\rho^\varepsilon := \varepsilon^2 \int_\Sigma K e^{u_\varepsilon}\, \mathrm{d}v_g$.。采用定理 1.1证明中的相同方法，可得

$$\rho^\varepsilon = \sum_{i=1}^{p+q+N} (1+\gamma_i)\varrho(\xi_i) + o(1) \to 4\pi n_m = \rho_*;$$

$$\rho^\varepsilon \frac{V e^{v_\varepsilon}}{\int_\Sigma V e^{v_\varepsilon}\, \mathrm{d}v_g}\, \mathrm{d}v_g \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{i=1}^{p+q+N} (1+\gamma(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*)\delta_{\xi_i^*},$$

其中 $v_\varepsilon = u_\varepsilon - h_Q(x)$. 因此， u_ε 是式（1.3）的一列解，其参数为$\rho^\varepsilon \to \sum_{i=1}^{p+q+N}(1+\gamma_i(\xi_i^*))\varrho(\xi_i^*) = 4\pi n_m$，它在 $\xi_1^*, \ldots, \xi_{p+q+N}^*$ 处爆破。

根据引理 4.1 和定理 4.1的证明，我们得到爆破解 u_ε的能量水平满足如下估计，其中 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} J_{\rho^\varepsilon}(u_\varepsilon) &= (1+3\ln 2)\rho_* + \sum_{i=1}^{p+q+N} 2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln(1+\gamma_i) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi_1^\varepsilon, \ldots, \xi_{p+q}^\varepsilon) \\ &\quad - \rho_* \ln \rho_* + o(1) \\ &\to \rho_* - \rho_* \ln\left(\frac{\rho_*}{8}\right) + \sum_{i=1}^{p+q+N} 2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\ln(1+\gamma_i) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{p,q}^{K,Q_1}(\xi^{0,*}). \end{aligned}$$

□

A 线性化方程

引理 A.1. 设 $\gamma \in (-1, +\infty)\backslash\mathbb{N}_0$，且 ϕ 是以下方程的分布解

$$\begin{cases} -\Delta\phi(y) = |y|^{2\gamma}\frac{8(1+\gamma)^2}{(1+|y|^{2(1+\gamma)})^2}\phi(y), & in\ \mathcal{R}, \\ \partial_{y_2}\phi(y) = 0, & on\ \partial\mathcal{R}, \end{cases}$$

满足限制条件 $\int_{\mathcal{R}} |\nabla\phi|^2 < \infty,$，其中 $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^2_+$。那么，存在 $c_0 \in \mathbb{R}$，使得 $\phi = c_0 \frac{1-|y|^{2(1+\gamma)}}{1+|y|^{2(1+\gamma)}}$.

证明。对于 $\mathcal{R}=\mathbb{R}^2$的情形，参见 [15, 引理 2。1] 以及 [68, 引理 2。1]。对于$\mathcal{R}=\mathbb{R}^2_+$的情形，我们通过关于 ϕ 轴的偶反射，将其扩展为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 y_1，即

$$\phi(y_1,y_2)=\begin{cases}\phi(y_1,y_2) & \text{for } y_2\geq 0,\\ \phi(y_1,-y_2) & \text{for } y_2<0.\end{cases}$$

由于 $\partial_{y_2}\phi\equiv 0$ 在 $\partial\mathbb{R}^2_+$上，因此

$$|y|^{2\gamma}e^{\tilde{\delta}\gamma}\phi(y)\in L^r(\mathbb{R}^2)\quad \text{for some } r>1.$$

由椭圆正则性可知，ϕ 关于 $\partial\mathbb{R}^2_+$ 的偶延拓属于 $C^{1,\,s}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中某个 $s\in(0,1)$。此外，标准椭圆估计给出

$$\phi\in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\}),$$

且 ϕ 在 $\mathbb{R}^2$的每个紧子集上有界。因此，引理 A.1 的证明与 $\mathcal{R}=\mathbb{R}^2$的情形完全相同。

我们强调，当 $\gamma\in(-1,0)$时，一般而言，以下形式的全局次线性增长条件

$$|\phi(y)|\leq C(1+|y|)^t,\ \text{for some } t\in(0,1)$$

并不成立。尽管如此，较弱的假设

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\phi|^2\,\mathrm{d}y<+\infty$$

