arXiv:2602.04828v1 [math.SP] 4 Feb 2026

薛定谔算子共振集

YURII BELOV 和 PAVEL GUBKIN

摘要。我们证明，具有紧支撑势的薛定谔算子的共振可以包含满足布拉施克条件的角 $\{z\colon -\operatorname{Im} z > C|\operatorname{Re} z|\}$ 中任意子集。我们还建立了更广域内这些子集的充分条件。

1. 引言

本文考虑定义在半直线 $\mathcal{H}_q$ 上$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$的如下形式的一维薛定谔算子

$$\mathcal{H}_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

其势 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 为实值且紧支撑。 $\mathcal{H}_q$ 的 约斯特解 $\psi(k, x)$ 定义为下式的唯一解

$$-\psi''(k,x) + q(x)\psi(k,x) = k^2\psi(k,x), \qquad k \in \mathbb{C}, \qquad x \geqslant 0,$$

th当满足 $\psi(k,\ x) = e^{ikx}$ 时，对所有足够大的 x。相应的 约斯特函数定义为 b y

$$w(k) = \psi(k, 0), \qquad k \in \mathbb{C}.$$

该函数是整函数，其在下半平面 $\{z$中的零点（$\operatorname{Im} z < 0\}$）称为算子 $\mathcal{H}_q$的共振，我们用 Res(q) 表示共振集合。严格来说，Res(q) 并非集合，而是多重集，其中每个共振的重数等于相应零点的重数。在自由情形 $q \equiv 0$ 下，我们有 $\psi(k, x) = e^{ikx}$， $w(k) = 1$ ，且 Res$(q) = \emptyset$。当 q 非平凡时，Res(q) 是无限集；与相应的束缚态（ w 的正虚部零点）一起，共振唯一确定势，参见 [10] 中的定理1.1以及 [11], [15], [14] 中关于逆谱问题稳定性的论文。共振也可以定义为 $\mathcal{H}_q$的预解算子的亚纯延拓的极点，参见书籍 [5]第 2 章。

复分析中将整函数的增长与其零点分布联系起来的技巧，能够为共振的位置提供有价值的信息。例如，经典布拉施克条件

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Res}(q)} \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{1 + |\lambda|^2} < \infty \tag{1.1}$$

对每个具有紧支撑的 q 都成立。计数函数

$$N(r) = \#\Big\{z\colon w(z) = 0,\ |z| < r,\ \operatorname{Im} z < 0\Big\}$$

Res(q) 中的共振满足关系 $N(r) = \frac{2}{\pi}\ell_q r + o(r)$，当 $r \to \infty$时，其中 ℓ_q 是势 q的本质支集的直径；关于实数轴上算子的情形，参见论文 [6] 和 [17] ，关于半直线上的情形，参见 [10] 。此外，对于每个 $\delta > 0$ ，我们都有渐近关系

$$\#\Big\{z\colon w(z) = 0,\ |z| < r,\ \operatorname{Arg}(z) \notin [-\pi + \delta, -\delta]\Big\} = o(r), \qquad r \to \infty. \tag{1.2}$$

PG 在第 2、3 和 6 节的工作是在圣彼得堡列昂哈德·欧拉国际数学研究所完成的，并得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的支持（协议编号：075–15–2025–343）。YB 在第 4 和 5 节的工作得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的支持，属于协议编号为 075-15-2025-013 的科研项目。YB 和 PG 是 BASIS竞赛的获奖者，并谨向其赞助方和评审团致谢。

换言之，除去一个密度为零的集合外， $\mathcal{H}_q$ 的所有共振都包含在实轴附近任意小的扇形内。另一方面，众所周知，共振不可能过于接近实数轴，参见 [2]中的定理 3 以及 [7]中的第 3 节：总存在形如

$$\{z\colon\ -\log(1+|\operatorname{Re} z|)\leqslant C\operatorname{Im} z\} \tag{1.3}$$

其中不含任何共振。特别地，对每一个 $h>0$，水平带 $\{z\colon\ -h<\operatorname{Im} z<0\}$ 中只有有限多个共振。

另一个值得关注的问题是共振集的刻画问题。上述结果为一个集合成为共振集给出了自然的必要条件。对应于紧支撑势的约斯特函数描述于 [10], [2], ，见定理 2.1（下文 E. Korotyaev），然而文献中并未给出共振集的显式充分条件。每个有界域中的共振都是自由参数，见定理 1.2, 载于 [10]。定理 3 见于 [2] ，它指出，存在一个势，在形如（1.3）的对数带中具有无穷多个共振；命题 7 见于论文 [17] ，M. Zworski 构造了实数轴上的一个光滑势，其在虚轴上具有无穷多个共振。在本文中，我们研究如下问题:

(1.4) 设 Λ 是 $\{z\colon$ 虚部 $z<0\}$ 中的一个点集。是否存在 q，使得 $\Lambda\subset\operatorname{Res}(q)$?

定理1.1。若 Λ 满足经典布拉施克条件 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{|\text{虚部}\lambda|}{1+|\lambda|^2}<\infty$，且对于某个$C>0$，有 $\Lambda\subset\{z\colon\ -$虚部 $z\geq C|$ 实部 $z|\}$，那么存在具有紧支撑的 $q\in L^1(\mathbb{R}_+)$，使得 $\Lambda\subset\operatorname{Res}(q)$。

定理 1.2。假设 Λ 包含于域 $\{z\colon\ -$虚部$z\geq C|z|^\beta\}$ 中，其中某个 $C>0$ 和 $\beta>0$。若 n 的计数函数 Λ 满足关系 $n(r)\lesssim r^\alpha$，其中某个 $\alpha<\beta$，那么存在紧支撑的 $q\in L^1(\mathbb{R}_+)$，使得 $\Lambda\subset\operatorname{Res}(q)$。

在下一个定理中，我们将以下述意义说明前面的定理是尖锐的：定理 1.1 的结论不再适用于将角替换为任何更宽的域；定理 1.2 中计数函数与允许域宽度之间的关系是必不可少的。

定理 1.3。设 τ、ρ: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是两个正的、无界的递增连续函数，使得 $\tau(r)=o(\rho(r))$ 当 $r\to\infty$ 时成立。存在 $\Lambda\subset\{z\colon\ -\operatorname{Im} z\geq\tau(|z|)\}$，满足 $n(r)\leqslant\rho(r)$，且对于任意具有紧支撑的 $q\in L^1(\mathbb{R}_+)$，它都不是 $\operatorname{Res}(q)$ 的子集。

让我们以一些总结性评论结束引言。

- 定理 1.2 可针对域 $\{z\colon\ -\operatorname{Im} z\geq\tau(|z|)\}$ 进行表述，τ 当函数 $\tau(r)\gtrsim\log^5 r$ 满足此条件时。在这种情况下，存在一个无界的 ρ，使得断言$n(t)\leqslant\rho(t)$ 蕴含所需势的存在性 q。
- 定理 1.1 中关于给定集合 Λ 的断言意味着，当 $r\to\infty$ 时， $n(r)=o(r)$，这与 (1.2) 一致；在定理 1.2 中，当 $r\to\infty$ 时，我们也有 $n(r)\lesssim r^\alpha=o(r)$。另一方面，对于 Res(q) 的计数函数，当 $r\to\infty$ 时，我们有 $N(r)=O(r)$；因此，在这两个定理中， $\Lambda\neq$Res(q)，而且更进一步， Λ 仅占 Res(q) 中很小的一部分。

