arXiv:2602.04839v1 [math.GR] 4 Feb 2026

Lodha–Moore 群的扭曲与非扭曲子群

児玉裕也

摘要。我们利用 G_0 词长的一个显式下界，证明鲍姆斯拉格–索利塔群 $BS(1,2)$ 在 Lodha–Moore 群 G_0 中是非扭曲的。我们还证明，汤普森群 F 在 G_0 中是扭曲的。

1. 引言

汤普森群 F、T 和 V 由 Richard Thompson 于20世纪60年代定义。它们可以通过二叉树对、Cantor集上的同胚等方式作具体描述，这使得对这些群进行详细研究成为可能。这些群具有若干显著性质：它们是有限表现的，T 和 V 是无限单群，而 F 的顺从性至今仍是一个重要的未解问题。为了理解它们神秘的性质，人们引入并研究了许多与汤普森群密切相关的群。有关汤普森群的背景知识，例如可参见 [10], 。

Lodha–Moore 群 G_0 由 Lodha 和 Moore 在 [21]中引入。它是有限表现、无挠的，不含非阿贝尔自由子群，且属于类型 F_∞ [20, 21]。该群在许多方面与 Thompson 群 F 相似，因为它可以通过向 F添加一个生成元得到，但已知它是非顺从的。因此，进一步研究 G_0 与 F之间的关系是很自然的。

然而，关于 G_0的几何性质，我们知之甚少。虽然已有一些几何方面的结果 [18–20, 26], ，但与 F相比，我们目前的认识仍相当有限。因此，本文研究扭曲这一 G_0的基本几何性质。

给定一个包含关系 $H \hookrightarrow G$，扭曲用于比较 H 上的内在字度量与从 G诱导的度量。更准确地说，如果该包含映射是拟等距嵌入（反之，如果不是拟等距嵌入），则称群 H 是非扭曲的（反之称为扭曲的）。非扭曲嵌入保留了 H的大尺度几何，而扭曲则表明环境群压缩了 H的某些几何结构。

汤普森群以及与其相似的群，通常具有元素的多种具体表示方式，因此能够有效估计词长。然而，对于 G_0，据我们所知，除 [19, 命题 3.2], 中得到的界之外，此前几乎没有这类

2020 数学主题分类。20F65。关键词与短语。扭曲，鲍姆斯拉格–索利塔群，Lodha–Moore 群，汤普森群。

界。在本文中，我们构造了更适用于本文目的的有效界。具体而言，利用 G_0 作为 $\mathbb{R}$ 上的同胚群这一表示方式，我们为G_0的词长定义了两个下界，并据此证明鲍姆斯拉格–索利塔群 $BS(1,\ 2)$ 是非扭曲的（定理 3.13）。相反，通过考察 F中的一个特定元素序列，我们证明汤普森群 F 在 G_0 中是扭曲的（定理 4.1）。

如果一个鲍姆斯拉格–索利塔群作为子群出现在某个群中，那么它的几何性质会受到相当严格的限制。例如，包含 $BS(m,\ n)$ 且 $|m| \neq |n|$ 的群不可能是半双曲的 [1, 命题 7.17]。从这一点来看，$BS(1,\ 2)$ 在 G_0 中是不扭曲的这一事实，或许有助于阐明 G_0 与汤普森群 F 的差异。注意，汤普森群 V，因而 F，不包含任何满足 $|m| \neq |n|$ [3, 4, 22] 的鲍姆斯拉格–索利塔子群。

关于扭曲，已有一些针对汤普森群及其相似群的相关结果。首先，F 在 T 中是不扭曲的，并且 $F,\ T$ 在 V 中也是不扭曲的，因为 F 和 T 的词长等价于 [2, 5, 8] 中小树枝的数量。已知 V 的循环子群是不扭曲的 [2, 3]。在 F 本身中，Burillo [6] 以及 Guba 和 Sapir [15, 16] 证明，同构于 $F^m \times \mathbb{Z}^n$ 的子群可以准等距嵌入 F。Cleary 和 Taback [12] 研究了若干准等距嵌入的子群，而子群 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ 和 $F \wr \mathbb{Z}$ 是不扭曲的 [11, 25]。此外，所有有限生成极大子群都是不扭曲的 [13, 14]。在更一般的情形下，已有结果表明，任意图式群的有限生成阿贝尔子群都是不扭曲的 [15]。

在高维 Thompson 群 $2V$中，Burillo 和 Cleary [7] 证明了 F、T 和 V在 $2V$ 中至少呈指数扭曲。在 Thompson–Stein 群$F(n_1,\ \ldots\ldots,\ n_k)$ 中，Wladis [24] 证明自然嵌入 $F(n_i) \hookrightarrow F(n_1,\ \ldots\ldots,\ n_k)$ 至少呈指数扭曲，而循环子群仍然不扭曲 [23]。这些事实表明，高维 Thompson 群和 Stein–Thompson 群的几何性质与其他汤普森群不同，因此可以将 Lodha–Moore 群视为属于同一类。

本文的组织结构如下：在第 2 节中，我们回顾 Thompson 群 F 和 Lodha–Moore 群 G_0的定义，将它们视为$\mathbb{R}$ 和 Cantor集的同胚群的子群。我们还定义了一个不变量，它给出了词长的下界。在第 3 节中，我们证明该不变量的对数给出了 G_0的词长下界，并应用这一结果证明 $BS(1,\ 2)$ 是非扭曲的。在第 4 节中，我们构造了 $F < G_0$ 中的一列元素，证明 F 在 G_0中是扭曲的。

