arXiv:2602.04835v1 [physics.atom-ph] 4 Feb 2026

极高强度激光束使原子气体发生隧穿电离所产生的相对论电子辐射

N.V. Makarenko[1], * 和 S.V. Popruzhenko[1,2], †

[1] National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse 31, 115409, Moscow, Russia

[2] Institute of Applied Physics RAS, Ul'yanova 46, 603950, Nizhny Novgorod, Russia(日期：2026年2月5日)

我们研究强度为 10^{21} –10^{22}W/cm^2 的飞秒激光脉冲对氩原子的隧穿电离，旨在探究激光焦点内从母离子释放的光电子的相对论动力学及其辐射。此类电子沿激光场传播方向加速时产生的辐射功率似乎适中，但与相对较弱的反向传播激光脉冲碰撞后，辐射可显著增强。利用原子和离子中激光诱导隧穿以及非线性汤姆孙散射理论，我们证明，发射光子的角分布和光谱可用于探测焦点处的峰值强度。在电离激光束的偏振平面和传播方向构成的平面内，发射辐射的角分布较窄，并集中于一个随强度变化的角度附近，这使得该电离方案可用作准直极紫外辐射源。

关键词：强激光辐射、隧穿电离、辐射、非线性汤姆孙散射

I. 引言

近年来，新一代飞秒激光源取得了发展，其峰值功率达到 1–10 拍瓦（PW），这为在实验室系统研究强度为 10^{22}W/cm^2 及更高的激光与物质相互作用开辟了道路。目前，已有若干激光装置[1–6] 能够提供功率为 3–5 P W 的脉冲。预计在不久的将来，实现脉冲持续时间为 20–30 fs、峰值功率为 10–15 PW 是切实可行的。多光束源项目 [7, 8]为达到亚艾瓦功率提供了潜在可能。有关高功率激光源的现状及未来项目的综述，参见近期文献 [9, 10]。

预计这些激光技术的进步将使强度为 $10^{22} - 10^{24}$ W/cm^2 的区域很快能够用于常规实验。在如此极端的强度下，光与物质相互作用的非微扰区占据主导地位，而电磁场强度及其在焦体积内的分布，是决定经典和量子电动力学非线性现象发生概率的关键特征。因此，未来开展极强电磁场与带电粒子、原子、分子及等离子体相互作用的实验，对可靠而多功能的激光焦点诊断有着迫切需求。

近期，人们在多拍瓦激光装置的背景下提出并讨论了多种测量激光辐射峰值强度及其在焦点处分布的方法，参见例如 [11–17]及其中的参考文献。基于观测重原子的多重隧穿电离的方法 [15, 18–22]，提出了一种校准峰值强度的途径，其精度可达 $\approx 20 - 50\%$ 通过观测特定原子种类所能达到的最高电荷态来实现。针对氩、氪和氙进行的数值计算 [15, 21, 22] 展示了该方法的可行性。尽管其精度相对较低，因此不属于非线性光学和光谱学中常用的高精度测量方案，但对于粗略估算极高强度激光束焦斑处所达到的条件而言，这种精度仍然足够。通过观测重原子多重电离来校准强度的方案，目前正在多个多拍瓦激光装置中评估；隧穿电离过程也已纳入用于模拟强激光辐射场中超快等离子体动力学的粒子网格代码。更多详情和参考文献请见近期发表的文献 [22] 。

除可能用于诊断外，在超高强度激光场中电离深束缚态，还可作为激光等离子体加速器的种子电子来源 [23–25] ，并用于引发基本粒子的量子电动力学级联 [26, 27]。电离后的光电子动力学以及发射高能光子的光谱，是模拟这些多粒子现象时所需的输入数据。

本文探讨一种与超强激光束焦点处电离直接相关的效应：电子通过隧穿从离子中释放出来后，会在引发电离的同一电磁场中加速，并主要沿激光脉冲的传播方向发射电磁波。对于给定的原子种类，这种辐射的光谱和角分布取决于激光峰值强度、其在焦点内的分布以及激光脉冲持续时间。因此，这为探测焦体积内的电磁场结构提供了另一种途径。重要的是，可以在研究多重电离及其后续光电子激光加速的同一实验中分析这种电离诱导辐射，

* 通讯电子邮箱地址：maknik1111@yandex.ru

† 通讯电子邮箱地址：sergey.popruzhenko@gmail.com

旨在研究多重电离以及随后光电子激光加速的同一实验。

在上述视角下，我们分析这种电离诱导辐射。我们表明，光电子的同向传播运动虽然能将其加速至超相对论能量，却会大幅抑制辐射，因此每个原子仅发射少数高能光子。需要加入一个相对较弱的反向传播探测脉冲，以增强发射能量。我们的计算还将探讨该信号的光谱和角分布结构，以及其对两个脉冲之间时间延迟的敏感性。

本文结构如下。下一节将阐述问题，介绍基本方程，并讨论激光脉冲、原子靶的参数以及计算中采用的近似。第三节分析有无反向传播探测脉冲时的辐射光谱。最后一节给出结论并展望未来工作。

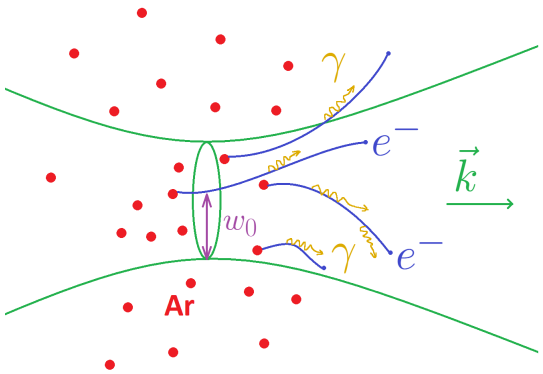

图 1. 相互作用装置示意图：波矢为**k**的聚焦激光束；穿过激光焦点的稀薄原子气体射流（红点）；原子发生多重隧穿电离后释放的电子的轨迹（蓝线）；发射光子（黄色卷曲线）。

II. 问题陈述与基本方程

我们研究低压下氩离子电离产生的快速电子在激光焦点处发射电磁波的辐射（见图1示意图）。选择氩有以下原因。首先，稀有气体常用于强场电离实验，参见例如 [18–20], ，因为它们易于储存，也便于在腔室中操作。其次，这些原子的内壳层电离势与宽广的 $10^{21}-10^{24}$ $\mathrm{W/cm^2}$ 范围内不同区间的探测激光强度相匹配。尤其是，氩的$1s$ 壳层会在强度为 $\approx 4\cdot 10^{21}\mathrm{W/cm^2}$ [15]时因场电离而耗尽。假设相互作用区域内的原子浓度低至 $n_{at}\approx 10^{12}-10^{13}\mathrm{cm^{-3}}$，以消除空间电荷效应 [15] 以及宏观电流；在焦斑周围环境中，原子外层电子壳层的电离可能会诱发这些效应和电流。

气体被聚焦至束腰尺寸为 $w_0\approx 2-4\lambda$ 的激光束电离，其中波长为 $\lambda\approx 1\mu\mathrm{m}$，对应的频率为 $\omega_L\approx 1.9\cdot 10^{15}\mathrm{sec^{-1}}$。对于这种中等程度的聚焦，高斯光束近似足够准确，因此我们可以用它估算焦点瑞利长度为$z_R = \pi w_0^2/\lambda \approx 30\lambda$ ，其中 $w_0 = 3\lambda$。由此得到有效焦体积

$$V_{\mathrm{eff}}\approx \pi w_0^2 z_R\approx 10^3\lambda^3 = 10^{-9}\mathrm{cm^{-3}} \tag{1}$$