已足以通过傅里叶分析得出所需结论，具体过程见 [15]。此处省略细节。

□

B 投影泡的渐近行为

本节中，我们首先推导投影泡及其导数的估计，然后利用这些估计考察近似解的基本渐近行为。

我们假设$(p,q,Q_1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathcal{P}(Q)$满足 $Q_1=\{\xi^*_{p+q+1},\dots,\xi^*_{p+q+N}\}$且 $P\delta_i=P\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\,\xi_i}$ 满足 $\lambda_i^{1+\gamma_i}\asymp\frac{1}{\varepsilon}$对于$i=1,\dots,p+q+N$当 $\lambda_i\to+\infty$。令 $\xi^*=(\xi^{0,\,*},Q_1)$且 $\xi^{0,\,*}$是 $\mathbf{F}^{K\,Q_1}_{p\,q,}$ 由（2.6）定义的临界点。假设

$$\xi:=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q+N})=(\xi_1,\dots,\xi_{p+q},\xi^*_{p+q+1},\dots,\xi^*_{p+q+N})\in M_{\sigma,\xi^*}$$

对于某个足够小的 $\sigma > 0$ 。

我们还记 $i = 1, \ldots, p+q+N$

$$\text{(B.1)} \quad \epsilon_{0,i} = \begin{cases} \frac{\varrho(\xi_i)\mathrm{c}(\gamma_i)}{4}\lambda_i^{-2} & \gamma_i > 0 \\ \frac{\rho(\xi_i)}{2}\lambda_i^{-2}\ln\lambda_i & \gamma_i = 0 \\ 0 & \gamma_i \in (-1,0) \end{cases}, \quad \text{and} \quad \epsilon_{1,i} = \begin{cases} \lambda_i^{-2(1+\gamma_i)}\ln\lambda_i & \gamma_i > 0 \\ \lambda_i^{-2} & \gamma_i = 0 \\ \lambda_i^{-2(1+\gamma_i)} & \gamma_i \in (-1,0) \end{cases}.$$

其中 $\mathrm{c}(\gamma) := \int_0^\infty \ln(1+s^{-(1+\gamma)})\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{1+\gamma}\csc(\frac{\pi}{1+\gamma}) < +\infty$ 对任意 $\gamma > 0$。

引理 B.1. 对任意 $i = 1, \ldots, p+q+N$，当 $\lambda_i \to \infty$ 时，我们有

$$P\delta_{\lambda_i,\xi_i}^{\gamma_i} = \chi_i \cdot (\delta_{\lambda_i,\xi_i}^{\gamma_i} - \ln(8(1+\gamma_i)^2\lambda_i^{-2(1+\gamma_i)})) + (1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)H^g(\cdot,\xi_i) + \epsilon_{0,i} + \mathcal{O}(\epsilon_{1,i})$$

在 $C(\Sigma)$中，其中$\epsilon_{0,\,i}$ 和 $\epsilon_{1,\,i}$ 由下式给出 (B.1)。

证明。 对于 $\gamma_i = 0$ 的情形，证明见 [2, 附录 A], ；对于 $\gamma_i \neq 0$ 的情形，可用类似的方法处理。论证依赖于带诺伊曼边界条件的椭圆方程的正则性理论（例如，参见 [1,52,60]），然后应用索 Sobole夫嵌入。此处省略细节。

□

下面的引理给出了沿 $\lambda_i \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{1+\gamma_i}} \to \infty$ 的投影泡解一阶导数的渐近展开:

引理 B.2. 当 $\lambda_i \to \infty$ 时，对于 $i = 1, \ldots, p+q+N$

$$\lambda_i\partial_{\lambda_i}P\delta_{\lambda_i,\xi_i}^{\gamma_i} = \chi_i\frac{4(1+\gamma_i)}{1+\lambda_i^{2(1+\gamma_i)}|y_{\xi_i}|^{2(1+\gamma_i)}} + \mathcal{O}(\epsilon_{0,i}+\epsilon_{1,i}),$$

且对于 $i = 1, \ldots, p+q$ 和 $j = 1, \ldots, \mathrm{i}(\xi_i)$

$$\frac{\partial_{x_j}P\delta_{\lambda_i,x}^{\gamma_i}|_{x=\xi_i}}{\lambda_i} = \frac{\chi_i\partial_{x_j}\delta_{\lambda_i,x}^{\gamma_i}|_{x=\xi_i}}{\lambda_i} + \frac{\varrho(\xi_i)}{\lambda_i}\partial_{(\xi_i)_j}H^g(\cdot,\xi_i) - \frac{4}{\lambda_i}(\ln|y_{\xi_i}|)\partial_{(\xi_i)_j}\chi_i + \mathcal{O}(\epsilon_{0,i}+\epsilon_{1,i}),$$