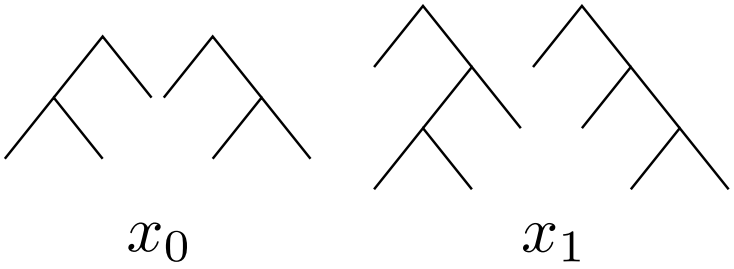

图 1。 F的两个生成元。

2. 预备知识

在本文中，如果 f 和 g 是拓扑空间到自身的同胚，则$fg := g \circ f$。对于有限生成群 G 中、关于有限生成集S的元素 g，其相对于 S 的词长记为 $\|g\|_S$。

2.1. Thompson 群 F。

我们先回顾 Thompson 群F的定义。更多详情可参见例如 [10], 。令 $\mathcal{T}$ 为由叶子数相同的有根二叉树对组成的集合。我们在 $\mathcal{T}$ 上定义如下等价关系：设 $(T_1, T_2) \in \mathcal{T}$为一对具有 n 个叶子的二叉树。我们从左到右分别将 T_1 和 T_2 的叶子标记为 $1, \ldots, n$。由根节点和两个叶子组成的二叉树称为小树枝。将一个小树枝分别接到每个 T_1 和T_2的第 i个叶子上（其中 i），可得到一对二叉树 $(T'1, T_2') \in \mathcal{T}$。我们定义 (T_1, T_2) 与 $(T'1, T_2')$ 等价，并令 $\sim$为由这些扩展生成的等价关系。
Thompson 群 F 是集合 $\mathcal{T}/\sim$，其运算如下：设 $a = (A_1, A_2)$ 和$b = (B_1, B_2)$ 是 $\mathcal{T}/\sim$中元素的代表元。那么存在 $(A_1', A_2') \sim (A_1, A_2)$ 和 $(B_1', B_2') \sim (B_1, B_2)$，使得 $A_2' = B_1'$。利用这些新得到的树对，我们定义 ab 为 (A_1', B_2') 的等价类。可以验证，这一运算与代表元的选取无关。众所周知，对于 F的任意等价类，都存在唯一一个叉形数最少的代表元 [10]。对于 $x \in F$，我们称这样的代表元 (T_1, T_2) 为 x的约化树对，并将 T_1 （或 T_2）的叉形数记为$N(x)$。此外，众所周知， F 具有如下群表示:

$$\langle x_0, x_1 \mid [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-1} x_1 x_0], [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-2} x_1 x_0^2] \rangle,$$

生成元 x_0 和 x_1 如图 1 所示。我们将 F 的生成集$\{x_0, x_1\}$ 记作 S_F。

以下定理对于估计 F的词长很重要 .

定理 2.1（[5, 定理 1, 3]）。 存在常数 $C \geq 1$，使得对于任意元素 $x \in F$,

$$\frac{1}{C} N(x) \leq \|x\|_{S_F} \leq C N(x)$$

均成立。

2.2. 作为实数集 $\mathbb{R}$ 上的同胚的 Lodha–Moore 群 G_0。本节回顾 Lodha–Moore 群 G_0 的定义。该群有两种不同但等价的描述。本文首先将 G_0 引入为 $\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{R})$ 的一个子群；$\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{R})$ 是实数集 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上保向分段射影同胚组成的群。具体而言，对于 $\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{R})$ 中的每个元素 f，存在有限多个元素 s_1、……、$s_n\in\mathbb{R}$，使得 $f|_{(-\infty,s_1]}$、$f|_{[s_1,s_2]}$、$\dots f|_{[s_{n-1},s_n]}$、$f|_{[s_n,\infty)}$ 分别具有 $t\mapsto(a_1t+b_1)/(c_1t+d_1)$ $t\mapsto(a_2t+b_2)/(c_2t+d_2)$ ……、$t\mapsto(a_nt+b_n)/(c_nt+d_n)$ 的形式，其中 a_i、b_i、c_i、$d_i\in\mathbb{R}$，且 $a_id_i-b_ic_i=1$。对于 $f\in\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{R})$，若存在 t 的一个邻域 $U\subset\mathbb{R}$，使得 $f|_U$ 具有 $(at+b)/(ct+d)$ 的形式，则称元素 $t\in\mathbb{R}$ 为正则点。记 $B(f):=\mathbb{R}\setminus f$ 的正则点集合，并将其中的每个元素称为断点。$\mathbb{R}\setminus B(f)$ 的连通分支称为线性分式分量。

定义 2.2（[21]）。*Lodha–Moore 群* G_0 是 $\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{R})$ 的一个子群，由以下映射生成：

$$a(t)=t+1,\qquad b(t)=\begin{cases}t & \text{if } t\le 0\\ \frac{t}{1-t} & \text{if } 0\le t\le\frac12\\ \frac{3t-1}{t} & \text{if } \frac12\le t\le 1\\ t+1 & \text{if } 1\le t,\end{cases}\qquad c(t)=\begin{cases}\frac{2t}{1+t} & \text{if } 0\le t\le 1\\ t & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注 2.3。上述映射的逆映射如下：

$$a^{-1}(t)=t-1,\quad b^{-1}(t)=\begin{cases}t & \text{if } t\le 0\\ \frac{t}{t+1} & \text{if } 0\le t\le 1\\ \frac{1}{3-t} & \text{if } 1\le t\le 2\\ t-1 & \text{if } 2\le t,\end{cases}\quad c^{-1}(t)=\begin{cases}\frac{t}{2-t} & \text{if } 0\le t\le 1\\ t & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在每个线性分式分支上，映射 $t\mapsto(at+b)/(ct+d)$ 自然地对应于射影线性群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ 的一个元素。

对于 G_0，根据生成元的定义，在每个线性分式分支上，存在唯一的代表元 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，使得

(1) 最大公约数$(|a|,|b|,|c|,|d|)=1$;

(2) 或者 $a>0$，或者 $a=0$ 且 $b>0$。

利用这个代表元，我们估计 G_0 关于 $\{a,b,c\}$ 的元素的词长。

定义 2.4. 设 $f\in G_0$。

(1) 我们定义

$$D(f):=\max\left\{q\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\frac{p}{q}\in B(f),p\in\mathbb{Z},\gcd(|p|,q)=1,q>0\right\}.$$