其中含有 $\approx 10^3-10^4$ 个原子。对于更紧密的聚焦， $w_0\approx\lambda$, 高斯形式不再适合用于描述稳态激光束 [28]。在这种情况下，可以使用许多已知精确解中的一种（示例见 [29, 30] 及其中的参考文献）来建立场分布。

预计 [1, 3, 7, 8] 型多拍瓦激光器可提供持续时间为 $\tau = 20-30\mathrm{fs}$ 的脉冲。例如，目前 Apollon 激光设施 [6]的配置可提供峰值功率为 $\approx 2\mathrm{PW}$、持续时间为 22 fs 的脉冲。在这种情况下，参数 $kw_0\approx 20$ 小于 $\omega_L\tau\approx 40-60$，因此，稳态光束的解也近似适用于描述脉冲场 [30]。在此近似下，我们采用场

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{1+z^2/z_R^2}}\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2\left[1+z^2/z_R^2\right]}\right)\\ &\times\cos\left(\omega_L t-kz-\frac{kr^2}{2z\left[1+z^2/z_R^2\right]}+\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right)\\ &\times f(\omega_L t-kz),\\ \mathbf{H} &= -c\cdot\mathrm{rot}\int^t\mathbf{E}(t')\,dt'\end{aligned} \tag{2}$$

电场峰值振幅为 E_0 、正弦时间包络 f 的总持续时间为 $\tau = 2M\pi/\omega_L\equiv MT_L$ 的线偏振高斯光束

$$f(\omega_L t-kz) = \begin{cases}\sin^2\left(\frac{\omega_L t-kz}{2M}\right), & \omega_L t-kz\in[0,2M\pi],\\ 0, & \omega_L t-kz\notin[0,2M\pi]\ .\end{cases} \tag{3}$$

整数 M 表示脉冲中的光学周期总数。在我们的计算中，取 $M=16$ 对应的半高全宽为 $\tau_{1/2}\approx 25\,\mathrm{fs}$。下文假设光束的电场（2）沿 x 轴偏振。电场与波矢 **k**正交，而定义为（2）的磁场带有一定的纵向分量，但它对光电子的动力学和辐射影响很小。

A. 隧穿电离

本小节介绍用于描述电离过程的形式体系。与本文其他采用 CGS单位制 的部分不同，这里我们使用原子单位 $e = m = \hbar = 1$ ，其中 e 和 m 分别为基本电荷和电子质量。在这些单位制中，电子电荷为 -1，光速为 $c = 1/\alpha \approx 137$。

我们采用斯米尔诺夫和奇比索夫（SC）提出的原子能级隧穿电离非相对论模型 [31] ，该模型适用于静电场；对于低频场，则采用佩列洛莫夫、波波夫和捷连季耶夫（PPT）提出的模型 [32–35] 。当凯尔迪什参数 [36, 37]较小时，隧穿极限成立

$$\gamma_{\mathrm{K}} = \frac{\sqrt{2I_p}\omega_L}{E_0} \ , \tag{4}$$

其中 I_p 为电离势。在波长为 $\lambda \simeq 1\mu$m的红外激光场中，除少数外层电子外，原子能级的电离总是处于隧穿区，$\gamma_K \ll 1$。当强度大于 $10^{18}\mathrm{W/cm}^2$ 时，这一条件可以得到充分保证，此时$\gamma_{\mathrm{K}} \simeq 10^{-2} - 10^{-3}$ 甚至更小 [15]。至少在强度达到 $\approx 10^{23}\mathrm{W/cm}^2$ 之前，电离概率中的相对论效应可以忽略 [15, 38]。此时，波的磁场不会影响隧穿过程本身，电离速率由瞬时电场振幅 E（$\mathbf{R}j$， t）决定，该振幅还取决于第 j个原子的位置$\mathbf{R}j$。

我们在单电子近似下将电离建模为一个顺序概率过程。顺序电离过程的标准定义假定电子按电离势递增的顺序被移除。近期研究 [22] 表明，情况并非总是如此；不过，对空间和时间取平均后，偏离顺序通道的情况仍然相当轻微，因此本文不予考虑。在时间间隔 dt 内，轨道量子数和磁量子数分别为 l 和 m 的外层电子从其原子（离子）中被移除的概率（剩余电荷为 Z_c ；在此记号下，中性原子对应 $Z_c = 1$ ，而 $A^{(N-1)+}$ 离子对应 $Z_c = N$ ）由 SC 或 PPT 静态速率[31, 33, 37, 39]给出

$$\begin{aligned} dW(t) &= w(I_p, \nu, l, m; E(t))dt \ , \\ w &= 2^{2\nu+1} C_{\nu l}^2 B_{lm} I_p F^{1+|m|-2\nu}(t) \exp\left(-\frac{2}{3F(t)}\right) \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Here

$$F(t) = \frac{\sqrt{\mathbf{E}^2(t)}}{(2\mathrm{I_p})^{3/2}} \tag{6}$$

是以原子能级的特征场 $E_{\mathrm{ch}} = (2I_p)^{3/2}$ 为标度的约化电场（注意，电场也取决于原子的位置$\mathbf{R}j$，

$$\nu = \frac{Z_c}{\sqrt{2I_p}} \tag{7}$$

是有效主量子数，

$$C_{\nu l}^2 = \frac{2^{2\nu-2}}{\nu\Gamma(\nu + l + 1)\Gamma(\nu - l)} \tag{8}$$

它是以 Hartree 近似 [37] 计算得到的束缚态单电子波函数渐近系数的平方，并且因子

$$B_{lm} = \frac{(2l+1)(l+|m|)!}{2^{2|m|}|m|!(l-|m|)!} \tag{9}$$

反映束缚态的角结构。关于速率公式（5）的推导细节及其应用与推广，请读者参阅综述 [35, 37] 及其中的参考文献。

将SC或PPT模型用于电离事件的计算会遇到两项限制。首先，在相对较低的强度下，当外层壳层发生电离时，由再碰撞介导的非顺序通道可能大幅压过顺序通道 [40–42]。因此，在强度低于 $\simeq 10^{17}\mathrm{W/cm}^2$ 、且偏振接近线偏振的场中，隧穿速率（5）不再适用于离子产额的计算。尽管此处我们考虑的是强得多的场，但在脉冲前沿或预脉冲中仍会达到再碰撞电离机制起作用的中等强度，从而导致若干电离势最低的电子被剥离。其次，随着场振幅增大，电离机制可能从隧穿模式转变为越垒模式 [37, 43, 44]。此时，SC公式和PPT公式再次不再适用，并且对于 $F = F_* = 0.1...0.2$ 及更高的场，会将速率高估数倍，示例见 [37]。新公式 [43–45]将隧穿速率外推到越垒区域的必要性，取决于耗尽该能级所需的约化场有效值 F_{eff} 。后者由能级量子数以及脉冲持续时间决定；对于更平滑的时间包络，该值会降低 F_{eff} 。我们已经检验过：（a）对于我们计算中所采用的脉冲参数 $F_{\mathrm{eff}} \approx 0.05 < F_*$，以及（b）电荷态为 $Z_c \geq 9$ 的高电荷态，其电离动力学对初始电荷态仅弱敏感。这使得隧穿速率的应用具有充分依据。