2. 约斯特函数的刻画

紧支撑势对应的薛定谔算子的约斯特函数是指数型整函数。令 $\mathcal{PW}_\sigma$ 为谱包含于 $[-\sigma,\sigma]$ 且满足 $\mathcal{P}_\sigma=e^{iz\sigma}\mathcal{PW}_\sigma$ 的经典 Paley-Wiener空间。我们还固定以下记号

$$\mathbb{C}_+=\{z\colon\operatorname{Im} z>0\},\qquad\overline{\mathbb{C}_+}=\{z\colon\operatorname{Im} z\geqslant 0\},\qquad\mathbb{C}_-=\{z\colon\operatorname{Im} z<0\}.$$

在本节中，我们使用论文中关于约斯特函数的刻画 [10]将问题（1.4）归结为构造相应的整函数。

定理 2.1（E. Korotyaev，定理 1。1, [10]）。设 f 是一个在闭半平面 $\mathbb{C}_+$ 内无零点的整函数，满足

$$z(f(z)-1) \in \mathrm{Const} + \mathcal{P}_\sigma. \tag{2.1}$$

那么， f 是某个具有 $q \in L^1([0,\sigma])$ 的薛定谔算子的约斯特函数。

推论 2.2. 考虑集合 $\Lambda \subset \mathbb{C}_-$。若存在 $r \in \mathcal{P}_\sigma$，使得 $r(0)=0$ 且 $r(\lambda)=\lambda$对所有 $\lambda \in \Lambda$ 均成立，那么，对于某个势 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，有 $\Lambda \subset \mathrm{Res}(q)$，且 $\operatorname{supp} q \subset [0,\sigma]$。

证明。令 f 为由 $z(f-1) = -r$ 定义的整函数。若 $z \neq 0$，则等式 $f(z)=0$ 等价于 $r(z)=z$，因此对每个 $\lambda \in \Lambda$，都有 $f(\lambda)=0$。此外，$r \in \mathcal{P}_\sigma$ 在$\mathbb{C}_+$中有界，因此 f在 $\mathbb{C}_+$ 中只有有限个零点，将它们记为 $z_1, \dots, z_N$。任取 N 个点 $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{C}_-$，并定义多项式

$$P(z) = (z-z_1)\cdot \ldots \cdot (z-z_n), \qquad Q(z) = (z-w_1)\cdot \ldots \cdot (z-w_n).$$

函数 $f_1 = f \cdot \frac{Q}{P}$ 是整函数，在 $\mathbb{C}_+$ 内没有零点，并且满足 $f_1(\lambda) = f(\lambda) = 0$ 对每个$\lambda \in \Lambda$均成立。我们断言， f_1 是对应于某个支撑在 $[0,\sigma]$上的势的约斯特函数。根据定理2.1，只需验证

$$z(f_1 - 1) \in \mathrm{Const} + \mathcal{P}_\sigma. \tag{2.2}$$

P和 Q 都是首一的，且 $\deg P = \deg Q = N$，因此存在 $c \in \mathbb{C}$ 使得

$$\deg(z(Q-P) - cP) < N. \tag{2.3}$$

等式$f_1 = f \cdot \frac{Q}{P} = f + f \cdot \frac{Q-P}{P}$ 推出

$$z(f_1-1) = z(f-1) + f\cdot \frac{z(Q-P)}{P} = z(f-1) + cf + f\cdot \frac{z(Q-P)-cP}{P}. \tag{2.4}$$

Reca我们有 $z(f-1) = -r \in \mathcal{P}_\sigma$。Paley-Wiener 定理给出 $r/z \in \mathcal{P}_\sigma$，因此

$$f = -\frac{r}{z} + 1 \in \mathrm{Const} + \mathcal{P}_\sigma.$$

根据常数 2.3) 的选取， c，我们有

$$\left| \frac{z(Q-P)-cP}{P} \right| = O\left(|z|^{-1}\right), \qquad |z| \to \infty.$$

再次应用 Paley-Wiener 定理可知，等式右端的第三项（2.4）属于 $\mathcal{P}_\sigma$。包含关系（2.2）随之成立，证明完成。□

3. Ideas of the proofs

定理1.1 和1.2探讨问题（1.4）：给定集合 Λ是否包含在某个紧支撑的 q的共振集 $\mathrm{Res}(q)$ 中。根据推论 2.2，要肯定回答后一个问题，只需存在 $r \in \mathcal{P}_\sigma$ 满足 $r(0)=0$ 以及 $r(\lambda)=\lambda$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$成立。等价地，存在 $g \in \mathcal{PW}_\sigma$ 使得

$$g(0)=0, \qquad g(\lambda) = \lambda e^{-i\sigma\lambda}, \qquad \lambda \in \Lambda. \tag{3.1}$$

记 $G(z) = ze^{-i\sigma z}$，并令 H 为整函数，满足 $H(\lambda)=0$ 对每个 $\lambda \in \Lambda$均成立。我们希望通过以下插值公式由g （3.1）构造

$$g(z) = H(z)\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{G(\lambda)}{(z-\lambda)H'(\lambda)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

当 $z=\lambda \in \Lambda$ 后一求和中只有一个非零项给出 $g(\lambda) = G(\lambda)$，正如（3.1）所要求的那样。这种方法的问题在于，对于其他$z \in \mathbb{C}$，级数可能不收敛。为克服这一障碍，我们将 Λ 中彼此接近的元素归为互不相交的集合 $\{\Lambda_n\}_{n\geqslant 1}$，并尝试按照以下求和顺序实现（3.2）中的收敛：

$$g(z) = H(z)\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{G(\lambda)}{(z-\lambda)H'(\lambda)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

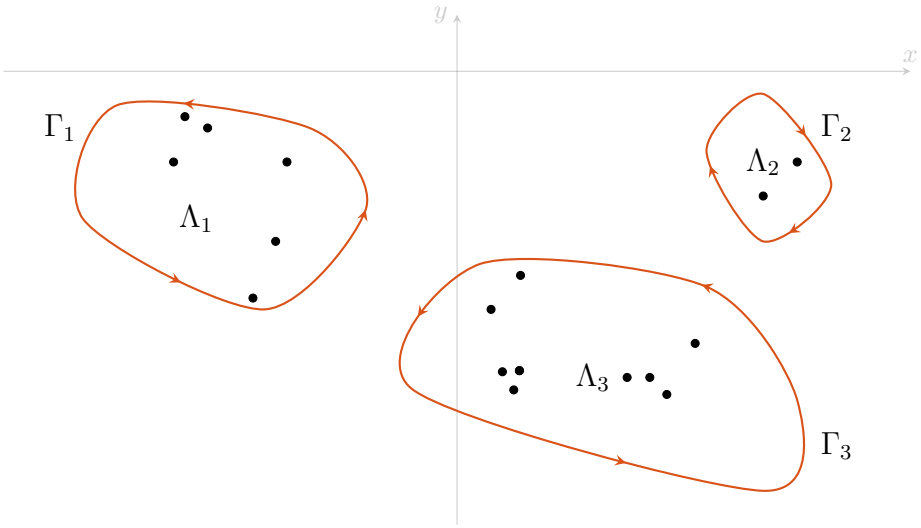

图1. 集合 Λ 被划分成不交并 $\Lambda = \cup_{n\geqslant 1}\Lambda_n$ ，并且围道 Γ_n 围绕这些集合中的每一个画出。