若 $B(f) = \emptyset$, 则我们定义 $D(f) := 1$;

(2) 设 $I_1, \ldots, I_n$ 为 f 的全部线性分式分量。然后我们定义

$$M(f) := \max_{1\le i\le n} \left\{ \max\{|a_i|,|b_i|,|c_i|,|d_i|\} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \text{ corresponds to } f|_{I_i} \right\}.$$

换言之, $M(f)$ 是对应于 $f|_{I_1}, \ldots, f|_{I_n}$ 的矩阵各项的最大绝对值;

(3) 我们定义 $C(f) := \max\{D(f)\ M(f)\}$。

注 2.5. 根据 Thurston 的一项未发表结果, 子群 $\langle a, b\rangle$ 已知同构于 F。

2.3. **Lodha–Moore 群作为 Cantor集上的同胚**。 设 $\mathfrak{C}$为 Cantor集 $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$。对于有限二进制字 b_1 与有限（或无限）二进制词 b_2, 它们的拼接记为 $b_1 b_2$。

在本节中, 我们将 G_0 视为 $\mathfrak{C}$的同胚群的一个子群。为了定义 G_0的生成元, 我们首先引入如下同胚。

定义2.6. 映射 y 及其逆映射 y^{-1} 根据以下规则递归定义:

$$\begin{aligned} &y\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} && &&y^{-1}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \\ &y(00\zeta) = 0y(\zeta) && &&y^{-1}(0\zeta) = 00y^{-1}(\zeta) \\ &y(01\zeta) = 10y^{-1}(\zeta) && &&y^{-1}(10\zeta) = 01y(\zeta) \\ &y(1\zeta) = 11y(\zeta), && &&y^{-1}(11\zeta) = 1y^{-1}(\zeta). \end{aligned}$$

对于每个有限二进制字 s, 我们还通过设定来定义映射 y_s

$$y_s(\xi) = \begin{cases} sy(\eta) & \xi = s\eta \\ \xi & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在我们如下定义 G_0 的两个生成元:

$$x_0\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C};\begin{cases} 00\eta \mapsto 0\eta \\ 01\eta \mapsto 10\eta \\ 1\eta \mapsto 11\eta, \end{cases} \qquad x_1\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C};\begin{cases} 0\eta \mapsto 0\eta \\ 100\eta \mapsto 10\eta \\ 101\eta \mapsto 110\eta \\ 11\eta \mapsto 111\eta. \end{cases}$$

这一约定可由 F 中元素的等价类与 $\mathfrak{C}$上的同胚之间众所周知的等同关系来说明。详见 [21] 。事实上, 映射 a 和b 也可分别等同于 x_0 和 x_1。

命题 2.7 ([21, 命题 3.1])。 群 G_0 同构于由 x_0、 x_1 和 y_{10} 生成的群。同构映射由 $a \mapsto x_0$、 $b \mapsto x_1$ 和$c \mapsto y_{10}$ 给出。

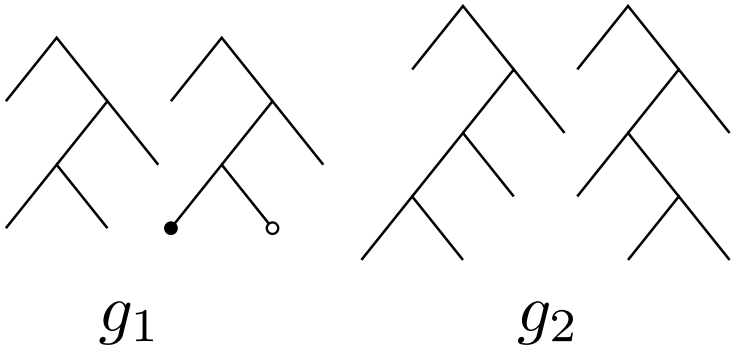

图 2. g_1 和 g_2的树图。

特别地，通过这一识别，我们将 F 视为 G_0 的一个子群。

这里我们简要回顾 G_0的树图。由于我们只在第 4 节中使用这种表示来描述 $F < G_0$，精确定义请参见 [21] 。首先注意，对于给定的二叉树，每个顶点都可按以下方式对应到一个有限二进制字：将小树枝的所有左边标记为 0，右边标记为 1。于是，每个顶点都对应于从根节点到该顶点的一条有限路径，而表示这条路径的边标签序列就构成一个有限二进制字。

给定一个有限二进制字 s，我们取一棵二叉树 T_s，使得 T_s 是包含路径 s（从根节点出发）的最小树。于是，y_s表示为（T_s，$T_{\imath s}$），其中 T'_s是树 T_s，其顶点 s 标有一个黑点。与 y_s类似，映射 y_s^{-1}（以及带有 $|k| > 1$的 y_s^k）表示为由两棵 T_s 副本组成的有序对，其中后一棵树的顶点 s标有一个白点（以及 k）。

在 [26, 注 2.9], 中，声称 $y_0^{-1}y_1$ 和 x_0 生成了鲍姆斯拉格–索利塔群 $BS(2, 1)$的一个副本。由于这不是 G_0 的子群（但却是较大的群$_y G_y = G$的子群），我们转而考虑以下元素：

$$g_1(t) \coloneqq (bca^{-1}c^{-1}ab^{-1})(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \le 0 \\ \frac{2t}{2t+1} & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3-2t} & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ t & \text{if } 1 \le t, \end{cases}$$

$$g_2(t) \coloneqq (bba^{-1}b^{-1}ab^{-1})(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \le 0 \\ \frac{t}{1-t} & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \frac{4t-1}{5t-1} & \text{if } \frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2-t} & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ t & \text{if } 1 \le t. \end{cases}$$