考虑到上述论证，我们对 Ar^{8+} 离子进行计算，其壳层中剩余 10 个电子，电离势从最外层电子的$I_p(Z_c = 9) = 422.5$eV 到类氢离子的$I_p(Z_c = 18) = 4426$ eV 不等。原子随机分布在以焦点为中心、各方向尺寸为 w_0 的立方体积内；计算从电离脉冲前沿到达平面（ $t_1 = -3T_L/2$ ）的时刻开始，持续到$z = -w_0/2$，其中 $t_2 = 50T_L$为激光周期。时间步长为 $T_L = 2\pi/\omega_L$ 。每个时间间隔内，随机数生成器会为每个原子判断是否发生电离事件，其概率密度由（5）给出。

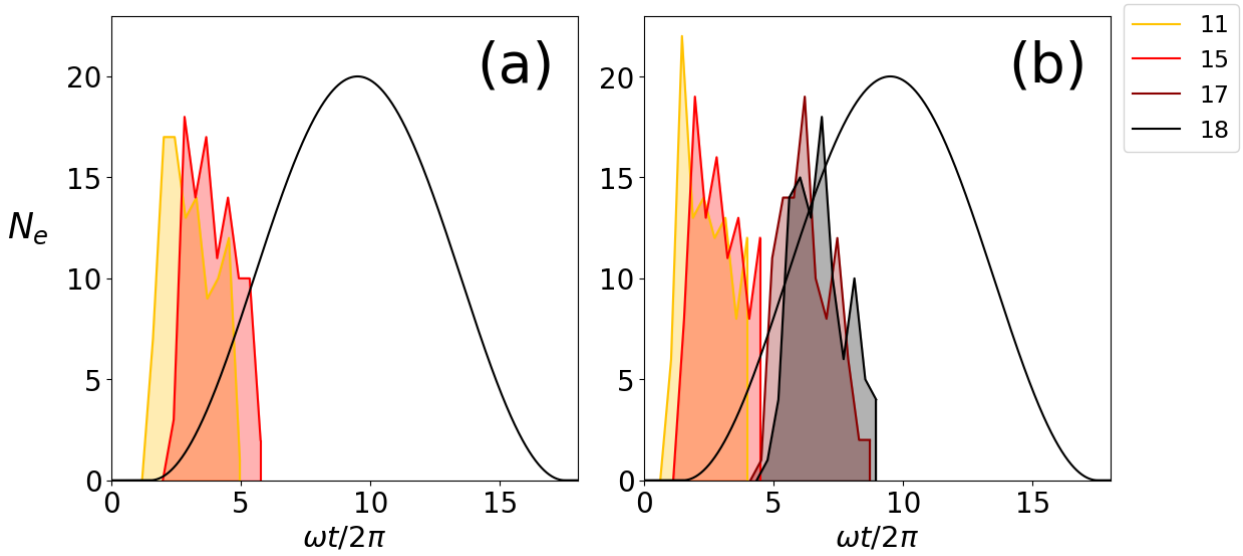

图2. 电子数目分布 N_e 在每个间隔内通过隧穿释放 $\Delta t = T_L/15$，速率由式（5）定义，来自 $N_{\rm at} = 100$ 个Ar离子$^{8+}$，这些离子随机分布在相互作用体积中。离子电荷以颜色表示（见右上角的色标条）。激光场时间包络（3）以黑色实线表示。时间以激光周期为单位。图(a)对应强度 $\mathcal{I} = 10^{21}\mathrm{W/cm}^2$, ，图(b)对应 $\mathcal{I} = 10^{22}\mathrm{W/cm}^2$。对于较低强度，$1s$ 壳层未被电离。

图 2 展示了预电离 Ar^{8+} 靶的电离动力学随时间的变化。分布是针对由 100 个原子组成的系综得到的，这些原子随机分布在焦点中央区域，对应的浓度为 $n_{\rm at} \approx 4 \cdot 10^{12}\mathrm{cm}^{-3}$。残余离子电荷用颜色编码表示。分布对初始离子态不太敏感，因此我们预计其与中性氩的情况相似，尽管速率公式（5）无法准确描述外层轨道的电离。正如我们将在下文第三节看到的那样，高能光子发射的主要贡献来自$1s$ 电子。由于强度不足，图 2(a) 中没有这些电子。图 2(b) 的曲线显示，这些电子在 $\mathcal{I} \approx 2.5 \cdot 10^{21}\mathrm{W/cm}^2$时被移除（参见文献 [15]中的图 4）。由此可估算有效约化场 $F_{\rm eff} \approx 0.05$，这证明采用半经典隧穿速率（5）是合理的。

这一条件源于上一小节所介绍的准静态场中非相对论隧穿模型。结合较高的场强，这一初始条件使轨迹呈现出一种特殊形态：它们沿激光脉冲传播方向显著拉长，并且在离开焦点前只经历少数几次振荡。图3展示了若干条体现这一特征的轨迹。其颜色编码与图2相同，对应不同的电荷态，有助于大致判断电离发生的时刻。对于电离势较低的电子所对应的“早期”轨迹，电子在逃离焦点前会经历一到两次振荡；而对于“晚期”轨迹，则不会发生任何一次完整振荡。值得注意的是，尽管初速度为零，且电场沿 x 轴线偏振，光电子轨迹仍具有非零的 y 分量。这是由于聚焦脉冲中的有质动力散射所致，此时磁场具有一个较小的纵向分量。

B. 电离后光电子动力学

电离事件之后，电子沿由洛伦兹力决定的经典轨迹运动

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \qquad (10)$$

初始条件为$\mathbf{r}(t_{jn}) = \mathbf{R}j$, $\mathbf{v}(t_{jn}) = 0$。这里，下标 j 表示原子编号， n表示第 j 个原子中的电子， $n = 9$,..., 18 对应所讨论的情形。在飞秒时间尺度上，我们忽略焦斑内的原子运动。零初速度

对于束腰半径为 $w_0 = N\lambda$ 的类高斯光束，当两个条件中的任一条件满足时，我们认为电子已从焦区逃逸

$$x \geqslant N\lambda\,, \quad z \geqslant z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \pi N^2 \lambda\,. \qquad (11)$$