在 $C(\Sigma)$，其中 $\epsilon_{1,\,i}$ 由 (B.1)定义。

证明。 $\gamma_i = 0$ 的情形证明见 [2, 附录 A], ， $\gamma_i \neq 0$ 的情形可类似推得。此处略去细节。

□

注记 B.1。回顾 PZ_i^j 由 (3.5) 定义。注意到

$$\lambda_i\partial_{\lambda_i}P\delta_i = PZ_i^0 \quad \textit{and} \quad \lambda_i^{-1}\partial_{(\xi_i)_j}P\delta_i = PZ_i^j + \mathcal{O}(\lambda_i^{-2}\ln\lambda_i),$$

对 $i=1,\dots,p+q+N, j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$. 于是，由类似的论证，我们还有如下渐近估计：对 $i=1,\dots,p+q+N$

$$PZ_i^0=\frac{4(1+\gamma_i)\chi_i}{1+\lambda_i^{2(1+\gamma_i)}|y_{\xi_i}|^{2(1+\gamma_i)}}+\begin{cases}\mathcal{O}(\lambda_i^{-2}) & \gamma_i>0\\ \mathcal{O}(\lambda_i^{-2}\ln\lambda_i) & \gamma_i=0\\ \mathcal{O}(\lambda_i^{-2(1+\gamma_i)}) & \gamma_i\in(-1,0)\end{cases},$$

在 $C(\Sigma)$; 对于 $i=1,\dots,p+q, j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$, $PZ_i^j=\underline{\frac{4\chi_i\lambda_i y_{\xi_i\ j}}{(1+\lambda_i^{2(1+\gamma_i)}|y_{\xi_i}|^{2(1+\gamma_i)}}}+\mathcal{O}(\lambda_i^{-1})$, 在 $C(\Sigma)$。

接下来，我们将证明投影泡的渐近正交性。

引理 B.3. 对于 $i,j=1,\dots,p+q+N$，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}.2)\qquad &\langle P\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i},P\delta^{\gamma_j}_{\lambda_j,\xi_j}\rangle\\ &=(-2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)+4(1+\gamma_i)^2\varrho(\xi_i)\ln\lambda_i)\boldsymbol{\delta}_{ij}+(1+\gamma_i)(1+\gamma_j)\varrho(\xi_i)\varrho(\xi_j)H^g(\xi_i,\xi_j)\\ &\quad+\big((1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\epsilon_{0,j}+(1+\gamma_j)\varrho(\xi_j)\epsilon_{0,i}\big)+\mathcal{O}(\epsilon_{1,i}+\epsilon_{1,j}),\end{aligned}$$

当 $\lambda_i\asymp\frac{1}{\lambda^{1+\gamma_i}}\to\infty$, 其中 $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ 是克罗内克δ。

证明. 再次利用引理 B.1 中的展开式，我们可以推导出，对于任意 $i,j=1,\dots,p+q+N$

$$\begin{aligned}\langle P\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i},P\delta^{\gamma_j}_{\lambda_j,\xi_j}\rangle&=\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}}\big(\chi_j\cdot(\delta^{\gamma_j}_{\lambda_j,\xi_j}-\ln(8(1+\gamma_j)^2\lambda_j^{-2(1+\gamma_j)}))\\&\quad+(1+\gamma_j)\varrho(\xi_j)H^g(\cdot,\xi_j)+\epsilon_{0,j}+\mathcal{O}(\epsilon_{1,j})\big)\,\mathrm{d}v_g\\&=\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}}\chi_j\ln\frac{\lambda_j^{4(1+\gamma_j)}|y_{\xi_j}|^{4(1+\gamma_j)}}{(1+\lambda_j^{2(1+\gamma_j)}|y_{\xi_j}|^{2(1+\gamma_j)})^2}\,\mathrm{d}v_g\\&\quad+(1+\gamma_j)\varrho(\xi_j)\int_\Sigma(-\Delta_gP\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i})G^g(\cdot,\xi_j)\,\mathrm{d}v_g+(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\epsilon_{0,j}+\mathcal{O}(\epsilon_{1,j})\\&=-2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\boldsymbol{\delta}_{ij}+(1+\gamma_j)\varrho(\xi_j)P\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}(\xi_j)+(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)\epsilon_{0,j}+\mathcal{O}(\epsilon_{1,j}),\end{aligned}$$

其中我们应用了 格林表示公式，得到 $P\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}$ 以及以下估计 :