通过将 $\mathfrak{C}$ 与 $\{10\eta \mid \eta \in \mathfrak{C}\}$ 对应，可以直接验证这些元素生成了 $BS(2, 1)$ 的一个同构副本。g_1 和 g_2的树图见图 2。按照 [9], 中的记号，本文将该群视为 $BS(1, 2)$ 的一个副本。换言之，

映射 ϕ: $BS(1,\ 2) = \langle x,\ t \mid txt^{-1} = x^2\rangle \to \langle g_1,\ g_2\rangle < G_0$ 由 $\phi(t) = g_1$和 $\phi(x) = g_2$ 定义，是一个同构。利用该映射，我们将 $BS(1,\ 2)$ 视为G_0的一个子群。

最后，我们指出， $BS(1,2)$ 中的每个元素都可以唯一地表示为以下形式

$$t^{-m}x^N t^n$$

其中 $m, n \geq 0$，并且当 m 或 n 为零时， N 可以取为偶数。我们将此称为该元素的标准形 。

3. $BS(1,2)$ is undistorted in G_0

3.1. 的词长下界。 我们先给出一些预备引理。

引理 3.1。 设 $f, g \in G_0$。则有 $M(fg) \leq 2M(f)M(g)$。

证明。设 $A_1, \ldots, A_n$（分别为 $B_1, \ldots, B_m$）表示与 f（分别与 g）的线性分式分量相关联的矩阵。注意

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

成立。由于我们有

$\max\{|a_{t1}b_{1k} + a_{t2}b_{2k}| \mid t, k \in \{1, 2\}\} \leq 2\max\{|a_{tk}| \mid t, k \in \{1, 2\}\}\max\{|b_{tk}| \mid t, k \in \{1, 2\}\}$,通过对 $A_1, \ldots, A_n$ 以及 $B_1, \ldots, B_m$ 取最大值，即得所需结果。 □

引理 3.2。 设 $f \in G_0$ 和 I 是 f 的一个线性分式分量。设 $p'/q' \in f(I) \cap \mathbb{Q}$，其中 p'、$q' \in \mathbb{Z}$、$q' > 0$，且最大公约数$(|p'|, q') = 1$。则对于 $p/q := f^{-1}(p'/q')$，其中 p、$q \in \mathbb{Z}$、$q > 0$，且最大公约数$(|p|, q) = 1$，有 $q \leq 2M(f)\max\{|p'|, q'\}$。

证明。如果将限制 $f|_I$写成 $f|_I(t) = (at + b)/(ct + d)$，则

$$\frac{p}{q} = \frac{d\frac{p'}{q'} - b}{-c\frac{p'}{q'} + a} = \frac{dp' - bq'}{-cp' + aq'}$$

成立。由于最大公约数$(|p|, q) = 1$，我们有

$$q \leq |-cp' + aq'| \leq |c||p'| + |a|q' \leq 2M(f)\max\{|p'|, q'\},$$

如所要求。 □

引理3.3。设 $f, g \in G_0$。那么我们有

$$B(fg) \subset B(f) \cup f^{-1}(B(g)).$$

证明。假设 $x \notin B(f)$ 和 $f(x) \notin B(g)$。只需证明 x 不属于 $B(fg)$。

由于 $x \notin B(f)$，存在 U 的一个邻域，在该邻域上 $f|_U(t) = (at+b)/(ct+d)$。类似地，由于 $f(x) \notin B(g)$，存在 $f(x)$ 的一个邻域 V，使得 $g|_V(t) = (a't+b')/(c't+d')$。因此，$U \cap f^{-1}(V)$ 是 x 的一个邻域，且包含于 U 中；它在 f 下的像包含于 V 中。□

下文中，我们将标准生成集 $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}\}$ 记作 S_{G_0}。我们计算定义 2.4 中定义的函数在生成元相乘时的表现。

引理 3.4。设 $f \in G_0$。那么对于任意 $s \in S_{G_0}$，有

$$D(fs) \leq 4\max\{D(f), M(f)\} = 4\mathcal{C}(f).$$

证明。注意，由引理 3.3 可得

$$B(fs) \subset B(f) \cup f^{-1}(B(s)).$$

令 $x \in B(fs)$，并写作 $x = p/q$ with $p,\ q \in \mathbb{Z}$，$\gcd(|p|,\ q) = 1$，且 $q > 0$。若 $x \in B(f)$，显然有 $q \leq D(f)$。

假设 $x \notin B(f)$ 且 $f(x) \in B(s)$。由于 $x \notin B(f)$，存在 x 的一个邻域U，使得 $f|_U(t) = (at+b)/(ct+d)$ 成立。根据 $M(f)$ 的定义，有 $\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} \leq M(f)$。此外，由于 $f(x) = p'/q' \in B(s)$，且每个生成元的断点的分母和分子都至多为二，因此有 $\max\{|p'|, q'\} \leq 2$。将引理 3.2 应用于 $x = f^{-1}(p'/q')$，得到

$$q \leq 2M(f)\max\{|p'|, q'\} \leq 4M(f),$$

这就得到了所要证明的结论。 □

引理 3.5. 设 $f \in G_0$。则对任意 $s \in S_{G_0}$，有

$$M(fs) \leq 6M(f).$$

证明。由于 $s \in S_{G_0}$，我们有 $M(s) \leq 3$。由引理 3.1，得到

$$M(fs) \leq 2M(f)M(s) \leq 6M(f),$$

如所需。 □

命题 3.6. 设 $f \in G_0$。则对任意 $s \in S_{G_0}$，有

$$\mathcal{C}(fs) \leq 6\mathcal{C}(f).$$

证明。由引理 3.4 和 3.5，得到

$$D(fs) \leq 4\mathcal{C}(f), \qquad M(fs) \leq 6M(f) \leq 6\mathcal{C}(f).$$

因此 $\mathcal{C}(fs) = \max\{D(fs)\ M(fs)\} \leq 6\mathcal{C}(f)$。 □

作为推论，我们得到词长的一个下界。

推论 3.7。 对于每个 $f \in G_0$，我们有

$$\|f\|_{S_{G_0}} \geq \frac{1}{2}\log \mathcal{C}(f).$$

证明。令 $\|f\|^{S_{G_0}} = n$，并将 $f = s_1 \cdots s_n$ 写成一个测地词。通过反复应用命题 3.6，我们有 $\mathcal{C}(f) \leq 6^n$。因此

$$\|f\|_{S_{G_0}} = n \geq \log_6 \mathcal{C}(f) \geq \frac{1}{2}\log \mathcal{C}(f),$$