这一条件得到满足。为了估算电子在焦点内停留的时间，以及电离时刻与离开时刻之间相应的相位差，我们采用平面波近似来描述其运动。

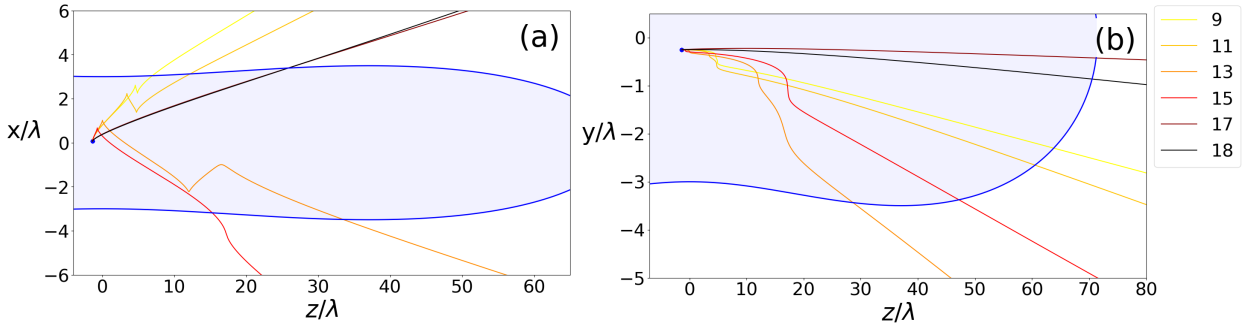

图 3. 对于坐标为 $x_0 = 0.06\lambda$， $y_0 = -0.25\lambda$ 的原子，电子在（，）平面（a）和（，）平面（b）中的轨迹。焦点的中心区域（$\mathcal{I} \geq \mathcal{I}_0/\mathrm{e}$）以蓝色显示。右上角给出了壳层内电子数对应的颜色编码。

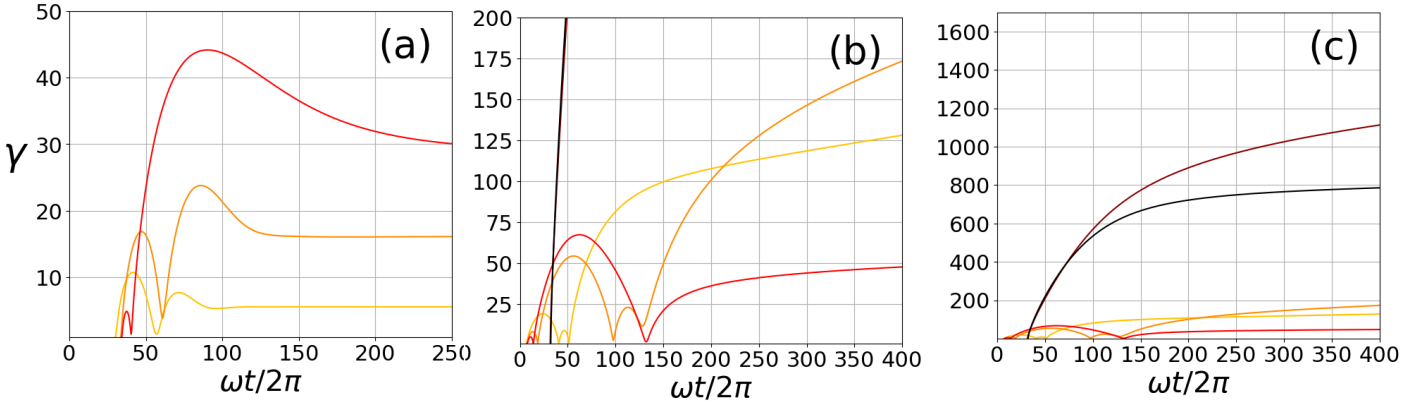

图 4. 对于具有图 2 所示参数的 10 条电子轨迹，洛伦兹因子 $\gamma(t)$ 随时间的变化。面板（a）和（b）分别对应图 2 中的面板。面板（c）以不同的比例尺显示与（b）相同的内容，以便看清两条 $1s$ 电子的轨迹。壳层内电子数采用与图 2 相同的颜色编码。

假设矢势具有如下形式

$$A_x = \frac{cE_0}{\omega} g(\varphi) \ , \quad \varphi = \omega_L t - kz \tag{12}$$

取 $g = f\cos\varphi$，并令 f 由（3）或任何其他脉冲函数给出，便可得到动量和坐标

$$\frac{p_x}{c} = a_0(g(\varphi_0) - g(\varphi)) \ , \quad \frac{p_z}{c} = \frac{a_0^2}{2}(g(\varphi_0) - g(\varphi))^2 \tag{13}$$

$$x - X_j \approx a_0\lambda\frac{g'(\varphi_0)}{2}(\varphi-\varphi_0)^2 \ , \quad z - Z_j \approx a_0^2\lambda\frac{[g'(\varphi_0)]^2}{6}(\varphi-\varphi_0)^3 \tag{14}$$

表达式（14）是近似的，并在条件 $\varphi - \varphi_0 \ll 1$下成立，这一点可由图 3 所示的轨迹形式得到验证。在方程（13）和（14）中，引入了不变无量纲场振幅

$$a_0 = \frac{eE_0}{mc\omega_L} \ . \tag{15}$$

于是，出射条件要么是 $x(\varphi_x) \simeq N\lambda$，要么是 $z(\varphi_z) \simeq z_R$。由此可得相应的相位间隔 [46]

$$\Delta\varphi_x \equiv \varphi_x - \varphi_0 \simeq \sqrt{\frac{4\pi N}{a_0}} \ , \tag{16}$$

$$\Delta\varphi_z \equiv \varphi_z - \varphi_0 \simeq \left(\frac{12\pi^2 N^2}{a_0^2}\right)^{1/3} \ . \tag{17}$$

在 $a_0 \gg 1$时，这两个值都很小，这解释了轨迹形状为何不足一个振荡周期。随着场强增大，电子倾向于从激光焦点的前缘逃逸，因为区间（17）消失得更快。令（16）与（17）相等，可得到场振幅 $a_0 \simeq 20$ 的估算值；当场振幅高于此值时，纵向逃逸将成为主导。与这一定性估算相符，图 3 所示的轨迹表明，对于在场强最大值附近从离子中释放的 $1s$ 电子，它们逃离焦点时更多地沿纵向而非横向运动。逃离焦点时，传播方向与电子速度之间的角度可估算为

$$\theta_0 \approx \frac{p_x(\Delta\varphi_z)}{p_z(\Delta\varphi_z)} \simeq \frac{0.4}{N^{2/3}a_0^{1/3}} \ . \tag{18}$$

请注意，对于波长为 $\lambda = 1\mu$m 的线偏振场，$a_0 = 100$ 对应的强度为 $\mathcal{I} \approx 2\cdot 10^{22}\mathrm{W/cm}^2$。

C. 辐射

对于每条轨迹$\mathbf{r}_{jn}(t)$，可以使用众所周知的表达式[47, 48]对辐射的角谱分布进行数值计算

$$\frac{d\mathcal{E}_{jn}}{d\omega dO_{\mathbf{n}}} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt[\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{v}(t)]]e^{i\omega[t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{jn}(t)/c]}\right|^2. \tag{19}$$

此处$dO_{\mathbf{n}}$是由单位向量$\mathbf{n}$所定义方向上的立体角。电子速度$\mathbf{v}=0$对于$t\le t_{jn}$，其中t_{jn}是相应的电离时刻。由于电子γ洛伦兹因子很高，我们假设辐射完全非相干，因此原子系综的积分信号可通过对所有单个贡献求和（19）得到。

除了高斯脉冲场中的辐射（2）外，我们还将考虑反向传播的弱聚焦脉冲场中的辐射。其场可视为平面单色波，谱角分布可借助 Sarachik 和 Schappert 在开创性论文中推导的非线性 Thomson 散射微分截面的解析表达式计算 [49]。为此，我们将洛伦兹变换到一个参考系（R 系），在该系中单个电子轨迹的平均速度为零。在此 R 系中，辐射由基频的谐波组成

$$\omega_R = \frac{\omega_L' - \mathbf{V}_0\mathbf{k}}{\sqrt{1-V_0^2/c^2}}, \tag{20}$$