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}}\,\mathrm{d}v_g=(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)+\mathcal{O}(\lambda_i^{-2(1+\gamma_i)}),\\&2\int_\Sigma\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta^{\gamma_i}_{\lambda_i,\xi_i}}\ln\frac{\lambda_i^{2(1+\gamma_i)}|y_{\xi_i}|^{2(1+\gamma_i)}}{1+\lambda_i^{2(1+\gamma_i)}|y_{\xi_i}|^{2(1+\gamma_i)}}\,\mathrm{d}v_g=-2(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)+\mathcal{O}(\lambda_i^{-2(1+\gamma_i)}).\end{aligned}$$

于是，引理 B.1，结合上述估计，可得（B.2）。 □

接下来，我们证明 PZ_i^j 关于 $i=1,\dots,p+q, j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i)$以及$PZ_i^0$关于 $i=1,\dots,p+q+N$的正交性质。

引理 B.4。 当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们有以下渐近估计：

$$\langle PZ_i^j, PZ_{i'}^{j'}\rangle = \begin{cases} \frac{4}{3}(1+\gamma_i)^2\varrho(\xi_i)\boldsymbol{\delta}_{i'i}\boldsymbol{\delta}_{j'j}+\mathcal{O}(\epsilon_{0,i}) & \text{when } j \text{ or } j'=0,\\ \frac{4}{3}\varrho(\xi_i)\boldsymbol{\delta}_{i'i}\boldsymbol{\delta}_{j'j}+\mathcal{O}(\lambda_i^{-1}) & \text{when } i,i'=1,\dots,p+q, j=1,\dots,\mathrm{i}(\xi_i),\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ 是克罗内克δ，且 $\epsilon_{0,\ i}$ 由下式给出 (B.1)。

证明。 我们先考虑情形 $j'=0$。利用注记 B.1，我们有

$$\begin{aligned}\langle PZ_i^j, PZ_{i'}^{j'}\rangle &= \int_\Sigma (-\chi_i\Delta_g Z_i^j)(\chi_{i'}(Z_{i'}^0+2)+\mathcal{O}(\epsilon_{0,i'}))\,\mathrm{d}v_g\\ &= -\int_\Sigma \chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}Z_i^j(Z_{i'}^0+2)+\mathcal{O}(\epsilon_{0,i'})\,\mathrm{d}v_g\\ &= \frac{4}{3}(1+\gamma_i)^2\varrho(\xi_i)\boldsymbol{\delta}_{i'i}\boldsymbol{\delta}_{0j}+\mathcal{O}(\epsilon_{0,i'}),\end{aligned}$$

其中用到了积分 $\int_{\mathbb{R}^2}\frac{64}{(1+\gamma)^4(1-|y|^{2(1+\gamma)})|y|^{2\gamma}}{(1+|y|^{2(1+\gamma)})^4}\,\mathrm{d}y=\frac{32\pi}{3}(1+\gamma)^3$ 对任意 $\gamma>-1$. 还需考虑情形 $j,j'\neq 0$。于是可得 $i,i'\in\{1,\dots,p+q\}$。再次由注记B.1 ，我们有

$$\langle PZ_i^j, PZ_{i'}^{j'}\rangle = \int_\Sigma (-\chi_i\Delta_g Z_i^j)(\chi_{i'}Z_{i'}^{j'}+\mathcal{O}(\lambda_{i'}^{-1}))\,\mathrm{d}v_g = \frac{4}{3}\varrho(\xi_i)\boldsymbol{\delta}_{ii'}\boldsymbol{\delta}_{jj'}+\mathcal{O}(\lambda_{i'}^{-1}),$$

这里我们用了 $\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2y_j^2}{(1+|y|^2)^4}\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^4}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{6}$. □

引理 B.5. 对于任意 $\iota\in(0,1)$，存在充分小的 $s_0>0$，使得对于任意$s\in(1,s_0)$，

$$\left\|\varepsilon^2 K e^{\sum_{i=1}^{p+q+N}P\delta_i}-\sum_{i=1}^{p+q+N}\chi_i|y_{\xi_i}|^{2\gamma_i}e^{-\varphi_i}e^{\delta_i}\right\|_s=\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{\iota}{1+\max\{0,\gamma_*\}}}),$$