如所要求。 □

3.2. 关于 $BS(1,2)$ 中元素相对于 G_0 的词长估计。我们将 $S_{BS(1,2)}$ 定义为 $\{g_1, g_2\}$，即 $\langle g_1, g_2\rangle$的生成集。只需证明存在 $\lambda \geq 1$ 和 $k \geq 0$，使得对于任意 $g \in \langle g_1, g_2\rangle$，我们有

$$\frac{1}{\lambda}\|g\|_{S_{BS(1,2)}} - k \leq \|g\|_{S_{G_0}}.$$

为证明这一结论，我们使用以下结果：

命题 3.8 ([9, 命题 2.1]). 存在常数 $C_1, C_2, D_1, D_2 > 0$，使得对于 $BS(1, 2)$ 中的每个元素 $x = t^{-m}a^N t^n$，其中 $t^{-m}a^N t^n$ 是 x和 $N \neq 0$的标准形，我们有

$$C_1(m + n + \log|N|) - D_1 \leq \|x\| \leq C_2(m + n + \log|N|) + D_2,$$

其中 $\|x\|$ 是 x 关于 $\{x, t\}$ 的词长。

我们先给出一些关于 g_1 和 g_2的迭代的基本引理。

引理 3.9. 设 n 为非负整数。那么对于任意 $t \in [0, 1/2]$，我们有

$$g_1^n(t) = \frac{2^n t}{2(2^n - 1)t + 1},$$

并且对于任意 $t \in [1/2, 1]$，我们有

$$g_1^{-n}(t) = \frac{(2^{n+1} - 1)t + (1 - 2^n)}{(2^{n+1} - 2)t + (2 - 2^n)}.$$

证明。这些等式可通过归纳法容易地验证，因为 $g_1([0, 1/2]) = [0, 1/2]$和 $g_1([1/2, 1]) = [1/2, 1]$ 成立。□

引理 3.10。 设 N 为正整数。则有

$$g_2^N|_{[0,\frac{1}{N+2}]}(t) = \frac{t}{1 - Nt}, \qquad g_2^N|_{[\frac{1}{N+2},\frac{1}{N+1}]}(t) = \frac{(N + 3)t - 1}{(N + 4)t - 1}.$$

证明。由于 $g_2^N(1/(N+2)) = g_2^{N-1}(1/(N+1)) = \cdots = g_2(1/3)$ 成立，通过将 $g_2(t) = t/(1-t)$ 与其自身复合 N 次，可得到等式 $g_2^N|_{I_N}(t) = t/(1-Nt)$。

我们用归纳法证明第二个等式。若 $N=1$，则显然成立。假设

$$g_2^{N-1}|_{[\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}]}(t) = \frac{(N+2)t-1}{(N+3)t-1}$$

对 $N \geq 2$ 成立。由于 $[1/(N+2)\ 1/(N+1)] \subset [0,1/3]$ 成立，我们有 $g_2([1/(N+2)\ 1/(N+1)]) = [1/(N+1)\ 1/N]$ 以及

$$g_2^N|_{[\frac{1}{N+2},\frac{1}{N+1}]}(t) = g_2^{N-1}(\frac{t}{1-t}) = \frac{(N+2)\frac{t}{1-t}-1}{(N+3)\frac{t}{1-t}-1} = \frac{(N+3)t-1}{(N+4)t-1},$$

即为所求。 □

我们首先考虑 $N=0$ 的情形。

引理 3.11. 设 $k \in \mathbb{Z}$。则

$$\frac{1}{4}\|g_1^k\|_{S_{BS(1,2)}} \leq \|g_1^k\|_{S_{G_0}}$$

成立。

证明。由于 g_1^k 的词长仅取决于 $|k|$，我们不妨假设 $k \geq 0$。由引理 3.9，得 $M(f) \geq 2^k$。因此，由推论 3.7，得

$$\|g_1^k\|_{S_{G_0}} \geq \frac{1}{2}\log(\mathcal{C}(g_1^k)) \geq \frac{1}{2}\log(2^k) \geq \frac{1}{4}\log_2(2^k) = \frac{1}{4}k \geq \frac{1}{4}\|g_1^k\|_{S_{BS(1,2)}},$$

如所需。 □

命题 3.12。 设 $g \in \langle g_1, g_2\rangle$，且 $g_1^{-m}g_2^N g_1^n$ 是 g 在 $N \neq 0$ 下的标准形。那么我们有

$$\|g\|_{S_{G_0}} \geq \frac{1}{6C_2}\|g\|_{S_{BS(1,2)}} - \frac{D_2}{6C_2}.$$

证明。首先假设 $N > 0$。我们断言

$$D(g) \geq N2^n + 2 \tag{3.1}$$

成立。我们先注意到

$$y = \frac{1}{N2^n+2}$$

属于 $B(g)$。由于

$$g_2^N\left(g_1^n\left(\left[0, \frac{1}{N2^n+2}\right]\right)\right) = g_2^N\left(\left[0, \frac{1}{N+2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

由引理 3.9 和 3.10 可知，我们有

$$\begin{aligned}(g_1^{-m}g_2^N g_1^n)|_{[0,\frac{1}{N2^n+2}]}(t) &= g_1^{-m}\left(\frac{\frac{2^n t}{2(2^n-1)t+1}}{1-N\left(\frac{2^n t}{2(2^n-1)t+1}\right)}\right)\\ &= g_1^{-m}\left(\frac{2^n t}{((2-N)2^n-2)\,t+1}\right)\\ &= \frac{\frac{2^n t}{((2-N)2^n-2)t+1}}{-2(2^m-1)\frac{2^n t}{((2-N)2^n-2)t+1}+2^m}\\ &= \frac{2^n t}{-(2^{m+1}-2^{n+1}+N2^{m+n})t+2^m}.\end{aligned}$$