其中，ω_L'是实验室系（L 系）中对向传播光束的频率，$\mathbf{V}_0$是 R 系相对于 L 系的相对速度，其数值等于电子离开电离脉冲场后的渐近速度。在 R 系中，$\omega_n = n\omega_R$处辐射功率的角分布为 [49]

$$\frac{d\mathcal{P}^{(n)}}{dO}(\vartheta,\phi) = \frac{(e\omega a_0 n)^2}{8\pi c(1+a_0^2)}\times$$
$$\times(|\chi_2^n|^2 + \frac{1}{4}a^2|\chi_3^n|^2 - |\chi_2^n\cos\phi\sin\vartheta - \frac{1}{2}a\chi_3^n\cos\vartheta|^2) \tag{21}$$

with

$$\chi_2^n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l\left[na^2\sin\frac{\vartheta^2}{2}\right]\times$$
$$\times\left((-i)^{n+2l+2}J_{n+2l+1}(\rho) + (-i)^{n+2l-2}J_{n+2l-1}(\rho)\right),$$
$$\chi_3^n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l\left[na^2\sin\frac{\vartheta^2}{2}\right]\times$$
$$\times\left((-i)^{n+2l+2}J_{n+2l+2}(\rho) + (-i)^{n+2l-2}J_{n+2l-2}(\rho)\right),$$
$$a^2 = \frac{a_0^2}{4+2a_0^2}, \quad \rho = 2an\sin\vartheta\cos\phi\ . \tag{22}$$

其中，a_0是无量纲不变量场振幅（15），ϑ和ϕ分别是相对于沿电场方向的 x 轴定义的极角和方位角，电场$\mathbf{E}$的偏振方向位于 R 系中。

为了计算 L 系中方向（ϑ,ϕ）上的分布，我们执行以下步骤：(a) 旋转坐标系（ϑ,ϕ）$\rightarrow$（ϑ',ϕ'），使z'轴沿 L 系中的电子速度$\mathbf{V_0}$方向；(b) 执行从 L 系到 R 系的洛伦兹变换：

$$\phi_R' = \phi' \tag{23}$$
$$\cos\vartheta_R' = \frac{\cos\vartheta' - V_0/c}{1 - V_0/c\cos\vartheta'};$$

(c) 旋转坐标系（ϑ_R'，ϕ_R'）$\rightarrow$（ϑ_R''，ϕ_R''），使坐标轴的选取与式（21）中的假设一致；(d) 执行到 L 系的逆洛伦兹变换。该过程的详细说明见[49]（参见其中的式 3.19–3.32b）。因此，L 系中的辐射功率角分布和光谱具有如下形式：

$$\frac{d\mathcal{P}}{dO}(\vartheta,\phi) = \frac{(1-\frac{V_0^2}{c^2})^2}{(1-\frac{V_0}{c}\cos\vartheta')^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d\mathcal{P}^{(n)}}{dO}(\vartheta_R''(\vartheta,\phi),\phi_R''(\vartheta,\phi)) \tag{24}$$

$$\omega_n = n\omega_R\frac{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1-\frac{V_0}{c}\cos\vartheta'}. \tag{25}$$

式（25）假设单色探测场具有无限长的时间持续时间。因此，对于我们的问题，这些表达式只是近似的，并忽略了探测脉冲有限谱宽导致的谱线展宽。为了估算发射能量的角分布，我们将功率分布（24）乘以反向传播脉冲的持续时间τ'。

III. 结果与讨论

A. 电离脉冲场中的辐射

仅考虑电离激光脉冲时，我们根据式（19）对辐射能量的角频率分布进行数值计算。不出所料，结果表明，辐射信号的主要贡献来自在场强最大值之前$\mathcal{I}\approx(2.5-4.0)\cdot10^{21}\mathrm{W/cm}^2$, 脱离的两个 1s 电子（见图 2(b)）。1s 壳层的电离势显著高于其他亚壳层，分别为$I_p(1s^2)=4121\mathrm{eV}$和$I_p(1s^1)=4426\mathrm{eV}$，因此这些电子几乎可以一直留在各自的轨道上，直到场强最大值。由此，电离后运动呈现出高度的同向传播和同相特征（见图 3），电子

达到 $\gamma \approx 10^3$。相比之下，当 $\mathcal{I} = 10^{21}\mathrm{W/cm}^2$ 时，$1s$ 壳层根本不会发生电离，见图 2(a)，光电子主要沿侧向逃离焦点，其 $\gamma \approx 30$。发射光子的角分布主要集中在（x，z）平面内，并在角度 θ_0附近呈窄峰，该角度可由式（18）估算。对于 $a_0 \sim 10^2$，即 1s 壳层的电离已在场强最大值附近发生的区间，这一估算足够准确。

考察固定光子频率下、垂直于传播方向的平面内的角分布很有启发性。图5 显示了分布达到最大值时的极角 θ_0 随方位角 ψ 变化的关系，其中 $a_0 = 50$分别取 100 和 200 时，对应不同的光子频率。电场偏振方向为水平方向，对应于 $\psi = 0,\ \pi$。分布的绝对量值以颜色编码表示。由此可以得到以下观察结果。

1. 当 $a_0 = 50$ 时，分布远不如场振幅较高时规则，尤其在$\omega = 6 \cdot 10^4 \omega_L$的情况下，因为在这一最低强度下，所选频率对应于光谱的高能尾部，见下文图 6。2. 随着 a_0 增大，且相应的频率升高，θ_0 的取值近似符合估算式（18）。这一趋势在图中反对角线上的分布中最为明显。3. 最大值出现在偏振方向上，尽管 ψ 中的分布显得相当宽。

辐射的角度积分光谱分布如图 6 所示，适用于 $a_0 = 50$ 和 $a_0 = 100$。为了分析具有较高电离势的内层轨道的作用，我们分别绘制了$1s$ 电子的贡献（图(a)）和所有其他电子的贡献（图(b)）。两组图之间的差异很明显。当 ≈ 1.7 从 50 增加到 100 时，外层壳层对辐射功率的贡献增大了 a_0 倍，而 $1s$ 壳层的贡献则增大了 ≈ 4 倍，使其在 $a_0 = 100$时占据主导地位。这种快速增长是由完全电离原子的数量迅速增加所致，而该数量是场振幅的高度非线性函数（5）。

对于 $a_0 = 100$，每个原子的总发射能量为：

$$\mathcal{E} = \frac{1}{N_{\mathrm{at}}} \int_0^\infty \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega \approx 2 \cdot 10^4 \ \mathrm{eV}. \tag{26}$$

因此，每个原子发射的光子数可估算为

$$N_\gamma = \mathcal{E}/\hbar\omega_{\mathrm{ch}} \simeq 2 - 3, \tag{27}$$

其中，特征频率 $\omega_{\mathrm{ch}} \approx 0.5 \cdot 10^4 \omega_L$ 对应于图 6(a) 中紫色曲线的最大值。

还应注意面板 (a) 和 (b) 中不同的横坐标尺度，这意味着频率为 $\omega \simeq 10^4 \omega_L$ 的辐射主要由 $1s$ 电子发射。