我们围绕每个 Γ_n 画出围道 Λ_n，见图1，并利用留数定理改写（3.3）中的内层求和:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{G(\lambda)}{H'(\lambda)(z-\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} \frac{G(w)\,dw}{H(w)(z-w)}. \tag{3.4}$$

值 $|G(w)| = |w|\exp(-\sigma|\operatorname{Im} w|)$ 在 $w\in\mathbb{C}_-$ 时很小，因此对 $|H(w)|$从下方的适当估计（例如 $|H(w)| \gtrsim e^{-(\sigma-\varepsilon)|\operatorname{Im} w|}$）足以得到（3.3）中级数的收敛。

4. 角内的点。定理1.1的证明

回顾集合 $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ 在半平面中满足布拉施克条件，并且存在$C > 0$ 使得 $\Lambda \subset K_C$，其中

$$K_C = \{z : -\operatorname{Im} z \geq C|\operatorname{Re} z|\}$$

是下半平面 $\mathbb{C}_-$中的角。固定任意 $\sigma > 0$ 并记 $\gamma = \sigma/3$。存在$H\in\mathcal{PW}_\gamma$ 使得 $H(0) \neq 0$ 且 $H(\lambda_n) = 0$ 对每个 $n\geqslant 0$ 成立，参见 [8] 中的定理 2.1.5。不失一般性，我们还可以假设$\big|[-\gamma,-\gamma+\varepsilon]\cap \operatorname{supp}\hat{}\, H\big| > 0$对所有 $\varepsilon > 0$成立。Hayman定理，参见 [12],中的第15讲，指出

$$\log|H(z)| = -\gamma|\operatorname{Im} z| + o(|z|), \qquad |z|\to\infty, \tag{4.1}$$

在 $\mathbb{C}_-$ 的处处成立，但有限视角的圆盘并集除外。换言之，存在一个圆族

$$B_n = \{z\colon |z-z_n|\leqslant r_n\}, \qquad n\geqslant 1,$$

使得 $\sum_{n\geqslant 1} r_j/|z_j| < \infty$ 且（4.1）在域 $\mathcal{U} = \mathbb{C}_- \setminus \cup_{n\geqslant 1} B_n$ 中成立。特别地，对于某些 $A > C$，我们有

$$\{z\colon -\operatorname{Im} z = A|\operatorname{Re} z|\}\subset\mathcal{U}.$$

令 $K_A = \{\, z\colon \ -\operatorname{Im} z \geq A|\operatorname{Re} z|\}$ 为相应的角。关系式（4.1）意味着不等式 y

$$\log|H(z)| \geqslant -2\gamma|\operatorname{Im} z| \tag{4.2}$$

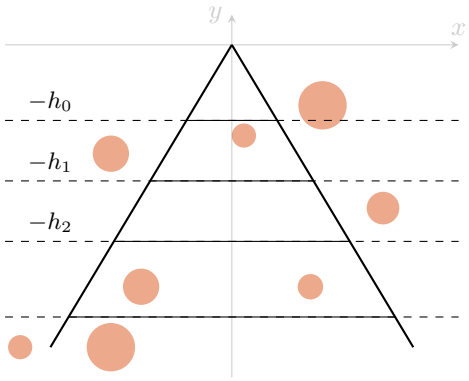

图2. 角的边界K_A 和线段 $K_A \cap \{\operatorname{Im} z = -h_n\}$不与圆（红色绘出）相交，其中（4.1）可能不成立。

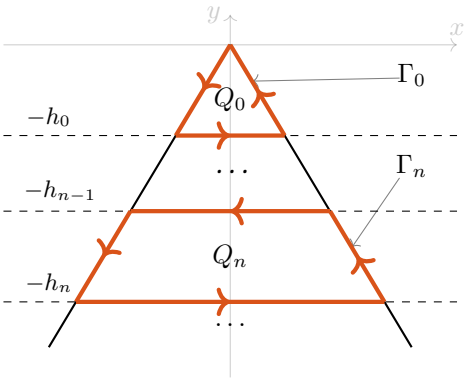

图3. 围道 Γ_n 对每个 $n \geqslant 0$ 都包围多边形 Q_n。

当 $z \in \mathcal{U} \cap K_A$ 且 $|\operatorname{Im} z|$ 足够大时（比如 $\operatorname{Im} z < -h < 0$）。此外，存在一个无界序列 $h \leqslant h_0 < h_1 < h_2 < \dots$，使得这些线段

$$K_A \cup \{z\colon \operatorname{Im} z = -h_k\}, \qquad k \geqslant 0,$$

包含于 $\mathcal{U}$中，见图 2。我们还可以假设 $h_k + 2 \leqslant h_{k+1} \leqslant 2h_k$ 对所有$k \geqslant 0$都成立。考虑三角形 $Q_0 = K_A \cap \{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant -h\}$，四边形

$$Q_n = K_A \cup \{z\colon -h_n \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant -h_{n-1}\}, \qquad n \geqslant 1,$$

并令 Γ_n 为围绕 Q_n 的围道，对每个 $n \geqslant 0$，见图 3。

令 Λ_n 为 Q_n 内 H 的零点集合。注意到 $\Lambda \subset K_C \subset K_A = \cup_{n\geqslant 0} Q_n$，因此 $\Lambda \subset \cup_{n\geqslant 0}\Lambda_n$。对于每个 $n \geqslant 0$，考虑有限和

$$F_n(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{G(\lambda)}{H'(\lambda)(z-\lambda)}.$$

当 $z \notin Q_n$ 后者改写为，回顾（3.4），其形式为

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} \frac{G(w)\,dw}{H(w)(z-w)}. \tag{4.3}$$

根据构造，不等式（4.2）在 Γ_n 上对 $n \geqslant 1$ 成立，因此

$$|H(w)|^{-1} \leqslant \exp(2\gamma|\operatorname{Im} w|), \qquad \frac{|G(w)|}{|H(w)|} \leqslant |w|\exp((-\sigma+2\gamma)|\operatorname{Im} w|), \qquad w \in \Gamma_n.$$