另一方面，由于

$$g_2^N\left(g_1^n\left(\left[\frac{1}{N2^n+2},\frac{1}{N2^n+2-2^n}\right]\right)\right)=g_2^N\left(\left[\frac{1}{N+2},\frac{1}{N+1}\right]\right)=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$$

根据引理 3.9 和 3.10（及其证明），成立，因此我们有

$$\begin{aligned}(g_1^{-m}g_2^N g_1^n)|_{[\frac{1}{N2^n+2},\frac{1}{N2^n+2-2^n}]}(t) &= g_1^{-m}\left(\frac{(N+3)\frac{2^n t}{2(2^n-1)t+1}-1}{(N+4)\frac{2^n t}{2(2^n-1)t+1}-1}\right)\\ &= g_1^{-m}\left(\frac{(N2^n+2^n+2)t-1}{(N2^n+2^{n+1}+2)t-1}\right)\\ &= \frac{(2^{m+1}-1)\frac{(N2^n+2^n+2)t-1}{(N2^n+2^{n+1}+2)t-1}+(1-2^m)}{(2^{m+1}-2)\frac{(N2^n+2^n+2)t-1}{(N2^n+2^{n+1}+2)t-1}+(2-2^m)}\\ &= \frac{(N2^{m+n}+2^{m+1}+2^n)t-2^m}{(N2^{m+n}+2^{m+1}+2^{n+1})t-2^m}.\end{aligned}$$

直接计算可得

$$\frac{2^n t}{-(2^{m+1}-2^{n+1}+N2^{m+n})t+2^m}=\frac{(N2^{m+n}+2^{m+1}+2^n)t-2^m}{(N2^{m+n}+2^{m+1}+2^{n+1})t-2^m}$$

仅当 $t=1/((N2^n+2))=y$ 时成立。因此，y 属于 $B(g)$，且不等式 (3.1) 成立。

接下来，当 $N<0$ 时，我们声称

$$D(g)\geq |N|2^n+2 \tag{3.2}$$

成立。令 $M=-N>0$。为证明这一点，我们证明

$$y=\frac{M2^n+1}{M2^n+2}=\frac{-N2^n+1}{-N2^n+2}$$

通过观察可知，它属于 $B(g)$

$$g|_{\left[\frac{2^n(M-1)+1}{2^n(M-1)+2},\frac{2^nM+1}{2^nM+2}\right]},g|_{\left[\frac{2^nM+1}{2^nM+2},1\right]}.$$

由于这两个区间包含在 $[1/2,1]$ 中，我们有

$$g_1^n|_{\left[\frac{2^n(M-1)+1}{2^n(M-1)+2},\frac{2^nM+1}{2^nM+2}\right]}(t)=\frac{(2-2^n)t+(2^n-1)}{(2-2^{n+1})t+(2^{n+1}-1)},$$
$$g_1^n|_{\left[\frac{2^nM+1}{2^nM+2},1\right]}(t)=\frac{(2-2^n)t+(2^n-1)}{(2-2^{n+1})t+(2^{n+1}-1)}.$$

注意到我们有

$$g_1^n\left(\frac{2^n(M-1)+1}{2^n(M-1)+2}\right)=\frac{M}{M+1},\qquad g_1^n\left(\frac{2^nM+1}{2^nM+2}\right)=\frac{M+1}{M+2},\qquad g_1^n(1)=1.$$

类似于引理 3.10 的证明，我们有

$$g_2^{-M}|_{[\frac{M}{M+1},\frac{M+1}{M+2}]}(t)=\frac{t-1}{(M+4)t-(M+3)}$$

and

$$g_2^{-M}|_{[\frac{M+1}{M+2},1]}(t)=\frac{(M+1)t-M}{Mt+(1-M)}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}g_2^{-M}(g_1^n|_{\left[\frac{2^n(M-1)+1}{2^n(M-1)+2},\frac{2^nM+1}{2^nM+2}\right]}(t))&=\frac{\frac{(2-2^n)t+(2^n-1)}{(2-2^{n+1})t+(2^{n+1}-1)}-1}{(M+4)\frac{(2-2^n)t+(2^n-1)}{(2-2^{n+1})t+(2^{n+1}-1)}-(M+3)}\\&=\frac{2^nt-2^n}{(2^nM+2^{n+1}+2)t-(2^nM+2^{n+1}+1)}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}g_2^{-M}(g_1^n|_{\left[\frac{2^nM+1}{2^nM+2},1\right]}(t))&=\frac{(M+1)\frac{(2-2^n)t+(2^n-1)}{(2-2^{n+1})t+(2^{n+1}-1)}-M}{M\frac{(2-2^n)t+(2^n-1)}{(2-2^{n+1})t+(2^{n+1}-1)}+(1-M)}\\&=\frac{(2^nM-2^n+2)t-(2^nM-2^n+1)}{(2^nM-2^{n+1}+2)t-(2^nM-2^{n+1}+1)}.\end{aligned}$$

我们可以看出

$$g_2^{-M}(\frac{M}{M+1})=\frac{1}{3},\qquad g_2^{-M}(\frac{M+1}{M+2})=\frac{1}{2},\qquad g_2^{-M}(1)=1$$