总而言之，隧穿电离产生的辐射角分布对电离发生时空点处的激光场振幅十分敏感。这种依赖关系是非线性的，因此在对焦斑体积求平均后仍然存在。内层壳层对总发射能量的贡献至关重要，并且当场强超过相应的电离阈值时会迅速增大。观测到这些辐射特征，可作为原位测量多拍瓦激光束峰值强度的另一种手段。然而，估算结果（26）、（27）表明，每个原子的发射能量和光子数都相当低。由于电子的同向传播运动，这两个量均受到显著抑制。因此，值得研究如何通过与一个相对较弱的反向传播脉冲碰撞来增强辐射。

B. 弱探测脉冲中的辐射

为增强信号，我们考虑纵向加速的光电子与反向传播的弱聚焦脉冲（探测脉冲）之间的相互作用。如下文所示，幅度 $a_0 \simeq 1$ 已足以显著增强信号。假设在一项实验中，一束多拍瓦脉冲被分成两部分，能量比为 1:100，分别沿两条光束线传播；则可考虑让探测脉冲的焦斑面积约为电离脉冲的 10 倍（即探测脉冲的焦腰 $w_0' \approx 3w_0$）。为了找出加速光电子辐射的最佳条件，我们引入可变时间延迟 Δt，即电离脉冲和探测脉冲的前沿到达焦平面的时刻之差。

与上文所示的计算不同，在那些计算中，电离脉冲的空间场分布对光电子的动力学和辐射起着重要作用；此处由于探测脉冲聚焦较弱，我们可以采用平面波近似，并使用相应的方程 (20)-(25) 计算辐射谱。图 6 中的插图显示了通过解析计算得到的角度积分谱。在前向方向，辐射以频率 $\omega_{\mathrm{ch}} \simeq 10^6 \omega_L$ 发射。探测脉冲场中每个原子的总辐射能量为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{N_{\mathrm{at}}} \sum_{n=0}^{\infty} \int dO \frac{d\mathcal{E}_n}{dO} \simeq 10^5 \mathrm{eV}, \tag{28}$$

其中发射能量 $\mathcal{E}_n$ 通过将功率（24）乘以探测脉冲持续时间 $\tau' = 30$飞秒来估算。请注意，平面波场中的背向散射发生在奇次谐波处 [49]。由于光电子

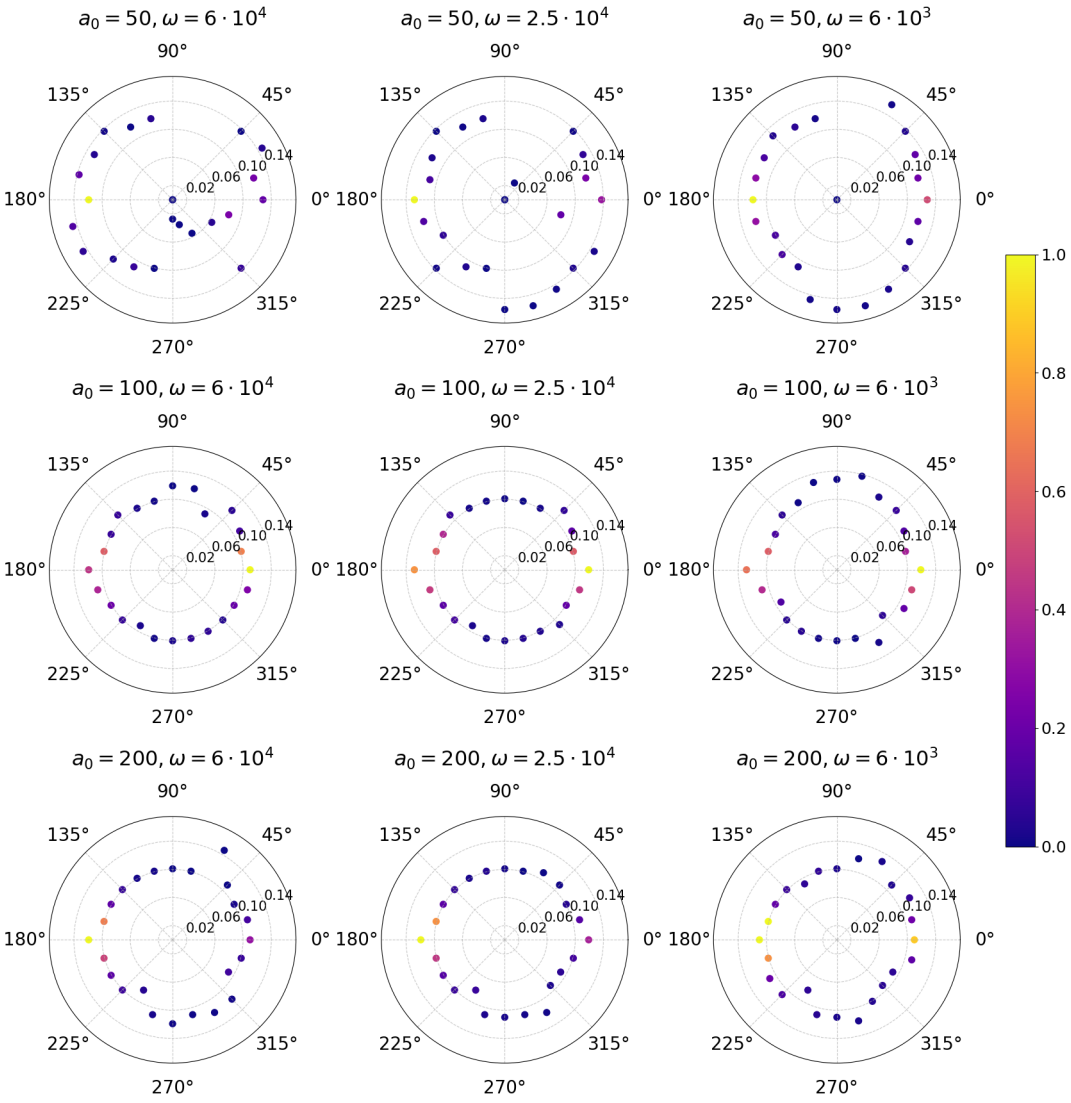

图 5. 固定频率 ω 时，激光波矢 $\mathbf{k}$ 与角分布最大值之间的极角 θ_0 随垂直于 $\mathbf{k}$ 的平面内方位角的变化，分别对应 $a_0 = 50$ （上排）、 $a_0 = 100$ （中排）和 $a_0 = 200$ （下排）。辐射频率分别为 $6 \cdot 10^4 \omega_L$ （左列）、 $2.5 \cdot 10^4 \omega_L$ （中列）和 $6 \cdot 10^3 \omega_L$ （右列）。电场偏振方向为水平方向（$\psi = 0, \pi$）。相对辐射功率以颜色编码表示。

在离开电离场后几乎沿着脉冲轴传播，见公式（18）和图 3，图 6 插图中可见的峰之间相隔基频谐波（即第一个峰）频率的两倍。尽管强度低得多，偶次谐波也同样存在。例如，二次谐波的强度比第一个峰低两个数量级。

公式（21）—（25）未考虑脉冲在纵向上的有限尺寸，因此（28）给出的只是总发射能量的估算值。若只关心总发射能量，则可以通过沿着轨迹 [48]

$$\mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c\}^2 - (\mathbf{E}\mathbf{v})^2/c^2}{1 - v^2/c^2} dt. \quad (29)$$