对于每个 $w \in \Gamma_n$，我们有 $h_n \leqslant |\operatorname{Im} w|$ 且 $|w| \approx |\operatorname{Im} w| \leqslant h_{n+1} \approx h_n$。这与断言$-\sigma + 2\gamma < 0$ 共同推出

$$\frac{|G(w)|}{|H(w)|} \lesssim h_n \exp((-\sigma+2\gamma)h_n), \qquad w \in \Gamma_n.$$

我们还知道 $\operatorname{len}\Gamma_n \lesssim h_n$ 因此（4.3）给出

$$|F_n(z)| \lesssim \frac{h_n^2 \exp(-(\sigma+2\gamma)h_n)}{\operatorname{dist}(z,\Gamma_n)}, \qquad z \notin Q_n.$$

由此可知，级数

$$g_{even}(z) = \sum_{n\geqslant 1} H(z)F_{2n}(z) = \sum_{n\geq 1}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2n}} \frac{H(z)G(\lambda)}{(z-\lambda)H'(\lambda)}$$

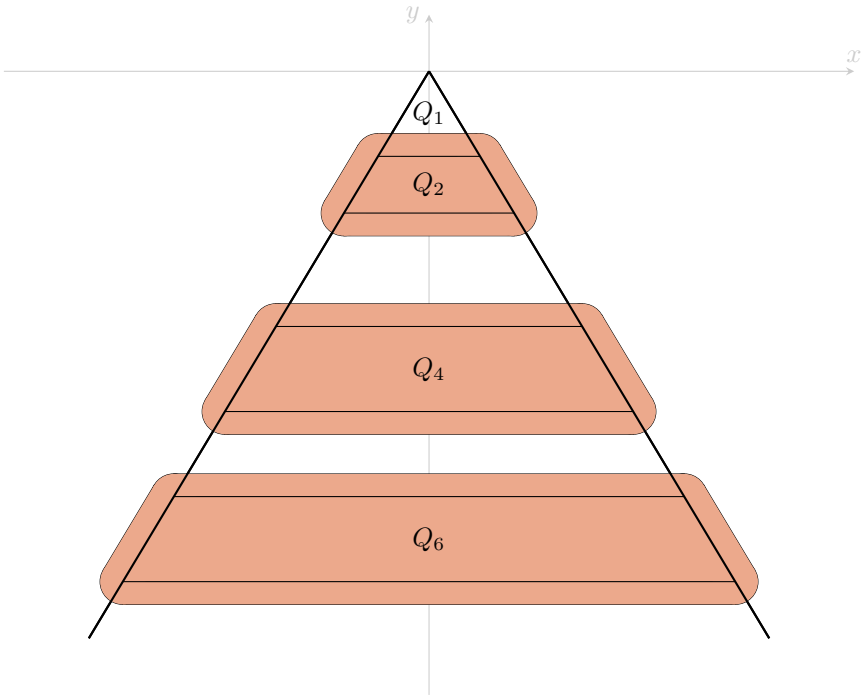

图4. 集合 U_{even} 是互不相交的 Q_{2n} 邻域的并，这是由断言 $h_n + 2 \leqslant h_{n+1}$ 得出的。

对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均收敛，并定义了一个满足以下条件的整函数

$$|g_{even}(z)| \lesssim |H(z)|, \qquad z \notin U_{even} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{z\colon \operatorname{dist}(z, Q_{2n}) \leqslant 1\}.$$

结构 U_{even}，见图 4，最大模原理和 Paley-Wiener 定理给出 $g_{even} \in \mathcal{PW}_{2\gamma}$。类似地，我们推得 $HF_0 \in \mathcal{PW}_\gamma$ 和

$$g_{odd}(z) = \sum_{n\geqslant 1} H(z)F_{2n-1}(z) = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\in\Lambda_{2n-1}} \frac{H(z)G(\lambda)}{(z-\lambda)H'(\lambda)} \in \mathcal{PW}_{2\gamma}.$$

现在，函数 $g = g_0 + g_{even} + g_{odd}$ 几乎满足（3.1）中的所有断言：我们有$g \in \mathcal{PW}_{2\gamma} \subset \mathcal{PW}_\sigma$ 和 $g(\lambda) = G(\lambda)$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$；然而，$g(0) = 0$ 可能不成立。为了解决这个问题，我们针对集合构造函数 $\tilde{g} \in \mathcal{PW}_\sigma$

$$\widetilde{\Lambda} = \{-i\} \cup \{\lambda - i : \lambda \in \Lambda\}$$

如上所述，并令 $g = \tilde{g}(\cdot + i)$。定理 1.1 的证明完成。

5. 较宽域中的点。定理 1.2 的证明

定理的证明1.1 很大程度上依赖于 Hayman定理给出的关系式（4.1）。若没有断言 $|\operatorname{Im} \lambda| \asymp |\lambda|$（该断言由包含关系 $\Lambda \subset K_C$ 给出），就无法像（4.2）中那样，对 H 得出任何明确估计。因此，在定理 1.2 的情形下，需要采用不同的构造。

5.1. Luxemburg-Korevaar构造。 令 $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ 为复平面上计数函数为 n 且满足该断言的点集

$$\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^2}\, dt = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{|\lambda_n|} < \infty. \tag{5.1}$$

特别地，当 $t \to \infty$ 时，我们有 $n(t) = o(t)$。定义函数

$$\theta(t) = \int_0^\infty \frac{n(u)}{u} \frac{t^2}{t^2+u^2}\, du, \qquad t \geqslant 0, \tag{5.2}$$

并令 $w(t) \geqslant \theta(t) + 2\log t$ 是实数轴上的任意连续递增函数。固定 $a > 0$，并对每个 $k \geqslant 1$，定义 ε_k 为方程 $\psi(1/\varepsilon_k) = k$ 的解，其中

$$\psi(t) = C \int_a^t \frac{w(u)}{u} du, \qquad t \geqslant a. \tag{5.3}$$

这里 $C > 0$ 是一个常数，选取它使得 $\cos(e^{-C}) = 1/e$。

定理5.1 (Luxemburg, Korevaar, 定理5.2 [13])。 固定 $\sigma > 0$。若参数 a 足够大，则乘积

$$H(z) = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \prod_{k\geq 1} \cos\left(\varepsilon_k z\right)$$

对每个 $z \in \mathbb{C}$ 都收敛，并定义一个整函数 $H \in \mathcal{PW}_\sigma$。

构造具有给定小量（甚至双边估计）的实数轴上函数的方法有多种，参见例如书籍 [9] 中的第十章和第十一章以及论文[3, 16]。

以下结果表明，当 z 与H的零点相距较远时， $H(z)$不可能非常小。我们将在下一节证明这一点。

定理5.2. 如果存在某个 $0 < \alpha < 1$，使得 $n(t) \lesssim t^\alpha$，且 $a > 0$ 足够大，那么估计式

$$\log|H(z)| \gtrsim -|z|^\alpha \log|z|$$

对所有满足以下条件的 $z \in \mathbb{C}$ 均成立：

$$\operatorname{dist}(z, \Lambda) \geq 1, \qquad \operatorname{dist}(-z, \Lambda) \geq 1, \qquad |\operatorname{Im} z| \geqslant 1.$$