成立。

因此，我们得到

$$\begin{aligned}g|_{\left[\frac{2^n(M-1)+1}{2^n(M-1)+2},\frac{2^nM+1}{2^nM+2}\right]}(t)&=\frac{\frac{2^nt-2^n}{(2^nM+2^{n+1}+2)t-(2^nM+2^{n+1}+1)}}{2(1-2^m)\frac{2^nt-2^n}{(2^nM+2^{n+1}+2)t-(2^nM+2^{n+1}+1)}+2^m}\\&=\frac{2^nt-2^n}{(2^{m+1}+2^{n+1}+2^{m+n}M)t-(2^m+2^{n+1}+2^{m+n}M)}\end{aligned}$$

and

$$g|_{\left[\frac{2^nM+1}{2^nM+2},1\right]}(t) = \frac{(2^{m+1}-1)\frac{(2^nM-2^n+2)t-(2^nM-2^n+1)}{(2^nM-2^{n+1}+2)t-(2^nM-2^{n+1}+1)} + (1-2^m)}{(2^{m+1}-2)\frac{(2^nM-2^n+2)t-(2^nM-2^n+1)}{(2^nM-2^{n+1}+2)t-(2^nM-2^{n+1}+1)} + (2-2^m)}$$
$$= \frac{(2^{m+1}-2^n+2^{m+n}M)t-(2^m-2^n+2^{m+n}M)}{(2^{m+1}-2^{n+1}+2^{m+n}M)t-(2^m-2^{n+1}+2^{m+n}M)}.$$

If

$$\frac{2^nt-2^n}{(2^{m+1}+2^{n+1}+2^{m+n}M)t-(2^m+2^{n+1}+2^{m+n}M)}$$
$$= \frac{(2^{m+1}-2^n+2^{m+n}M)t-(2^m-2^n+2^{m+n}M)}{(2^{m+1}-2^{n+1}+2^{m+n}M)t-(2^m-2^{n+1}+2^{m+n}M)}$$

成立，则 $t=(2^nM+1)/(2^nM+2)$。因此， y属于 $B(g)$。由于 $M2^n+2=|N|2^n+2$, 不等式（3.2）成立。

现在我们估计 g 关于 S_{G_0}的词长。由于 $\|g\|^{S_{G_0}} = \|g^{-1}\|^{S_{G_0}}$成立，当 $N>0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|g\|_{S_{G_0}} = \frac{1}{2}(\|g\|_{S_{G_0}} + \|g^{-1}\|_{S_{G_0}}) &\geq \frac{1}{4}(\log \mathcal{C}(g) + \log \mathcal{C}(g^{-1})) \\ &\geq \frac{1}{4}\left(\log(N2^n+2) + \log(|-N|2^m+2)\right) \\ &\geq \frac{1}{4}(2\log(|N|) + n\log 2 + m\log 2) \\ &\geq \frac{1}{6}(\log(|N|) + n + m) \\ &\geq \frac{1}{6C_2}\|g\|_{S_{BS(1,2)}} - \frac{D_2}{6C_2}\end{aligned}$$

根据推论 3.7、不等式 (3.1) 和 (3.2)，以及命题 3.8。如果 $N<0$，由于 $\mathcal{C}(g)$ $\geq |N|2^n+2$ 和 $\mathcal{C}(g^{-1}) \geq -N2^m+2$ 成立，则可得相同的不等式。□

现在我们可以证明主定理了。

定理 3.13。 鲍姆斯拉格–索利塔群 $BS(1,\ 2)$ 是 *Lodha–Moore* 群 G_0的非扭曲子群。

证明。令

$$\frac{1}{\lambda} = \min\{\frac{1}{4}, \frac{1}{6C_2}\}, k = \frac{D_2}{6C_2}.$$

那么，对于任意 $g \in \langle g_1, g_2\rangle$，我们有

$$\|g\|_{S_{G_0}} \geq \frac{1}{\lambda}\|g\|_{S_{BS(1,2)}} - k$$

根据引理 3.11 和命题 3.12。 □

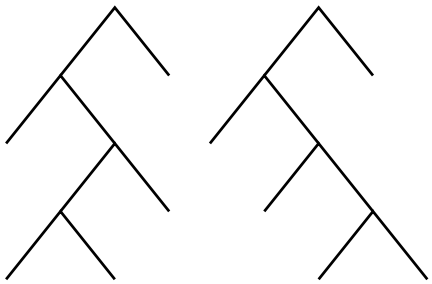

图 3。 $x_0x_1^2x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_0^{-1}$的约化对。

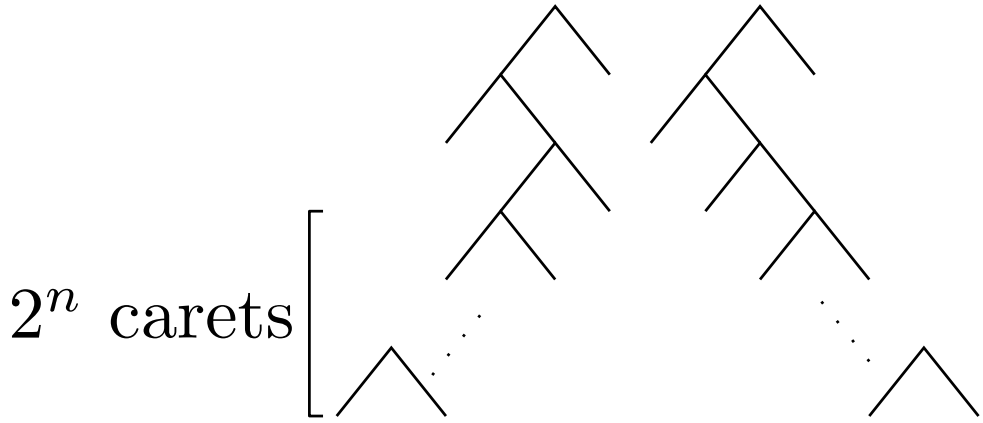

图 4。 a_n的约化对。

注记 3.14. 在 [17], 中，作者定义了群 G_0的一种推广，称为G_0（n）。由于 G_0 是 G_0（n）的子群，群 BS（1，2）也是 G_0（n）的子群。然而，据我们所知，目前尚不清楚 G_0（n）是否为 PPSL_2（$\mathbb{R}$）的子群。因此，定理 3.13 的证明无法直接推广到G_0（n）。