当 $\varepsilon\to 0$, 时，其中 $\gamma_*=$最大值$_{i=1,\dots,p+q+N}\gamma_i$。

证明。 情形 I. $\gamma_*>0$。对于 $i=1,\dots,p+q+N$和 $y\in\Omega_i=\lambda_i B_{2r_0}^{\xi_i}$，我们有

$$\begin{aligned}\Theta_i(y) &:= (W-\delta_i+\varphi_i+2\ln\varepsilon+\ln K_i)\circ y_{\xi_i}^{-1}(\frac{y}{\lambda_i})\\ &= -\ln(8(1+\gamma_i)^2)+(1+\gamma_i)\varrho(\xi_i)R^g(\xi_i)+\sum_{\substack{j=1,\dots,p+q+N\\ j\neq i}}(1+\gamma_j)\varrho(\xi_j)G^g(\xi_i,\xi_j)+\ln K_i(\xi_i)\\ &\quad+2(1+\gamma_i)\ln\lambda_i+2\ln\varepsilon+\sum_{j=1}^{p+q+N}\epsilon_{0,j}+\mathcal{O}\Big(\sum_{j=1}^{p+q+N}(\epsilon_{1,j}+\lambda_i^{-1}|y|)\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{p+q+N} \epsilon_{0,j} + \mathcal{O}\Big(\sum_{j=1}^{p+q+N} (\epsilon_{1,j} + \lambda_i^{-1}|y|)\Big),$$

根据（2.12）和（2.11）。利用引理 B.1 和（2.12），我们有

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \Big|\varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\Big|^s \,\mathrm{d}v_g \\
&= \sum_{i=1}^{p+q+N} \lambda_i^{-2(1+\gamma_i s)} \int_{\lambda_i B_{r_0}^{\xi_i}(\xi_i)} |y|^{2\gamma_i s} e^{(1-s)\varphi_{\xi_i}\circ y_{\xi_i}^{-1}(\frac{y}{\lambda_i})} \Big| \varepsilon^2 K_i \circ y_{\xi_i}^{-1}(\frac{y}{\lambda_i}) e^{\varphi_{\xi_i}\circ y_{\xi_i}^{-1}(\frac{y}{\lambda_i})} e^{W\circ y_{\xi_i}^{-1}(\frac{y}{\lambda_i})} \\
&\quad - e^{\delta_i \circ y_{\xi_i}^{-1}(\frac{y}{\lambda_i})}\Big|^s dy + \mathcal{O}(\varepsilon^{2s}) \\
&= \mathcal{O}\Big(\sum_{i=1}^{p+q+N} \lambda_i^{-2+2s} \int_{\Omega_i} \frac{|y|^{2\gamma_i s}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^{2s}} |e^{\Theta_i(y)} - 1|^s \,\mathrm{d}y\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2s}) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{s\frac{2}{1+\gamma_*} + \frac{s}{1+\gamma_-}(\frac{2}{s}-2)} + \varepsilon^{s\frac{1}{1+\gamma_*} + \frac{s}{1+\gamma_*}(\frac{2}{s}-2)}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{s\frac{\iota}{1+\gamma_*}}),
\end{aligned}$$

对任意 $s \in (1, \min\{\frac{2}{1+\iota}, (1-\frac{(1-\iota)(1+\gamma_-)}{2(1+\gamma_*)})^{-1}\})$，其中 $\gamma_- = \min\{\gamma_i \colon i \in 1, \dots, p+q+N\}$.

情形 II. $\gamma_* = 0$. 类似地，在这种情形下，我们有 $\Theta_i(y) = \mathcal{O}(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + \frac{|y|}{\lambda_i})$. 于是可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \Big|\varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\Big|^s \,\mathrm{d}v_g \\
&= \mathcal{O}\Big(\sum_{i=1}^{p+q+N} \lambda_i^{-2+2s} \int_{\Omega_i} \frac{|y|^{2\gamma_i s}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^{2s}} |e^{\Theta_i(y)} - 1|^s \,\mathrm{d}y\Big) + \mathcal{O}\Big(\varepsilon^{2s} + \sum_{i=1}^{p+q+N} \lambda_i^{-2(1+\gamma_i)s}\Big) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{2s + \frac{s}{1+\gamma_-}(\frac{2}{s}-2)} |\ln \varepsilon| + \varepsilon^{s+s(\frac{2}{s}-2)}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{s\iota}),
\end{aligned}$$

其中 $s \in (1, \min\{\frac{2}{1+\iota}, (1-\frac{(1-\iota)(1+\gamma_-)}{2(1+\gamma_*)})^{-1}\})$。