5.2. **定理5.2的证明**。 回顾一下， n 是 Λ的计数函数， ψ 由（5.3）给出，并且每个 ε_k 都是 $\psi(1/\varepsilon_k)$ 的解。函数 θ 定义于（5.2），且 w 满足$w \geqslant \theta + 2$对数 t。我们再引入两个函数

$$\xi(t) = \int_t^\infty \frac{n(u)}{u^2}\, du = \sum_{|\lambda_k|\geqslant t} \frac{1}{|\lambda_k|} + \frac{n(t)}{t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{5.4}$$

$$\gamma(t) = \int_t^\infty \frac{w(u)}{u^2} du, \qquad t \geqslant 0.$$

引理5.3. 对于每个非零的 $z \in \mathbb{C}$，都有

$$|\cos(z)| \geq \frac{|\operatorname{Im} z|}{2|z|}.$$

证明。 令 $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$。所需的不等式等价于 $|\cos(z)| \geqslant |\sin\theta|/2$。我们有 $iz = r(-\sin\theta + i\cos\theta)$，并且

$$e^{iz} = e^{r(-\sin\theta + i\cos\theta)} = e^{-r\sin\theta}\left(\cos(r(\cos\theta)) + i\sin(r(\cos\theta))\right),$$

$$e^{-iz} = e^{r(\sin\theta - i\cos\theta)} = e^{r\sin\theta}\left(\cos(r(\cos\theta)) - i\sin(r(\cos\theta))\right),$$

$$2\cos z = \cos(r\cos\theta)\left(e^{-r\sin\theta} + e^{r\sin\theta}\right) + i\sin(r\cos\theta)\left(e^{-r\sin\theta} - e^{r\sin\theta}\right).$$

如果 $|\cos(r\cos\theta)| \geqslant \sqrt{2}/2$，那么我们记作

$$|\cos z| \geqslant |\operatorname{Re}\cos z| = \left|\frac{\cos(r\cos\theta)\left(e^{-r\sin\theta} + e^{r\sin\theta}\right)}{2}\right| \geqslant |\cos(r\cos\theta)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant \frac{|\sin\theta|}{2}.$$

O否则不等式 $|\sin(r\cos\theta)| \geqslant \sqrt{2}/2$ 成立。这意味着 $r \geqslant r|\cos\theta| \geqslant \pi/4$ an d

$$|\cos z| \geqslant |\operatorname{Im}\cos z| = \left|\frac{\sin(r\cos\theta)\left(e^{-r\sin\theta} - e^{r\sin\theta}\right)}{2}\right|$$
$$\geqslant |\sin(r\cos\theta)| \cdot |r\sin\theta| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi|\sin\theta|}{4} \geqslant \frac{|\sin\theta|}{2}.$$

证明得证。 □

引理 5.4. 对于每个 $z \in \mathbb{C}$ 且满足 $|$虚部 $z| \geqslant 1$的情形，我们有

$$\log\left|\prod_{k\geq 1}\cos(\varepsilon_k z)\right| \gtrsim -|z|\cdot\gamma(2|z|) - \psi(2|z|)\cdot\log|z|.$$

证明. 考虑以下互不相交的集合

$$\mathcal{A} = \left\{k\colon \varepsilon_k \leq \frac{1}{2|z|}\right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{k\colon \frac{1}{2|z|} < \varepsilon_k\right\}.$$

集合 $\mathcal{B}$ 是有限的，因此我们有 $\#\mathcal{B} = \psi(2|z|)$。由前一个引理可得

$$\log\left|\prod_{k\in\mathcal{B}}\cos(\varepsilon_k z)\right| \geq \#\mathcal{B}\cdot\log\left(\frac{\operatorname{Im} z}{2|z|}\right) = -\log\frac{2|z|}{\operatorname{Im} z}\cdot\psi(2|z|) \gtrsim -\log|z|\cdot\psi(2|z|).$$

对于每个 $k \in \mathcal{A}$，我们有 $|\varepsilon_k z| < 1/2$，因此 $\log|\cos(\varepsilon_k z)| \gtrsim -|\varepsilon_k z|$。这意味着

$$\log\left|\prod_{k\in\mathcal{A}}\cos(\varepsilon_k z)\right| \gtrsim -|z|\sum_{k\in\mathcal{A}}\varepsilon_k.$$

为了完成该引理的证明，我们注意到

$$\sum_{k\in\mathcal{A}}\varepsilon_k = \sum_{k\geqslant\psi(2|z|)}\frac{1}{\psi^{-1}(k)} < \int_{\psi(2|z|)}^{\infty}\frac{dx}{\psi^{-1}(x)} = \int_{2|z|}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{x} \asymp \int_{2|z|}^{\infty}\frac{w(u)}{u^2}du \lesssim \gamma(2|z|).$$

□

引理 5.5. 若 z 满足 $\operatorname{dist}(z,\Lambda) \geq 1$ 且 $\operatorname{dist}(-z,\Lambda) \geq 1$，则

$$\log\left|\prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)\right| \gtrsim -|z|\cdot\xi(2|z|) - \log|z|\cdot n(2|z|).$$

Proof. 与前一个引理中一样，我们将正整数划分为以下两个集合：

$$\mathcal{C} = \{k\colon |\lambda_k| \leq 2|z|\}, \qquad \mathcal{D} = \{k\colon 2|z| < |\lambda_k|\}.$$

一致估计 $\log|1-w| \gtrsim -|w|$ 对于满足 $|w| < 1/2$ 的 w 给出

$$\log|1 - z^2/\lambda_k^2| \gtrsim -|z/\lambda_k|^2 \geqslant -|z/\lambda_k|, \qquad k \in \mathcal{D}.$$

后者意味着

$$\log\left|\prod_{k\in\mathcal{D}}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)\right| \gtrsim -\sum_{k\in\mathcal{D}}\frac{|z|}{|\lambda_k|} \geqslant -|z|\xi(2|\lambda|).$$

另一方面，对于每个 $k \in \mathcal{C}$，我们都可以使用估计

$$\left|1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right| = \frac{|(z-\lambda_k)(z+\lambda_k)|}{|\lambda_k|^2} \geqslant \frac{1}{|\lambda_k|^2} \geqslant \frac{1}{4|z|^2}.$$

集合 $\mathcal{C}$ 是有限的，因此我们有$\#\mathcal{C} \leqslant n(2|z|)$

$$\log\left|\prod_{k\in\mathcal{C}}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)\right| \gtrsim -\log(4|z|^2)\cdot\#\mathcal{C} \gtrsim -\log|z|\cdot n(2|z|).$$