4. F 在 G_0中是扭曲的

与上一节不同，这里我们将 $F < G_0$ 的元素视为二叉树对。回想一下，利用二叉树，其词长可以通过小树枝的数量来估计（定理 2.1）。通过分析一族特定的元素，我们得到如下结果：

定理 4.1. 群 F 在 G_0中至少是指数扭曲的。

证明。令 $a_n = y_{010}^n(x_0x_1^2x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_0^{-1})y_{0111}^{-n}y_{010}^{-n}y_{011}^n$。图 3 展示了 $x_0x_1^2x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_0^{-1}$ 的约化对。通过归纳法可知， a_n 属于 F，且 $N(a_n) = 2^n+3$。图 4 描绘了 a_n 的约化对。利用这些关系

$$y_{010} = (x_0x_1)y_{10}(x_0x_1)^{-1}, y_{0111} = (x_0x_1x_0^{-1}x_1x_0^{-1})y_{10}(x_0x_1x_0^{-1}x_1x_0^{-1})^{-1}$$

and

$$y_{011} = (x_0x_1x_0^{-1})y_{10}(x_0x_1x_0^{-1})^{-1},$$

我们得到一个界

$$\|a_n\|_{S_{G_0}} \leq 30 + 4n.$$

结合定理 2.1，这表明 F 在 G_0 中是扭曲的。 □

注 4.2。对于 $G_0(n)$，类似的结果同样成立。事实上，同样的论证表明，Brown–Thompson 群 $F(n)$ 在 $G_0(n)$ 中是扭曲的。

Acknowledgements

作者受到 JSPS KAKENHI Grant number 24K22836 的资助。

参考文献

[1] J. M Alonso 和 M. R Bridson，《半双曲群》，伦敦数学会会刊第 3 辑 3（1995），第 1 期，56–114。[2] J.-C. Birget，《Richard Thompson 群与复杂度》，国际代数与计算杂志 14（2004），第 5–6 期，569–626。[3] C. Bleak、H. Bowman、A. G. Lynch、G. Graham、J. Hughes、F. Matucci 和 E. Sapir，《R. Thompson 群 V_n的中心化子》，群、几何与动力系统 7（2013），第 4 期，821–865。[4] C. Bleak、F. Matucci 和 M. Neunhöffer，《嵌入汤普森群 V 及 co$\mathcal{C}F$ 群》，伦敦数学会杂志，第 II 辑 94（2016），第 2 期，583–597。[5] J. Burillo、S. Cleary 和 M. I. Stein，《汤普森群F的推广的度量与嵌入》，美国数学会汇刊 353（2001），第 4 期，1677–1689。[6] J. Burillo，《拟等距嵌入汤普森群 F的子群》，代数杂志 212（1999），第 1 期，65–78。[7] J. Burillo 和 S. Cleary，《高维 Thompson 群的度量性质》，太平洋数学杂志 248（2010），第 1 期，49–62。[8] J. Burillo、S. Cleary、M. Stein 和 J. Taback，《汤普森群 T的组合与度量性质》，美国数学会汇刊 361（2009），第 2 期，631–652。[9] J. Burillo 和 M. Elder，《鲍姆斯拉格–索利塔群的度量性质》，国际代数与计算杂志 25（2015），第 5 期，799–811。[10] J. W. Cannon、W. J. Floyd 和 W. R. Parry，《Richard Thompson 群入门笔记》，数学教学（第 2 辑）42（1996），第 3–4 期，215–256。[11] S. Cleary，《某些有限表示群中 wreath 积的扭曲》，太平洋数学杂志 228（2006），第 1 期，53–61。[12] S. Cleary 和 J. Taback，《嵌入汤普森群 F的几何拟等距嵌入》，纽约数学杂志 9（2003），141–148。[13] G. Golan-Polak，《关于汤普森群 F的极大子群》，群、几何与动力系统 19（2025），第 3 期，797–860。[14] G. Golan-Polak 和 M. Sapir，《关于 R. Thompson 群 F的闭子群》，以色列数学杂志 267 （ 2025 ），第 1 期，35–84。

[15] V. S. Guba 和 M. V. Sapir，《关于 R. Thompson 群 F 及其他图群的子群》，数学文摘 190（1999），第 8 期，1077–1130。[16] V. Guba 和 M. V. Sapir，《图式群》，美国数学会回忆录 130（1997），第 620 号，viii+117。[17] Y. Kodama，《Lodha–Moore 群的一个 n-进推广》，代数通讯 51（2023），第 12 期，4997–5018。[18] Y. Kodama 和 A. Takano，《Lodha–Moore 群及其 n-进推广并非 SCY》，arXiv 预印本 arXiv:2501.07522。[19] L. Lifschitz，《Lodha–Moore 群的发散》，美国数学会会刊（即将出版），可见于https://doi.org/10.1090/proc/14987。[20] Y. Lodha，《一个由分段射影同胚构成的非均值型 F_∞ 群》，拓扑学杂志 13（2020），第 4 期，1767–1838。[21] Y. Lodha 和 J. T. Moore，《一个由分段射影同胚构成的非均值型有限表示群》，群、几何与动力系统 10（2016），第 1 期，177–200。[22] C. H. Röver，《有限表示单群的子群》，博士论文，1999。[23] C. Wladis，《循环子群准等距嵌入 Thompson–Stein 群》，国际代数与计算杂志 21（2011），第 1–2 期，365–385。[24] ，《汤普森群在 Thompson–Stein 群中是扭曲的》，太平洋数学杂志 250（2011），第 2 期，473–485。[25] Y. Wu 和 X. Chen，《汤普森群 F中 wreath 积的扭曲》，中国数学年刊，B辑 35（2014），第 5 期，801–816。[26] M. C. B. Zaremsky，《Lodha–Moore 群的 HNN 分解及拓扑应用》，拓扑分析杂志 8（2016），第 4 期，627–653。

児玉裕也 鹿儿岛大学理工学研究科，鹿儿岛县鹿儿岛市郡元1-21-35，邮编 890-0065，日本电子邮件地址： yuya@sci.kagoshima-u.ac.jp