情形 III. $\gamma_* < 0$. 类似地，在这种情形下，我们有 $\Theta_i(y) = \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \frac{|y|}{\lambda_i})$. 于是可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \Big|\varepsilon^2 K e^W - \sum_{i=1}^{p+q+N} \chi_i |y_{\xi_i}|^{2\gamma_i} e^{-\varphi_i} e^{\delta_i}\Big|^s \,\mathrm{d}v_g \\
&= \mathcal{O}\Big(\sum_{i=1}^{p+q+N} \lambda_i^{-2+2s} \int_{\Omega_i} \frac{|y|^{2\gamma_i s}}{(1+|y|^{2(1+\gamma_i)})^{2s}} |e^{\Theta_i(y)} - 1|^s \,\mathrm{d}y\Big) + \mathcal{O}\Big(\varepsilon^{2s} + \sum_{i=1}^{p+q+N} \lambda_i^{-2(1+\gamma_i)s}\Big) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{2s + \frac{s}{(1+\gamma_-)}(\frac{2}{s}-2)} + \varepsilon^{\frac{s}{1+\gamma_*} + \frac{s}{1+\gamma_*}(\frac{2}{s}-2)}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{s\iota}),
\end{aligned}$$

其中 $s \in (1, \min\{\frac{2}{1+\iota}, (1-\frac{(1-\iota)(1+\gamma_-)}{2})^{-1}\}))$。

□

参考文献

[1] S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg。满足一般边界条件的椭圆偏微分方程解在边界附近的估计。I.《纯粹与应用数学通讯》，12:623-727，1959年。[2] M. Ahmedou、T. Bartsch 和 Z. Hu。具有诺伊曼边界条件的黎曼曲面上平均场方程的爆破解，2024年。预印本见arXiv:408.16917v2。[3] M. Ahmedou、T. Bartsch 和 Z. Hu。黎曼曲面上 Keller-Segel 系统稳态解的爆破解，2024年。预印本见arXiv:2409.00519v2。[4] J. Ambjorn 和 P. Olesen。矢量玻色子对强磁场的反屏蔽。《物理快报*B*辑》，214(4):565-569，1988年。[5] D. Bartolucci。关于 S^2 上具有一个和两个锥形奇点的共形度量的最佳夹挤常数。《几何分析杂志》，23:855-877，2013年。[6] D. Bartolucci、C.-C. Chen、C.-S. Lin 和 G. Tarantello。具有奇异数据的平均场方程爆破解的轮廓。《偏微分方程通讯》，29(7- 8):1241-1265，2004年。[7] D. Bartolucci、A. Jevnikar、Y. Lee 和 W. Yang。二维湍流 Onsager 理论中的非退化性与平均场方程。《数学力学分析档案》，230:397-426，2018年。[8] D. Bartolucci 和 C.-S. Lin。临界参数下多重连通区域上平均场方程的存在性与唯一性。《数学年刊》，359:1-44，2014年。[9] D. Bartolucci 和 A. Malchiodi。通过矩消失改进几何不等式及其在奇异 Liouville 方程中的应用。《数学物理通讯》，322:415- 452，2013年。

[10] D. Bartolucci 和 F. De Marchis. 凸区域上的超临界平均场方程与二维湍流的 Onsager 统计描述。《数学力学分析档案》，217(2):525-570，2015年。

[11] D. Bartolucci、F. De Marchis 和 A. Malchiodi. 具有圆锥奇点的曲面上的超临界共形度量。《国际数学研究通知》，2011(24):5625-5643。

[12]D. Bartolucci 和 G. Tarantello. 带奇异数据的 Liouville 方程：通过局部表示公式建立的集中紧性原理. 《微分方程杂志》, 185:25-53,2002.