为完成证明，我们结合了关于 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的乘积所得到的估计。 □

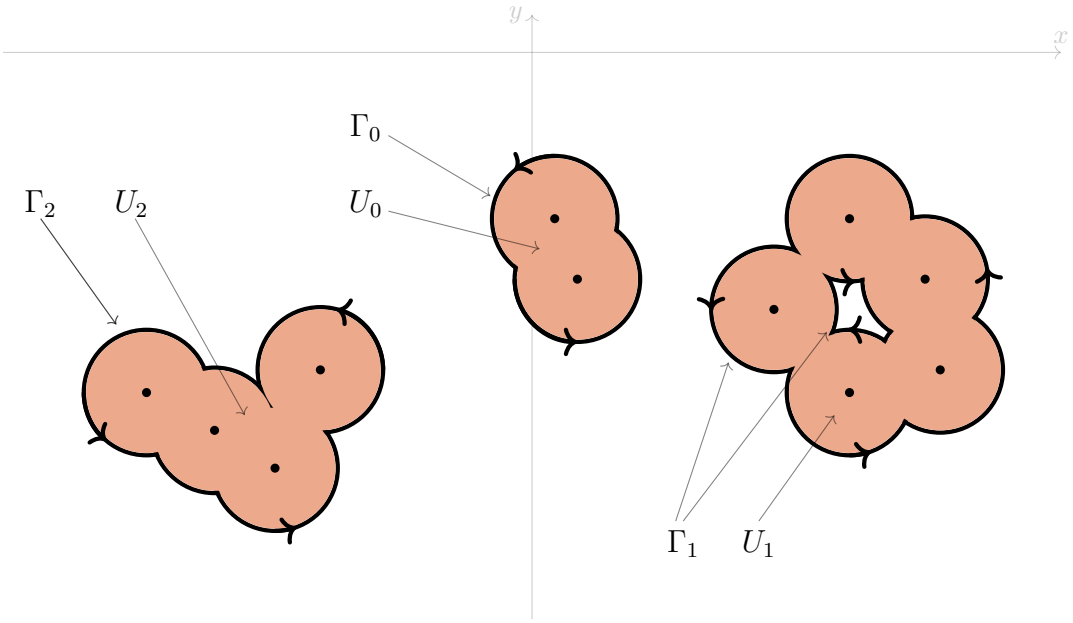

图 5. 聚类可视化

定理的证明 5.2。 根据 θ 和 ψ 的定义，我们知道

$$\theta(t)=\int_0^\infty \frac{n(u)}{u}\frac{t^2}{t^2+u^2}\,du \lesssim \int_0^\infty u^{\alpha-1}\frac{t^2}{t^2+u^2}\,du = t^\alpha\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2}\,dx \lesssim t^\alpha,$$
$$\xi(t)=\int_t^\infty \frac{n(u)}{u^2}\,du \lesssim \int_t^\infty u^{\alpha-2}\,du \lesssim t^{\alpha-1}.$$

我们也可以选择 $w(t)\lesssim t^\alpha$，使得 ψ 和 γ 满足

$$\psi(t)\lesssim\int_1^t\frac{w(u)}{u}dt\lesssim\int_1^t u^{\alpha-1}dt\lesssim t^\alpha,$$
$$\gamma(t)=\int_t^\infty\frac{w(u)}{u^2}du\lesssim\int_t^\infty u^{\alpha-2}\,du\lesssim t^{\alpha-1}.$$

所需的不等式 H 现在可由引理 5.4 和 5.5推出：

$$\log|H(z)|=\log\left|\prod_{k\geq1}\cos(\varepsilon_k z)\right|+\log\left|\prod_{n\geq1}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)\right|$$
$$\gtrsim -|z|\cdot\gamma(2|z|)-\psi(2|z|)\cdot\log|z|-|z|\cdot\xi(2|z|)-\log|z|\cdot n(2|z|)\gtrsim -|z|^\alpha\log|z|.$$

□

5.3. **点聚类**。 本节描述围道的构造，这些围道将在定理 1.2的证明中使用，参见图 1。固定一个数 $r>0$ 并令

$$V_r=\{z\colon\ \mathrm{dist}(z,\Lambda)\leqslant r\}=\bigcup_{n\geq1}\{z:|\lambda_n-z|\leqslant r\} \tag{5.5}$$

为 Λ 半径为 r的邻域。将 V_r的连通分支记为$U_{r,1},U_{r,2},\ldots$并令 $\Gamma_{r,n}$ 为沿着 $U_{r,n}$边界延伸的围道，见图 5。注意到$\Gamma_{r,n}$ 可能是不连通的。下面证明每个 $U_{r,n}$ 都是有界的，且 Γ_n 的长度不会太大，前提是集合 Λ 满足断言（5.1）。

根据构造，我们有 $\Lambda\subset V_r=\cup_{n\geqslant1}U_{r,n}$。对于每个 $n\geqslant1$，记 $\Lambda_{r,n}=\Lambda\cap U_{r,n}$，并令 $\{\lambda_{r,n,0},\lambda_{r,n,1},\ldots\}$为 $\Lambda_{r,n}$ 中的元素，按如下方式枚举：$|\lambda_{r,n,0}|\leqslant|\lambda_{r,n,1}|\leqslant\ldots$成立。

假设 $\Lambda_{r,n}$ 的大小至少为 N。那么对于每个 $k<N$，我们有

$$|\lambda_{r,n,k}| \le |\lambda_{r,n,0}| + 2rk.$$

回顾函数的定义（5.4）： ξ。由前面的不等式可得

$$\xi(|\lambda_{n_0}|) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{|\lambda_{n_k}|} \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{|\lambda_{n_1}| + 2rk} \geqslant \frac{1}{2r} \log\left(1 + \frac{2rN}{|\lambda_{n_0}|}\right).$$

关于 n 一致的估计 $\#\Lambda_{r,\,n} \lesssim \xi(|\lambda_{r,\,n,\,0}|)|\lambda_{r,\,n,\,0}|$ 成立。由此还可得

$$|w| \lesssim |\lambda_{r,n,0}| + 1, \qquad w \in U_{r,n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{5.6}$$

集合 $U_{r,\,n}$ 是有限个圆的并，因此其边界 $\Gamma_{r,\,n}$ 是有限个圆的子集，其数量不超过 $\#\Lambda_{r,\,n}$。由此可知

$$\operatorname{len}(\Gamma_{r,n}) \leqslant 2\pi r \cdot \#\Lambda_{r,n} \lesssim \xi(|\lambda_{r,n,0}|)|\lambda_{r,n,0}| \lesssim |\lambda_{r,n,0}|, \qquad n \geqslant 1. \tag{5.7}$$

5.4. **定理 1.2 的证明。** 我们先在附加假设下证明该定理

$$\operatorname{Im} \lambda_n \leqslant -2, \qquad n \geqslant 1. \tag{5.8}$$

We p按照第 3 节所述的方法进行。我们需要解决插值问题（3.1 ），

$$g \in \mathcal{PW}_\sigma, \qquad g(\lambda) = G(\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda \cup \{0\},$$