此处 $\mathbf{v}(t) = 0$ 在电离时刻之前，如式（19）所示。

图7显示了每个原子发射的能量随焦平面处脉冲峰值之间的时间延迟以及探测脉冲振幅的变化关系 $a_0' = 0.0 - 2.0$。电离脉冲的振幅为 $a_0 = 100$。最佳时间延迟 $\Delta t \approx 200$fs对应的相互作用情形是：光电子在与探测脉冲开始相互作用之前，达到其最大的 γ-因子；同时，在此之前它们的横向坐标尚未超出探测脉冲束腰 $w_0' = 9\lambda$。

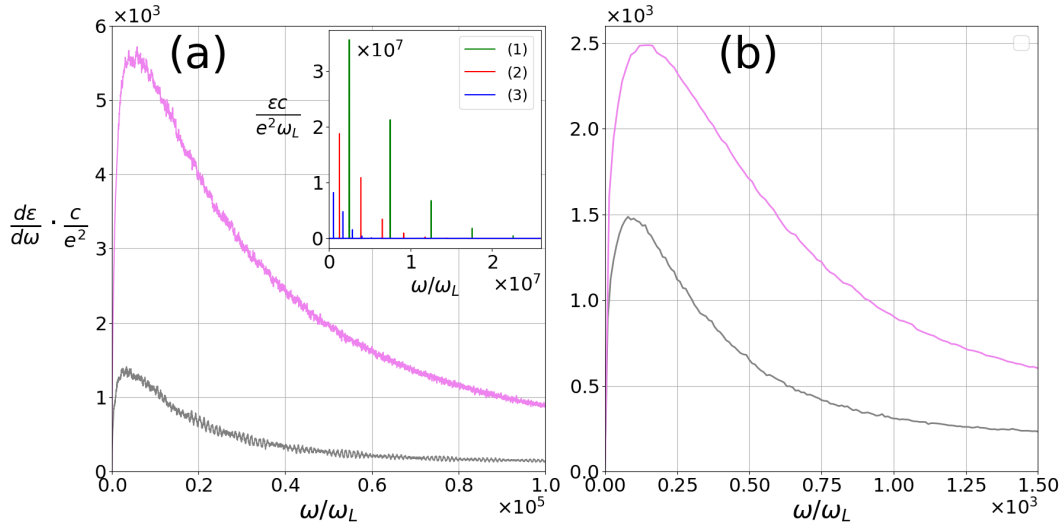

图 6. 在 $a_0 = 100$（粉色曲线）、 $a_0 = 50$（灰色曲线）条件下，由包含 100 个原子的系综发射的辐射角度积分谱。(a) 图显示仅由 $1s$ 电子辐射的光谱，(b) 图显示所有其他电子的贡献。光谱按 $e^2/c = 7.68\cdot10^{-30}$erg·c 进行缩放。插图显示了反向传播脉冲场中三个电子发射的谐波，该脉冲的 $a_0' = 1$、频率相同（ $\omega_L' = \omega_L$），持续时间为 $\tau' = 30$fs。在此情况下，光谱按 $e^2\omega_L/c = 1.53\cdot10^{-14}$erg 进行缩放。三个电子逃离电离脉冲后，其 γ因子分别为：(1) $\gamma = 796$，(2) $\gamma = 574$，(3) $\gamma = 381$。

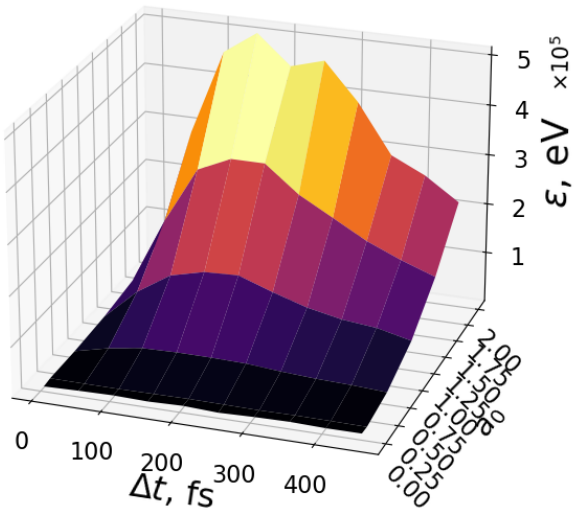

图 7. 每个原子发射的能量随焦平面处电离脉冲与探测脉冲峰值之间的时间延迟 Δt 以及探测脉冲振幅的变化。电离脉冲的束腰半径为 $w_0 = 3\lambda$，探测脉冲的束腰半径为 $w_0' = 9\lambda$。

IV. 结论与展望

我们研究了强度达到 $10^{21}\mathrm{W/cm}^2$ 及以上的聚焦激光脉冲中，重原子发生隧穿电离时伴随产生的辐射。尽管这种辐射可在经典电动力学的标准框架内描述，但它呈现出一些特殊特征，不同于入射电子束与强电磁脉冲碰撞时产生的典型辐射。这种差异主要源于电离初始条件：电子从焦点内的母离子中脱离时，其速度为零或很小。其角分布极具各向异性，峰值高度集中于圆锥的一条斜线上，圆锥角取决于焦点中央区域电离脉冲的强度。辐射谱的主要贡献来自 $1s$轨道的电离；当激光强度超过相应阈值时，便会发生这种电离。因此，这些光谱的幅度和宽度都对激光焦点中央区域的强度峰值极为敏感。这种敏感性可用于诊断高功率激光束焦点处的激光强度，作为先前讨论的电离诊断的补充 [15, 18, 20, 21]。

由于电子轨迹沿同一方向传播，即使在强度为 $\simeq$ 10^{22} / ^{2}，W cm 时，发射能量也显得很低；但通过一道相对较弱、反向传播的弱聚焦脉冲，可以显著提高发射能量。该脉冲可通过将初始多拍瓦光束分成两束能量不同的相干子光束来制备。根据（1），相互作用体积内原子的总数为 $\simeq 10^3 - 10^4$，由此得到原子总数

每次激光脉冲发射的高频光子数约高出 2–3 倍（27）。现代 X 射线探测器（例如参见 [50, 51]）能够在较宽的光谱范围内探测如此低的光子通量；该范围覆盖了我们计算中得到的 $\hbar\omega = 10^3 - 10^6$eV，并具有很高的角分辨率。

除发展多拍瓦或艾瓦级激光辐射的原位诊断外，本文结果还可用于进一步完善由极端强度激光场中的电离所引发的量子电动力学级联理论 [27]。

致谢

作者感谢A.M. Fedotov富有价值的讨论与建议。NVM感谢Basis基金会对其工作中与数值模拟及所得结果分析相关部分的经费支持。SVP感谢俄罗斯科学基金会（项目号No.25-12-00336）对其工作中包括问题表述、方程定性分析以及文稿撰写部分的经费支持。