[13] D. Bartolucci 和 G. Tarantello. 带奇异数据的 Liouville 型方程及其在电弱理论周期性多涡旋中的应用. 《数学物理通讯》, 229(1):3-47, 2002.[14] D. Bartolucci 和 G. Tarantello. 奇异 Liouville 型方程的渐近爆破解析及其应用. 《微分方程杂志》, 262(7):3887-3931, 2017年.[15]D. Bartolucci、W. Yang 和 L. Zhang. 非量子化奇异平均场方程爆破解的渐近分析与唯一性，2024年。arXiv 预印本：2401.12057.[16] D. Bartolucci. 平均场方程的全局分岔分析与二维湍流的 Onsager 微正则描述. 《微积分变分与偏微分方程》, 58:18, 2019.[17] L. Battaglia. Keller-Segel 系统稳态解的一般存在性结果. 《离散与连续动力系统》, 39(2):905–926, 2019.[18] H. Brezis 和 F. Merle. $-\Delta u = Ve^u$ 在二维中的解的一致估计与爆破行为. 《偏微分方程通讯》, 16(8-9):1223-1253, 1991.[19] E. Caglioti、P.-L. Lions、C. Marchioro 和 M. Pulvirenti. 二维欧拉方程的一类特殊稳态流：统计力学描述. 《数学物理通讯》, 143:501-525, 1992.[20] E. Caglioti、P.-L. Lions、C. Marchioro 和 M. Pulvirenti. 二维欧拉方程的一类特殊稳态流：统计力学描述。II. 《数学物理通讯》, 174:229-260, 1995年.[21] S. Y. A. Chang 和 P. C. Yang. 在 S^2 上指定高斯曲率. Acta Math., 159(3-4):215-259, 1987年.[22] S. Y. A. Chang 和 P. C. Yang. S^2 上度量的共形变形. J. Differential Geom., 27(2):259-296, 1988年.[23] S. Chanillo 和 M. Kiessling. 统计力学与几何中某些非线性问题解的旋转对称性. 《数学物理通讯》, 160:217-238, 1994年.[24] C.-C. Chen 和 C.-S. Lin. 带奇异数据的 Liouville 型平均场方程：拓扑度. 《纯粹与应用数学通讯》, 68(6):887-947, 2015年.

[25] C.-C. Chen 和 C.-S. Lin. 紧黎曼曲面上多重泡解的尖锐估计. 《纯粹与应用数学通讯》, 55(6):728-771, 2002.[26] W.-X. Chen. 带锥形奇点曲面上的 Trudinger 不等式. 《美国数学会会刊》, 108:821-832, 1990.[27] W. Chen 和 C. Li. 某些非线性椭圆方程解的分类. 《杜克数学杂志》, 63(3), 1991.[28] S. S. Chern. 曲面上等温参数存在性的一种初等证明.《美国数学会会刊》, 6:771-782, 1955.[29] E. A. Coddington 和 N. Levinson. 常微分方程理论. McGraw- Hill Book Company, Inc., 纽约-多伦多-伦敦, 1955.[30] T. D'Aprile, J. Wei 和 L. Zhang. 单位球中奇异 Liouville 方程的非简单爆破. 《离散与连续动力系统》, 44(7):1938-1957, 2024年.[31] T. D'Aprile, J. Wei 和 L. Zhang. 关于带势的奇异 Liouville 方程非简单爆破解的构造. 《微积分变分与偏微分方程》, 63(3):第68号论文, 26, 2024年.[32] M. del Pino, M. Kowalczyk 和 M. Musso. Liouville 型方程中的奇异极限. 《微积分变分与偏微分方程》., 24(1):47-81, 2005年.[33] T. D'Aprile 和 J. Wei. 带奇异源项的 Liouville 方程的爆破解：非简单爆破. 《泛函分析杂志》, 279:108605, 2020年.[34] P. Esposito. 带奇异数据的 Liouville 方程爆破解. 《*SIAM* 数学分析杂志》, 36(4):1310-1345, 2005年.[35] P. Esposito 和 P. Figueroa. 紧黎曼曲面上的奇异平均场方程. *Nonlinear Anal.*, 111:33-65, 2014年.[36] P. Esposito, M. Grossi 和 A. Pistoia. 平均场方程爆破解的存在性. 《亨利·庞加莱研究所年刊 *C* 辑：非线性分析》, 22(2):227-257, 2005年.[37] H. Fang 和 M. Lai. 锥形二球面上的曲率夹逼. 《微积分变分与偏微分方程》, 55:118, 2016年.[38] M. Grossi 和 A. Pistoia. 双曲正弦泊松方程的多重爆破现象.《数学力学分析档案》, 209(1):287-320, 2013年.