其中 $G(z) = ze^{-i\sigma z}$。设 $U_n = U_{1,\,n}$， $\Lambda_n = \Lambda_{n,\,1} = \{\lambda_{n,0}, \lambda_{n,1}, \ldots\}$ 和 $\Gamma_n = \Gamma_{n,\,1}$ 如上一节所述。对于每个 $n \geqslant 0$，我们定义亚纯函数

$$F_n(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \frac{G(\lambda)}{H'(\lambda)(z-\lambda)}$$

在 Λ_n 处有简单极点，并利用关系式（3.4）将其改写为：

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{G(w)\,dw}{H(w)(z-w)}, \qquad z \notin U_n. \tag{5.9}$$

根据构造，我们有 $\operatorname{dist}(w,\ \Lambda) = \operatorname{dist}(w,\ \Lambda_n) = 1$ 对每个 $w \in \Gamma_n$ 均成立。于是，假设（5.8）蕴含

$$\operatorname{dist}(w, -\Lambda) \geqslant 1, \qquad |\operatorname{Im} w| \geqslant 1, \qquad w \in \Gamma_n.$$

定理5.2 适用。由此可得

$$\log|H(w)| \gtrsim -|w|^\alpha \log|w|, \qquad w \in \Gamma_n, \qquad n \geqslant 0.$$

由于假设 $\Lambda \subset \{z:\ -\operatorname{Im} z \geq C|z|^\beta\}$，我们还知道

$$|G(w)| \lesssim |w| \exp(-C_1|w|^\beta)$$

对所有 $C_1 > 0$，均以另一个常数 $w \in \Gamma_n$ 成立。将后两个不等式代入（5.9），得到

$$|F_n(z)| \lesssim \frac{\operatorname{len}(\Gamma_n)}{\operatorname{dist}(z, \Gamma_n)} \sup_{w \in \Gamma_n} e^{-C_2|w|^\beta}.$$

由估计式（5.6）和（5.7）可知，对于所有$w \in \Gamma_n$，关系 $\operatorname{len}(\Gamma_n) \lesssim |\lambda_{n,0}|$ 以及 $|w| \asymp |\lambda_{n,0}|$ 均成立。因此，级数

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 1} H(z) F_n(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均收敛，并定义了一个整函数 g，它满足 $|g(z)| \lesssim |H(z)|$，当 $\operatorname{dist}(z, \Gamma_n) > 1$ 对所有 $n \geqslant 0$成立时。注意，

$$\bigcup_{n \geqslant 0} \{z:\ \operatorname{dist}(z, \Gamma_n) \leqslant 1\} = \{z:\ \operatorname{dist}(z, \Lambda) \leqslant 2\} = V_2,$$

其中 V_2 定义于式（5.5）中。在上一节中，我们已经证明 V_2 具有稀疏结构，参见图 5。最大模原理和 Paley-Wiener 定理给出 $g \in \mathcal{PW}_\sigma$。为了

完成定理的证明，我们需要满足断言 $g(0) = 0$ 并去掉（5.8）。此时，我们按照定理1.1的证明进行：为集合 $\tilde{g}$ 构造

$$\tilde{\Lambda} = \{-2i\} \cup \{\lambda_n - 2i,\, n \geqslant 1\}.$$

如上所述，并取 $g = \tilde{g}(\cdot + 2i)$。

6. 结果的最优性。定理 1.3 的证明

薛定谔算子的共振可定义为相应德布朗日函数的零点 $E = A + iB$，参见 [2]。以下引理见预印本中的引理 3[1]。为方便读者，我们在此重述其证明。

引理 6.1。对于每个紧支撑势 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{s\in \mathrm{Res}(q)} \frac{|\operatorname{Im} s|}{|t-s|^2} < \infty.$$

证明。薛定谔算子的相位函数由关系式 $E/\overline{E} = e^{-2i\varphi}$ 定义，参见 [2], , 它满足

$$\varphi'(t) = \sum_{s\in \mathrm{Res}(q)} \frac{|\operatorname{Im} s|}{|t-s|^2} + a,$$

其中 a 是一个实值常数。计算表明

$$\begin{aligned} -2i\varphi' &= \frac{E'}{E} + \frac{\overline{E'}}{\overline{E}} = \frac{E'\overline{E} - E\overline{E}'}{|E|^2} \\ &= \frac{AB' - A'B}{A^2+B^2} = \frac{AB'-A'B}{B^2}\cdot\frac{1}{(A/B)^2+1} = \left(\frac{A}{B}\right)'\frac{1}{(A/B)^2+1}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

设 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 分别是 A 和 B 的零点。[2]中的引理 1 指出，对于$q \in L^2(\mathbb{R}_+)$，函数 A 和 B 满足

$$\left|\frac{A(z)}{\sin z}\right| \asymp \frac{\operatorname{dist}(z,\{\lambda_n\})}{\operatorname{dist}(z,\pi\mathbb{Z})}, \qquad \left|\frac{B(z)}{\cos z}\right| \asymp \frac{\operatorname{dist}(z,\{\mu_n\})}{\operatorname{dist}(z,\pi\mathbb{Z}+\pi/2)}. \tag{6.2}$$

我们断言这些关系对所有 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$都成立。在 [2] 中，L^2 的断言用于 λ_n 和 μ_n的渐近公式 (3.3),

$$\lambda_n = \pi n + \frac{C}{n} + \frac{a_n}{n}, \qquad \mu_n = \pi_n - \frac{\pi}{2} + \frac{C}{n} + \frac{b_n}{n}, \qquad \{a_n\},\{b_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) \qquad n \geqslant 1.$$

对于 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，后者在 $\{a_n\},\{b_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ 时成立，参见例如 [4], , 这足以完成证明的其余部分。

代入 $z = \mu_k$ 到 (6.2) 中。我们得到

$$|A(\mu_k)| \asymp |\sin(\mu_k)| \frac{\operatorname{dist}(\mu_k,\{\lambda_n\})}{\operatorname{dist}(\mu_k,\pi\mathbb{Z})} \asymp 1, \qquad |B'(\mu_k)| \asymp 1.$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}$ 令 $v_n = A(\mu_n)/B'(\mu_n)$。该序列有界，因此我们可以写成

$$\frac{A}{B} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{A(\mu_n)}{B'(\mu_n)}\left(\frac{1}{z-\mu_n} + \frac{1}{\mu_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n \left(\frac{1}{z-\mu_n} + \frac{1}{\mu_n}\right),$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n \frac{1}{(z-\mu_n)^2}.$$

不等式（6.1）意味着

$$|\varphi'(x)| \lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-\mu_n)^2} \cdot \left|1 + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n \left(\frac{1}{z-\mu_n} + \frac{1}{\mu_n}\right)\right)^2\right|^{-1}.$$

第二个乘数始终小于或等于 1，因此我们得到

$$|\varphi'(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-\mu_n)^2} \lesssim 1.$$