[1] D. Papadopoulos、Y. Ayoul、A. Beluze、F. Gobert、D. Mataja、A. Fr´eneaux、N. Lebas、M. Chabanis、M. Dumergue、P. Audebert 和 F. Mathieu，载于 *High Intensity Lasers and High Field Phenomena*（Optica 出版集团，2024 年），第 HTu2B–2 页。[2] J. W. Yoon、Y. G. Kim、I. W. Choi、J. H. Sung、H. W. Lee、S. K. Lee 和 C. H. Nam，Optica 8，630（2021）。[3] https://www.eli-beams.eu/，。[4] D. Doria、M. Cernaianu、P. Ghenuche、D. Stutman、K. Tanaka、C. Ticos 和 C. Ur，《仪器学杂志》15，C09053（2020）。[5] Z. Zhang、F. Wu、J. Hu、X. Yang、J. Gui、P. Ji、X. Liu、C. Wang、Y. Liu、X. Lu、Y. Xu、Y. Leng、R. Li 和 Z. Xu，高功率激光科学与工程 8，e4（2020）。[6] W. Yao、R. Leli`evre、I. Cohen、T. Waltenspiel、A. Al- laoua、P. Antici、Y. Ayoul、A. Beck、A. Beluze、C. Blan- card、*et al.*，《等离子体物理学》32，043106（2025）。[7] Y. Peng、Y. Xu、L. Yu、X. Wang、Y. Li、X. Lu、C. Wang、J. Liu、C. Zhao、Y. Liu、*et al.*，《激光工程评论》49，93（2021）。[8] I. Y. Kostyukov、E. Khazanov、A. Shaikin、A. Litvak 和 A. Sergeev，《列别捷夫物理研究所通报》50，S635（2023）。[9] A. Gonoskov、T. Blackburn、M. Marklund 和 S. Bu- lanov，现代物理评论 94，045001（2022）。[10] A. Fedotov、A. Ilderton、F. Karbstein、B. King、D. Seipt、H. Taya 和 G. Torgrimsson，物理学报告 1010，1（2023）。[11] C. He、A. Longman、J. P´erez-Hern´andez、M. De Marco、C. Salgado、G. Zeraouli、G. Gatti、L. Roso、R. Fedosejevs 和 W. Hill III，光学快报 27，30020（2019）。[12] F. Mackenroth、A. R. Holkundkar 和 H.-P. Schlen- voigt，新物理学杂志 21，123028（2019）。[13] A. Yandow、T. Toncian 和 T. Ditmire，《物理评论A》100，053406（2019）。[14] O. Vais 和 V. Y. Bychenkov，应用物理B 124，211（2018）。[15] M. Ciappina、S. Popruzhenko、S. Bulanov、T. Ditmire、G. Korn 和 S. Weber，《物理评论A》99，043405（2019）。[16] O. Vais、A. Thomas、A. Maksimchuk、K. Krushelnick 和 V. Y. Bychenkov，新物理学杂志 22，023003（2020）。[17] S. V. Popruzhenko 和 A. M. Fedotov，物理学进展 66，460（2023）。[18] E. A. Chowdhury, C. Barty, 和 B. C. Walker，《物理评论A》63, 042712 (2001). [19] K. Yamakawa, Y. Akahane, Y. Fukuda, M. Aoyama, N. Inoue, 和 H. Ueda，《物理评论A》68, 065403 (2003). [20] A. Link, E. A. Chowdhury, J. T. Morrison, V. M. Ovchin- nikov, D. Offermann, L. Van Woerkom, R. R. Freeman, J. Pasley, E. Shipton, F. Beg, *et al.*，《科学仪器评论》77 (2006). [21] M. Ciappina 和 S. Popruzhenko，《激光物理快报》17, 025301 (2020). [22] A. Mironov, E. Gelfer, I. Tupitsyn, A. Beck, M. Jirka, O. Klimo, S. Meuren, G. Oberreit, T. Smorodnikova, R. Ta¨ıeb, *et al.*，《物理评论E》112, 055202 (2025). [23] A. Pak, K. A. Marsh, S. F. Martins, W. Lu, W. B. Mori, 和 C. Joshi, Phys. Rev. Lett. 104, 025003 (2010). [24] C. McGuffey, A. G. R. Thomas, W. Schumaker, T. Mat- suoka, V. Chvykov, F. J. Dollar, G. Kalintchenko, V. Yanovsky, A. Maksimchuk, K. Krushelnick, V. Y. By- chenkov, I. V. Glazyrin, 和 A. V. Karpeev，Phys. Rev. Lett. 104, 025004 (2010). [25] C. E. Clayton, J. Ralph, F. Albert, R. Fonseca, S. Glen- zer, C. Joshi, W. Lu, K. Marsh, S. F. Martins, W. B. Mori, *et al.*，物理评论快报 105, 105003 (2010). [26] M. Tamburini, A. Di Piazza, 和 C. H. Keitel，《科学报告》7, 5694 (2017). [27] I. I. Artemenko 和 I. Y. Kostyukov，Phys. Rev. A 96, 032106 2017( ). [28] L. Davis，《物理评论A》19, 1177 (1979). [29] I. Thiele, S. Skupin, 和 R. Nuter，Journal of Compu- tational Physics 321, 1110 (2016). [30] N. Narozhny 和 M. Fofanov，《实验与理论物理学杂志》90, 753 (2000). [31] B. Smirnov 和 M. Chibisov，苏联物理学—JETP 22, 23 (1966). [32] A. Perelomov, V. Popov, 和 M. Terent'ev, Zh. Eksp. Teor. Fiz 50, 1393 (1966). [33] A. Perelomov, V. Popov, 和 M. Terent'ev, Zh. Eksp. Teor. Fiz 52, 514 (1967). [34] V. S. Popov, Usp. Fiz. Nauk 174, 921 (2004). [35] S. Popruzhenko，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》47, 204001 (2014). [36] L. Keldysh，苏联物理学—JETP 20 (1965). [37] V. S. Popov，《物理学进展》47, 855 (2004). [38] S. Popruzhenko, Bulletin of the Lebedev Physics Insti- tute 50, S928 (2023).

[39] A. Perelomov, V. Popov, 和 M. Terent'ev，苏联物理学—JETP **23**, 924 (1966). [40] M. Y. Kuchiev, JETP快报 **45** (1987). [41] D. N. Fittinghoff, P. R. Bolton, B. Chang, 和 K. C. Kulander，《物理评论快报》**69**, 2642 (1992). [42] P. B. Corkum，《物理评论快报》**71**, 1994 (1993). [43] D. Bauer 和 P. Mulser，《物理评论A》**59**, 569 (1999). [44] I. Y. Kostyukov 和 A. Golovanov，《物理评论A》**98**, 043407 (2018). [45] X. Tong 和 C. Lin，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**38**, 2593 (2005).

[46] S. V. Popruzhenko 和 E. Kalymbetov，《量子电子学》**51**, 801 (2021)。[47] J. D. Jackson，*Classical electrodynamics*（约翰·威立父子公司，2021)。[48] L. Landau 和 E. Lifshitz, *Theoretical physics. Field the-ory* (科学出版社，1967)。[49] E. Sarachik 和 G. Schappert，《物理评论D》**1**, 2738 (1970)。[50] W. C. Phillips、A. Stewart、M. Stanton、I. Naday 和 C. Ingersoll，《同步辐射》**9**, 36 (2002)。[51] C. D. Armstrong、G. Scott、S. Richards、J. Patel、K. Fe-dorov、R. Gray、K. Welsby 和 P. Rajeev，《物理学前沿》**11**, 1286442 (2023)。