[39] P. Hartman 和 A. Wintner. 椭圆型线性偏微分方程理论中的一致Dini条件. 《美国数学杂志》, 77:329-354, 1955.[40] Z. Hu 和 T. Bartsch. 带边界曲面上平均场方程极限函数的 Morse 性质 . 《几何分析杂志》 , 34(7):220, 2024 年 .[41] J. L. Kazdan 和 F. W. Warner. 紧致二维流形上的曲率函数. 《数学年刊》, 99:14-74, 1974.[42] M. H. K. Kiessling. 具有对数相互作用的经典粒子的统计力学.《纯粹与应用数学通讯》, 46:27-56, 1993.[43] T.-J. Kuo 和 C.-S. Lin. 含整数奇异源的平均场方程估计：非简单爆破. 《微分几何杂志》, 103(3):377-424, 2016年.[44] J. Li, L. Sun 和 Y. Yang. 紧黎曼曲面上平均场方程的边值问题. 《中国科学：数学》, 66(1):115-142, 2023.[45] Y. Y. Li. Harnack型不等式：移动平面法. 《数学物理通讯》, 200(2):421-444, 1999.[46] B. Lipman. 黎曼曲面. Courant数学科学研究所，纽约大学，1957年。1957—58年的讲义.[47] M. Lucia 和 M. Nolasco. SU(3) Chern-Simons涡旋理论与Toda系统. 《微分方程杂志》, 184(2):443-474, 2002.[48] L. Ma 和 J. Wei. Liouville 方程的收敛性. 《瑞士数学评论》, 76:506- 514, 2001.[49] A. Malchiodi 和 D. Ruiz，新型改进的 Moser-Trudinger 不等式及紧曲面上的奇异 Liouville 方程. 《几何与泛函分析》, 21(5):1196-1217, 2011.[50] J. Moser. N. Trudinger 不等式的一种尖锐形式. 《印第安纳大学数学杂志》, 20 (1970/71), 1077-1092.[51] K. Nagasaki 和 T. Suzuki. 指数支配型非线性项下二维椭圆特征值问题的渐近分析. 《渐近分析》, 3:173-188, 1990.[52] G. Nardi. 带 Neumann边界条件的 Poisson方程解的 Schauder估计. 《数学教学》, 60(3-4):421-435, 2014年.

[53] J. Prajapat 和 G. Tarantello. 关于 $\mathbb{R}^2$ 上一类椭圆问题：对称性与唯一性结果。*爱丁堡皇家学会会刊 A 辑*，131(4):967-985，2001年。[54] J. Spruck 和 Y. Yang. 关于电弱理论中的多涡旋 I：周期解的存在性。《数学物理通讯》，144:1-16，1992年。[55] T. Suzuki. 指数非线性二维 Emden-Fowler 方程，载于非线性扩散方程及其平衡态 *III*，W.-M. Ni、L. A. Peletier 和 J. Serrin 编，Birkhäuser，1992年，第493-512页。[56] G. Tarantello. Chern-Simons-Higgs 理论的多凝聚解。数学物理杂志，37:3769-3796，1996年。[57] M. Troyanov. 在带锥形奇点的紧曲面上指定曲率。美国数学会会刊，324(2):793-821，1991年。[58] I. N. Vekua. 将椭圆型微分形式化为标准形式的问题及广义柯西-黎曼系统。苏联科学院通报 *(*新系列*)*，100:197-200，1955年。[59] G. Wang 和 J. Wei. 建模趋化性的反应扩散系统的稳态解。数学新消息，233-234:221-236，2002。[60] K. Wehrheim. *Uhlenbeck* 紧性。欧洲数学会，2004年。[61] J. Wei 和 L. Zhang. 具有负锥形奇点的高斯曲率方程的非退化性。太平洋数学杂志，297(2):455-475，2018年。[62] J. Wei 和 L. Zhang. 具有量子化奇点的 Liouville 方程的估计。数学进展，380:107606，2021年。[63] J. Wei 和 L. Zhang. 具有量子化奇点的 Liouville 方程的消失估计。伦敦数学会会刊，124(1):106-131，2022年。[64] L. Wu. 奇异 Liouville 方程的简单爆破解。《美国数学会会刊》，152(1):345-356，2024年。[65] Y. Yang. 场论与非线性分析中的孤子。Springer 数学专著，纽约，2001年。[66] Y. Yang 和 J. Zhou. 涉及紧致黎曼曲面边界等温坐标的爆破分析。数学分析及其应用杂志，504(2):125440，2021年。

[67] Y. Yang. 带边界二维紧致黎曼流形上的 Moser-Trudinger 不等式的极值函数。国际数学杂志，17(03):313-330，2006年。

[68] L. Zhang。具有指数非线性和奇异数据的椭圆方程爆破解的渐近行为。当代数学通讯，11(3)：395-411，2009。

Mohameden Ahmedou吉森尤斯图斯-李比希大学数学研究所Arndtsrasse2, D-35392 吉森，德国
Mohameden.Ahmedou@math.uni-giessen.de

Zhengni Hu数学科学学院，上海交通大学800东川路，闵行区，200240 上海，中国zhengni_hu@sjtu.edu.cn

Miaomiao Zhu数学科学学院，上海交通大学800东川路，上海，200240，中华人民共和国mizhu@sjtu.edu.cn