取足够小的 $\varepsilon > 0$。若 $\operatorname{dist}(x,\{\mu_n\}) \geqslant \varepsilon$，则得到 $|\varphi'(x)| \lesssim 1$。否则，存在 μ_k 使得$|x-\mu_k| = \operatorname{dist}(x,\{\mu_n\}) \leqslant \varepsilon$。在这种情况下，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-\mu_n)^2} \asymp \frac{1}{(x-\mu_k)^2}, \qquad \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\left(\frac{1}{z-\mu_n}+\frac{1}{\mu_n}\right)\right| \asymp \frac{1}{|z-\mu_k|},$$

这再次推出 $|\varphi'(x)| \lesssim 1$。证明至此完成。 □

定理 1.3 的证明。首先，我们注意到，只需证明定理在 ρ 满足 $\rho(r) = o(r)$ as $r\to\infty$ 时成立。事实上，对于每个紧支撑的 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，$\operatorname{Res}(q)$ 的计数函数 N 满足 $N(r) = O(r)$ as $r\to\infty$，因此我们可以假设 $\rho(r) = O(r)$ 和$\tau(r) = o(\rho(r)) = o(r)$ as $r\to\infty$。接下来，如果 $\rho(r) = o(r)$ 不成立，我们可以用 $\widetilde{\rho}(r) = \sqrt{\rho(r)\tau(r)}$ 代替 ρ 来证明该定理。

考虑另一个函数 $\kappa(r) = \frac{1}{2}(\rho(r)+\tau(r))$，并将 r_n 定义为满足对所有 $n \geqslant \kappa(0)$，都有 $\kappa(r_n) = n$ 的解。断言 $\kappa(r) = o(r)$，当 $r\to\infty$ 时，意味着

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa(r_n)}{r_n} = 0. \tag{6.3}$$

我们还有 $\tau(r) = o(r)$，因此对于所有充分大的 n，都存在唯一的 $z_n \in \mathbb{C}$ 满足

$$|z_n| = r_n, \qquad \operatorname{Im} z_n = -\tau(r_n), \qquad \operatorname{Re} z_n > 0.$$

我们归纳地构造一个递增序列 $\{n_0, n_1, \dots\}$。选择使 z_{n_0} 定义良好的 n_0。接下来，对每个 $k \geq 1$，选取满足 $2^k n_k \leq r_{n_k}$ 且满足下式的 $n_k > n_{k-1}$

$$n_0 + \dots + n_{k-1} \leqslant \rho(r_{n_k}) - \kappa(r_{n_k}).$$

这样的 n_k 对每个 $k \geqslant 1$ 都存在，这是因为（6.3）以及

$$\lim_{n\to\infty} (\rho(r_n) - \kappa(r_n)) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} (\rho(r_n) - \tau(r_n)) = +\infty.$$

我们构造多重集 $\Lambda = \{z_{n_k}\colon\ k \geq 0\}$，其中 z_{n_k} 的重数为 n_k。等价地，我们可以将 z_{n_k} 的每个实例替换为任意选取的、彼此不同且任意接近 z_{n_k}的 n_k 个点。我们有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{|\lambda|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{|z_{n_k}|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{r_{n_k}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

此外，我们可以如下估计计数函数：

$$n(r_{n_k}) = n_0 + \dots + n_k \leqslant \rho(r_{n_k}) - \kappa(r_{n_k}) + n_k = \rho(r_{n_k}).$$

对所有 $r \geq 0$，不等式 $n(r) \leq \rho(r)$ 均成立。

假设 $\Lambda \subset \operatorname{Res}(q)$ 对于某个紧支撑的 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$。根据引理6.1 函数

$$p(t) = \sum_{s\in\Lambda} \frac{|\operatorname{Im} s|}{|t-s|^2}$$

对于 $t \in \mathbb{R}$，它是一致有界的。另一方面，我们有

$$p(\operatorname{Re} z_{n_k}) = \sum_{s\in\Lambda} \frac{|\operatorname{Im} s|}{|\operatorname{Re} z_{n_k} - s|^2} \geq \frac{n_k |\operatorname{Im} z_{n_k}|}{|\operatorname{Re} z_{n_k} - z_{n_k}|^2} = \frac{n_k}{|\operatorname{Im} z_{n_k}|} = \frac{\kappa(r_{n_k})}{\tau(r_{n_k})} \to \infty, \qquad n\to\infty.$$

这一矛盾表明，Λ 不是 $\operatorname{Res}(q)$ 的子集。 □

参考文献

[1] A. Baranov、Y. Belov 和 A. Poltoratski。薛定谔方程的德布朗日函数。*arXiv* 预印本 *arXiv:1510.07792*，2015 年。[2] A. Baranov、Y. Belov 和 A. Poltoratski。薛定谔方程的德布朗日函数。数学汇刊，68(2):251–263，2017 年。[3] Y. Belov。模数几乎预先给定的模型函数。圣彼得堡数学杂志，20(2):163–174，2009 年。[4] D. Chelkak。将不动点定理应用于反斯图姆-刘维尔问题。*J. Math. Sci.*，纽约，166(1):118–126，2010 年。[5] S. Dyatlov 和 M. Zworski。散射共振的数学理论，第 200 卷，研究生数学丛书。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会（AMS），2019 年。[6] R. Froese。一维共振的渐近分布。微分方程杂志，137(2):251–272，1997 年。[7] M. Hitrik。一维散射极点的界。数学物理通讯，208(2):381–411，1999 年。[8] B. Khabibullin。指数系统的完备性与唯一性集，2006 年。[9] P. Koosis。对数积分 *II*，第 21 卷，剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，1992 年。[10] E. Korotyaev。半直线上的反共振散射。渐近分析，37(3-4):215–226，2004 年。[11] E. Korotyaev。反共振问题的稳定性。国际数学研究通知，2004(73):3927–3936，2004 年。[12] B. Levin。整函数讲义。美国数学会，1996 年。[13] W. A. J. Luxemburg 和 J. Korevaar。整函数与闵茨-萨斯型逼近。美国数学会会刊，157:23–37，1971 年。[14] M. Marletta、S. Naboko、R. Shterenberg 和 R. Weikard。雅可比算子反共振问题：唯一性与稳定性。分析数学杂志，117:221–247，2012 年。[15] M. Marlettta、R. Shterenberg 和 R. Weikard。薛定谔算子的反共振问题。数学物理通讯，295(2):465–484，2010 年。[16] Havin V. P. Mashreghi J.、Nazarov F. L. 贝尔林–马利亚万乘子定理：第七个证明。圣彼得堡数学杂志，17(5):3–68，2006 年。[17] M. Zworski。实线上散射的极点分布。泛函分析杂志，73 296，1987 2 277( ): –。

Yurii Belov：j b juri belov@mail.ru_ _ _数学与计算机科学系，圣彼得堡国立大学，瓦西里耶夫斯基岛第14线29b号，俄罗斯圣彼得堡，199178，

Pavel Gubkin：gubkinpavel@pdmi.ras.ru，gubkin.pv@yandex.ru 数学与计算机科学系，圣彼得堡国立大学，瓦西里耶夫斯基岛第14线29b号，俄罗斯圣彼得堡，199178 斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部，俄罗斯科学院，丰坦卡街27号，191023，俄罗斯圣彼得堡